ภาคผนวก ก.

ชุดการสอนแบบ KWDL วิชากลศาสตร์วิศวกรรม1 เรื่องระบบแรง

ก.6 ชุดการสอนแบบKWDLวิชากลศาสตร์วิศวกรรม 1 เรื่องระบบ

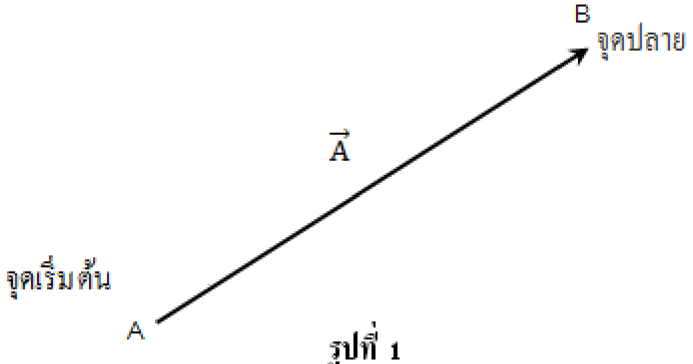
ใบความรู้
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 1

ระบบแรง (Force Systems)

1. การรวมแรง
2. เวคเตอร์
3. โมเมนต์
4. แรงคู่ควบ

1.1การรวมแรง(Composition of Forces)

แรงเป็นปริมาณทางเวคเตอร์ ซึ่งสามารถบวกลบกันได้ตามกฎเกณฑ์ของปริมาณทางเวคเตอร์ นั่นคือจะต้องคำนึงถึงขนาดและทิศทางของปริมาณทางเวคเตอร์ด้วย แรงที่มีขนาด A และมีทิศทาง ดังรูปที่ 1 จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}$ หรือ แทนด้วยรูปเป็นเส้นตรงมีความยาวเป็นสัดส่วนกับขนาดของแรง หัวลูกศรที่ปลายข้างหนึ่งเพื่อแสดงถึงทิศทางของแรง

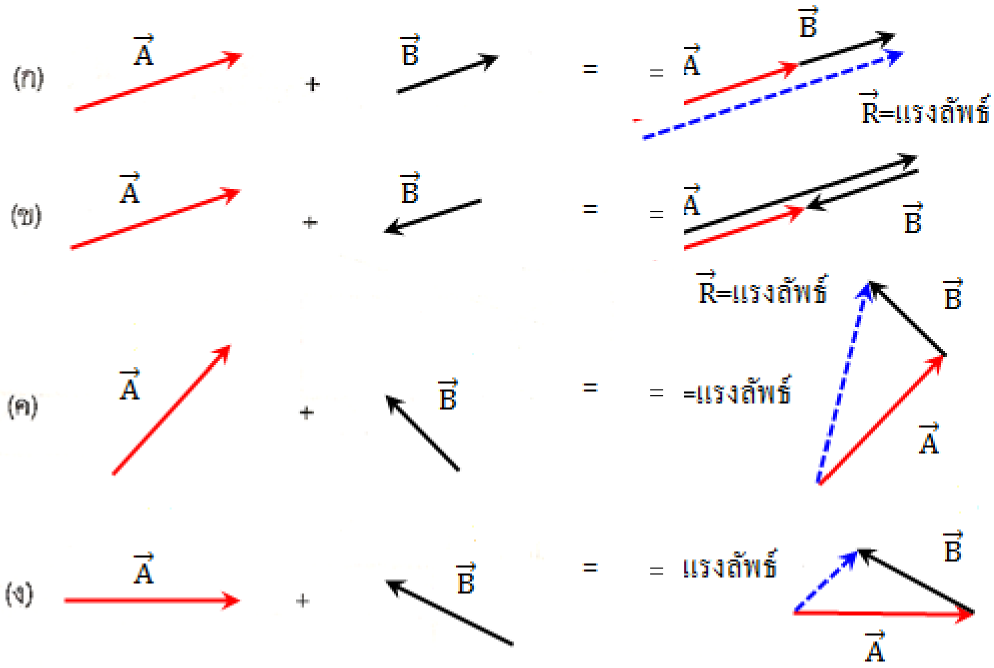


รูปที่ 1

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

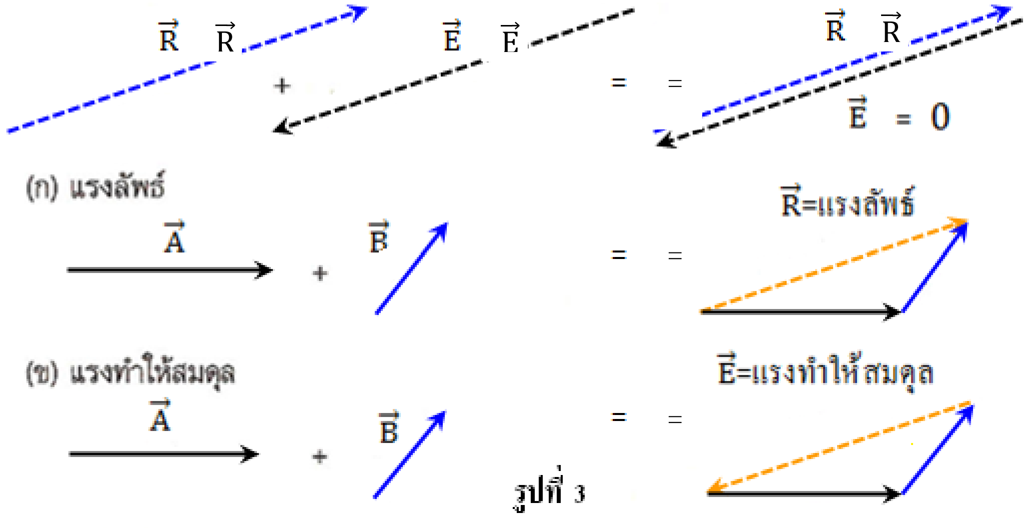
การบวกลบเวคเตอร์ แสดงด้วยรูปตัวอย่างดังต่อไปนี้



รู รูปที่ 2

จากตัวอย่างข้างบน $\vec{R}$ เป็นผลรวม(บวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับทิศทางของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$) หรือผลลัพธ์ (resultant)ของ$\vec{A}$ และ $\vec{B}$

หากแทน $\vec{R}$ ด้วยเวคเตอร์ $\vec{E}$ ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม จะมีผลทำให้ผลรวมของ $\vec{A}$, $\vec{B}$และ $\vec{E}$ เป็นศูนย์ เรียกเวคเตอร์ $\vec{E}$ ว่า ตัวทำให้สมดุล หรือ แรงทำให้สมดุล (equilibrium) ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

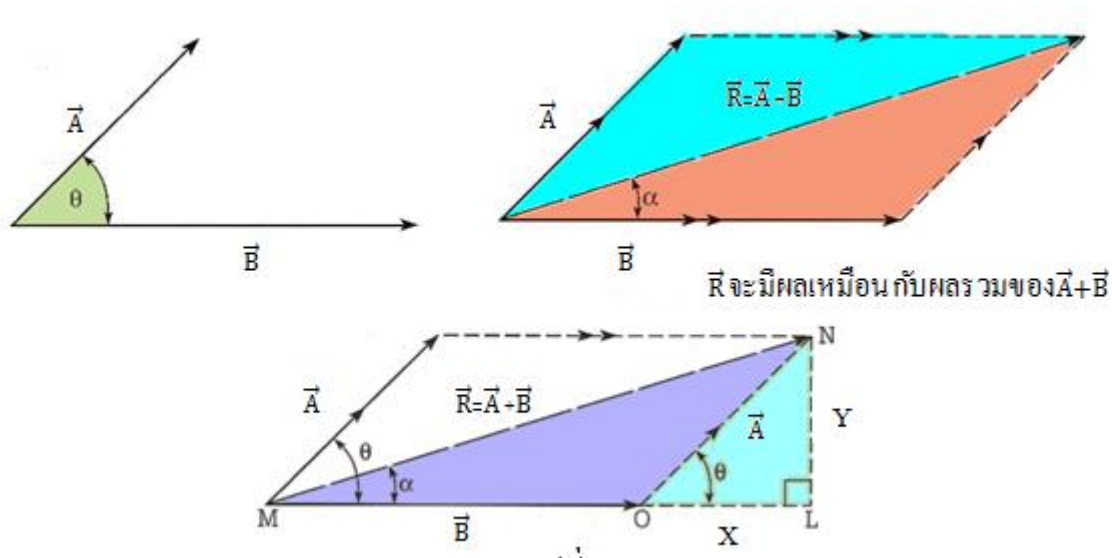
หมายเหตุ $\vec{E} = 0$ ในที่นี้มิได้หมายความว่าไม่มีเวคเตอร์ แต่หมายความว่าผลของเวคเตอร์ทั้งสองหักล้างกันพอดี

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 ฤหน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

1.1.1 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง(Law of parallelogram of forces)

ถ้าแรงสองแรงตัดกันที่จุดๆ หนึ่ง สามารถแทนทั้งขนาดและทิศทางด้วยด้านประชิดมุม α ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านทแยงที่ผ่านจุดตัดกันของสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นจะแทนทั้งขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ หรือ แรงรวม (resultant)ของแรงทั้งสองดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

$$R^2 = (B^2 + X^2) + Y^2$$
$$= B^2 + 2BX + X^2 + Y^2$$
$$= B^2 + 2BX + A^2$$
$$= B^2 + 2BACOS\theta + A^2$$
$$= A^2 + B^2 + 2ABCOS\theta$$

ดังนั้นขนาดของแรงลัพธ์ $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

……………........(2.1)

ทิศทางของแรงลัพธ์ ทำมุม α กับแรง $\vec{B}$ โดยที่

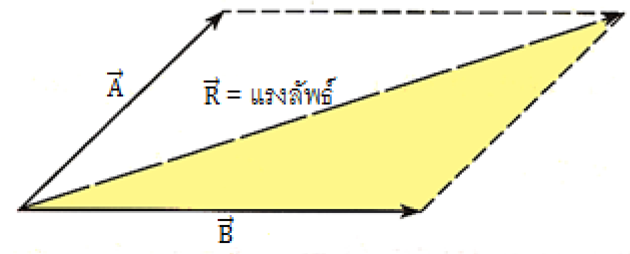
$$\tan\alpha = \frac{A\sin\theta}{B+A\cos\theta}$$

………………..(2.2)

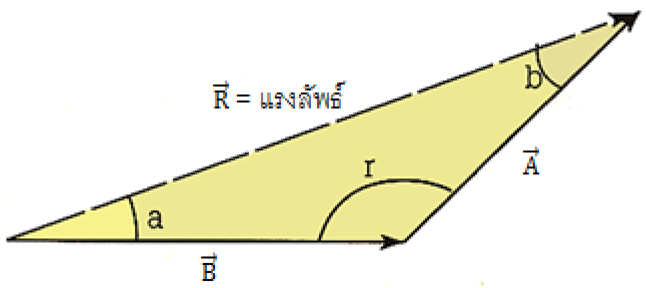
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

1.1.2 รูปสามเหลี่ยมแทนแรง (Triangle rule) หากเขียนรูปแทนแรง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในลักษณะที่หัวลูกศรต่อกันดังรูปที่ 5 (ข) ด้านที่สามของสามเหลี่ยมจะแทนทั้งขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ $\vec{R}$



(ก)สี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง



(ข)สามเหลี่ยมด้านขนานแทนแรง

รูปที่ 5

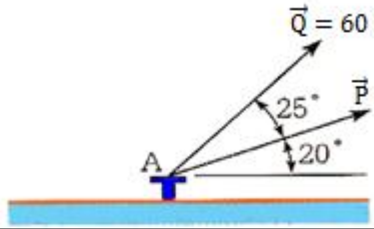
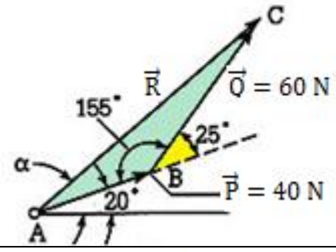
จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมแทนแรงก็คือครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรงนั้นเองขนาดของแรงลัพธ์ $\vec{R}$ จะหาได้จากกฎของ Cosine's Law หรือ Sine's Law

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos r} \qquad \text{.................................(2.3)}$$

(เนื่องจากมุม r มากกว่า 180°- θ จึงมีค่าติดลบ)

หรือ

$$\frac{R}{\sin r} = \frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} \qquad \text{.................................(2.4)}$$

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">ตัวอย่างที่ 1 จงหาแรงลัพธ์ของ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ ในรูปพร้อมทั้งทิศทางของ α
</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>$\vec{Q}$ = 60 N ทำมุม 25 องศากับ $\vec{P}$ และทำมุม 45 องศา กับแนวแกน x
$\vec{P}$ = 40 N ทำมุม 20 องศากับแนวแกน x</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>โจทย์ต้องการทราบแรงลัพธ์ $\vec{R}$ และทิศทาง α
ใช้สมการ $\vec{R} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCOS\theta}$ หรือ $\vec{R} = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABCOS\,r}$
ใช้สมการ $\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{A\sin\theta}{B+A\cos\theta}$
หรือ$\dfrac{R}{\sin r} = \dfrac{A}{\sin a} = \dfrac{B}{\sin b}$</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>①$\vec{R} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQCOS\,25°}$
$= \sqrt{40^2 + 60^2 + 2(40)(60)COS25°} = 97.7$ N
$\tan\,\alpha = \dfrac{Q\ \sin\ 25°}{P+Q\cos 25°} = \dfrac{60\ \sin\ 25°}{40+60\cos 25°} = 0.268$
$= \tan^{-1} 0.268$
$= 15\,°$
ดังนั้น $\alpha = 15\,° + 20° = 35°$
หรือ
② $\vec{R} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQCOS\,155°}$
$= \sqrt{40^2 + 60^2 - 2(40)(60)COS\,155°} = 97.7$ N
$\dfrac{R}{\sin r} = \dfrac{Q}{\sin q} \rightarrow \dfrac{97.7}{\sin 155} = \dfrac{60}{\sin q}$
$q = \sin^{-1}\frac{60\sin 155}{97.7} = 15°$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>คำตอบ 97.7 N ทิศทาง $\alpha = 35°$
สรุปขั้นตอนการหาคำตอบ
1.การหาแรงลัพธ์, 2. การหาทิศทาง</td></tr>
</table>

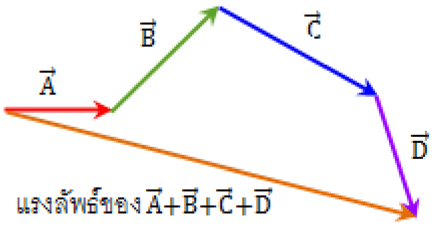
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 1

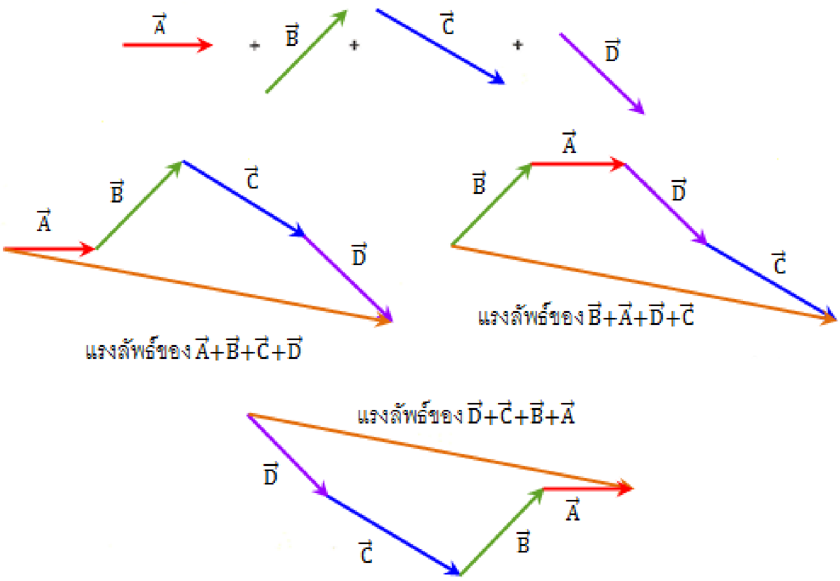
1.1.3 รูปหลายเหลี่ยมแทนแรง(Force polygon)

ในกรณีต้องการรวมแรงมากกว่า สองแรงขึ้นไป สามารถใช้รูปหลายเหลี่ยมแทนแรง โดยให้ด้านแต่ละด้านแทนขนาดและทิศทางของแต่ละแรง โดยยึดหลักนำหางของแรงหนึ่งต่อหัวของอีกแรงหนึ่งจนครบทุกแรงที่ต้องการ ด้านสุดท้ายทำให้เป็นรูปปิดนั้นคือผลรวมของแรงทั้งหมดนั้นก็คือแรงลัพธ์นั้นเอง



รูปที่ 6

การรวมแรงทั้ง 4 แรงข้างต้นจะได้ผลลัพธ์เหมือนกัน ไม่ว่าจะเรียงลำดับการรวมแรงใดก่อน-หลัง แต่ต้องให้ทิศทางของแรงทั้ง 4 วนรอบทิศทางเดียวกันหมด ดังรูปที่ 7.

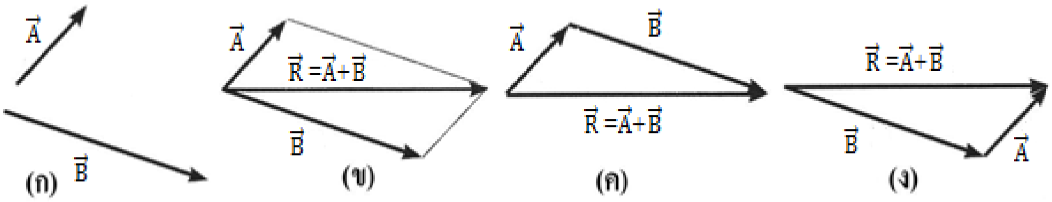


รูปที่ 7

ใบความรู้
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 1

1.2 การแตกแรงหรือแยกแรง (Resolution of Forces)

ในทางตรงกันข้ามกับการรวมแรง แรงใดๆ เมื่อเกิดเป็นแรงลัพธ์ $\vec{R}$ จะสามารถแตกแรงออกเป็นสองแรงย่อย (components) หรือหลายแรงได้โดยอาศัยหลักการของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือรูปสามเหลี่ยมแทนแรง โดยที่แรงย่อยของ $\vec{R}$ คือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังรูปที่ 8

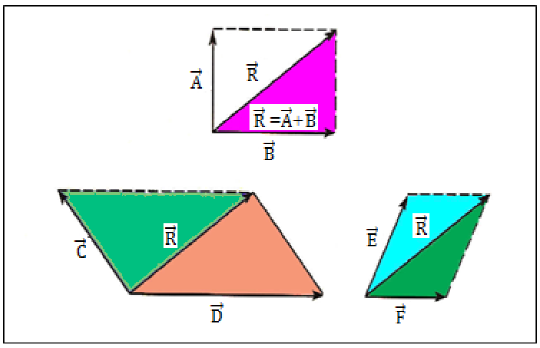


รูปที่ 8

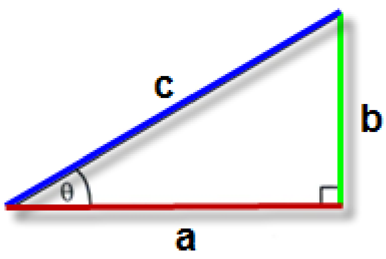
1.2.1 การแตกแรงออกเป็นสองแรงย่อยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน(Rectangular components)

แตกแรง $\vec{R}$ ออกเป็นแรงย่อยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เป็น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ หรือ $\vec{C}$ และ $\vec{D}$ ดังรูปที่ 9

$$\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}$$
$$\vec{R} = \vec{C}+\vec{D}$$
$$\vec{R} = \vec{E}+\vec{F}$$



รูปที่ 9



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ซึ่งอาศัย **ทฤษฎีพิธากอรัส**

รูปที่ 10

ใบความรู้

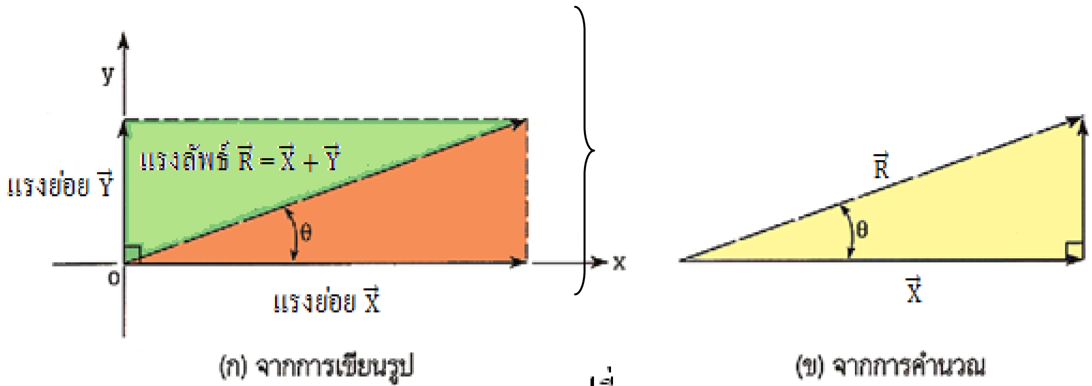
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

หากแตกแรง $\vec{R}$ ออกเป็น สองแรงย่อยตามแกน x และ y ดังรูปที่ 11 จะสามารถแตกแรงได้โดยอาศัยตรีโกณมิติ จากรูปของ **ทฤษฎีพิธากอรัส** สามารถเชื่อมโยงกับตรีโกณมิติเพื่อทำการแตกแรงในแนวแกน x และ y โดย (b=X)และ(a=Y)และ(c=R)ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c} = \frac{Y}{R} \\ \cos\theta &= \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c} = \frac{X}{R} \\ \tan\theta &= \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านประชิดมุม}\theta} = \frac{a}{b} = \frac{Y}{X} \end{aligned}\right\}$$

..................................(2.5)

จากรูปที่ 11 สามารถคำนวณการแตกแรงตามแนวแกน x และ y



รูปที่ 11

$$\cos\theta = \frac{X}{R}$$

$$X = R\cos\theta$$

..................................(2.6)

$$\sin\theta = \frac{Y}{R}$$

$$Y = R\sin\theta$$

กรณีที่ต้องการรวมแรงเพื่อหาแรงลัพธ์โดยการรวมแรงตามแนวแกน x และ y และสามารถหาได้โดยใช้**ทฤษฎีพิธากอรัส ดังนี้**

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$ ....(2.7)

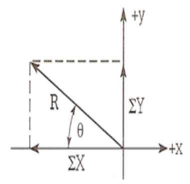
ใบความรู้

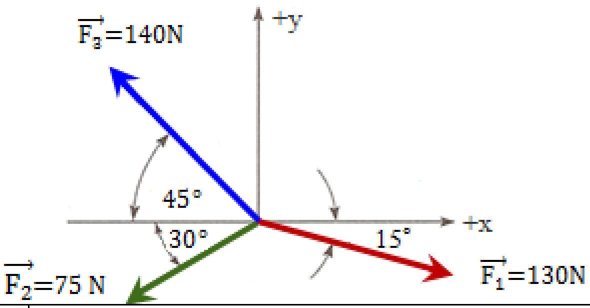
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 1

การหามุมของแรงตามแนวแกน x และ y สามารถหาได้โดยอาศัยตรีโกณมิติเมื่อเราแตกแรงตามแนวแกน x และ y จากแรงลัพธ์ $\vec{R}$ ออกมาแล้วนั้นก็หมายความว่าเราทราบค่า R,X,Y ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{Y}{R} \\
\theta &= \frac{\frac{Y}{R}}{\sin} = \sin^{-1}\frac{Y}{R} \\
\text{หรือ} \quad \cos\theta &= \frac{X}{R} \\
\theta &= \frac{\frac{X}{R}}{\cos} = \cos^{-1}\frac{X}{R} \\
\text{หรือ} \quad \tan\theta &= \frac{Y}{X} \\
\theta &= \frac{\frac{Y}{X}}{\tan} = \tan^{-1}\frac{Y}{X}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8)$$

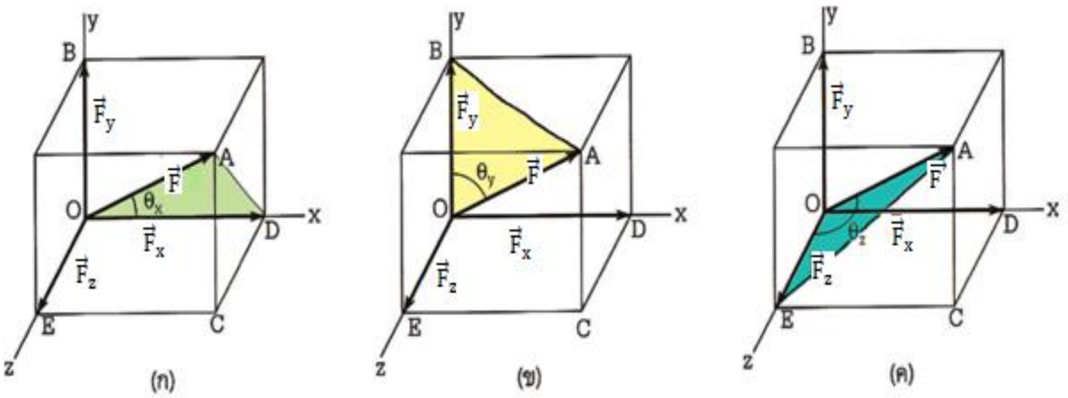


ใบความรู้	
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 1	
ตัวอย่างที่ 2 จงหาขนาดของแรงลัพธ์และทิศทางในรูป 	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1. $\vec{F_1}$=130N ทำมุม 15° กับแกน x , 2. $\vec{F_2}$=75 N ทำมุม 30°กับแกนx 3. $\vec{F_3}$=140N ทำมุม 45° กับแกนx
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	- แรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์ - แตกแรงทั้ง 3 ออกตามแนวแกน x และ y โดยใช้ตรีโกณมิติ - รวมแรงในแนวแกน x และ y - นำผลรวมในแนวแกน x และ มาหาแรงลัพธ์โดยใช้สมการ $R = \sqrt{\sum X^2 + \sum Y^2}$ หาทิศทางของแรงลัพธ์จาก $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	$F_1 =$ $X_1 = F_1 \cos 15° = 130 \cos 15° = 125.6$ N $Y_1 = F_1 \sin 15° = -130 \sin 15° = -33.6$ N $F_2 =$ $X_2 = F_2 \cos 30° = -75 \cos 30° = -65$ N $Y_2 = F_2 \sin 30° = -75 \sin 30° = -37.5$ N $F_3 =$ $X_3 = F_3 \cos 45° = -140 \cos 45° = -99$ N $Y_3 = F_3 \sin 45° = 140 \sin 45° = 99$ N รวมแรงในแต่ละแกน $\sum x = x_1 + x_2 + x_3 = 125.6+(-65)+(-99) = -38.4$ N $\sum y = y_1 + y_2 + y_3 = (-33.6)+(-37.5)+(99) = 27.9$ N แรงลัพธ์ $R = \sqrt{\sum x^2 + \sum y^2} = \sqrt{(-38.4)^2 + 27.9^2} = 47.5$ N $\theta = \tan^{-1}\frac{\sum y}{\sum x} = \tan^{-1}\frac{27.9}{(-38.4)} = 36°$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	$\vec{R}$= 47.5 N และ ทิศทางแรงลัพธ์= 36° 1. แตกแรงแต่ละแกน 2. รวมแรงแต่ละแกน 3. หาแรงลัพธ์ 4. หาทิศทาง

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

1.3 แรงในสามมิติ (Rectangular Components of a Force in Space)



รูปที่ 12

แรง $\vec{F}$ ซึ่งมีทิศทางและขนาดตามด้านทแยงของรูปกล่อง ทำมุม θ_x , θ_y , θ_z กับแกน x,y และ z ตามลำดับเมื่อเขียนในรูปของเวคเตอร์จะได้

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ เมื่อ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย(unit vector) ในแนวแกน x,y,z ตามลำดับ แรงย่อยของแรง $\vec{F}$ ในแต่ละแกนจะสามารถหาได้จาก

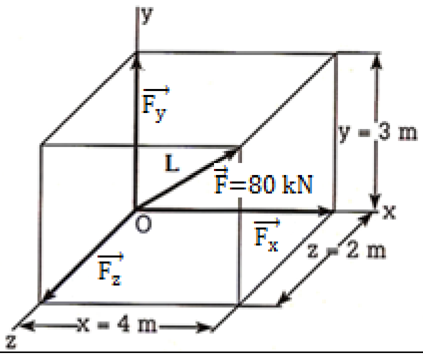
$$F_x = F\cos\theta_x,\ F_y = F\cos\theta_y,\ F_z = F\cos\theta_z \qquad \text{……………………………..(2.9)}$$

ค่า $\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z$ เรียกว่าโคซายน์ทิศทาง (direction cosines) ของแรง $\vec{F}$ เป็นค่าที่บอกทิศทางของแรงเกิดจากสมการ(2.9)

$$F = \frac{F_x}{\cos\theta_x} = \frac{F_y}{\cos\theta_y} = \frac{F_z}{\cos\theta_z} \qquad \text{……………………………..(2.10)}$$

ขนาดของแรง $\vec{F}$ สามารถหาได้จากสมการ

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2} \qquad \text{………….............................(2.11)}$$

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">ตัวอย่างที่ 3 จงหาแรงย่อยในแกน x,y,z ของแรง $\vec{F}$ ในรูปของเวคเตอร์แบบพิกัดฉาก(Cartesian)
</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรง F =80kN
2.ความยาวแกน x=4m, แกน y=3m และแกน z= 2m</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>โจทย์ให้แตกแรงในแนวแกน x,y,z ของแรง F ในรูปของเวคเตอร์แบบพิกัดฉาก
1.แตกแรงในแนวแกนx,y,z
2.หาความยาวของแรง F
3.แตกแรงตามแนวแกนจาก $\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = \frac{F}{L}$</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
ความยาวเส้นทแยง L $= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = 5.39$ m
ขนาดของแรงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับขนาดของเวคเตอร์ในแต่ละทิศทาง ดังนี้ $\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = \frac{F}{L}$
$\therefore\ F_x = \frac{F}{L}x = \frac{80}{5.39} \times 4 = 59.4$ kN
$\therefore\ F_y = \frac{F}{L}y = \frac{80}{5.39} \times 3 = 44.5$ kN
$\therefore\ F_z = \frac{F}{L}z = \frac{80}{5.39} \times 2 = 29.7$ kN
$\vec{F} = (59.4\vec{i} + 44.5\vec{j} + 29.7\vec{k})$ kN</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ $\vec{F} = (59.4\vec{i} + 44.5\vec{j} + 29.7\vec{k})$ kN
1. การหาความยาวของแรง F
2. การแตกแรงตามแนวแกนจาก $\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = \frac{F}{L}$(ขนาดของแรงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับขนาดของเวคเตอร์ในแต่ละทิศทาง)
3. คำตอบในรูปของพิกัดฉากต้องตอบในรูปแรงในแนวแกนx,y,z</td></tr>
</table>

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

1.3.1 การรวมแรงใน 3 มิติ

โดยแตกแรงย่อยในแกน x,y,z เสียก่อน แล้วจึงรวมแรงย่อยในแต่ละแกน และหาแรงลัพธ์ในที่สุด

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

โดยที่ $R_x = \sum F_x,\quad R_y = \sum F_y,\quad R_z = \sum F_z$ ……………………………………..(2.12)

ขนาดของแรงลัพธ์ คือ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ ……………………………………..(2.13)

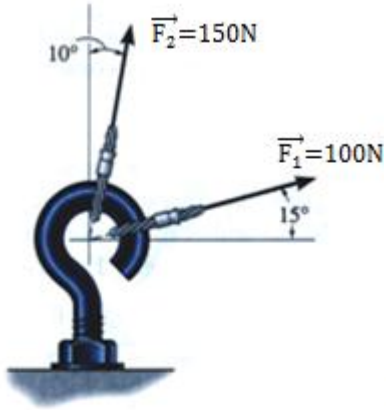
ทิศทาง $\cos\theta_x = \frac{R_x}{R},\quad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R},\quad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$ ……………………………………..(2.14)

ตัวอย่างที่ 4 จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ของ $\overrightarrow{F_1} = (200\vec{i}+250\vec{j}+(-150\vec{k}))$ N และ $\overrightarrow{F_2} = (2500\vec{i}+(-1500)\vec{j}+4000\vec{k})$ N	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	$\overrightarrow{F_1} = (200\vec{i}+250\vec{j}+(-150\vec{k}))$ N และ $\overrightarrow{F_2} = (2500\vec{i}+(-1500)\vec{j}+4000\vec{k})$ N
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ 1.รวมแรงในแต่ละแกน, หาขนาดแรงลัพธ์,หาทิศทางของแรงลัพธ์
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** รวมแรงย่อยในแต่ละแรง $R_x = \sum F_x = 200+2500 = 2700$ N $R_y = \sum F_y = 250+(-1500) = -1250$ N $R_z = \sum F_z = (-150)+4000 = 3850$ N ขนาดของแรงลัพธ์ $R = \sqrt{2700^2+(-1250)^2+3850^2}$ $= 4870$ N ทิศทางของแรงลัพธ์ $\cos\theta_x = \frac{R_x}{R}$ $\theta_x = \cos^{-1}\frac{R_x}{R} = \cos^{-1}\frac{2700}{4870} = 56.3°$ $\cos\theta_y = \frac{R_y}{R}$ $\theta_y = \cos^{-1}\frac{R_y}{R} = \cos^{-1}\frac{(-1250)}{4870} =$ 104.9° $\cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$ $\theta_z = \cos^{-1}\frac{R_z}{R} = \cos^{-1}\frac{3850}{4870} =$ 37.80° $R = 4870$ N , $\theta_x = 56.3°$, $\theta_y = 104.9°$, $\theta_z = 37.80°$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** $R = 4870$ N , $\theta_x = 56.3°$, $\theta_y = 104.9°$, $\theta_z = 37.80°$ การรวมแรงในแต่ละแกน,การหาขนาดแรงลัพธ์,การหาทิศทางของแรงลัพธ์

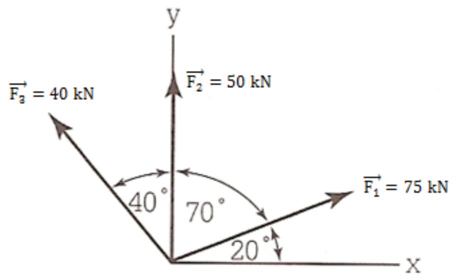
แบบฝึกหัด1-1และ 1-2

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

สกรูในรูป ถูกกระทำด้วยแรง 2 แรงจงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมด้านขนาน แทนแรงและ
วิธีสามเหลี่ยมด้านขนานแทนแรง



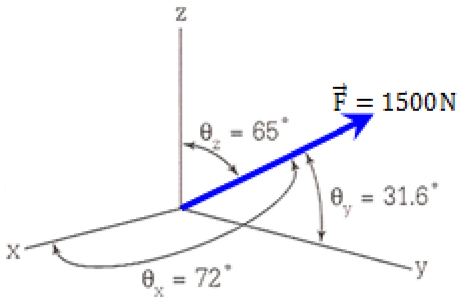
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

แบบฝึกหัด1-3	
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 1	
จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ของระบบแรงดังรูป 	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

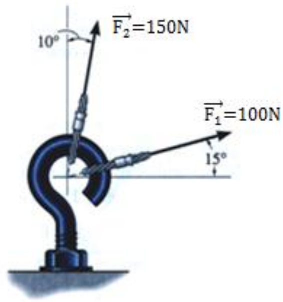
แบบฝึกหัดที่1-4

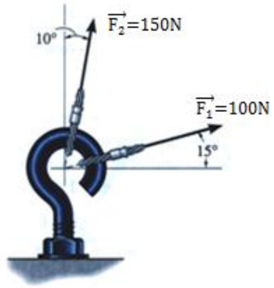
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1

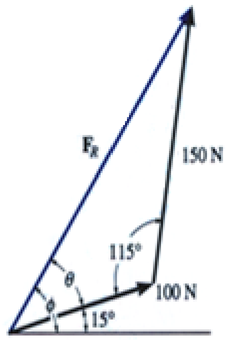
จงหาขนาดและทิศทางของแรง $\vec{F}$ ในรูป ตามแนวแกน x,y,z และเขียนแรง$\vec{F}$ในรูปเวคเตอร์



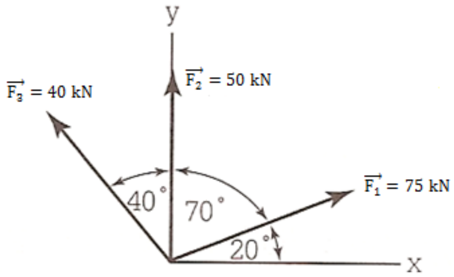
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

<table>
<tr><td colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัด1-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">สกรูในรูป ถูกกระทำด้วยแรง 2 แรงจงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1. $\overrightarrow{F_1}$=100N ทำมุม 15° กับแกน x
2. $\overrightarrow{F_2}$=150 N ทำมุม 10 ° กับแกน y</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>1.แรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์
2.หาขนาดของแรงลัพธ์จาก $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos r}$
3.หาทิศทางจาก $\tan\alpha = \frac{A\sin\theta}{B+A\cos\theta}$</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
$F_R = \sqrt{150^2 + 100^2 + 2(150)100\cos 65°} = 212.6\ N$
$\tan\alpha = \frac{A\sin\theta}{B + A\cos\theta}$
$= \frac{100\sin 65°}{150+100\cos 65°}$
$= 0.83$
$\alpha = \tan^{-1} 0.83$
$= 39.76°$
ทิศทางของแรงลัพธ์เมื่อเทียบกับแนวระดับ
$\emptyset = 39.76° + 15° = 54.76°$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ $\vec{R}$ = 212.6 N และ ทิศทางแรงลัพธ์ = 54.76°
1.การหาแรงลัพธ์จากทฤษฎีสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง
2.การหาทิศทางของแรงลัพธ์</td></tr>
</table>

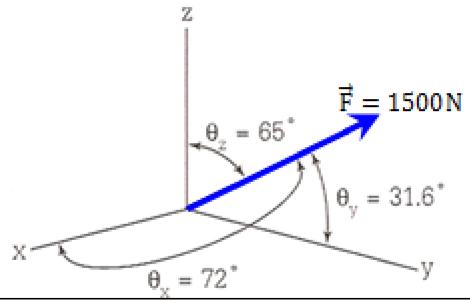
<table>
<tr><td colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัด1-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">สกรูในรูป ถูกกระทำด้วยแรง 2 แรงจงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ด้วยวิธีสามเหลี่ยมด้านขนานแทนแรง



</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1. $\vec{F_1}$=100N ทำมุม 15° กับแกน x
2. $\vec{F_2}$=150 N ทำมุม 10 ° กับแกนy</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>1.แรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์
2.หาขนาดของแรงลัพธ์จาก $\sqrt{P^2+Q^2-2PQ\cos r}$
3.หาทิศทางจาก Sine’ Law</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ หาขนาดของแรงลัพธ์โดยใช้ Cosine’s Law (สามเหลี่ยมแทนแรง)
$F_R = \sqrt{150^2+100^2-2(150)100\cos 115°} = 212.6\ \mathrm{N}$

หาทิศทางโดยใช้ Sine’s Law
$\frac{150}{\sin\theta} = \frac{212.6}{\sin 115°}$
$\sin\theta = \frac{150\times\sin 115}{212.6}$
$\theta = \sin^{-1} 0.63$
$= 39.76\,°$
ทิศทางของแรงลัพธ์เมื่อเทียบกับแนวระดับ
$\emptyset = 39.76° + 15° = 54.76°$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ $\vec{F_R}$ = 212.6 N และ ทิศทางแรงลัพธ์ = 54.76°
1.การหาแรงลัพธ์จากทฤษฎีสามเหลี่ยมแทนแรง
2.การหาทิศทางจาก Sine’s Law</td></tr>
</table>

ใบเฉลยแบบฝึกหัด1-3	
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 1	
จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ของระบบแรงดังรูป  	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1. $\overrightarrow{F_1}$=75kN ทำมุม 20° กับแกน x 2. $\overrightarrow{F_2}$=50kN ทำมุม 90 ° 3. $\overrightarrow{F_3}$ =40kN ทำมุม 40° กับแกน y
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาแรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์ 1.แตกแรง $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ ออกในแนวแกน x และ y 2.รวมแรงในแนวแกน x,y 3.หา $\vec{R}$ จากสมการที่(2.7) $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 4.หาทิศทางจากสมการ(2.8) $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** $\overrightarrow{F_1} = F_{1x} = 75\cos 20° = 70.47$ kN $F_{1y} = 75\sin 20° = 25.65$ kN $\overrightarrow{F_2} = F_{2x} = 0$ $F_{2y} = 50$ N $\overrightarrow{F_3} = F_{3x} = 40\sin 40° = (-25.71)$ kN $F_{3y} = 40\cos 40° = 30.64$ kN $\sum\overrightarrow{F_x} = 70.74 + (-25.71) = 44.76$kN $\sum\overrightarrow{F_y} = 25.65 + 50 + 30.64 = 106.29$kN $R = \sqrt{44.76^2 + 106.29^2} = 115.53$ kN $\theta = \tan^{-1}\frac{106.29}{44.76} = 67.16°$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** $\vec{R}$ = 115.53 kN และ ทิศทางแรงลัพธ์ = 67.16° 1.การแตกแรง $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ ในแนวแกน x,y 2.การรวมแรงในแนวแกน x,y 3.การหา $\vec{R}$ จากสมการที่(2.7) $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 4.การหาทิศทางจากสมการ(2.8) $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่1-4</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาขนาดและทิศทางของแรง $\vec{F}$ ในรูป ตามแนวแกน x,y,z และเขียนแรง$\vec{F}$ในรูปเวคเตอร์



</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรง $\vec{F}$ = 1500 N
2.$\theta x = 72°$, $\theta y = 31.6°$, $\theta z = 65°$</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>หาขนาดและทิศทางของแรง $\vec{F}$ ตามแนวแกน x,y,z และเขียนแรง $\vec{F}$ ในรูปเวคเตอร์
1.ใช้สมการที่ 2.9เพื่อหาแรง $\vec{F}$ ตามแนวแกน x,y,z ดังนี้
$F_x = F\cos\theta_x,\ F_y = F\cos\theta_y,\ F_z = F\cos\theta_z$
2.ใช้สมการที่ 2.11 หาขนาดของแรง $\vec{F}$ ดังนี้
$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
$F_x = 1500\cos 72° = 463.5$ N
$F_y = 1500\cos 31.6° = 1277.59$ N
$F_z = 1500\cos 65° = 633.9$ N
$\vec{F} = 46.35\vec{i} + 1277.59\vec{j} + 633.9\vec{k}$
$F = \sqrt{463.5^2 + 1277.59^2 + 633.9^2} = 1499.63$ N</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้

ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ
$F_x = 463.5$ N
$F_y = 1277.59$ N
$F_z = 633.9$N
$F = 1499.63$ N

1.การหาแรง $\vec{F}$ ตามแนวแกน x,y,z
2.การหาขนาดของแรง $\vec{F}$</td></tr>
</table>

ครั้งที่ 2

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

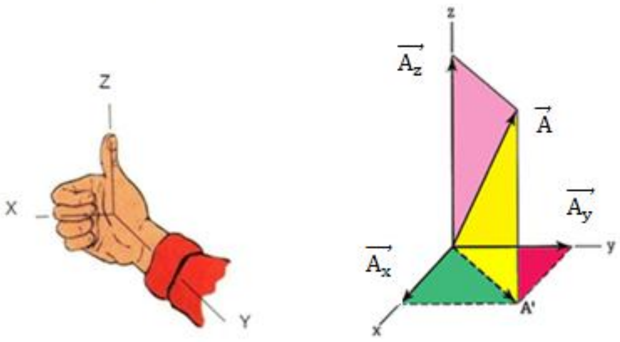
2. เวคเตอร์(Vectors)

2.1เวคเตอร์ เมื่อกล่าวถึงปริมาณเวคเตอร์จะเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง แรงเป็นปริมาณทางเวคเตอร์ ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแรงสามารถนำหลักการทางเวคเตอร์มาใช้ช่วยลดปัญหาการมองภาพใน 3 มิติ

2.1.1เวคเตอร์ย่อยในระบบพิกัดฉาก

เวคเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์ย่อยในระบบพิกัดฉากมือขวา (Right Handed Coordinate System) คือแกน x,y,z ดังรูปที่ 13

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z} \qquad \text{.................................(2.15)}$$



รูปที่ 30

2.1.2เวคเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector)

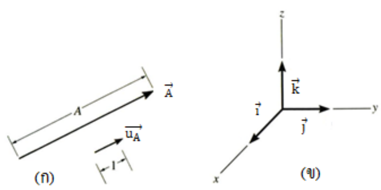
รูปที่ 13

หมายถึง เวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับหนึ่ง ดังนั้น ถ้าเวคเตอรหนึ่งหน่วยของเวคเตอร์ $\vec{A}$ คือ $\vec{u_A}$ และ A เป็นขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ **ดังนั้น**

$$\vec{u_A} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad \text{.................................(2.16)}$$

หรือ เวคเตอร์ $\vec{A}$ = Au_A ....(2.17)

จะเห็นว่า A จะเป็นขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ในขณะที่ $\vec{u_A}$จะแสดงทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{A}$ และไม่มีหน่วย



รูปที่ 14

ดังรูปที่14(ก)

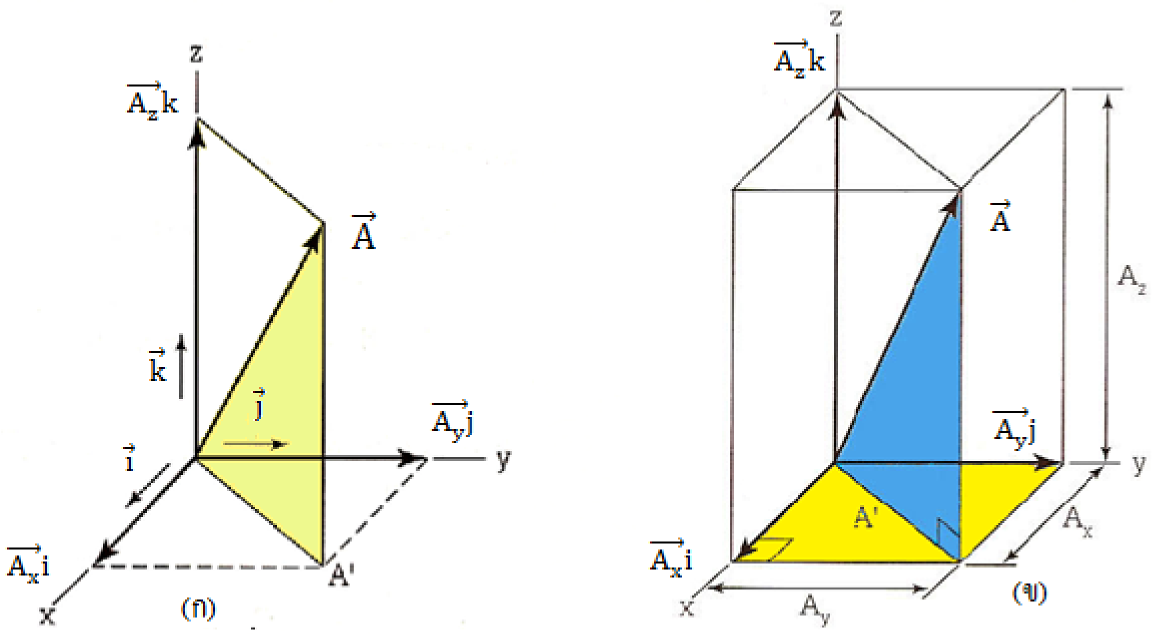
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 2	

ในระบบพิกัดฉาก เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน x,y,z คือ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ดังรูปที่ 14(ข) ดังนั้นเวคเตอร์ $\vec{A}$ สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากได้ดังนี้(รูปที่ 15(ก))

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \qquad \text{.....................................(2.18)}$$

2.1.3ขนาดของเวคเตอร์



รูปที่ 15

จากรูปที่ 15 (ข) ขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$ คือ

$$A = \sqrt{(A')^2 + A_z^2} \quad \text{แต่} \quad (A')^2 = A_x^2 + A_y^2$$

ดังนั้น $$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \text{...(2.19)}$$

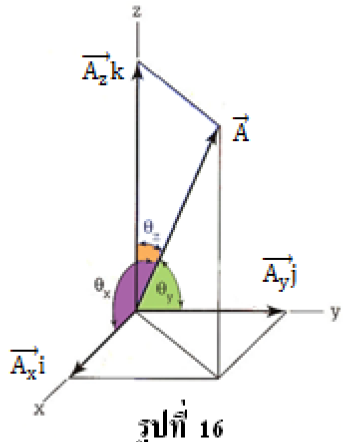
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 2

2.1.4ทิศทางของเวคเตอร์

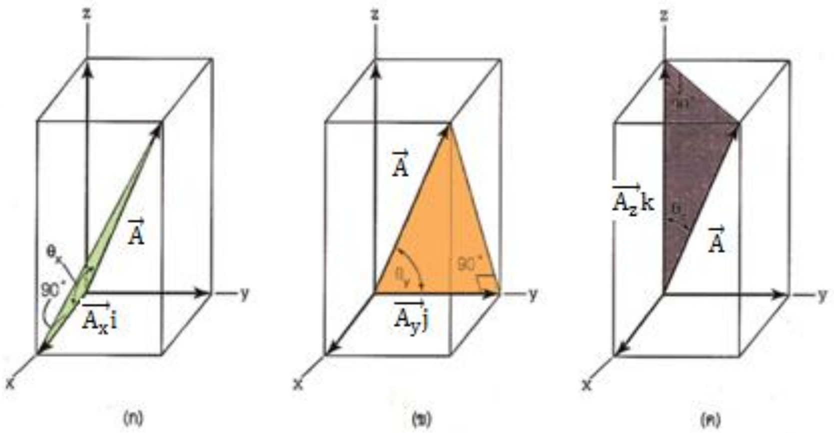
ทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{A}$ เมื่ออ้างอิงกับระบบพิกัดฉาก x,y,z ดังรูปที่16



รูปที่ 16

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{A},\quad \cos\theta_y = \frac{A_y}{A},\quad \cos\theta_z = \frac{A_z}{A} \qquad \text{.............................(2.20)}$$

ซึ่งเรียกว่าโคซายน์ทิศทาง(direction cosines)ดังรูปที่17



รูปที่ 17

จากสมการที่(2.16),(2.18)และ (2.20) เขียนเป็น $\vec{u_A}$ ได้ดังนี้

$$\vec{u_A} = \frac{A_x}{A}\vec{i} + \frac{A_x}{A}\vec{j} + \frac{A_x}{A}\vec{k} \qquad \text{..(2.21)}$$

หรือ $$\vec{u_A} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k} \qquad \text{..................................(2.22)}$$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

จากสมการ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\therefore \quad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ ....(a)

จากสมการ $\cos\theta_x = \frac{A_x}{A}, \quad \cos\theta_y = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\theta_z = \frac{A_z}{A}$

$$\left.\begin{aligned} A_X &= A\cos\theta_x \\ A_Y &= A\cos\theta_y \\ A_Z &= A\cos\theta_z \end{aligned}\right\}$$ นำไปแทนค่าใน(a)

$$A^2 = A^2\cos^2\theta_x + A^2\cos^2\theta_y + A^2\cos^2\theta_z$$

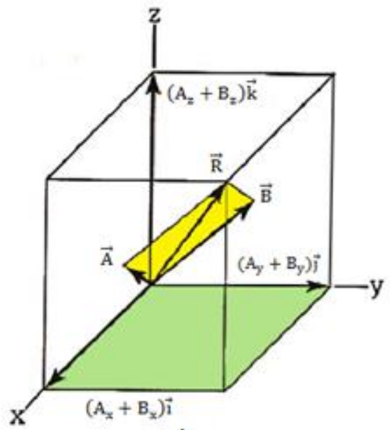
$$A^2 = A^2(\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z)$$

$$\frac{A^2}{A^2} = \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad \text{....................................(2.23)}$$

2.1.5การบวกและการลบเวคเตอร์

ถ้าเวคเตอร์ในระบบพิกัดฉากถูกเขียนในรูปของเวคเตอร์ย่อยในแต่ละแกน ดังนั้นการบวกหรือการลบของเวคเตอร์ ก็คือการบวกหรือลบเวคเตอร์ในแต่ละแกนนั้นเอง ดังรูปที่18



รูปที่ 18

ถ้า $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ และ $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ ดังนั้น เวคเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ จะมีองค์ประกอบเป็นผลรวมสเกลาร์ขององค์ประกอบ $\vec{i}$,$\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \end{aligned} \qquad \text{....................................(2.24)}$$

ใบความรู้

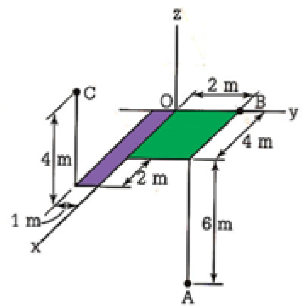
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

การลบเวคเตอร์จะพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของการบวกเวคเตอร์ ในรูปอย่างง่ายจะลบค่าสเกลาร์ตามลำดับขององค์ประกอบ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ของ $\vec{A}$ หรือ $\vec{B}$ ดังตัวอย่างเช่น

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$= (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \quad \text{.......................................(2.25)}$$

2.1.6เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง(Position Vectors)

หมายถึงเวคเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของจุดใดๆในที่ว่างหรือบริเวณเมื่อวัดอ้างอิงจากอีกจุดหนึ่ง



รูปที่ 19

เช่น ตำแหน่งจุด A ในรูปที่19 เมื่อวัดจากจุดเริ่มต้นในระบบพิกัดฉาก(x,y,z) คือ (4,2,-6) หรือ จุด B =(0,2,0) หรือ จุด C =(6,(-1),4) สัญลักษณ์ของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง คือ (r)สามารถหาได้จาก <u>**จุดสิ้นสุด-จุดเริ่มต้น**</u> เช่น

เวคเตอร์ระบุตำแหน่งของเส้น $\overrightarrow{AB}$ นั้นคือทิศทางจากจุด A ไปยังจุด B(Aเป็นจุดเริ่มต้นและBเป็นจุดสิ้นสุด)

ดังนั้น $\overrightarrow{r_{AB}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \quad \text{.....................................(2.26)}$$
$$= (0\text{-}4)\vec{i} + (2\text{-}2)\vec{j} + (0\text{-}(-6)\vec{k})$$
$$\therefore = (-4)\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k}$$

ถ้าในกรณีที่จุดเริ่มต้นเริ่มจาก (0,0,0) เวคเตอร์ระบุตำแหน่งจะเป็นตำแหน่งของจุดสิ้นสุด เช่น เวคเตอร์ระบุตำแหน่งของเส้น $\overline{OA}$ นั้นคือทิศทางจากจุด O ไปยังจุด A

ดังนั้น $\overrightarrow{r_{OA}} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_O}$

$$= (x_A - x_O)\vec{i} + (y_A - y_O)\vec{j} + (z_A - z_O)\vec{k}$$
$$= (4\text{-}0)\vec{i} + (2\text{-}0)\vec{j} + ((-6)\text{-}0)\vec{k}$$
$$\therefore \overrightarrow{r_{OA}} = (4,2,(-6))$$

เนื่องจากตำแหน่ง จุด O คือ (0,0,0)

ดังนั้น $\overrightarrow{r_{OA}} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$ ....(2.27)

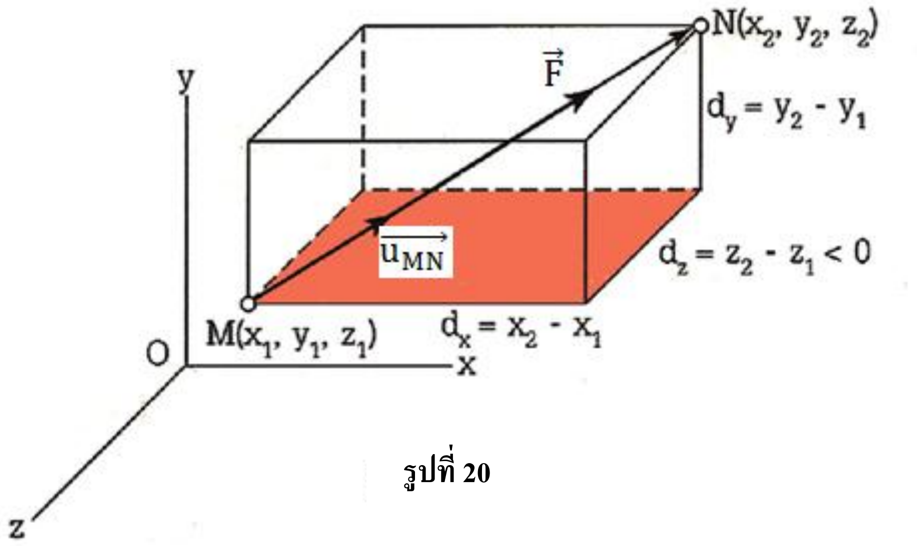
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

2.1.7เวคเตอร์ของแรงในทิศทางของเส้น

ในการเขียนเวคเตอร์ของแรงที่รู้ขนาดและทิศทางที่ผ่านเส้นที่ต่อระหว่าง 2 จุดใดๆ เราจะต้องเขียนเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของเส้นนั้น แล้วคูณด้วยขนาดของแรง **จะได้เวคเตอร์ของแรง** ดังรูปที่ 20 แรง $\vec{F}$ มีทิศทางผ่านจาก M ไป N

ขนาดของแรง $\vec{F} = F$



รูปที่ 20

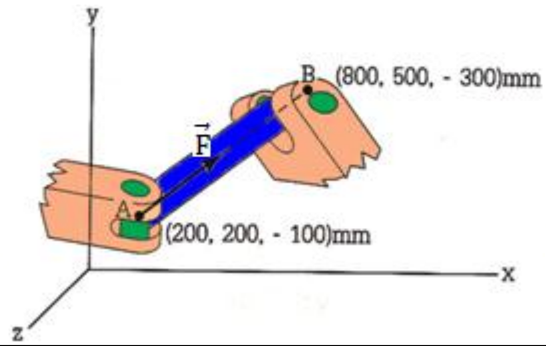
$$\overrightarrow{r_{MN}} = ((x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$= d_x i + d_y j + d_z k$$

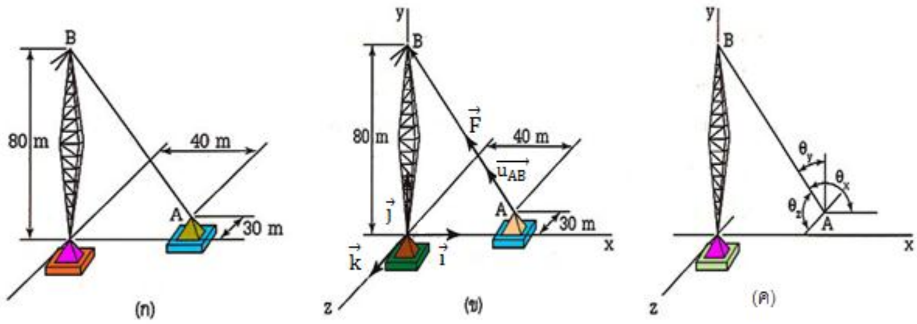
ขนาดของ $|\overrightarrow{MN}| = MN = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_Z^2} = d$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u_{MN}} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN}(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k})$ ……………………………..(2.28)

∴ เวคเตอร์ของแรง F ในทิศทางของ MN คือ

$\vec{F} = F\,\overrightarrow{u_{MN}} = \frac{F}{d}(d_x i + d_y j + d_z k)$ ....(2.29)

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">ตัวอย่างที่1 ถ้าแรง $\vec{F}$ มีขนาด 140 N กระทำที่จุด A ในแนว AB ดังรูป จงแสดง $\vec{F}$ ในรูปของพิกัดฉาก

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>แรง $\vec{F}$=140N,ตำแหน่งจุดA=(200,200,-100)และจุดB=(800,500,-300)</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>หาแรง $\vec{F}$ ในรูปพิกัดฉาก
1. หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง
2. หาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง
3. หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย
4. เขียนแรงในรูปพิกัดฉาก</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
$\overrightarrow{r_{AB}} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$
$= (800 - 200)\vec{i} + (500 - 200)\vec{j} + (-300 - (-100))\vec{k}$
$= (600)\vec{i} + (300)\vec{j} + (-200)\vec{k}$
$|r_{AB}| = \sqrt{600^2 + 300^2 + (-200)^2} = 700 \text{ mm}$
$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{600}{700}\vec{i} + \frac{300}{700}\vec{j} - \frac{200}{700}\vec{k}$
จากสมการที่ 2.29
$\vec{F} = F\,\overrightarrow{u_{AB}}$
$= 140\left(\frac{600}{700}\vec{i} + \frac{300}{700}\vec{j} - \frac{200}{700}\vec{k}\right)$
$= (120\vec{i} + 60\vec{j} - 40\vec{k})$ N</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ $= (120\vec{i} + 60\vec{j} - 40\vec{k})$ N
1.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง
2.การหาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง
3.การหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย
4.เขียนแรงในรูปพิกัดฉาก</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">ตัวอย่างที่ 2 ปลายบน B ของโครงสร้างเสาในรูปถูกโยงด้วยสายเคเบิลที่ยึดติดกับพื้นที่ A ถ้าแรงดึงในสายเคเบิ้ล คือ $\vec{F}$=2500 N จงเขียนแรง $\vec{F}$ ที่ A ในรูปของเวคเตอร์และทิศทางของแรง $\vec{F}$
</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรงดึงในสายเคเบิ้ล $\vec{F}$=2500N,2.ตำแหน่งจุดA=(40,0,(-30)) 3.ตำแหน่งจุด B=(0,0,80)</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>ต้องการทราบแรง $\vec{F}$ ที่จุด Aในรูปของเวคเตอร์ และ ทิศทางของแรง $\vec{F}$
1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของAB, 2.หาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{AB}$
3.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย, 4.เขียนแรง$\vec{F}$ในรูปของเวคเตอร์
5.หาทิศทาง</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
1. $\overrightarrow{r_{AB}} = (0-40)\vec{i} + (80-0)\vec{j} + (0-30)\vec{k} = (-40\vec{i} + 80\vec{j} + (-30)\vec{k})\mathrm{m}$
2. $|\overrightarrow{r_{AB}}| = \sqrt{(-40)^2 + 80^2 + (-30)^2} = 94.3\ \mathrm{m}$
3. $\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{(-40)}{94.3}\vec{i} + \frac{80}{94.3}\vec{j} + \frac{(-30)}{94.3}\vec{k}$
4. $\vec{F} = F\overrightarrow{u_{AB}} = 2500\ (\frac{(-40)}{94.3}\vec{i} + \frac{80}{94.3}\vec{j} - \frac{(-30)}{94.3}\vec{k})$
$= (-1060\vec{i} + 2120\vec{j} + (-795)\vec{k})\ \mathrm{N}$
5. $\cos\theta_x = \frac{A_x}{A},\ \theta_x = \cos^{-1}\frac{A_x}{A} = \cos^{-1}\frac{(-40)}{94.3} = 115.1^\circ$
$\cos\theta_Y = \frac{A_Y}{A},\ \theta_Y = \cos^{-1}\frac{A_Y}{A} = \cos^{-1}\frac{80}{94.3} = 32^\circ$
$\cos\theta_Z = \frac{A_Z}{A},\ \theta_Z = \cos^{-1}\frac{A_Z}{A} = \cos^{-1}\frac{(-30)}{94.3} = 71.5^\circ$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ $\vec{F} = (-1060\vec{i} + 2120\vec{j} - 795\vec{k})\ \mathrm{N}$
$\theta_x = 115.1^\circ$
$\theta_Y = 32^\circ$
$\theta_Z = 71.5^\circ$
1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของAB,2.หาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่งAB
3.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย 4.เขียนแรง$\vec{F}$ในรูปของเวคเตอร์
5.หาทิศทาง</td></tr>
</table>

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

2.1.8 ผลคูณสเกลาร์(Dot product or scalar product)

เป็นผลคูณแบบที่ใช้จุด (•) เป็นเครื่องหมายแทนการคูณระหว่างปริมาณเวคเตอร์ที่คูณกัน ใช้ในกรณีของการแตกเวคเตอร์เป็นเวคเตอร์ย่อยในทิศทางที่ขนานกับเส้นใดๆกับทิศทางที่ตั้งฉาก และใช้ในกรณีที่ต้องการหามุมระหว่างเส้น 2 เส้นที่ตัดกัน

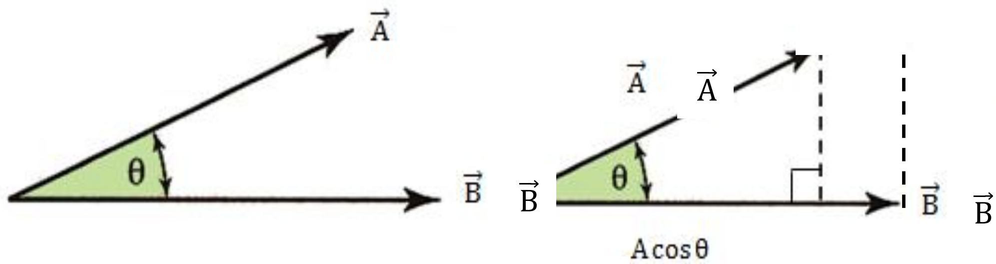
ผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad \text{……………………..(2.30)}$$

= ผลคูณของขนาดของเวคเตอร์ทั้งสองและคูณด้วยค่า cosine ของมุม θ ระหว่างเวคเตอร์ทั้ง

สองดังรูป ที่ 21 และปริมาณที่ได้จากผลคูณจะเป็นปริมาณทางสเกลาร์ มีหน่วยเท่ากับผลคูณ

ของหน่วยของเวคเตอร์ทั้งสอง



รู รูปที่ 21

กฎการใช้งาน (Laws of Operation)

1. กฎการสลับที่(Communative law)
   $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2. กฎการคูณกับปริมาณทางสเกลาร์(Associative law)
   $a(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (a\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (a\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})a$

3. กฎการกระจาย(Distributive law)
   $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

ผลคูณสเกลาร์ในระบบพิกัดฉาก

ในระบบพิกัดฉากที่มีเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ผลคูณสเกลาร์ของปริมาณเหล่านี้จะเป็นดังนี้

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$$

ดังนั้น
$$\left.\begin{aligned} \vec{i}\cdot\vec{i} &= 1 \\ \vec{j}\cdot\vec{j} &= 1 \\ \vec{k}\cdot\vec{k} &= 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} &= 0 \\ \vec{i}\cdot\vec{k} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.30)$$

$$\vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$

ถ้าเขียนเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในรูปของพิกัดฉากเมื่อคูณกันแบบสเกลาร์จะได้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$
$$= A_xB_x(\vec{i}\cdot\vec{i}) + A_xB_y\cancel{(\vec{i}\cdot\vec{j})} + A_xB_z\cancel{(\vec{i}\cdot\vec{k})}$$
$$+ A_yB_x\cancel{(\vec{j}\cdot\vec{i})} + A_yB_y(\vec{j}\cdot\vec{j}) + A_yB_z\cancel{(\vec{j}\cdot\vec{k})}$$
$$+ A_zB_x\cancel{(\vec{k}\cdot\vec{i})} + A_zB_y\cancel{(\vec{k}\cdot\vec{j})} + A_zB_z(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

ดังนั้น

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.32)$$

การประยุกต์ใช้งาน

เราสามารถใช้ผลคูณสเกลาร์ในการหาค่าต่างๆ ดังนี้

1.หาค่ามุมระหว่าง 2 เวคเตอร์ที่ตัดกัน ถ้าเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตัดกันเป็นมุม θ

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

หรือ
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\left(\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\right)\left(\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.33)$$

โดยที่ $0° \le \theta \le 180°$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

2.หาเวคเตอร์ย่อยในแนวขนานและแนวตั้งฉากกับเส้นใดๆ

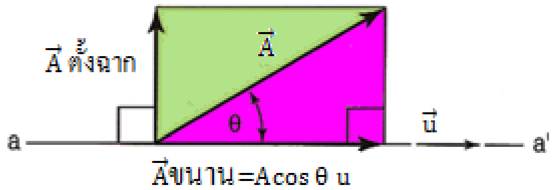
ถ้าเวคเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุม θ กับเส้น aa' ดังรูปที่ 22 เวคเตอร์ย่อยของที่ $\vec{A}$ ขนานกับเส้น aa' คือ

$\vec{A}$ ขนาน = $A\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{u}$ ……………………………………(2.34)

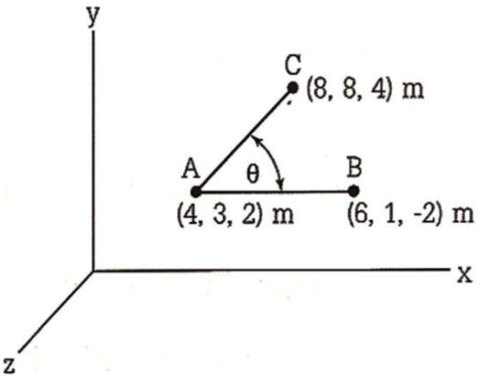
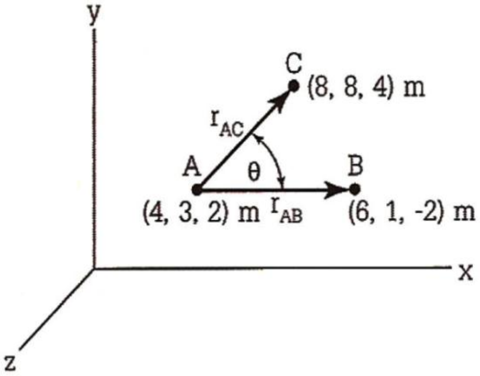
โดย $\vec{u}$ = เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว aa'

เวคเตอร์ย่อยของ $\vec{A}$ ในแนวตั้งฉากกับ aa' คือ

$\vec{A}$ ตั้งฉาก = $\vec{A}$-$\vec{A}$ขนาน = $\sqrt{A^2 + A^2_{\text{ขนาน}}}$ ...…………………………………(2.35)



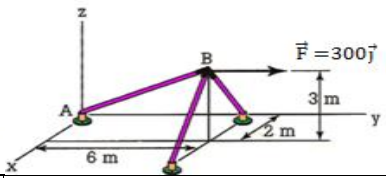
รูปที่ 22

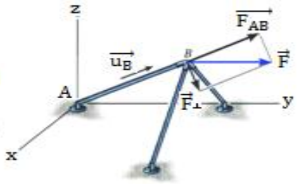
ใบความรู้	
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 2	
ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่ามุม θ ระหว่างเส้น AB และ AC ในรูป  	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.ตำแหน่งจุดA=(4,3,2),2.ตำแหน่งจุดB=(6,1,(-2)) 3.ตำแหน่งจุด C=(8,8,4)
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	ต้องการทราบมุม θ ระหว่างเส้น AB และ AC 1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของ $\overrightarrow{r_{AB}}$ และ $\overrightarrow{r_{AC}}$ 2.หาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{AB}}$ และ $\overrightarrow{r_{AC}}$ 3.หามุม
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** 1. $\overrightarrow{r_{AB}} = (6-4)\vec{i} + (1-3)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = (2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k})$m 2. $\overrightarrow{r_{AC}} = (8-4)\vec{i} + (8-3)\vec{j} + (4-2)\vec{k} = (4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k})$m 3. $\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 49$ m 4. $\lvert\overrightarrow{r_{AC}}\rvert = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2} = 6.71$ m 5. นำ $\overrightarrow{r_{AB}} \cdot \overrightarrow{r_{AC}}$ = [2×4] + [(-2)×5)] + [(-4) × 2] = -10 m 6.จากสมการที่ 2.33 $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{r_{AB}} \cdot \overrightarrow{r_{AC}}}{\lvert r_{AB}\rvert \lvert r_{AC}\rvert} = \frac{-10}{(4.9)(6.71)} = -0.304$ $\theta = \cos^{-1}(-0.304) = 107.7°$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** 107.7° 1.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง 2.การหาขนาดของเวคเตอร์ 3.การหามุม θ 4.การคูณปริมาณสเกลาร์

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

ตัวอย่างที่4 แรง$\vec{F}$=(300j)N กระทำที่จุด B ดังรูป จงหาขนาดของแรงย่อยของ $\vec{F}$ในแนวขนานและตั้งฉากกับ AB





Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F}$=300j,2.ตำแหน่งจุดB=(2,6,3)
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	ต้องการหาแรง $\vec{F}$ ในแนวขนานและตั้งฉากกับAB 1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของ$\overrightarrow{r_{AB}}$ 2.หาขนาดของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AB}}$ 3.หาแรง$\vec{F}$ ในแนวขนานAB จาก $\vec{F}\cdot\overrightarrow{u_{AB}}$ 4.หาแรง$\vec{F}$ ในแนวตั้งฉากกับAB จาก $\vec{F}-\overrightarrow{F_{AB}}$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** 1. $\overrightarrow{r_{AB}} = (2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k})m$ 2. $\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert = \sqrt{2^2+6^2+3^2} = 7\ m$ 3. $\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{2}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}+\frac{3}{7}\vec{k} = 0.286\vec{i}+0.857\vec{j}+0.429\vec{k}$ 4.ขนาดของแรงย่อย $\vec{F}$ในแนวขนานกับ AB คือผลคูณสเกลาร์ระหว่าง$\vec{F}$และ$\overrightarrow{u_{AB}}$ $\overrightarrow{F_{AB}} = F\,\overrightarrow{u_{AB}} = (300\vec{j})(0.286\vec{i}+0.857\vec{j}+0.429\vec{k}) = (300\times 0.857)$ $= 257.1\ N$ 5.เขียนแรงย่อยF_{AB} ในรูปเวคเตอร์ดังนี้ $\overrightarrow{F_{AB}} = F_{AB}\cdot\overrightarrow{u_{AB}} = 257.1(0.286\vec{i}+0.857\vec{j}+0.429\vec{k})$ $= (73.5\vec{i}+220\vec{j}+110\vec{k})N$ 6.แรงย่อยของ$\vec{F}$ ที่ตั้งฉากกับAB = F-$\overrightarrow{F_{AB}} = (300\vec{j})-(73.5\vec{i}+220\vec{j}+110\vec{k})$ $= (-73.5\vec{i}+80\vec{j}-110\vec{k})N$ 7.ขนาดของ $\vec{F}$ ตั้งฉากกับ AB $=\sqrt{(-73.5^2)+80^2+(-110^2)} = 154.6\ N$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** ขนาดของแรงย่อย $\vec{F}$ในแนวขนานกับ AB=257.1N ขนาดของ $\vec{F}$ ตั้งฉากกับAB=154.6 N 1.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง,2.การหาขนาดของเวคเตอร์,3.การหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย,4.การคูณปริมาณสเกลาร์,5.การเขียนแรงในรูปเวคเตอร์,6.การหาแรงย่อยที่ตั้งฉาก,7.การหาขนาดของแรงที่ตั้งฉาก

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 2

4.8 ผลคูณเวคเตอร์(Cross product or vector product)

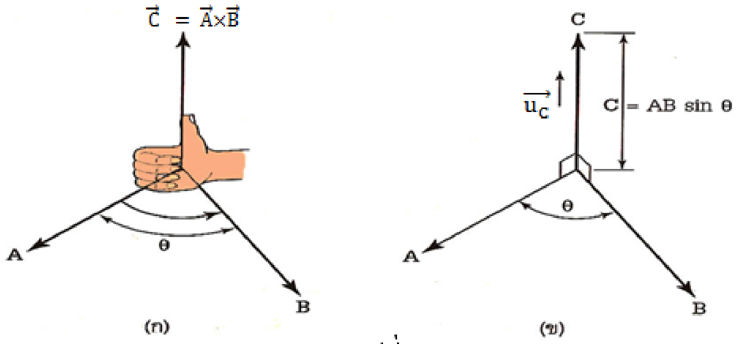
ใช้เครื่องหมายกากบาท (×)เป็นเครื่องหมายแทนการคูณระหว่างปริมาณเวคเตอร์ที่คูณกัน ซึ่งใช้ในโมเมนต์ของแรงในวิชากลศาสตร์ อัตราการหมุนของอนุภาคของไหล ตลอดจนแรงในอนุภาคประจุในสนามแม่เหล็ก

ความหมาย

ผลคูณเวคเตอร์ของเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

$$= AB\ \sin\theta\,\overrightarrow{u_c} \qquad \text{..(2.36)}$$



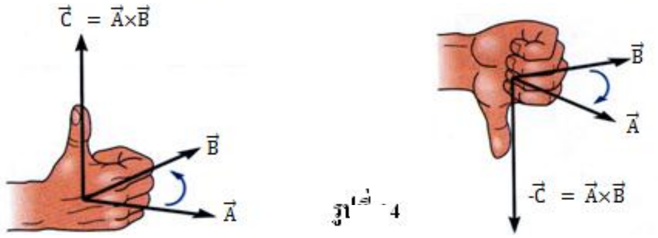
รูปที่ 23

กฎการใช้งาน(Laws of Operation)

1. กฎการสลับที่(Commulative law) จะใช้ไม่ได้คือ

   $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ แต่ $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

   เนื่องจากมีทิศทางที่ตรงกันข้าม ดังรูปที่ 24



รูปที่ 24

2. กฎการคูณกับปริมาณทางสเกลาร์ (Associat

   $a(\vec{A}\times\vec{B}) = (a\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(a\vec{B}) = (\vec{A}\times\vec{B})a$

3. กฎการกระจาย(Distributive law)

   $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B} + (\vec{A}\times\vec{D})$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 2

ผลคูณเวคเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ในระบบพิกัดฉากที่มีเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ผลคูณเวคเตอร์ของปริมาณเหล่านี้จะเป็นดังนี้

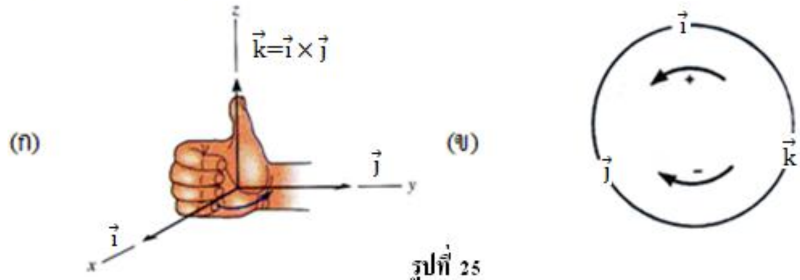
$$\vec{i} \times \vec{i} = (1)(1)\ \sin\ 0 \qquad = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = (1)(1)\ \sin\ 90° \quad \vec{k} = \vec{k}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = (1)(1)\ \sin\ 90°\ (-\vec{j}) = -\vec{j}$$

ดังนั้น

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{j} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}\right\}$$

…………….…………..(2.37)

เครื่องหมายหรือทิศทางของผลคูณเวคเตอร์ พิจารณาได้จากกฎมือขวาหรืออาจดูได้จากผังวงกลมในรูปที่ 25(ข)



รูปที่ 25

ถ้าเขียนเวคเตอร์ในรูปพิกัดฉาก เมื่อคูณกับเวคเตอร์จะได้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$= A_xB_x(\cancel{\vec{i} \times \vec{i}}) + A_xB_y(\vec{i} \times \vec{j}) + A_xB_z(\vec{i} \times \vec{k})$$

$$+ A_yB_x(\vec{j} \times \vec{i}) + A_yB_y(\cancel{\vec{j} \times \vec{j}}) + A_yB_z(\vec{j} \times \vec{k})$$

$$+ A_zB_x(\vec{k} \times \vec{i}) + A_zB_y(\vec{k} \times \vec{j}) + A_zB_z(\cancel{\vec{k} \times \vec{k}})$$

ดังนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j}$

$+(A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$ ……………………….(2.38)

สามารถเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนท์ ดังนี้ $\vec{A} \times \vec{B} =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ ....(2.39)

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

2.1.10ผลคูณผสมระหว่างสามเวคเตอร์(Mixed triple products)

เมื่อปริมาณเวคเตอร์ 3 ปริมาณคูณกันแบบผสมคือมีทั้งผลคูณสเกลาร์และผลคูณเวคเตอร์ เช่น $\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})$
ผลลัพธ์จะเป็นดังนี้

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=AB\ \sin\theta_{AB}\,\vec{u}_c=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

θ_{AB} เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

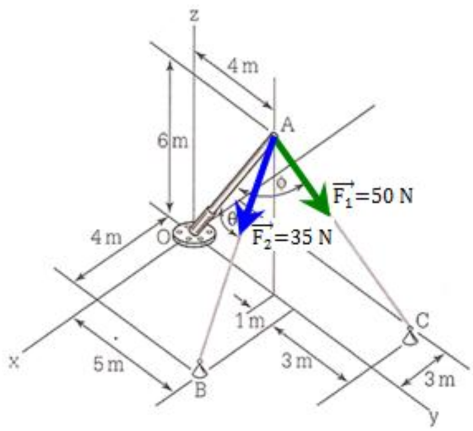
ดังนั้น $\vec{D}\cdot\vec{C} = DC\cos\theta_{DC}$

$$= D_x\vec{i} + D_y\vec{j} + D_z\vec{k}\ \cdot\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

θ_{DC} เป็นมุมระหว่าง $\vec{D}$ และ $\vec{C}$

นั่นคือ $\vec{D}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} D_x & D_y & D_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ ……………………………….(2.40)

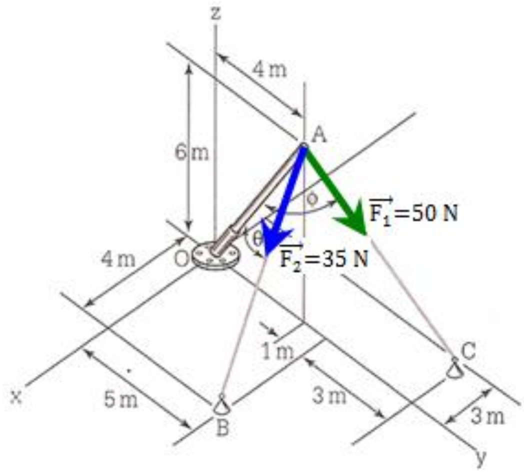
<u>**ผลที่ได้เป็นปริมาณทางสเกลาร์** การประยุกต์ใช้งานของผลคูณเวคเตอร์และผลคูณผสมจะแสดงในหัวข้อโมเมนต์ของแรง</u>

<table>
<tr><td colspan="2">แบบฝึกหัดที่2-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาขนาดของมุม θ และ ∅ ในรูป แล้วหาแรงย่อยของสายเคเบิลทั้งสองที่กระทำในแนวแกนของเสา OA

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนด
อะไรมาให้บ้าง</td><td>..........
....
....
..........</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถาม
อะไร
การวางแผนแก้
โจทย์ปัญหา</td><td>..........
....
....
..........</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการ
แก้โจทย์ปัญหา</td><td>..........
....
....
..........</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จาก
การแก้ปัญหา</td><td>..........
....
....
..........</td></tr>
</table>

ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่2-1

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2

จงหาขนาดของมุม θ และ Ø ในรูป แล้วหาแรงย่อยของสายเคเบิลทั้งสองที่กระทำในแนวแกนของเสา OA



K โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.$\overrightarrow{F_1} = 50\ \mathrm{N}, \overrightarrow{F_2} = 35\ \mathrm{N}$ 2.ขนาดของจุดต่างๆตามรูป
W โจทย์ถามอะไร	1.จงหาขนาดของมุม θ และ Ø 2. หาแรงย่อยของสายเคเบิ้ลทั้งสองที่กระทำในแนวแกนของเสา OA
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AB}}$และ$\overrightarrow{r_{AC}}$ 2.หาขนาด$\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert$และ$\lvert\overrightarrow{r_{AC}}\rvert$ 3.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AO}}$ 4.นำ $\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{r_{AO}}\rvert$ 5.หามุม θ จาก $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\right)\left(\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\right)}$$ 6.นำ $\lvert\overrightarrow{r_{AC}}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{r_{AO}}\rvert$ 7.หามุม Ø จากสมการในข้อ(5) 8.หาแรง $\overrightarrow{F_1}$ ที่กระทำต่อ OA 9.หาแรง $\overrightarrow{F_2}$ ที่กระทำต่อ OA

<table>
<tr><th colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่2-1(ต่อ)</th></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 2</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่งและขนาดของ $\overrightarrow{r_{AB}}$และ$\overrightarrow{r_{AC}}$ ดังนี้
$\overrightarrow{r_{AB}} = [(4-0)\vec{i} + (5-4)\vec{j} + (0-6)\vec{k}] = 4\vec{i} + 1\vec{j} + (-6)\vec{k}$
$|\overrightarrow{r_{AB}}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{53}\,\mathrm{m}$
$\overrightarrow{r_{AC}} = [(-3-0)\vec{i} + (8-4)\vec{j} + (10-6)\vec{k}] = (-3\vec{i}) + 4\vec{j} + (-6)\vec{k}$
$|\overrightarrow{r_{AC}}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}\,\mathrm{m}$
เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AO}} = (0-4)\vec{j} + (0-6)\vec{k} = (-4)\vec{j} + (-6)\vec{k} = \sqrt{52}\,\mathrm{m}$
$|\overrightarrow{r_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{r_{AO}}| = [4\vec{i} + 1\vec{j} + (-6)\vec{k}] \cdot [(-4)\vec{j} + (-6)\vec{k}]$
$=(4\times0)+(1\times(-4))+((-6)\times(-6)) = 32$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{r_{AB}}.\overrightarrow{r_{AO}}}{|r_{AB}| \cdot |r_{AO}|} = \frac{32}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{52}} = 0.609$$
$\theta = \cos^{-1} 0.609 = 52.44°$
$|\overrightarrow{r_{AC}}| \cdot |\overrightarrow{r_{AO}}| = [(-3)\vec{i} + 4\vec{j} + (-6)\vec{k}] \cdot [(-6)\vec{j} + (-6)\vec{k}]$
$=(-3\times0)+(4\times(-6))+((-6)\times(-6)) = 12$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{r_{AC}}.\overrightarrow{r_{AO}}}{|r_{AC}| \cdot |r_{AO}|} = \frac{12}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{52}} = 0.213$$
$\emptyset = \cos^{-1} 0.212 = 77.69°$
แรง F_1 ที่กระทำต่อ OA $= 50\cos 77.69 = 10.66$ N
แรง F_2 ที่กระทำต่อ OA$= 35\cos 52.44 = 21.548$ N</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้

ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ
$\theta = 52.44°$
$\emptyset = 77.69°$
แรง F_1 ที่กระทำต่อ OA $= 10.66$ N
แรง F_2 ที่กระทำต่อ OA$= 21.548$ N
1.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AB}}$และ$\overrightarrow{r_{AC}}$
2.การหาขนาด$|\overrightarrow{r_{AB}}|$และ$|\overrightarrow{r_{AC}}|$
3.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AO}}$
4.การคูณของ $|\overrightarrow{r_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{r_{AO}}|$
5.การหามุม θ จาก
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\right)\left(\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\right)}$$
6.การคูณ $|\overrightarrow{r_{AC}}| \cdot |\overrightarrow{r_{AO}}|$
7.การหามุม $\emptyset$ จากสมการในข้อ(5)
8.การหาแรง $\overrightarrow{F_1}$ ที่กระทำต่อ OA 9.การหาแรง $\overrightarrow{F_2}$ ที่กระทำต่อ OA</td></tr>
</table>

ครั้งที่ 3

ใบความรู้

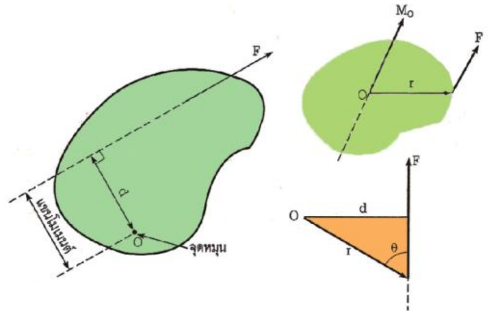
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

3 โมเมนต์(Moment)

3.1 โมเมนต์ คือ ความพยายามของแรงที่จะหมุนวัตถุรอบจุดหรือรอบแกน ๆ หนึ่งเป็นปริมาณทางเวคเตอร์

3.1.1 โมเมนต์ของแรง(Moment of a force)

โมเมนต์ของแรงใดๆ รอบจุดๆ หนึ่ง(หรือแรงรอบแกนที่ตั้งฉากกับจุดนั้น) มีค่าเท่ากับแรงคูณระยะทางที่ตั้งฉากจากจุดหรือแกนนั้นไปยังแนวแรงหรือเรียกว่า **แขนของโมเมนต์**



$$\overrightarrow{Mo} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{..(2.41)}$$

หรือเขียนขนาดเป็นปริมาณสเกลาร์

รูปที่ 26

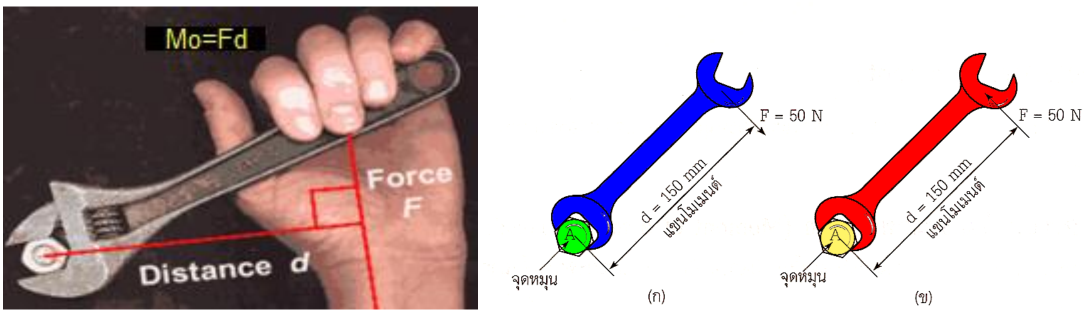
$$Mo = Fr\ \sin\theta = Fd \qquad \text{..(2.42)}$$

โดยที่ Mo = โมเมนต์ของแรงรอบจุด O หรือรอบแกนตั้งฉากกับหน้ากระดาษและผ่านจุด O ซึ่งเรียกว่าจุดหมุน หรือ แกนหมุน หรือจุดศูนย์กลางของโมเมนต์ (Center of moment) มีหน่วยเป็น $N \cdot m$

F = แรงมีหน่วยเป็น N

d = แขนของโมเมนต์มีหน่วยเป็น m

θ = มุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{r}$ และ $\vec{F}$



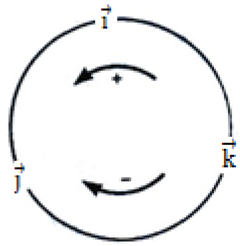
รูปที่ 27

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

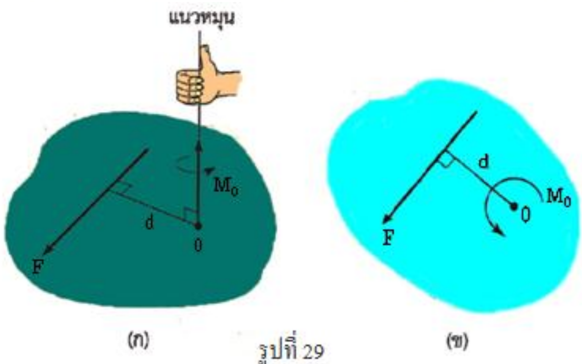
จากรูปที่ 27 โมเมนต์ของแรง F ในรูปที่ 27 (ก) และ (ข) ต่างก็มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางของการหมุนรอบจุด O ตรงกันข้ามคือตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิกา ตามลำดับ ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดเครื่องหมาย เพื่อบอกทิศทางของการหมุน คือ

หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็น + หรือ
หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น - หรือ
ใช้กฎมือขวาดังรูปที่ 29
หมายเหตุ โมเมนต์จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ
(ก)แรง F เป็นศูนย์
(ข)แรงF ผ่านจุดหมุนO (d=0)



รูปที่ 28

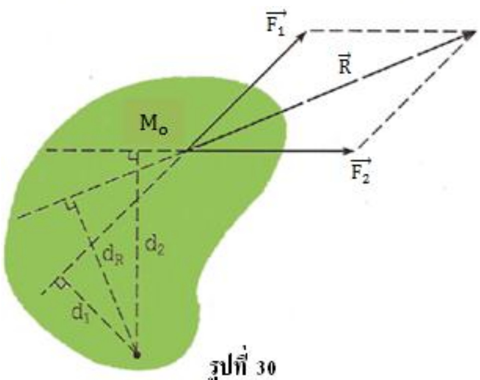
หรือใช้**กฎมือขวา** ดังรูปที่ 29



รูปที่ 29

3.1.2 ทฤษฎีของโมเมนต์ (Varignon's theorem or Principle of moments)

กล่าวว่า โมเมนต์ของแรงใดๆรอบจุดๆหนึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ของแรงย่อยของแรงนั้นรอบจุดเดียวกัน



รูปที่ 30

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

จากรูปที่ 30 โมเมนต์ของแรง R รอบจุด O มีค่า

$$\overrightarrow{M_o} = -\vec{R} \times \overrightarrow{dr} = [(F_1 \times d_1) + (F_2 \times d_2)]$$

ดังนั้น ถ้าแรง $\vec{F} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overrightarrow{F_n})$ โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบจุด O คือ

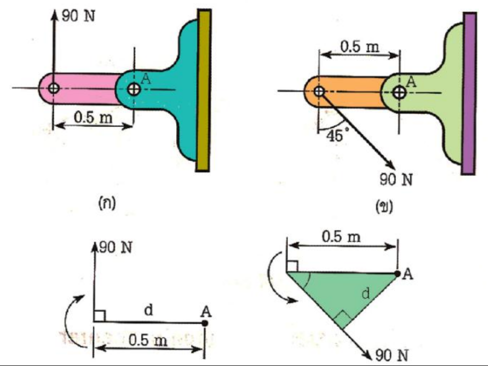
$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \ldots\ldots\ldots\ldots \overrightarrow{F_n})$$

$$= (\vec{r} \times \overrightarrow{F_1}) + (\vec{r} \times \overrightarrow{F_2}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\vec{r} \times \overrightarrow{F_n})$$

3.1.3 โมเมนต์เทียบเท่า(Equivalent moments)

ถ้าแรงสองแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน ทำให้เกิดโมเมนต์ขนาดเท่ากันรอบจุดเดียวกัน เราเรียก **โมเมนต์เทียบเท่า** ซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาโมเมนต์ของแรงรอบจุด A ในแต่ละกรณี

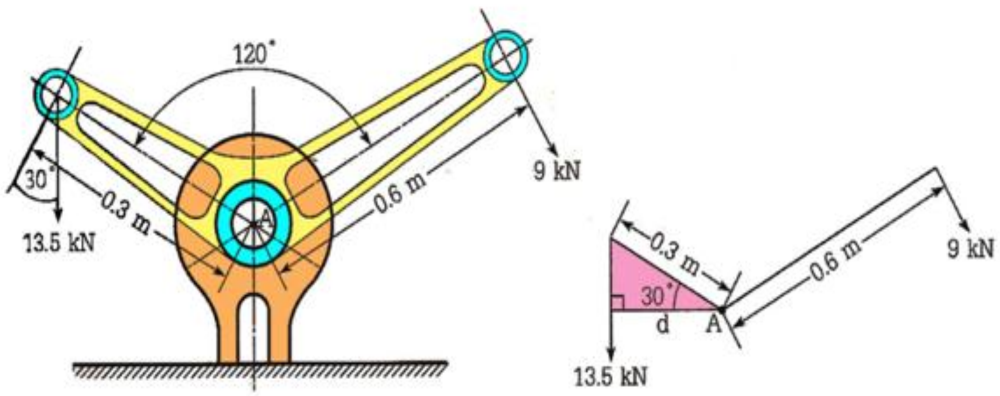


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	ก. F=90N และ แขนของโมเมนต์ = 0.5 m ข. F=90N ,แนวแรงทำมุมกับแกน x = 45°,ระยะจากจุดAไปถึงจุดเริ่มต้ ของแนวแรง = 0.5 m
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาโมเมนต์รอบจุด A ทั้งกรณี ก.และข. ก. หาโมเมนต์รอบจุดAจาก M = Fd ข. หาแขนโมเมนต์(d)แล้วหาโมเมนต์รอบจุด A จาก M = Fd
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** (ก) M = Fd โดยที่ F = 90 N, d = 0.5 $= 90 \times 0.5 = 45$N.m (ข) M = Fd โดยที่ F = 90 N, $d = 0.5 \sin 45°$ $= 90 \times 0.5\sin 45° = 31.8$ N.m
Lคำตอบที่ได้/ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	1.การหาโมเมนต์รอบจุด 2.การหาขนาดแขนของโมเมนต์

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

ตัวอย่างที่2 จงหาโมเมนต์ของแรงทั้งสองรอบจุด A



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง 9000 N , แขนโมเมนต์ = 0.6 m 2.แรง 13500 N, ระยะจากจุด A ถึงปลายแขน = 0.3 m
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาโมเมนต์รอบจุด A ทั้งกรณี ก.และ ข. ก. หาโมเมนต์รอบจุดAจาก $M = Fd$ ข. หาแขนโมเมนต์(d)แล้วหาโมเมนต์รอบจุด A จาก $M = Fd$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** (ก) $M = Fd$ โดยที่ $F = 9000$ N, $d = 0.6$ $= 9000 \times 0.6 = 5400$ N. m (ข) $M = Fd$ โดยที่ $F = 13500$ N, $d = 0.5 \sin 45°$ $= 13500 \times 0.3 \cos 30° = 3507$ N. r ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งสองรอบจุด A คือ $\sum M_A = M_{\text{ก}} + M_{\text{ข}} = (5400 - 3507) = 1890 N \cdot m$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** โมเมนต์รอบจุด A = 1890 N · m 1.การหาโมเมนต์รอบจุด,2.การหาขนาดแขนของโมเมนต์,3.การรวมโมเมนต์

ใบความรู้

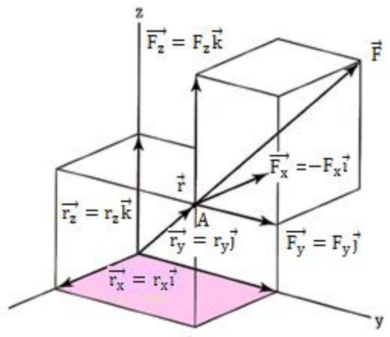
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

3.1.4 การเขียนโมเมนต์โดยใช้เวคเตอร์

การหาโมเมนต์ของแรงในสามมิติ สามารถใช้เวคเตอร์ในการหาโมเมนต์ซึ่งจะสะดวกกว่ามาก

3.1.4.1 โมเมนต์ของแรงรอบจุด

ค่าโมเมนต์รอบจุด O ของแรง $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ ที่กระทำ ณ ตำแหน่ง $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$ ดังรูปที่ 31



รูปที่ 31

จากสมการที่ 2.39 จะมีค่าดังนี้

$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad \text{.....(2.42)}$$

$$= (r_yF_z - r_zF_y)\vec{i} + (r_xF_z - r_zF_x)\vec{j} + (r_xF_y - r_yx)\vec{k} \qquad \text{.....(2.43)}$$

$$= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

เทคนิคในการทำความเข้าใจ

หา $M_x\vec{i} =$ ปิดคอลัมน์ $\vec{i}$ แล้วนำ $\vec{j}$และ$\vec{k}$ คูณไขว้กัน $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \text{[redacted]} & r_y & r_z \\ & F_y & F_z \end{vmatrix} = (r_yF_z - r_zF_y)\vec{i}$

หา $M_y\vec{j} =$ ปิดคอลัมน์ $\vec{j}$ แล้วนำ $\vec{i}$และ$\vec{k}$ คูณไขว้กัน $\begin{vmatrix} i & \text{[redacted]} & k \\ r_x & & r_z \\ F_x & & F_z \end{vmatrix} = (r_xF_z - r_zF_x)\vec{j}$

หา $M_z\vec{k} =$ ปิดคอลัมน์ $\vec{k}$ แล้วนำ $\vec{i}$ และ$\vec{j}$คูณไขว้กัน $\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & \text{[redacted]} \\ F_x & F_y & \end{vmatrix} = (r_xF_y - r_yx)\vec{k}$

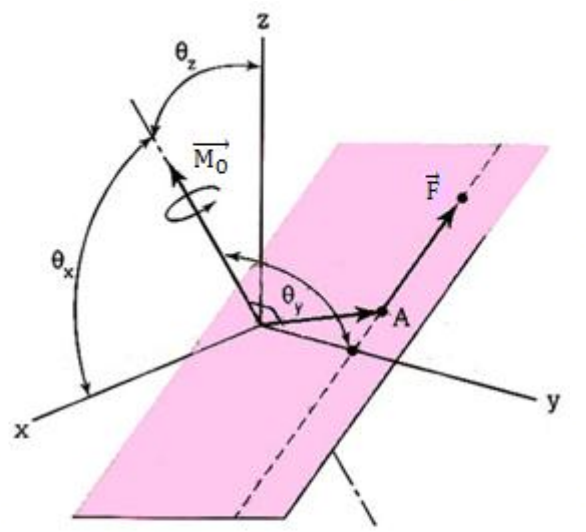
ขนาดของโมเมนต์คือ

$$|\overrightarrow{M_o}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad \text{.....(2.44)}$$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

ทิศทางของ $\overrightarrow{M_o}$ หมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{r}$ และ $\vec{F}$ ผ่านจุด O โดยใช้กฎมือขวาดังรูปที่29(ก)



รูปที่ 32

ซึ่งจะคำนวณได้จากโคซายน์ทิศทางดังนี้

$$\cos\theta_x = \frac{M_x}{|\overrightarrow{M_o}|}$$

$$\cos\theta_y = \frac{M_y}{|\overrightarrow{M_o}|} \qquad \text{...(2.45)}$$

$$\cos\theta_z = \frac{M_z}{|\overrightarrow{M_o}|}$$

ใบความรู้

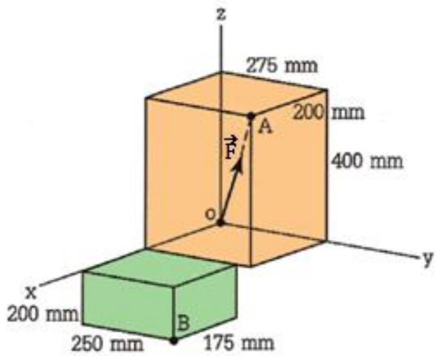
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าแรง $\vec{F}$ ในรูปมีขนาด 840 N จงหา

ก.โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบจุด B

ข.ทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของโมเมนต์รอบจุดBที่ทำมุมกับแกน x,y,z

ค.ระยะตั้งฉาก d จากจุด Bไปยังแนวแรง $\vec{F}$



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F}$ = 840 N 2.ตำแหน่งจุด A =(200,275,400) 3.ตำแหน่งจุด B =(375,250,(-200))
Wโจทย์ถามอะไร	ก.โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบจุด B ข.ทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของโมเมนต์รอบจุดBที่ทำมุมกับแกน x,y,z ค.ระยะตั้งฉาก d จากจุด Bไปยังแนวแรง
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}}$ 2.หาขนาดแรง $\vec{F}$ 3.เขียนแรง$\vec{F}$ ในรูปพิกัดฉาก 4.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{BA}}$ 5.นำค่าของแรง$\vec{F}$ ในรูปพิกัดฉากและเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{BA}}$ใส่ใน $\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ 6.หาขนาดของโมเมนต์จาก$\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$ 7.ทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของโมเมนต์รอบจุดBที่ทำมุมกับแกน x,y,z 8.ระยะตั้งฉาก d จากจุด Bไปยังแนวแรง $\vec{F}$

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>
วิธีทำ (ก) เขียนแรง $\vec{F}$ และตำแหน่งที่แรงกระทำอ้างอิงจากจุด B (=$\overrightarrow{r_{BA}}$) ในรูปของเวคเตอร์ดังนี้
$\overrightarrow{r_{OA}}$ = (200+275+400)
$|F| = \sqrt{200^2 + 275^2 + 400^2} = 525$
เขียนแรง $\vec{F}$ ในรูปพิกัดฉาก ดังนี้
$\vec{F} = \vec{F}\,\overrightarrow{u_{OA}} = 840(\frac{200}{525}\vec{i} + \frac{275}{525}\vec{j} + \frac{400}{525}\vec{k}) = (320\vec{i}+440\vec{j}+640\vec{k})$N
ตำแหน่งจุดA=(200+275+400) และ ตำแหน่งจุด B=(375+250+(-200))
$\therefore \overrightarrow{r_{BA}}$ = (200-375)$\vec{i}$+(275-250)$\vec{j}$+(400-200)$\vec{k}$
= ((-0.175)$\vec{i}$+0.025$\vec{j}$+0.2$\vec{k}$)m
$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{r_{BA}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (-0.175) & 0.025 & 0.2 \\ 320 & 440 & 640 \end{vmatrix}$
$\therefore$ [(0.025×640)-(0.2×440)]$\vec{i}$-[(-0.175×640)-(0.2×320)]$\vec{j}$+
[(-0.175×440)- (0.025×320)]$\vec{k}$
= ((-226)$\vec{i}$+288$\vec{j}$+(-85)$\vec{k}$) N· m
(ข) ขนาดของโมเมนต์ $|\overrightarrow{M_B}| = \sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$
$= \sqrt{(-226)^2 + 288^2 + (-85)^2}$ = 375.8 N
$\therefore$ ทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของโมเมนต์ M_B ที่ทำมุมกับแกน x,y,z คือ
$\theta_x = \cos^{-1}(\frac{M_x}{|M_B|}) = \cos^{-1}(\frac{-226}{375.8}) = 126.96°$
$\theta_y = \cos^{-1}(\frac{M_y}{|M_B|}) = \cos^{-1}(\frac{228}{375.8}) = 52.64°$
$\theta_z = \cos^{-1}(\frac{M_z}{|M_B|}) = \cos^{-1}(\frac{-85}{375.8}) = 103.07°$
(ค)ระยะตั้งฉาก d หาได้จาก..........................(2.31)
$|\overrightarrow{M_B}| = d\,|F|$
$\therefore d = \frac{375.8}{840} = 0.447$ m
</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>
ตอบ (ก) ((-226)$\vec{i}$+288$\vec{j}$+(-85)$\vec{k}$) N· m,(ข) $\theta_x = 126.96°, \theta_y = 52.64°$,
$\theta_z = 103.07°$,(ค) 0.447 m
1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}}$, 2.หาขนาดแรง F
3.เขียนแรงF ในรูปพิกัดฉาก, 4.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{BA}}$
5.หา $\overrightarrow{M_B}$ โดยใช้ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ 6.หาขนาดของโมเมนต์จาก $\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$
7.ทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของโมเมนต์รอบจุดBที่ทำมุมกับแกน x,y,z 8.ระยะตั้งฉาก d จากจุด Bไปยังแนวแรง $\vec{F}$
</td></tr>
</table>

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

3.1.4.2 โมเมนต์ของแรงรอบแกนใดๆ ในกรณีต้องการหาค่าโมเมนต์รอบแกนอื่นๆ เช่นแกน OB ในรูปที่33 ไม่ตั้งฉากกับระนาบของแรง $\vec{F}$ และตำแหน่ง $\vec{r}$ จะหาได้จาก

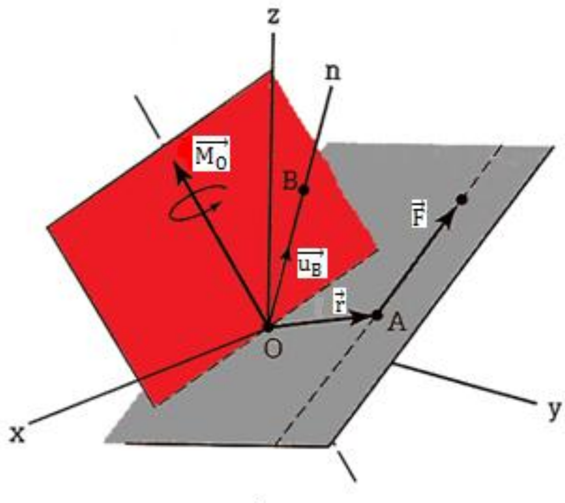
$$\overrightarrow{M_{OB}} = \overrightarrow{u_B} \cdot \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{u_B} \cdot \vec{r} \times \vec{F}$$

เมื่อ $\overrightarrow{u_B}$ = เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน OB

$\overrightarrow{M_{OB}}$ = โมเมนต์ย่อยของ $\overrightarrow{M_O}$ ที่แตกในแนว OB นั้นเอง

เขียน $\overrightarrow{M_{OB}}$ ในรูปของดิเทอร์มิแนนท์ตามสมการที่(2.29)

$$\overrightarrow{M_{OB}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad \text{..(2.46)}$$



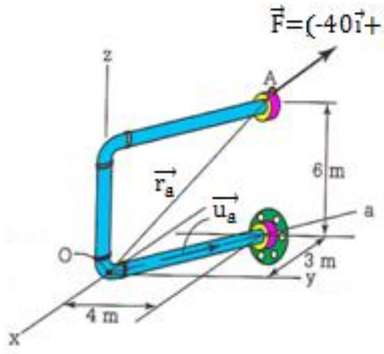
รูปที่ 33

ดังนั้น $\overrightarrow{M_{OB}} = u_X[\ r_yF_z - r_zF_y] - u_Y[\ r_xF_z - r_zF_x] + u_Z[\ r_xF_y - r_yx]$
..................................(2.47)

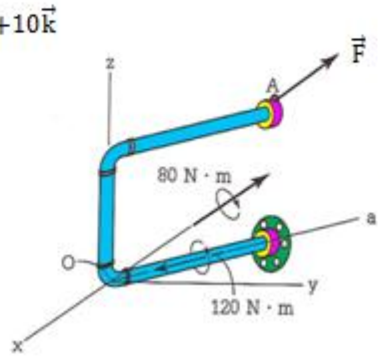
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

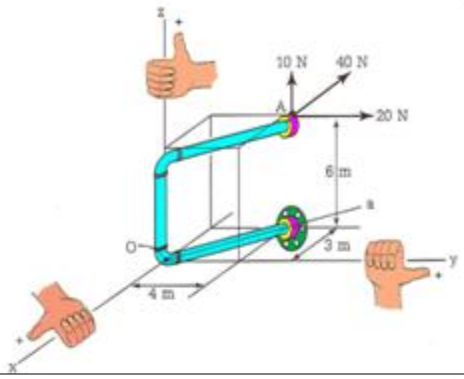
ตัวอย่างที่4 ถ้าแรง $\vec{F} = ((-40)\vec{i}+20\vec{j}+10\vec{k})$ N กระทำที่ A ดังรูปจงหาโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน x และ
แกนoa



(ก)



(ข)



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1. $\vec{F} = ((-40)\vec{i}+20\vec{j}+10\vec{k})$ 2. ตำแหน่งจุด A =$(-3\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k})$
Wโจทย์ถามอะไร	1.โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน x 2.โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$รอบแกน oa
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_A}$ 2.หาโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน x จาก$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ 3.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{oa}}$ 4.หาขนาด$\lvert\overrightarrow{r_{oa}}\rvert$ 5.หาโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน oa จาก$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)

ครั้งที่ 3

Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

วิธีทำ

เขียนตำแหน่งที่แรง F กระทำในรูปของเวคเตอร์ $\overrightarrow{r_A} = (-3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k})$m

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน x คือ $\overrightarrow{u_X} = \vec{i}$

จากสมการที่(2.46) จะได้โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน x = $M_X = \overrightarrow{u_X} \cdot \vec{F} \times \vec{r}$

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-3) & 4 & 6 \\ (-40) & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

= 1[(4×6)-(6×20)] - 0[((-3)×10) – (6×(-40))] +0[((-3)×200 –(4×(-40))]

= (-80) N·m

เครื่องหมาย – แสดงว่าทิศทางของ M_X ตรงกันข้ามกับแกน x

โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน oa = $\overrightarrow{u_a} \cdot \vec{F} \times \vec{r}$

$$\overrightarrow{r_{oa}} = (0\text{-}3)\vec{i}+(4\text{-}0)\vec{j} = (-3)\vec{i}+4\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{r_{oa}}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\overrightarrow{u_a} = \frac{(-3)}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_a} = \begin{vmatrix} \frac{(-3)}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ (-3) & 4 & 6 \\ (-40) & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$= \frac{(-3)}{5}$[(4×10)-(6×20)] $- \frac{4}{5}$[((-3)×10) – (6×(-40))]
+0[((-3)×20–(4×(-40))]

= (-120) N·m

เครื่องหมาย – แสดงว่าทิศทางของ $\overrightarrow{M_a}$ มีทิศทางจาก a ไป o

Lคำตอบที่ได้

ตอบ

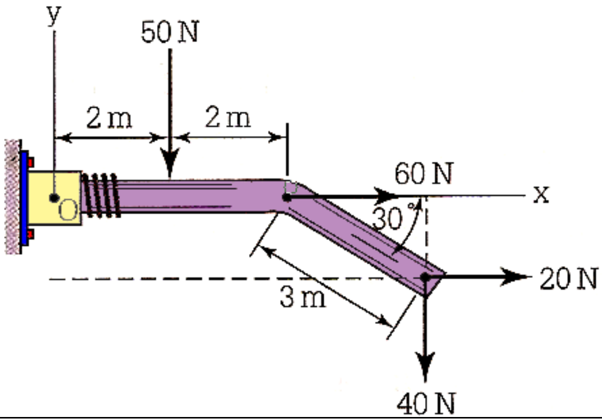
1. โมเมนต์ของแรง F รอบแกน x = (-80) N·m
2. โมเมนต์ของแรง F รอบแกน oa = (-120) N·m

ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา

1.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_A}$, 2.การหาโมเมนต์ของแรง F รอบแกน x จาก$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

3.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{oa}}$, 4.การหาขนาด$|\overrightarrow{r_{oa}}|$

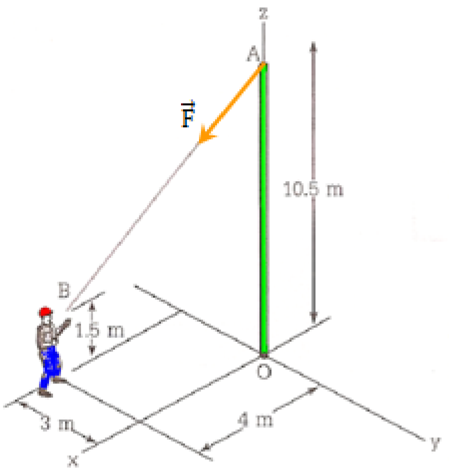
5.การหาโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกน oa จาก$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

<table>
<tr><td colspan="2">แบบฝึกหัดที่3-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งสี่รอบจุด O

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>..
....
....
....</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>..
....
....
....</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>..
....
....
....</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>..
....
....
....</td></tr>
</table>

แบบฝึกหัดที่3-2

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

ชายคนหนึ่งออกแรงดึงยอดเสา A ขนาด $\vec{F}$= 20N จงหาโมเมนต์ของแรงรอบจุด O โดยใช้เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}}$

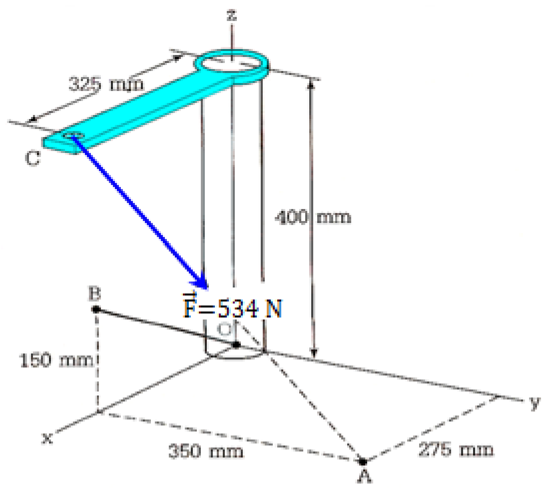


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

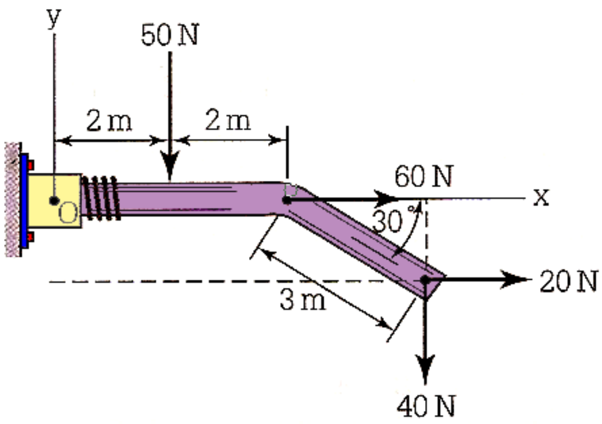
แบบฝึกหัดที่3-3

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงหาขนาดโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$=534N รอบแกน OB



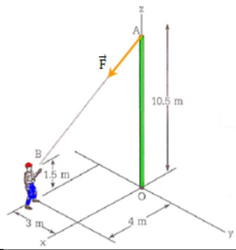
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

<table>
<tr><td colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่3-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งสี่รอบจุด O

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนด
อะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรง 50,60,20 และ 40N
2.แรง 60 ทำมุมกับแกน y = 30°
3.ระยะของตำแหน่งต่างๆตามรูป</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้
โจทย์ปัญหา</td><td>จงหาผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งสี่รอบจุด O
1.หาโมเมนต์ของแต่ละแรง
2.ทำการรวมโมเมนต์</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้
โจทย์ปัญหา</td><td>(ก)$50 \times 2 = 100\ \mathrm{N \cdot m}$
(ข)$60 \times 0 = 0\ \ \mathrm{N \cdot m}$
(ค)$40 \times (4+3\cos 30^\circ) = 263\ \mathrm{N \cdot m}$
(ง)$20 \times (3\sin 30^\circ) = 30\ \mathrm{N \cdot m}$
ผลรวมของโมเมนต์ = $(-100)+(-263)+30 = 333\ \mathrm{N \cdot m}$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จากการ
แก้ปัญหา</td><td>ตอบ $333\ \mathrm{N \cdot m}$
1.การหาโมเมนต์ของแต่ละแรง
2.การรวมโมเมนต์</td></tr>
</table>

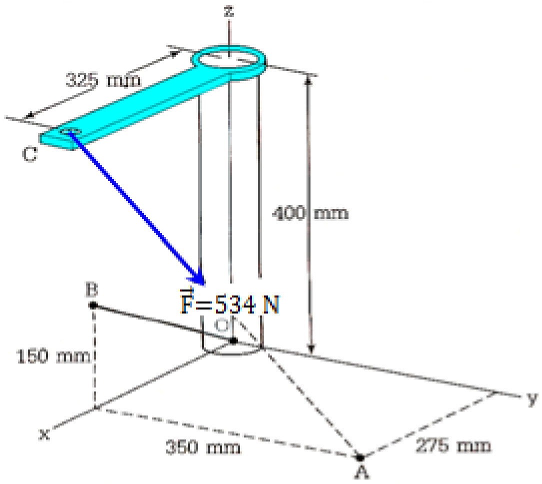
ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่3-2

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3

ชายคนหนึ่งออกแรงดึงยอดเสา A ขนาด $\vec{F}$= 20N จงหาโมเมนต์ของแรงรอบจุด O โดยใช้เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}}$



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F} = 20N$ 2.ขนาดของแนวต่างๆ
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาโมเมนต์ของแรงรอบจุด O โดยใช้เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}}$ 1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AB}}$ 2.หาขนาด$\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert$ 3.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย$\overrightarrow{u_{AB}}$ 4.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{OA}}$ 5.หาโมเมนต์ $\overrightarrow{M_o}$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** $\overrightarrow{r_{AB}} = (4\text{-}0)\vec{i}+((\text{-}3)\text{-}0)\vec{j}+(1.5\text{-}10.5)\vec{k}$ $\therefore \overrightarrow{r_{AB}} = 4\vec{i}+(\text{-}3)\vec{j}+(\text{-}9)\vec{k}$ $\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert = \sqrt{4^2+(-3)^2+(-9)^2} = 10.29$ m เวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\overrightarrow{T_{AB}} = F\cdot\overrightarrow{u_{AB}} = 20(\frac{4}{10.29}\vec{i}+\frac{(-3)}{10.29}\vec{j}+\frac{(-9)}{10.29}\vec{k})$ $\therefore \overrightarrow{u_{AB}} = 7.77\vec{i}+(\text{-}5.83)\vec{j}+(\text{-}17.4)\vec{k}$ เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{OA}} = 10.5\,\vec{k}$ $\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r_{OA}} \times \overrightarrow{T_{AB}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 10.5 \\ 7.77 & (-5.83) & (-17.4) \end{vmatrix}$ $= (10.5\times(-5.83))\vec{i} - (10.5\times 7.77)\vec{j}$ $= 61.21\vec{i}+81.58\vec{j}$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** (61.2i+81.58j) 1.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{AB}}$, 2.หาขนาด$\lvert\overrightarrow{r_{AB}}\rvert$, 3.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย$\overrightarrow{u_{AB}}$ 4.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง$\overrightarrow{r_{OA}}$, 5.หาโมเมนต์ $\overrightarrow{M_o}$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่3-3</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาขนาดโมเมนต์ของแรง $\vec{F} = 534$ N รอบแกน OB

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรง$\vec{F}$=534 N
2.ขนาดของตำแหน่งต่างๆตามรูป</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>1.หาขนาดโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$=534N รอบแกน OB
1.เขียนแรง F กระทำในรูปเวคเตอร์
2.หาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{CA}}$
3.หาขนาด$|\overrightarrow{r_{CA}}|$
4.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\overrightarrow{u_A}$
5.เขียน F ในรูปเวคเตอร์
6.หาโมเมนต์ F รอบ OB = $\overrightarrow{u_A} \cdot \vec{F} \cdot \vec{r}$
7.หาค่า$\overrightarrow{u_A}$ จาก OB
8.ขนาด $|OB|$
9.หา $\vec{M}_A = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่3-3(ต่อ)</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 3</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการ
แก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ เขียนแรง F กระทำในรูปเวคเตอร์ $\overrightarrow{r_C} = 325\vec{i} + 0\vec{j} + 400\vec{k}$
เวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{CA}} = (275 - 325)\vec{i} + (350 - 0)\vec{j} + (0 - 400)\vec{k}$
$\therefore \overrightarrow{r_{CA}} = (-50)\vec{i} + 350\vec{j} + (-400)\vec{k}$
ขนาด$|\overrightarrow{r_{CA}}| = \sqrt{(-50)^2 + 350^2 + (-400)^2} = 534$
เวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\overrightarrow{u_A} = \frac{(-50)}{534}\vec{i} + \frac{350}{534}\vec{j} + \frac{(-400)}{534}\vec{k}$
เขียน F ในรูปเวคเตอร์ $\frac{534\times(-50)}{534}\vec{i} + \frac{534\times350}{534}\vec{j} + \frac{534\times(-400)}{534}\vec{k}$
$\therefore$ F = $(-50)\vec{i}+350\vec{j}+(-400)\vec{k}$
โมเมนต์$\vec{F}$ รอบ OB = $\overrightarrow{u_A}\cdot\vec{F}\cdot\vec{r}$
หาค่า $\overrightarrow{u_A}$ จาก OB = $275\vec{i}+150\vec{k}$
ขนาด $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{275^2 + 150^2} = 313$ m
$\overrightarrow{u_A} = \frac{275}{313}\vec{i} + \frac{150}{313}\vec{k} = 0.87\vec{i} + 0.47\vec{k}$
$\therefore \overrightarrow{M_A} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.87 & 0 & 0.47 \\ 325 & 0 & 400 \\ -50 & 350 & 400 \end{vmatrix}$
$= 0.87\times(400\times350)\vec{i}+0.47\times(325\times350)\vec{k}$
$=121800\vec{i}-53462.5\vec{k} = \frac{68337.5}{1000}$ N.m
= 68.3375 N.m</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จาก
การแก้ปัญหา</td><td>ตอบ = 68.3375 N.m
1.การเขียนแรง $\vec{F}$ กระทำในรูปเวคเตอร์,2.การหาเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\overrightarrow{r_{AC}}$
3.การหาขนาด$|\overrightarrow{r_{CA}}|$, 4.หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\overrightarrow{u_A}$, 5.การเขียน F ในรูปเวคเตอร์
6.การหาโมเมนต์ $\vec{F}$ รอบ OB = $\overrightarrow{u_A}\cdot\vec{F}\cdot\vec{r}$, 7.การหาค่า $\overrightarrow{u_A}$ จาก OB
8.การขนาด |OB|
9. $\overrightarrow{M_A} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$</td></tr>
</table>

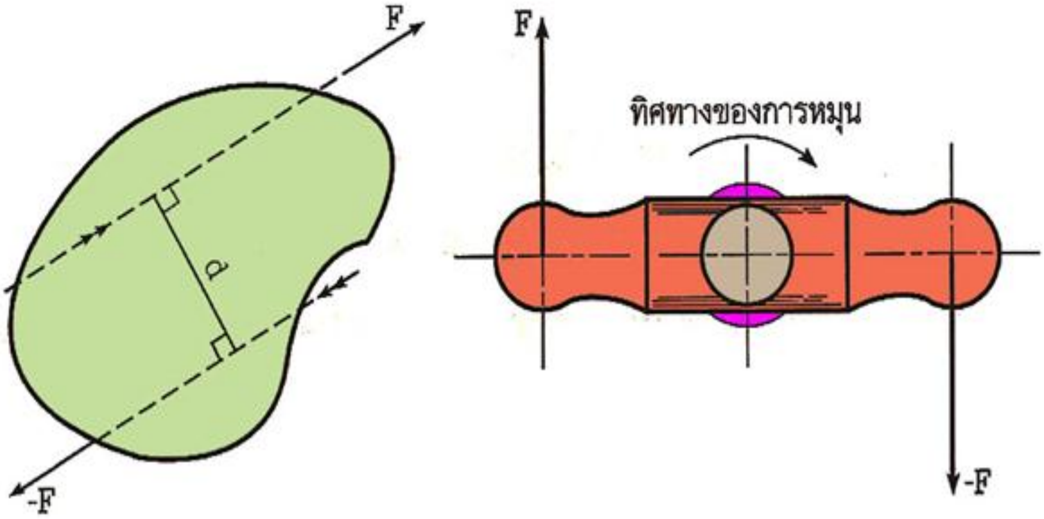
ครั้งที่ 4

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

4. แรงคู่ควบ (Couple)

4.1แรงคู่ควบ หมายถึง แรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากัน กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน มีทิศทางขนานกันแต่ตรงกันข้าม และไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังรูปที่34 ระยะตั้งฉากระหว่างแรงทั้งสองเรียกว่า แขนของแรงคู่ควบ (arm of the couple)

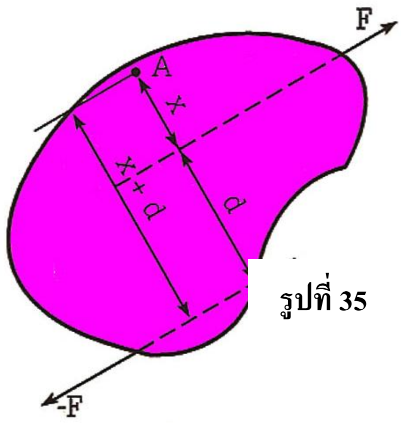


รูปที่ 34

แรงคู่ควบจะพยายามทำให้เกิดการหมุนต่อวัตถุ โดยไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงแต่อย่างใด เนื่องจากแรงลัพธ์ของแรงคู่ควบเป็นศูนย์

4.1.1 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of a couple)

หมายถึง ผลบวกของโมเมนต์รอบจุดใด ๆ อันเกิดจากแรงทั้งสองของแรงคู่ควบ เรียกว่า



รูปที่ 35

โมเมนต์ของแรงคู่ควบดังรูปที่ 35

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

$\sum M_A = +Fx - F(x+d) = +Fx - Fx - Fd = -Fd$

นั่นคือ $\sum M_A = Fd$ ⟲ แสดงว่าโมเมนต์ของแรงคู่ควบไม่ขึ้นอยู่กับระยะจากจุด A เพราะฉะนั้นถ้าหาค่าโมเมนต์ของแรงทั้งสองรอบจุดอื่นๆที่ไม่ใช่จุด A ก็จะได้ผลลัพธ์ = Fd เหมือนเดิม = M_c(โมเมนต์ของแรงคู่ควบ)

หมายเหตุ 1.โมเมนต์ของแรงคู่ควบ ไม่ขึ้นกับจุดหมุนเลยแต่จะมีค่าคงที่ขึ้นอยู่กับขนาดของแรง F และ

ระยะห่าง d ระหว่างแรงคู่ควบ

2.โมเมนต์ของแรงคู่ควบจะไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นวัตถุที่ถูกกระทำด้วยแรงคู่ควบเพียงอย่างเดียว

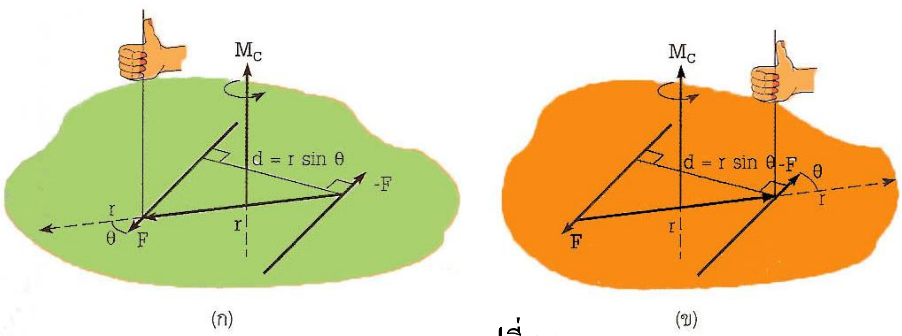
จะไม่หยุดนิ่งแต่จะหมุนไปในทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ

ด้วยเหตุนี้บางครั้งจึงเรียกโมเมนต์ของแรงคู่ควบว่า โมเมนต์ล้วน (Pure moment) ซึ่งเป็นปริมาณทางเวคเตอร์ เขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\overrightarrow{M_c} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{ขนาด} \quad |\overrightarrow{M_c}| = rF\sin\theta = Fd$$

โดยที่ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{r}$ และ $\vec{F}$ ดังรูปที่36 และทิศทางของ M_c เป็นไปตามกฎมือขวา คือ ขึ้นข้างบน



รูปที่ 36

โดยทั่วไปการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีเวคเตอร์ เหมาะสมกับปัญหาใน 3 มิติ ซึ่งยากแก่การมองและทำความเข้าใจ สำหรับระบบแรงในระนาบเดียวกัน มักจะแก้ปัญหาได้โดยใช้วิธีทางสเกลาร์

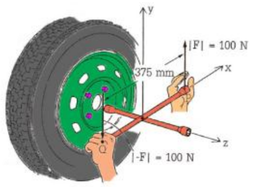
ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

4.1.2 แรงคู่ควบเทียบเท่า (Equivalent couples)

แรงคู่ควบหลายคู่ใดๆ ที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน และมีโมเมนต์เท่ากัน เราเรียกแรงคู่ควบเหล่านั้นว่าเป็น แรงคู่ควบเทียบเท่าซึ่งกันและกัน นั้นคือมีผลที่พยายามทำให้เกิดการหมุนด้วยขนาดของโมเมนต์ที่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาขนาดของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ ในการเปลี่ยนยางรถ ถ้าออกแรงแต่ละข้าง 100 N รูป

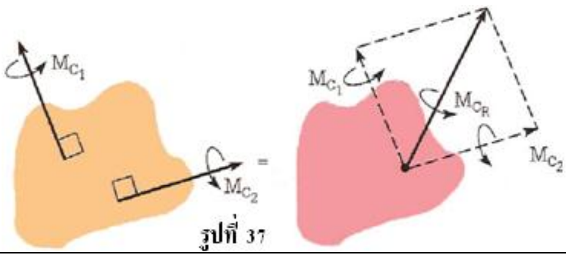


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F} = 100$ N, 2.ความยาวกากบาท=375 mm
Wโจทย์ถามอะไร	1.ขนาดของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.คำนวณจากสมการ $M_c = r \times \vec{F}$
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	วิธีทำ โมเมนต์ของแรงคู่ควบ $M_c = 100 \times 375 N \cdot mm$ $= 375 N \cdot mm \rightarrow Z$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	$375 N \cdot mm \rightarrow Z$ การหาขนาดของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ

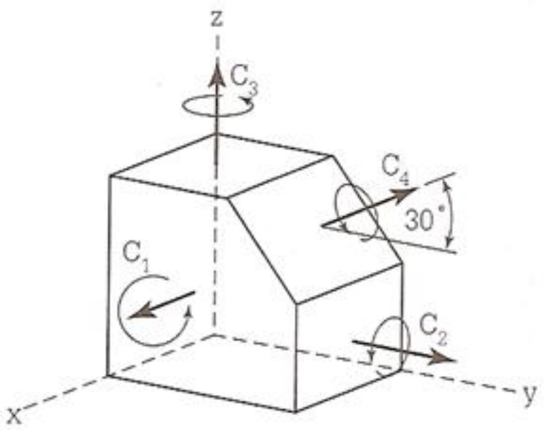
4.1.3 การรวมแรงคู่ควบ

ในกรณีที่มีแรงคู่ควบหลายคู่กระทำบนวัตถุเราสามารถรวมโมเมนต์ของแรงคู่ควบเหล่านั้นเข้าด้วยกัน เหมือนกับการรวมปริมาณทางเวคเตอร์ทั่วไปดังรูปที่ 37

$M_{C_R} = M_{C_1} + M_{C_2}$



รูปที่ 37

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">ตัวอย่างที่ 2 แรงคู่ควบ 4 คู่ในรูปมีขนาด $|\overrightarrow{C_1}| = 75\ \mathrm{N \cdot m}$, $|\overrightarrow{C_2}| = 50\ \mathrm{N \cdot m}$, $|\overrightarrow{C_3}| = 60\ \mathrm{N \cdot m}$ และ $|\overrightarrow{C_4}| = 90\ \mathrm{N \cdot m}$ จงหาขนาดและทิศทางของแรงคู่ควบรวมของแรงคู่ควบ ทั้ง 4 คู่

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.$|\overrightarrow{C_1}| = 75\ \mathrm{N \cdot m}$, $|\overrightarrow{C_2}| = 50\ \mathrm{N \cdot m}$, $|\overrightarrow{C_3}| = 60\ \mathrm{N} \cdot$, $|\overrightarrow{C_4}| = 90\ \mathrm{N \cdot m}$
2. ,มุมของโมเมนต์รอบ $C_4 = 30°$ กับแกนy</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>1.ขนาดและทิศทางของแรงคู่ควบรวมของแรงคู่ควบ ทั้ง 4 คู่
1.หาแรงคู่ควบในแกน x,y,z
2.รวมโมเมนต์ของแกน x,y,z
3.หาขนาดโมเมนต์แรงคู่ควบลัพธ์จาก$C_R = \sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$
4.หาทิศทางของแรงคู่ควบจาก $\theta_X = \cos^{-1}(\frac{\sum C_X}{|C_R|})$
$\theta_Y = \cos^{-1}(\frac{\sum C_y}{|C_R|}$
$\theta_Z = \cos^{-1}(\frac{\sum C_z}{|C_R|})$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">ใบความรู้</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
ทำการรวมแรงคู่ควบในแต่ละแกน
$\sum C_X = C_1 = 75\ \mathrm{N\cdot m}$
$\sum C_y = C_2 + C_4\cos 30° = 50 + 90\cos 30° = 127.9\ \mathrm{N\cdot m}$
$\sum C_z = C_3 + C_4\sin 30° = 50 + 90\sin 30° = 105\ \mathrm{N\cdot m}$
แรงคู่ควบรวมเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้
$\vec{C}_R = \sum C_X + \sum C_y + \sum C_z$
$= (75\vec{i} + 127.9\vec{j} + 105\vec{k})\mathrm{N\cdot m}$
ขนาดของแรงคู่ควบรวม
$\lvert C_R\rvert = \sqrt{75^2 + 127.9^2 + 105^2} = 181.7\ \mathrm{N\cdot m}$
ทิศทางของแรงคู่ควบรวม $\theta_X = \cos^{-1}(\frac{\sum C_X}{\lvert C_R\rvert}) = \cos^{-1}(\frac{75}{181.7}) = 65.6°$
$\theta_Y = \cos^{-1}(\frac{\sum C_y}{\lvert C_R\rvert}) = \cos^{-1}(\frac{127.9}{181.7}) = 45.3°$
$\theta_Z = \cos^{-1}(\frac{\sum C_z}{\lvert C_R\rvert}) = \cos^{-1}(\frac{105}{181.7}) = 54.7°$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้

ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>$\overrightarrow{\lvert C_R\rvert} = 181.7\ \mathrm{N\cdot m}$
$\theta_X = 65.6°$
$\theta_Y = 45.3°$
$\theta_Z = 54.7°$
1.หาแรงคู่ควบในแกน x,y,z
2.รวมโมเมนต์ของแกน x,y,z
3.หาขนาดโมเมนต์แรงคู่ควบลัพธ์จากสมการที่ 2.39
4.หาทิศทางของแรงคู่ควบจาก $\theta_X = \cos^{-1}(\frac{\sum C_X}{\lvert C_R\rvert})$
$\theta_Y = \cos^{-1}(\frac{\sum C_y}{\lvert C_R\rvert})$
$\theta_Z = \cos^{-1}(\frac{\sum C_z}{\lvert C_R\rvert})$</td></tr>
</table>

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

4.2 การรวมแรงและแตกแรงที่ขนานกัน

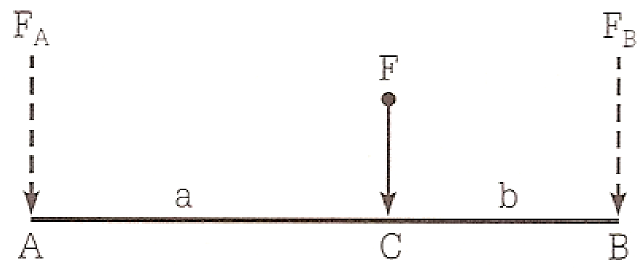
เราอาจรวมแรงหลายแรงที่ขนานกันให้เหลือแรงๆ เดียว หรือแตกแรงแรงๆ เดียวออกเป็นหลายแรงที่ขนานกัน หรือแตกแรงๆ เดียวเป็นแรงๆ เดียวกับแรงคู่ควบ โดยที่การรวมแรงหรือแตกแรงจะไม่ทำให้ผลของแรงเหล่านั้นต่อวัตถุที่ถูกกระทำเปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด ถ้าหากว่าแรงรวมและแรงย่อยเหล่านั้นเป็นไปตามสมการ 2 สมการต่อไปนี้

$\sum F$ ของแรงรวมและแรงย่อยเท่ากัน ....(2.48)

$\sum F$ รอบจุดใดๆ ของแรงรวมและแรงย่อยเท่ากัน ....(2.49)

4.2.1 การแตกแรงๆ หนึ่งออกเป็นแรงสองแรงที่ขนานกัน

แรง F กระทำที่จุด C สามารถแตกแรงออกเป็นแรง 2 แรงคือ F_A กระทำที่จุด A และ F_B กระทำที่ B โดยแรงทั้ง 3 ขนานกันหมดจากสมการ (2.48)



รูปที่ 38

$F_A + F_B = F$………………………………………………….…….(1)

จากสมการ(2.44) หาโมเมนต์รอบจุด C

โมเมนต์ของแรง F รอบจุด C = ผลบวกของโมเมนต์รอบแรง F_A และF_B รอบจุด C

$\therefore\ M_C = M_A + M_B$

$F_A a - F_B b = 0$ ……………………………………(2)

ถ้า a + b = 1 แก้สมการที่(1) และ (2)

b × ① ตลอด

$F_A b + F_B b = Fb$…………………………………..…….(3)

นำสมการที่ ② +③

$F_A a + F_A b = Fb$

$F_A(a + b) = Fb$

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 **หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย** ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

$$F_A = \frac{Fb}{(a+b)}$$

เมื่อ $a + b = l \quad \therefore \quad F_A = F\frac{b}{l}$

และนำ a คูณตลอดในสมการที่ ①

$F_A a + F_B a = Fa$ ……………………………………….(5)

นำสมการที่ ② - ⑤ ได้ดังนี้

$$-F_B b - F_B a = -Fa$$

$$F_B(-b-a) = -Fa$$

$$F_B = \frac{-Fa}{(-b-a)}$$

$$F_B = \frac{-Fa}{-(b+a)}$$

$F_B = \frac{Fa}{(b+a)}$ เมื่อ $a + b = l$

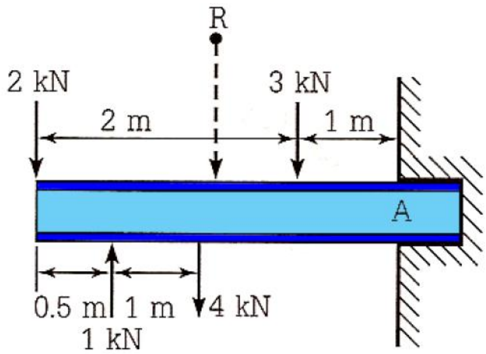
$$F_B = F\frac{a}{l}$$

ดังนั้น $F_A = F\frac{b}{l}$ และ $F_B = F\frac{a}{l}$ ……………………………(2.50)

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

ตัวอย่างที่ 3 จงหาขนาดและทิศทางและตำแหน่งที่กระทำของแรงลัพธ์ของแรงทั้งสี่ที่กระทำบนคาน ในรูป



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F}$ = 2,1,4 และ3 kN 2.ระยะทางของแนวแรงที่ห่างจากจุด A(ดังรูป)
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาขนาดและทิศทางและตำแหน่งที่กระทำของแรงลัพธ์ของแรงทั้งสี่ที่กระทำบนคาน 1.รวมแรง 2.รวมโมเมนต์ 3.หาตำแหน่งที่กระทำของแรงลัพธ์
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** $R = \sum F = 2 + 3 - 1 + 4 = 8\ \mathrm{kN} \downarrow$ $M_R = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ $\therefore\ (8x) = [(2\times3)+(3\times1)-(1\times1.25)+(4\times1.5)] = 12.5\ \mathrm{kN}$ $x = \frac{12.5}{8} = 1.56\ \mathrm{m}$
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** 1.ขนาดและทิศทาง = 8 kN ↓ 2.ตำแหน่งที่กระทำของแรงลัพธ์= 1.56 m 1.การรวมแรง 2.การรวมโมเมนต์ 3.การหาตำแหน่งที่กระทำของแรงลัพธ์

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

4.3 ระบบแรงและแรงคู่ควบ(A Force and Couple System)

แรงหลายแรงที่กระทำบนวัตถุสามารถรวมเหลือเพียงแรงๆเดียว แรงๆ เดียวมีผลเหมือนกับแรงหนึ่งแรงที่กระทำผ่านจุดๆหนึ่งบวกกับแรงคู่ควบ และแรงคู่ควบหลายคู่อาจรวมกันเป็นแรงคู่ควบเพียงคู่เดียวเรียกว่า **ระบบแรงและแรงคู่ควบ (a force and couple system)** ดังรูปที่ 39

แรงลัพธ์ $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{\sum F}$

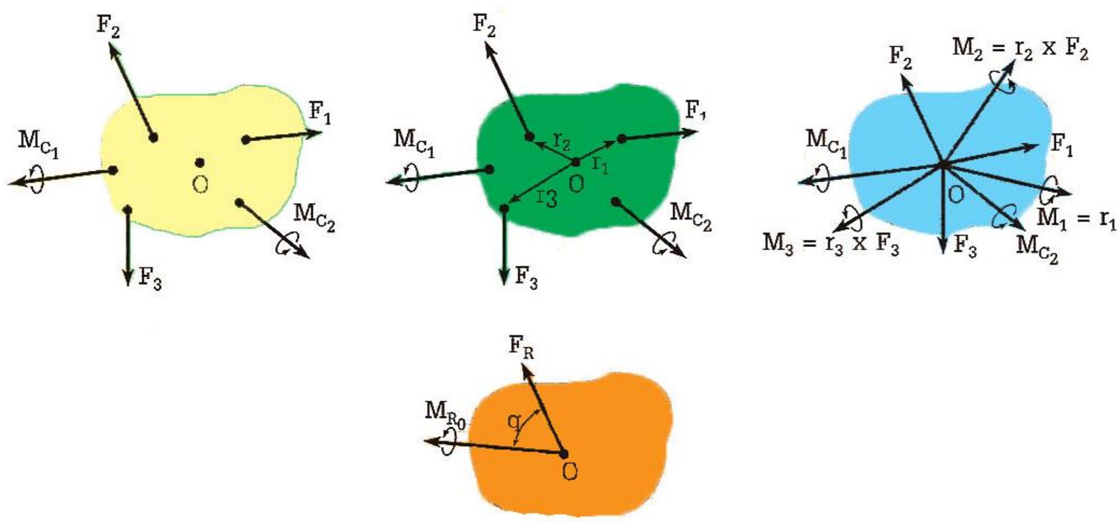
$= \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

โมเมนต์ลัพธ์รอบจุด O

$= \vec{M}_{ro}$

$= \sum \overrightarrow{M_o}$

$= \vec{M}c_1 + \vec{M}c_2 + (\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1}) + (\vec{r}_2 \times \overrightarrow{F_2}) + (\vec{r}_3 \times \overrightarrow{F_3})$

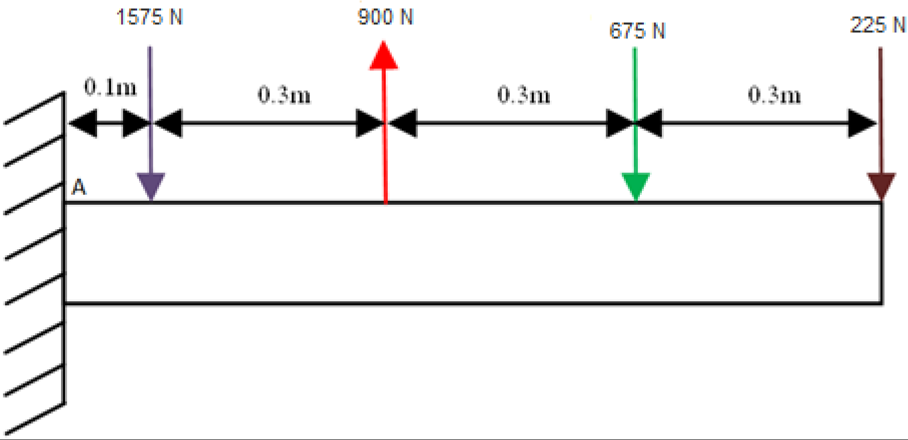


รูปที่ 39

ใบความรู้

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

ตัวอย่าง 4 จงหาระบบแรงเทียบเท่าที่ A ของแรงต่างๆ ในรูป

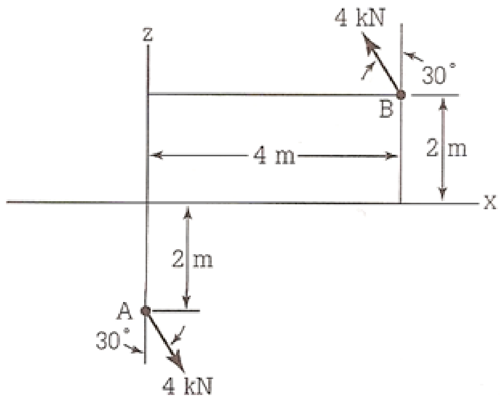


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.ขนาดของแรง 1.57N, 900N,675,และ 225 N 2.ระยะของแรงจากจุด A = 0.1,0.4,0.7 และ 1 m ตามลำดับ
Wโจทย์ถามอะไร	จงหาระบบแรงเทียบเท่าที่ A
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.รวมแรงในแนวแกน y 2.รวมโมเมนต์รอบจุด A
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** $\sum F_y = (-1575) + 900 + (-675) + (-225)$ $= -1575 \text{ N}\downarrow$ $\sum M_A = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3 + F_4 d_4$ $= (-1575 \times 0.1) + (900 \times 0.4) + (-675 \times 0.7) + (-225 \times 1)$ $= -495 \text{ N}\cdot\text{m}$
Lคำตอบที่ได้	**ตอบ** 1. $\sum F_Y = -1575 \text{ N}\downarrow$ 2. $\sum M_A = -495 \text{ N}\cdot\text{m}$
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	1.การรวมแรงในแนวแกน y 2.การรวมโมเมนต์รอบจุด A

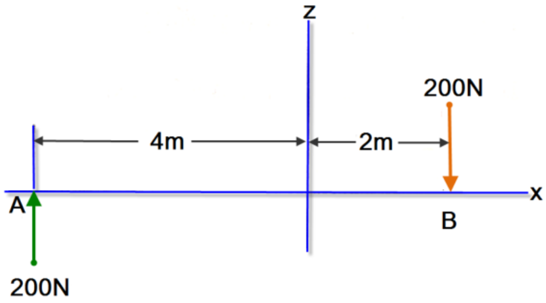
แบบฝึกหัดที่4-1

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 **หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย** ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ



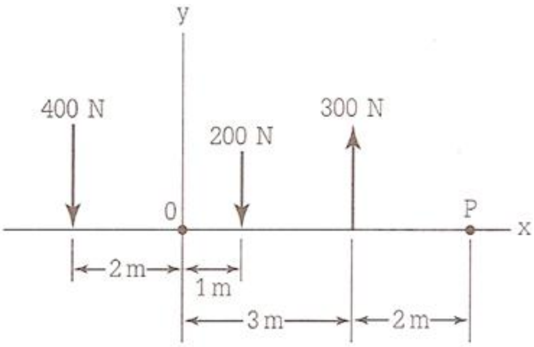
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

<table>
<tr><td colspan="2">แบบฝึกหัดที่4-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์แรงคู่ควบในรูป

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนด
อะไรมาให้บ้าง</td><td>……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร
การวางแผนแก้
โจทย์ปัญหา</td><td>……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการ
แก้โจทย์ปัญหา</td><td>……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้
ความรู้ที่ได้จาก
การแก้ปัญหา</td><td>……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………</td></tr>
</table>

แบบฝึกหัด4-3

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงทดแทนแรงระบบแรงในรูปด้วยระบบเทียบเท่าของแรง 1 แรงโดยการหาขนาดและตำแหน่งที่แรงนั้นกระทำ

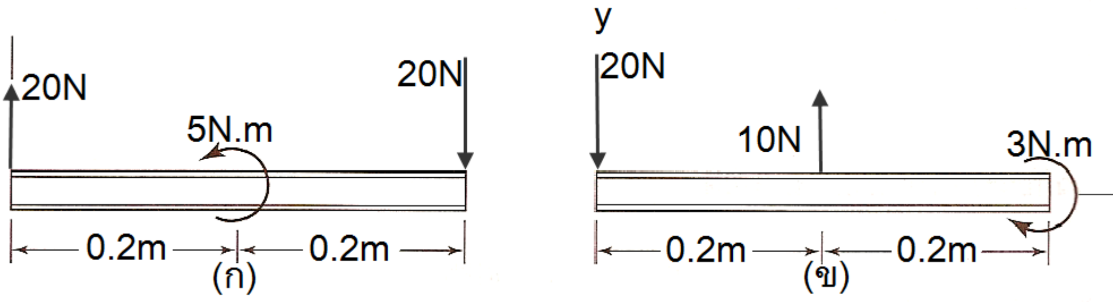


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

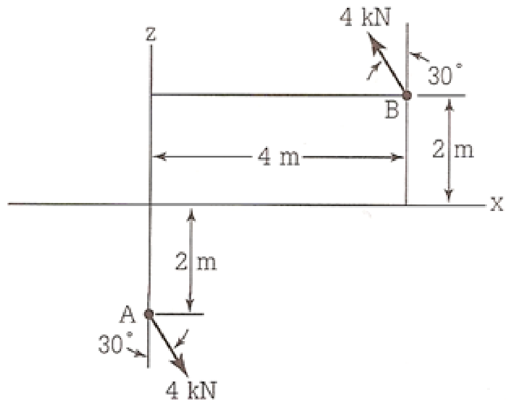
แบบฝึกหัด4-4

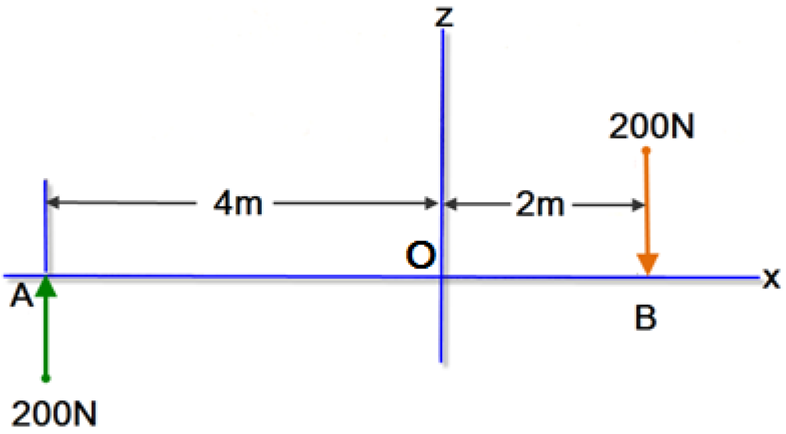
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงตรวจสอบว่าระบบแรงในแต่ละคู่เป็นระบบเทียบเท่าซึ่งกันและกันหรือไม่



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	....
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	....
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	....
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	....

ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่4-1	
วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems) ครั้งที่ 4	
จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบในรูป 	
Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง $\vec{F} = 4$ kN ทำมุมกับแกน z = 30° 2.ความยาวจุดต่างๆดังรูป
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ 1.หาขนาดแขนของโมเมนต์ 2.หาโมเมนต์แรงคู่ควบ
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** หาขนาดแขนของโมเมนต์ $= \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.65$ $\therefore M_C = 4 \times 5.65 = 22.6$ kN
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** 22.6 kN 1.หาขนาดแขนของโมเมนต์ 2.หาโมเมนต์แรงคู่ควบ

<table>
<tr><th colspan="2">ใบเฉลยแบบฝึกหัดที่4-2</th></tr>
<tr><td colspan="2">วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์แรงคู่ควบในรูป

</td></tr>
<tr><td>Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง</td><td>1.แรง $\vec{F} = 200$ N
2.ระยะOA = 4m
3.ระยะOB = 2m</td></tr>
<tr><td>Wโจทย์ถามอะไร

การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา</td><td>จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์แรงคู่ควบ

1.หาโมเมนต์รอบจุด A
2.หาโมเมนต์รอบจุด B
3.รวมโมเมนต์$M_{CA} + M_{CB}$</td></tr>
<tr><td>Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา</td><td>วิธีทำ
$M_{CA} = 200 \times 4 = 800\ \mathrm{N \cdot m}$
$M_{CB} = 200 \times 2 = 400\ \mathrm{N \cdot m}$
$M_{CR} = M_{CA} + M_{CB}$
$\quad = 800 + 400 = 1200\ \mathrm{N}$</td></tr>
<tr><td>Lคำตอบที่ได้

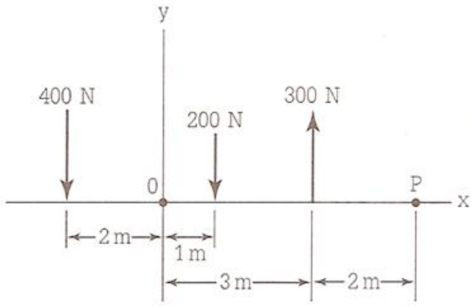
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา</td><td>ตอบ ขนาดและทิศทางของโมเมนต์แรงคู่ควบ = 1200 N

1.การหาโมเมนต์รอบจุด A
2.การหาโมเมนต์รอบจุด B
3.การรวมโมเมนต์$M_{CA} + M_{CB}$</td></tr>
</table>

ใบเฉลยแบบฝึกหัด4-3

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงทดแทนแรงระบบแรงในรูปด้วยระบบเทียบเท่าของแรง 1 แรงโดยการหาขนาดและตำแหน่งที่แรงนั้นกระทำ

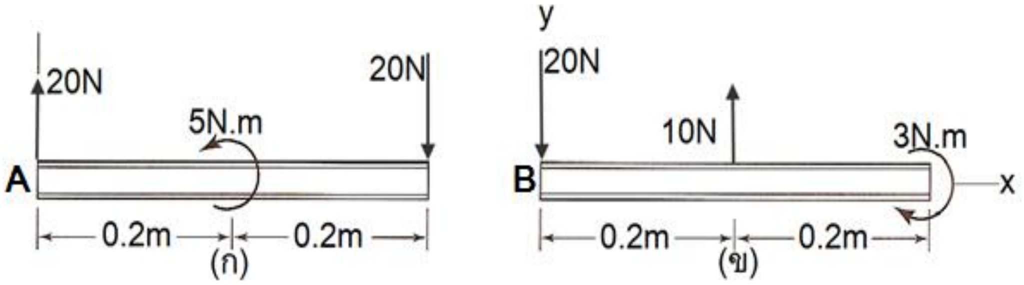


Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.แรง 400↓ N,200↓N,300↑N 2.ระยะทางจากจุด P = 7 m,4m,2m ตามลำดับ
Wโจทย์ถามอะไร การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	จงทดแทนแรงระบบแรงในรูปด้วยระบบเทียบเท่าของแรง 1 แรงโดยการหาขนาดและตำแหน่งที่แรงนั้นกระทำ 1.หาแรงลัพธ์ R 2.หาโมเมนต์แต่ละจุด 3.รวมโมเมนต์ในแต่ละจุด 4.หาตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำ
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** R = (-400)+(-200)+300 = (-300) N $M_R = \sum M_O$ ของแรงทั้งสาม พิจารณาโมเมนต์ที่จุด P (-300)x $= (400 \times 7) + (200 \times 4) + (300 \times 2)$ $= 2800 + 800 - 600$ x $= \frac{3000}{300} = 10$ m
Lคำตอบที่ได้ ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	**ตอบ** R = (-300) N x = 10 m จากจุด P 1.การหาแรงลัพธ์ R 2.การหาโมเมนต์แต่ละจุด 3.การรวมโมเมนต์ในแต่ละจุด 4.การหาตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำ

ใบเฉลยแบบฝึกหัด4-4

วิชา กลศาสตร์วิศวกรรม1 หน่วยที่ 2 ชื่อหน่วย ระบบแรง(Force Systems)
ครั้งที่ 4

จงตรวจสอบว่าระบบแรงในแต่ละคู่เป็นระบบเทียบเท่าซึ่งกันและกันหรือไม่



Kโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง	1.(ก) แรงคู่ควบ 20 N โมเมนต์ = 5 N.m 2.(ข)แรง 20 N และ 10 N โมเมนต์ = 3 N.m 3.ระยะตามรูป(ก)และ(ข) ตามรูปโดยพิจารณาที่จุด A และ B
Wโจทย์ถามอะไร	จงตรวจสอบว่าระบบแรงในแต่ละคู่เป็นระบบเทียบเท่าซึ่งกันและกันหรือไม่
การวางแผนแก้โจทย์ปัญหา	1.พิจารณาโมเมนต์ที่จุด Aและ B 2.หาโมเมนต์และรวมโมเมนต์ของภาพ(ก)และ(ข) 3.เปรียบเทียบผลของโมเมนต์ของภาพ(ก)และ(ข)
Dการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา	**วิธีทำ** พิจารณาโมเมนต์ที่จุด A และ B ในข้อ(ก) และ (ข) ตามลำดับ (ก) $(20\times0.4)+5 = 13$ N.m (ข) $(10\times0.2)+3 = 5$ N.m ไม่เท่า
Lคำตอบที่ได้	**ตอบ** ระบบแรงทั้งคู่เป็นระบบที่ไม่เทียบเท่า
ความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหา	1.การหาโมเมนต์และรวมโมเมนต์ 2.การเปรียบเทียบผลของโมเมนต์