



ผลกระทบของของไหลภายในท่อต่อสภาวะสมดุลสถิตของท่อลำเลียงของไหลในทะเล

นางสาววรรณวิศา ศิริ

การศึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ปีการศึกษา 2557

ผลกระทบบางอย่างของไหลภายในต่อสภาวะสมดุลสถิตของท่อ
ลำเลียงของไหลในทะเล

นางสาววรรณวิศา ศิริ วศ.บ. (วิศวกรรมโยธา)

การศึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง

..... ประธานกรรมการสอบโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง
(ผศ. ดร. ชัยณรงค์ อธิสกุล)

..... กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง
(ศ. ดร. สมชาย ชูชีพสกุล)

..... กรรมการ
(ดร. บุญมี ชินนาบุญ)

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง	ผลกระทบของของไหลภายในต่อสถานะสมดุลสถิตของท่อ ลำเลียงของไหลในทะเล
หน่วยกิต	6
ผู้เขียน	นางสาววรรณวิศา ศิริ
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศ. ดร.สมชาย ชูชีพสกุล
หลักสูตร	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	เทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
ภาควิชา	วิศวกรรมโยธา
คณะ	วิศวกรรมศาสตร์
ปีการศึกษา	2557

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้นำเสนอการวิเคราะห์ผลกระทบของของไหลภายในต่อการแอ่นตัวมาก
ในสถานะสมดุลทางสถิตของท่อลำเลียงแบบแคทีนารีในน้ำทะเล การวิเคราะห์ใช้หลักการของงาน
เสมือนของระบบซึ่งประกอบด้วย งานเสมือนของแรงดึงในแนวราบ งานเสมือนของน้ำหนัก
ประสิทธิผล และงานเสมือนจากของไหลภายในท่อ แบบจำลองนี้ใช้ความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียง
เป็นตัวแปรอิสระ วิธีการวิจัยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน
เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข การตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งทำโดยการ
เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขและจากสมการแคทีนารี พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้
สอดคล้องกันเป็นอย่างดี ตัวแปรในการศึกษานี้แสดงผลกระทบของของไหลภายในต่อสถานะ
สมดุลสถิตในท่อลำเลียงแบบแคทีนารี เมื่อจุดปลายของท่อลำเลียงมีความต่างระดับต่างกัน

คำสำคัญ : ของไหลภายในท่อ / ท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี / ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ /
วิธีการงานเสมือน / วิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

Special Research Study Title	Effect of Internal Flow on Static Equilibrium Configuration of Catenary Riser in Sea Water
Special Research Study Credits	6
Candidate	Miss Wannawisa Siri
Special Research Study Advisor	Prof. Dr.Somchai Chucheepsakul
Program	Master of Engineering
Field of Study	Civil Engineering Technology
Department	Civil Engineering
Faculty	Engineering
Academic Year	2014

Abstract

This special research study presents the effect of internal flow on static equilibrium configuration of catenary riser in sea water. The virtual work method is used to formulate the model of the catenary riser which consists of the virtual work of horizontal top tension, effective weight of the riser, and internal fluid flow. The riser arc-length is used as an independent variable. The finite element method and Newton-Raphson iterative process are used to solve the problem. The model formulation is validated by comparing the numerical results with the catenary equation, and they are found to be in a very good agreement. The parametric studies are given to show the effects of internal flow on equilibrium configuration for various support elevations of the catenary riser.

Keywords: Catenary Riser / Finite Element Method / Internal Flow / Newton-Raphson Method / Virtual Work Method /

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องฉบับนี้ได้สำเร็จลุล่วง และสำเร็จเป็นอย่างดีเนื่องด้วยได้รับความอนุเคราะห์จาก ศ.ดร.สมชาย ชูชีพสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการวิจัยอย่างดียิ่ง ที่ได้มีความกรุณาให้คำปรึกษา เสนอความคิดเห็นข้อแนะนำ และความรู้ที่มีประโยชน์อันล้ำค่า ให้ข้อเสนอเกี่ยวกับข้อบกพร่องในทุกๆ ด้าน อีกทั้งแนวทางในการศึกษาต่างๆอย่างดียิ่งเสมอมา ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล และ ดร.บุญมี ชินนาบุญ ที่เป็นกรรมการสอบโครงการวิจัยที่กรุณาให้คำแนะนำต่างๆจนทำให้โครงการวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์เป็นอย่างดี ขอขอบคุณ คุณสุชาดา ไวยวุทธิ ที่ได้ทำให้มีแรงกระตุ้น และอำนวยความสะดวกในการทำโครงการวิจัยให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และที่ลืมไม่ได้และสำคัญที่สุด คือ ขอขอบพระคุณมารดาของข้าพเจ้า นางสาวราญ ศิริ ที่คอยเป็นแรงผลักดัน และกำลังใจอย่างดียิ่งทำให้โครงการวิจัยนี้สำเร็จอย่างแท้จริง

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญ	จ
รายการตาราง	ช
รายการรูปประกอบ	ซ
รายการสัญลักษณ์	ณ

บทที่

1. บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	1
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	3
1.4 ขอบเขตงานวิจัย	3
1.5 ประโยชน์และผลที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย	3
2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	4
2.1 สถิติศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี	4
2.2 สมมติฐานการวิเคราะห์	5
2.3 สมการสมดุล	5
2.4 การวิเคราะห์แบบจำลองโดยวิธีแปรผัน	7
2.4.1 งานเสมือนที่เกิดจากแรงอัดกระทำที่ปลาย	8
2.4.2 งานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผล	10
2.4.3 งานเสมือนที่เกิดของไหลภายในท่อ	11
3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข	14
3.1 การแก้ปัญหาด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์	14
3.2 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น	19

3.3	เงื่อนไขของเขตของจตุรรองรับ	20
4.	ผลการวิเคราะห์	21
4.1	การเปรียบเทียบผลกับการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการแคทีนารี	21
4.2	สมมูลเมื่อเปลี่ยนแปลงแรงดึงในแนวราบที่มีจตุรรองรับระดับเดียวกัน	23
4.3	สถานะสมมูลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงความเร็วที่มีจตุรรองรับระดับเดียวกัน	24
4.4	สถานะสมมูลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงแรงดึงที่ปลายบน	26
4.5	สถานะสมมูลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้ง	27
4.6	สถานะสมมูลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจตุรรองรับในแนวตั้ง	29
5.	สรุปผลการวิจัย	31
5.1	ข้อเสนอแนะ	31
	เอกสารอ้างอิง	32
	ภาคผนวก	33
	ก ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี	34
	ข โปรแกรมคอมพิวเตอร์	40
	ประวัติผู้วิจัย	54

รายการตาราง

ตาราง		หน้า
4.1	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับ	21
4.2	ผลการเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขกับงานวิจัยอื่น	22
4.3	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วของของไหลภายในท่อลำเลียง	24
4.4	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีความเร็วของของไหล ภายในท่อในสถานะสมมูล ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงที่จุดปลายบน ของท่อลำเลียงของไหลแบบแอ่นตัวมาก	26
4.5	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งของท่อ ลำเลียงของไหลในสถานะสมมูล	28
4.6	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีระยะระหว่างจุดรองรับ ในแนวตั้งของท่อลำเลียงของไหลในสถานะสมมูล	29
ก.1	พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน	38

รายการรูปประกอบ

รูป	หน้า	
2.1	สถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี	4
2.2	ท่อลำเลียงของไหลภายใต้สถานะสมดุล และชิ้นส่วนย่อยของท่อภายใต้สถานะสมดุล	6
3.1	ลักษณะค่าพิกัดที่สถานะสมดุล	14
4.1	แสดงรายละเอียดของเส้นโค้งแคทีนารีแบบยกระดับ	22
4.2	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงของเคเบิลที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิล	23
4.3	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน	25
4.4	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน และเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้ง	25
4.5	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงของท่อลำเลียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงที่จุดปลายบนทางแนวราบของท่อลำเลียงของไหลแบบแอ่นตัวมาก	27
4.6	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงของท่อลำเลียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลแบบแอ่นตัวมาก	28
4.7	พฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงของท่อลำเลียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าการยกระดับของจุดยึดทั้งสองด้านของท่อลำเลียงของไหลแบบแอ่นตัวมาก	30
ก.1	รายละเอียดของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกระดับ	34
ก.2	รายละเอียดแรงดึงของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกระดับ	37

รายการสัญลักษณ์

A_e	=	พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ
A_i	=	พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ
A_p	=	พื้นที่หน้าตัดของท่อ
ds	=	ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อย
F_n	=	แรงกระทำในแนวตั้งฉากกับท่อ
F_t	=	แรงกระทำในแนวสัมผัสกับท่อ
g	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
i	=	ลำดับที่ของดิกิริอัสระ
$[K]$	=	สติเฟเนสมเมตริกซ์แบบไม่เชิงเส้นของระบบรวม
l	=	ความยาวส่วนโค้งย่อย
N	=	จำนวนชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด
n	=	แกนตั้งฉากกับแนวแกนชิ้นส่วนย่อย
$[N]$	=	เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง
$[N']$	=	อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันรูปร่าง
$[N'']$	=	อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันรูปร่าง
P_n	=	แรงกระทำในแนวตั้งฉากกับท่อ
P_t	=	แรงกระทำในแนวสัมผัสกับท่อ
$\{Q\}$	=	เวกเตอร์ของดิกิริอัสระของระบบรวม
$\{q\}$	=	เวกเตอร์ของดิกิริอัสระของชิ้นส่วนย่อย
$\{R\}$	=	เวกเตอร์ของแรงในระบบรวม
s_t	=	ความยาวส่วนโค้ง
T	=	แรงดึงตามแนวแกนท่อ
t	=	แกนสัมผัสกับแนวแกนชิ้นส่วนย่อย
T_H	=	แรงดึงตามแนวราบที่ปลายบน
T_V	=	แรงดึงตามแนวตั้งที่ปลายบน
v	=	ความเร็วของของไหลภายในท่อ
W	=	งานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอก
W_T	=	งานเสมือนเนื่องจากแรงดึงที่ปลาย
W_W	=	งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผล
W_e	=	งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อต่อหน่วยความยาวของท่อ

W_i	=	งานเสมือนเนื่องจากของไหลภายในท่อ
x_H	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวราบ
x_s	=	ตำแหน่งวางตัวของท่อทางแกน x สภาวะสมดุล
x'_s	=	อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ x เทียบกับ s
y_a	=	ค่าระยะแอนตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น
y_H	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง
y_L	=	ค่าระยะแอนตัวแบบเชิงเส้น
y_s	=	ค่าระยะแอนตัวแบบเชิงเส้น
y'_s	=	ค่าระยะแอนตัวแบบเชิงเส้น
y''_s	=	ค่าระยะแอนตัวแบบเชิงเส้น
Δ_x	=	ผลรวมระยะเคลื่อนที่ในแนวแกน x
Δ_y	=	ผลรวมระยะเคลื่อนที่ในแนวแกน y
δ	=	สัญลักษณ์การแปรผัน
κ	=	ค่าความโค้ง
ρ_e	=	ความหนาแน่นของน้ำทะเล
ρ_i	=	ความหนาแน่นของของไหลภายในท่อ
ρ_p	=	ความหนาแน่นของท่อ
π	=	ฟังก์ชันพลังงาน
π_k	=	ฟังก์ชันพลังงานของชิ้นส่วนย่อย

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

ในปัจจุบันการผลิตปิโตรเลียมนอกชายฝั่งทะเลมีปริมาณมากขึ้นและอยู่ในน้ำทะเลที่มีระดับความลึกมาก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องมีเทคโนโลยีและโครงสร้างที่เหมาะสมสำหรับการสำรวจหาแหล่งน้ำมันและผลิตน้ำมันในน้ำทะเลลึก ท่อลำเลียงของไหล (marine risers) เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างนอกชายฝั่งที่สำคัญอันหนึ่งที่ใช้ในการลำเลียงปิโตรเลียมระหว่างพื้นทะเลกับแท่นผลิตหรือแท่นขุดเจาะซึ่งอยู่ที่ระดับผิวน้ำ ท่อลำเลียงของไหลนอกจากจะต้องสามารถรับแรงกระทำเนื่องจากสภาพแวดล้อมในน้ำทะเลลึกแล้ว ยังต้องสามารถรับแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อที่เกิดขึ้นอีกด้วย ความเข้าใจถึงพฤติกรรมท่อลำเลียงของไหลจึงเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับวิศวกรนอกชายฝั่ง (offshore engineers) ที่จะต้องเรียนรู้เพื่อการวิเคราะห์ และออกแบบท่อลำเลียงของไหลที่เหมาะสมเพื่อให้ทนต่อสภาพแวดล้อมต่างๆ ได้

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเสถียรภาพของท่อที่มีของเหลวไหลอยู่ภายในท่อตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันได้รับการศึกษาอย่างกว้างขวางจากนักวิจัยหลายท่านทั้งทางด้านสถิติศาสตร์และพลศาสตร์ซึ่งแต่ละท่านได้ใช้กระบวนการวิเคราะห์หาผลเฉลยที่มีความแตกต่างกันในส่วนโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ได้ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องบางส่วนเกี่ยวกับการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลด้วยการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Moe และ Chucheepsakul [1] ศึกษาผลกระทบของของไหลแบบคงที่ภายในท่อลำเลียงที่อยู่ในแนวเกือบจะตั้งฉาก มีแรงดิ่งที่ปลายบนคงที่ และท่อลำเลียงมีความแข็งมาก พิจารณาโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อทำการประมาณค่า และวิเคราะห์โดยวิธีการเชิงตัวเลขที่แตกต่างกันหลายวิธีซึ่งจากงานวิจัยพบว่า การพิจารณาโดยวิธีการแบบ Closed form มีความแม่นยำมากที่สุดในการวิเคราะห์นี้

Patel และ Seyed [2] งานวิจัยนี้ศึกษาพฤติกรรมของของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลแบบยืดหยุ่นได้ การกระจายตัวของแรงดันและพฤติกรรมของของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลแบบยืดหยุ่นได้นี้มีผลกระทบต่อวิเคราะห์พฤติกรรมทางสถิติศาสตร์และพลศาสตร์ วิเคราะห์โดยใช้หลักการของ Governing equations ในสองมิติ ร่วมกับสมการของการไหลของท่อโลหะ พบว่า หลักการ Frequency-domain numerical solution สามารถอธิบายแบบจำลองของพฤติกรรมทั้งระบบได้ ซึ่งประกอบด้วยแรงจากภายนอกและแรงจากของไหลภายในท่อลำเลียงของไหล

งานวิจัยของ Wu และ Lon [3] ผลกระทบของความแข็งแรงของท่อ และของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลในทะเลแบบพลศาสตร์โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เคลื่อนที่ทางด้านข้างเพื่อนำมาตรวจสอบพฤติกรรมของท่อลำเลียงแบบพลศาสตร์ ซึ่งพิจารณาทั้งของไหลแบบคงที่ภายในท่อลำเลียงร่วมกับแรงที่กระทำภายนอกท่อลำเลียง พบว่า ของไหลภายในท่อทำหน้าที่ลดผลกระทบที่เกิดจากแรงดึงที่ปลายบนแต่เมื่อแรงดึงที่ปลายบนมีค่ามากจะส่งผลต่อท่อลำเลียงของไหลแบบพลศาสตร์

Huang [4] กลศาสตร์การเคลื่อนที่ของการลำเลียงมวลภายในท่อลำเลียงของไหลและท่อ พิจารณาความเร่งเนื่องจากน้ำหนักทั้งของเหลว และอนุภาคของแข็งที่ถูกลำเลียงภายในท่อลำเลียงของไหลในทะเล ใช้หลักการของ ลากรานจ์ ออยเลอร์ และ แรงคอริโอลิส (coriolis force) พบว่า เมื่อท่อลำเลียงเกิดการเคลื่อนที่มากจะถูกอิทธิพลของแรงเฉื่อยเนื่องจากความเร่งทำให้การเคลื่อนที่ของท่อลำเลียงของไหลบางกรณีเกิดการเคลื่อนที่ได้น้อยลง ความเร่งดังกล่าวจะสังเกตได้ชัดเจนเมื่อท่อลำเลียงของไหลเกิดการเคลื่อนที่และมีความเร็ว

Chucheepsakul และ Huang [5] อิทธิพลของการเคลื่อนที่ของมวลภายในท่อลำเลียงของไหลที่ส่งผลกระทบต่อสถานะสมดุล งานวิจัยนี้พิจารณาในกรณี 2 มิติ และเปลี่ยนแปลงแรงดึงที่ปลายบน พบว่า ท่อลำเลียงของไหลจะเกิดการเคลื่อนที่เพิ่มมากขึ้นเมื่อทำลำเลียงของไหลมีความเร็วเพิ่มขึ้น และความยาวส่วนโค้งทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับขนาดของแรงดึงที่ปลายบน

งานวิจัยของ Moe, Stromsed และ Fylling [6] ศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ซึ่งในงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่าแรงหนีศูนย์กลางเนื่องจากของไหลภายในท่อลำเลียงสามารถป้องกันได้โดยการเพิ่มแรงตามแนวแกน ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้คือความเค้นรวม (combined tension)

งานวิจัยของ Chucheepsakul, Huang และ Monprapussorn [7] ศึกษาเกี่ยวกับการวิบัติของท่อแบบอีลาสติค (elastica pipe) แบบไม่เชิงเส้นและคำนึงถึงการเคลื่อนที่ของของไหลภายในท่อ โดยวิธีการวิเคราะห์แบบปัญหาเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งพบว่า การเคลื่อนที่ของของไหลภายในท่อทำให้ท่อเกิดการเสียรูปปร่างมากอีกทั้งแรงดึงปลายบนของท่อมักมากขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของท่อทำให้ความสามารถใช้งานของท่อนั้นมีค่าลดลงแต่จำกัดที่ระดับน้ำตื้นเท่านั้น

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อพัฒนาการวางตัวของเคเบิลที่สภาวะสมดุล ภายใต้น้ำหนักของตัวเอง และของไหลภายในท่อ โดยมีวัตถุประสงค์ของงานวิจัย ดังต่อไปนี้

1. พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการแปรผันของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลที่วางตัวในสองมิติภายใต้แรงกระทำเนื่องจากของไหลภายในท่อและแรงอื่นๆที่เกี่ยวข้อง โดยอาศัยหลักการของงานเสมือน
2. พัฒนาระบบการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของท่อลำเลียงของไหล
3. ศึกษาพฤติกรรมของท่อลำเลียง และผลกระทบเนื่องจากความเร็วของไหลและตัวแปรอื่นๆ ต่อการวางตัวของท่อลำเลียงของไหล ณ สภาวะสมดุล

1.4 ขอบเขตงานวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์ผลกระทบเนื่องจากแรงกระทำของของไหลภายในท่อต่อสภาวะสมดุลท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึก และแรงกระทำเนื่องจากกระแส น้ำ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ร่วมกับกระบวนการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งมีขอบเขตในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาแบบจำลองในการวิเคราะห์เป็นแบบสองมิติ
2. พิจารณารูปร่างการวางตัวของท่อลำเลียงของไหลแบบสมดุลสถิต
3. พิจารณาความเร็วของของไหลแบบคงที่ภายในท่อ
4. พิจารณาการไหลของของไหลภายในท่อเป็นแบบราบเรียบ (laminar flow) ใน 1 มิติตามแนวสัมผัส ของแกนท่อ
5. ไม่พิจารณาผลของแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของท่อกับของไหลภายในท่อ
6. ไม่พิจารณาผลของแรงคัตที่เกิดขึ้นภายในท่อ

1.5 ประโยชน์และผลที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

ประโยชน์ที่ได้รับจากการศึกษาเฉพาะเรื่องนี้สรุปเป็นประเด็นหลักๆได้ ดังนี้

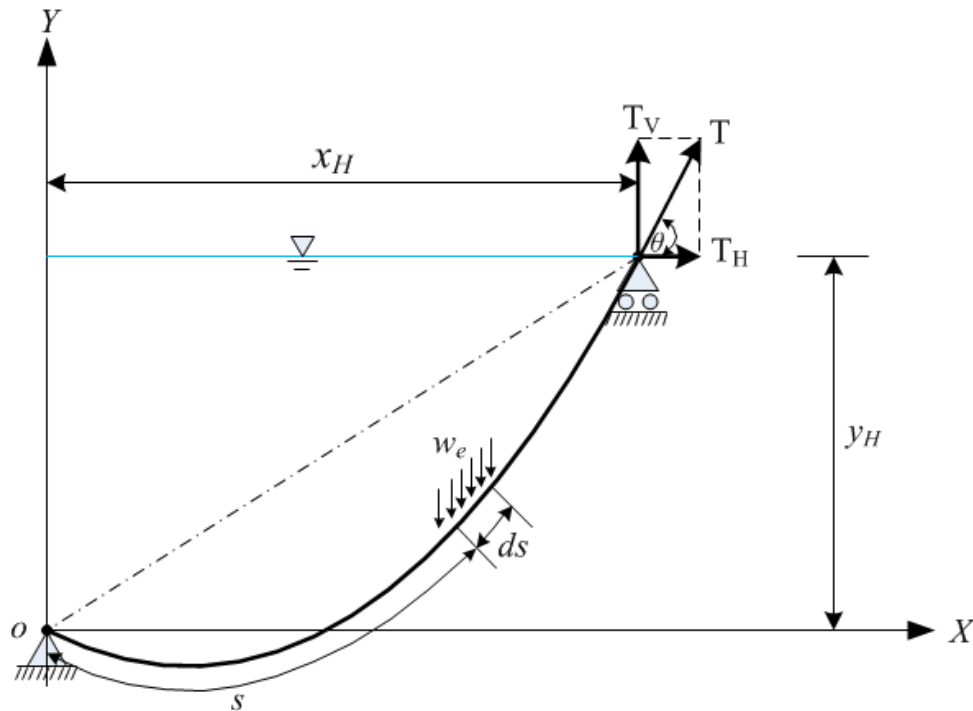
1. ทำให้เข้าใจและเรียนรู้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
2. ทำให้เข้าใจพฤติกรรมสถิตของท่อลำเลียงเมื่อเทียบกับของไหลที่ไม่มีความเร็ว
3. ทำให้รู้ถึงพฤติกรรมของท่อลำเลียงแบบแคทีนารีที่มีของไหลอยู่ภายในท่อในกรณีที่มีความเร็วของไหลแปรเปลี่ยนและในกรณีปลายทั้งสองของท่อลำเลียงมีความต่างระดับกัน

บทที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อการวิเคราะห์ผลกระทบเนื่องจากของเหลวที่ไหลภายในท่อด้วยความเร็วคงที่ต่อสภาวะสมดุลสถิตในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ความยาวส่วนโค้งเป็นตัวแปรอิสระ และให้ระยะที่วัดจากแนวราบที่กำหนดในตำแหน่งสมดุลต่างๆของท่อเป็นตัวแปรตาม โดยอาศัยหลักการแปรผันงาน พลังงานของระบบท่อลำเลียง และวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้นเพื่อหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยมีทฤษฎีในการวิเคราะห์ต่างๆดังนี้

2.1 สถิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

การวางตัวของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีระหว่างจุด 2 จุดโดยจุดด้านล่างเป็นแบบยึดหมุนได้ (hinge support) เปรียบเสมือนตัวค้ำยันท่อลำเลียงของไหล และจุดด้านบนเป็นแบบเคลื่อนที่ได้ (roller support) ซึ่งเคลื่อนที่ได้เฉพาะในแนวราบเปรียบเสมือนแท่นขุดเจาะน้ำมันแบบลอยน้ำ (floating platform) และมีแรงดึงในแนวราบ (T_H) กระทำเพื่อรักษาสภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหล ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

จะเห็นได้ว่าท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีนั้นวางตัวอยู่ระหว่างจุดยึดทั้งสองด้านแต่มีความต่างระดับของจุดยึดทั้งสองด้าน (Y_H) ท่อประเภทนี้มักนำมาใช้งานเป็นที่แพร่หลายในงานชุดเจาะน้ำมันนอกชายฝั่งทะเลลึกโดยทำหน้าที่เป็นท่อลำเลียงน้ำมัน (riser) จากปากหลุมเจาะที่นำน้ำมันขึ้นมาจากใต้พื้นทะเลที่มีความลึกมากๆ โดยจุดปลายบนทำการยึดติดกับแท่นชุดเจาะแบบต่างๆ ซึ่งมีทั้งแท่นชุดเจาะน้ำมัน และเรือชุดเจาะประเภทต่างๆตามความเหมาะสม ส่วนปลายด้านล่างนั้นอยู่บนพื้นทะเล ซึ่งในการวิเคราะห์งานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้จะทำการวิเคราะห์ในสถานะที่มีการแอ่นตัวมากภายในสถานะสมดุล โดยตัวแปรที่สำคัญในงานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เน้นพฤติกรรมแบบสถิตของท่อลำเลียงของไหลที่ไหลด้วยความเร็วภายในท่อ

2.2 สมมติฐานการวิเคราะห์

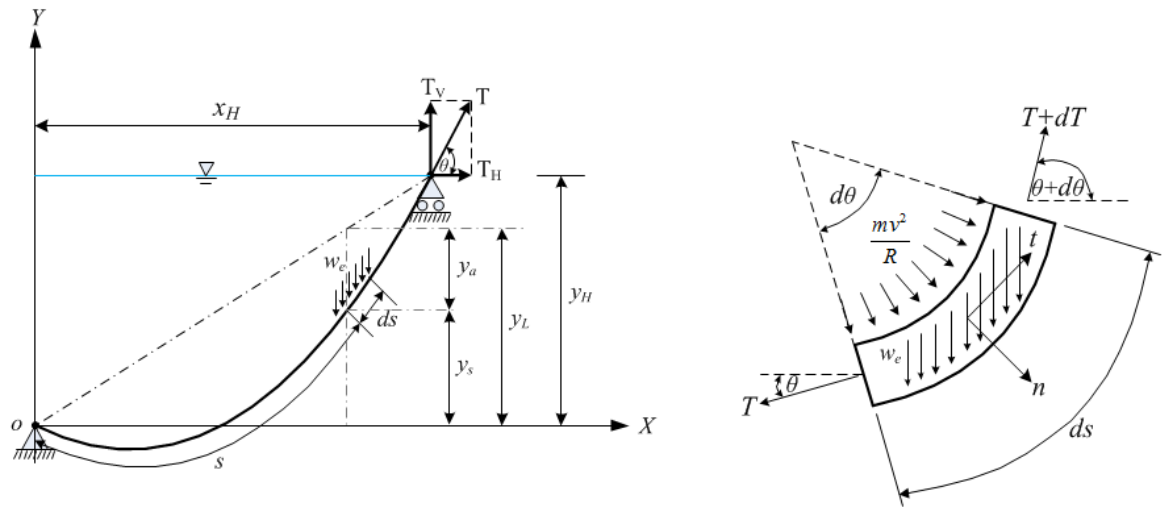
สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. ไม่คำนึงถึงผลของการยึดตัวหรือหดตัวตามแนวแกนท่อเมื่อรับแรง
2. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือน
3. การแอ่นตัวของท่อมียค่ามาก แต่ความเครียดมีค่าน้อย
4. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเสียดทานระหว่างท่อ และจตุรรองรับ
5. ไม่คำนึงถึงผลของแรงคัตินเบื่องตัน
6. ไม่คำนึงถึงแรงภายนอกที่มากระทำ นอกจากน้ำหนักของท่อ และแรงกระทำจากของไหลในท่อ

2.3 สมการสมดุล

พิจารณารูปที่ 2.2 จะพบว่าประกอบด้วยแรงกระทำดังต่อไปนี้ แรงตามแนวแกนในแนวราบ (T_H) แรงเนื่องจากน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล (W_e) และแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อ (W_i) อีกทั้งมีแรงกระทำตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อซึ่งประกอบด้วย แรงกระทำตามแนวสัมผัสกับแนวท่อ (P_t) แรงกระทำตั้งฉากกับแนวท่อ (P_n) และแรงจากความเร็วของของไหลภายในท่อจากแรงดังกล่าวสามารถหาสมการสมดุล จากสมการสมดุลของแรงกระทำต่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีในสถานะสมดุลซึ่งทำการวิเคราะห์ตามความยาวส่วนโค้ง s โดยจะทำการแบ่งท่อลำเลียงของไหลดังกล่าวออกเป็น

ชิ้นส่วนย่อยๆ การทำการวิเคราะห์ ตามความยาวส่วนโค้งย่อยๆ นี้ เรียกว่า ds ดังนั้นความยาวส่วนโค้งจากจุดยึดแบบ ไม่เคลื่อนที่เริ่มต้น ไปจนถึงจุดปลายที่สามารถเคลื่อนที่ได้ตามแนวราบ ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 ท่อลำเลียงของไหลภายใต้สภาวะสมดุลและชิ้นส่วนย่อยของท่อภายใต้สภาวะสมดุล

เมื่อสมดุลของแรงในทิศทางตั้งฉากกับแนวท่อ ($\sum F_n = 0$) จะได้

$$-T \frac{d\theta}{ds} + P_n + \frac{mv^2}{R} = 0 \quad (2.1)$$

เมื่อสมดุลของแรงในทิศทางสัมผัสกับแนวท่อ $\sum F_t = 0$ จะได้

$$\frac{dT}{ds} + P_t = 0 \quad (2.2)$$

เมื่อทำการวิเคราะห์ค่าความยาวโค้งตามชิ้นส่วนย่อยๆ สามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงมุมต่อความยาวเส้นโค้ง ($d\theta$) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2.3)$$

เมื่อ	ds	คือ	ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยของท่อ
	θ	คือ	ค่ามุมของท่อลำเลียงของไหลวัดจากแนวราบไปยังแนวแกน
	κ	คือ	ค่าความโค้ง
	ρ	คือ	รัศมีความโค้ง

เมื่อแทนค่าแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยต่างๆ และในแบบจำลองนี้ กำหนดให้ไม่คิดค่าของแรงคัต ดังนั้น $EI = 0$ ดังนั้น ค่าแรงเฉือนในสมการจึงไม่นำมาวิเคราะห์ในแบบจำลองนี้

2.4 การวิเคราะห์แบบจำลองโดยวิธีแปรผัน

จากการวิเคราะห์แรงต่างๆที่กระทำต่อท่อเลียงของไหลในสภาวะสมดุลนั้น ทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังสมการที่ (2.4) เนื่องจากสมการดังกล่าวสามารถทำการวิเคราะห์หาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ แต่ในการวิเคราะห์โดยใช้สมการหาผลเชิงตัวเลขนั้นมีความยุ่งยากในการวิเคราะห์เป็นอย่างมาก ดังนั้น จึงได้นำวิธีการสร้างฟังก์ชันงานและพลังงานขึ้นเพื่อใช้ในการช่วยทำการวิเคราะห์แบบจำลองนี้ สมการพลังงานคือแรงที่เกิดขึ้นภายในของท่อลำเลียงของไหลและงานเสมือนคือแรงกระทำที่เกิดขึ้นภายนอกของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งประกอบด้วยหลักการดังต่อไปนี้

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงคัตและความโค้งของชิ้นส่วนย่อย สามารถแสดงแรงคัตให้อยู่ในพจน์ของ y ได้ดังต่อไปนี้

ในพจน์ของ dy และ ds สามารถพิจารณาได้จากมุม $\sin \theta$ ได้ดังนี้

$$\sin \theta = \frac{dy_s}{ds} \quad (2.4)$$

สามารถเปลี่ยนรูปสมการ (2.4) ให้อยู่ในรูปมุม ได้ดังนี้

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{dy_s}{ds} \right) \quad (2.5)$$

เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ s ทั้งสองข้างจะได้สมการดังนี้

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y_s''}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

โดยที่ y_s' คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y เทียบกับ s
 y_s'' คือ อนุพันธ์อันดับสองของ y เทียบกับ s

2.4.1 งานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงกระทำที่ปลาย

เมื่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีมีพฤติกรรมการวางตัวโดยมีปลายทั้งสองด้านอยู่ในสภาวะที่มีความต่างระดับกันโดยปลายด้านบนจุดยึดแบบเป็นล้อเลื่อนที่สามารถทำการเคลื่อนที่ได้ในแนวราบ และปลายด้านล่างเป็นเป็นจุดยึดรองรับเป็นแบบหมุนที่สามารถเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นเมื่อจุดยึดที่ปลายด้านบนถูกแรงกระทำในแนวตั้ง (T_V) และ แรงกระทำในแนวราบ (T_H) จุดยึดแบบเป็นล้อเลื่อนจะทำการเคลื่อนที่ในแนวราบทำให้ท่อลำเลียงของไหลเกิดพฤติกรรมการแอ่นตัวเกินขึ้นจนในที่สุดแรงกระทำดังกล่าวได้ดันล้อเลื่อนไปถึงจุดจุดหนึ่งจะทำให้ท่อลำเลียงของไหลสามารถอยู่ได้ในสภาวะสมดุลได้จากพฤติกรรมดังกล่าวของท่อลำเลียงของไหลสามารถนำมาวิเคราะห์และเขียนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ดังนี้

$$ds^2 = (dx - du)^2 + dy^2 \quad (2.7)$$

นำค่า ds^2 หากรสมการ (2.7) โดยตลอด จะได้สมการ ดังต่อไปนี้

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx - du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{ds}\right)^2 \quad (2.8)$$

เมื่อค่าของ dx มีค่าเท่ากับ ds ตามแนวแกน x ดังนั้น

$$dx = ds \quad (2.9)$$

เมื่อนำค่าจากสมการ (2.9) แทนค่าในสมการ (2.8) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$u' = \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \quad (2.10)$$

เมื่อเปลี่ยนรูปของความสัมพันธ์ระหว่างระยะเคลื่อนที่ตามแนว x คือ du กับความยาวส่วนโค้งคือ ds จะได้สมการระยะการเคลื่อนที่ ดังต่อไปนี้

$$du = \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \quad (2.11)$$

เปลี่ยนรูปความสัมพันธ์โดยการอินทิเกรตสมการ (2.11) จะสามารถหาผลรวมระยะเคลื่อนที่ในแนวแกน x ได้เท่ากับ Δ_x ตามสมการ ดังต่อไปนี้

$$\Delta_x = \int_0^{s_t} \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \quad (2.12)$$

เพราะฉะนั้นจากสมการทั้งหมดที่กล่าวมานี้จะสามารถแสดงให้เห็นสมการงานเสมือนจากแรงภายนอกทั้งหมดจากการวิเคราะห์ ดังนี้

$$W_T = \{T_H \Delta_x|^{s_t} + T_V \Delta_y|^{s_t}\} \quad (2.13)$$

จากการวิเคราะห์พบว่าท่อลำเลียงของไหลมีการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x เท่านั้น เนื่องจากการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y นั้นมีค่าน้อยมากจนเกือบเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการงานเสมือนที่จุตรองรับจึงไม่นำค่าตามแนวแกน y มาทำการวิเคราะห์ในแบบจำลองนี้ ดังนั้นจึงทำให้เกิดสมการดังต่อไปนี้

$$W_T = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} ds \quad (2.14)$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการในรูปการแปรผัน ดังต่อไปนี้

$$\delta W_T = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \delta y_s' ds \quad (2.15)$$

2.4.2 งานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผล

เมื่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีมีแรงกระทำจากภายนอกเกิดขึ้นและอยู่ภายในสภาวะสมดุล จึงส่งผลให้แรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงของไหลนั้นแผ่กระจายไปตลอดทั้งความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลจึงทำให้ท่อเกิดพฤติกรรมเคลื่อนตัวเกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล ดังนั้นในการวิเคราะห์แบบจำลองนี้จึงได้นำหลักการงานเสมือนมาใช้ในการวิเคราะห์แรงเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงของไหลได้ดังต่อไปนี้

$$W_w = - \int_0^{s_t} w_e y_s ds \quad (2.16)$$

เมื่อ w_e คือ แรงที่เกิดเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อพร้อมกับของไหลภายในท่อ ดังนั้นจะได้สมการ

$$W_w = (\rho_p A_p - \rho_e A_e + \rho_i A_i)g \quad (2.17)$$

เมื่อ	A_e	คือ	พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ
	A_i	คือ	พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ
	A_p	คือ	พื้นที่หน้าตัดของท่อ
	g	คือ	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
	ρ_e	คือ	ความหนาแน่นของน้ำทะเล
	ρ_i	คือ	ความหนาแน่นของของไหลภายในท่อ
	ρ_p	คือ	ความหนาแน่นของท่อ

โดยสามารถเปลี่ยนรูปให้อยู่ในรูปสมการการแปรผันได้ ดังต่อไปนี้

$$\delta W_w = - \int_0^{s_t} w_e \delta y_s ds \quad (2.18)$$

2.4.3 งานเสมือนที่เกิดจากของไหลภายในท่อ

เมื่อท่อลำเลียงของไหลมีของไหลไหลอยู่ภายในท่อ จะส่งผลทำให้เกิดแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลขึ้นซึ่งความเร็วของของไหลภายในทอนี้มีทิศทางของความเร็วเนื่องจากการไหลในทิศแนวแรงของแกน y และส่งผลต่อพฤติกรรมของท่อตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล ดังนั้นในการวิเคราะห์แบบจำลองท่อลำเลียงของไหลนี้จึงสามารถเขียนสมการงานเสมือนที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อ ดังนั้น จากรูปที่ 2.2 ซึ่งแสดงชิ้นส่วนย่อยของท่อภายใต้สภาวะสมดุลสามารถเขียนสมการความเร็วของของไหลภายในท่อตามทิศทางแนวแกน y เท่านั้น ไม่คำนึงถึงการแปรเปลี่ยนในทิศทางแนวแกน x เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นหรือมีการเคลื่อนที่น้อยมากจนเข้าใกล้ศูนย์ ได้ดังสมการ

(2.19) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักของของไหลภายในท่อที่กระทำต่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมด สามารถแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$dF_i = -\frac{mv^2}{R} ds \quad (2.19)$$

เมื่อเปลี่ยนสมการ (2.19) ให้อยู่ในรูปของสมการความสัมพันธ์ระหว่างระยะเคลื่อนที่ตามแนวแกน y (dF_{iy}) กับความยาวส่วนโค้งย่อย (ds) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$dF_{iy} = -\frac{mv^2}{R} \cos \theta ds \quad (2.20)$$

ดังนั้นจะได้สมการความเร็วของของไหลภายในท่อจากการวิเคราะห์แบบจำลองโดยวิธีงานเสมือน ดังต่อไปนี้

$$dW_i = dF_{iy} y_s \quad (2.21)$$

จากการวิเคราะห์พบว่าความเร็วที่เกิดจากของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลนั้นมีการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y แรงของความเร็วที่เกิดขึ้นนั้นส่งผลเป็นแรงแผ่กระจายตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล อีกทั้งน้ำหนักประสิทธิผลของของไหลภายในท่อนั้นเกิดขึ้นพร้อมกับความเร็วเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถวิเคราะห์สมการของความเร็วของท่อลำเลียงของไหลได้ดังต่อไปนี้

$$W_i = \int_0^{s_t} dW_i = \int_0^{s_t} -\frac{mv^2}{R} \cos \theta ds y_s \quad (2.22)$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (2.20) และ (2.21) ลงในสมการ (2.22) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$W_i = - \int_0^{s_t} \left(\frac{mv^2}{R} \cos \theta \right) y_s ds \quad (2.23)$$

ดังนั้นเมื่อเปลี่ยนรูปสมการ (2.23) จะได้สมการการแปรผัน ดังต่อไปนี้

$$\delta W_i = - \int_0^{s_t} \left(\frac{mv^2}{R} \cos \theta \right) \delta y_s ds \quad (2.24)$$

เมื่อแทนค่าส่วนโค้งจากสมการ (2.6) แทนในสมการ (2.24) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\delta W_i = - \int_0^{s_t} \{ mv^2 y_s'' \} \delta y_s ds \quad (2.25)$$

จะได้สมการผลรวมของงานเสมือนของชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหล ดังนี้

$$\delta \pi = \delta W_T + \delta W_w + \delta W_i \quad (2.26)$$

โดยการแทนสมการ (2.15), (2.18) และ(2.25) ลงในสมการ (2.26) จะได้

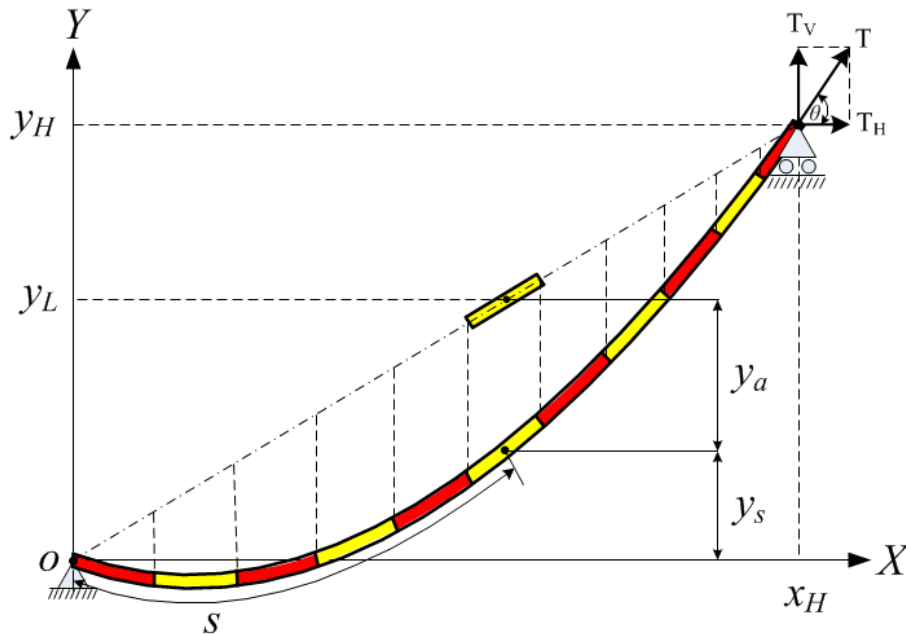
$$\delta \pi = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} - w_e - mv^2 y_s'' \right\} \delta y_s ds \quad (2.27)$$

บทที่ 3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

จากทฤษฎีการวิเคราะห์และแก้ปัญหามสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นในบทที่ 2 จะเห็นได้ว่าเป็นการทำการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของงานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ได้ซึ่งนำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้เพื่อหาคำตอบ โดยการแปรผันฟังก์ชันของพลังงานและงานเสมือนเพื่อเข้าสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการแบ่งท่อลำเลียงของไหลให้เป็นชิ้นส่วนย่อยๆ โดยมีอัตราส่วนเท่าๆกันในแต่ละชิ้นส่วน กำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตและทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบ Gaussian quadrature ในแต่ละชิ้นส่วนย่อยๆเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือทั้งหมดให้ของระบบรวม และหาคำตอบของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน

3.1 การแก้ปัญหาคด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหาคด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำได้โดยการแบ่งท่อลำเลียงของไหลตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ และทำการสร้างแบบจำลองในการวิเคราะห์โดยการกำหนดจุดปลายทั้งสองด้านของชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะมีดิกกรีอิสระจำนวน 4 ตัว ประกอบด้วยดิกกรีอิสระของการแอ่นตัว (y_s) และค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อยๆ (y'_s) ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองดังกล่าวนี้จะทำการพิจารณาในกรณีระยะแอ่นตัวในแนวแกน y



รูปที่ 3.1 ลักษณะค่าพิกัดที่สภาวะสมดุล

จากรูปที่ 3.1 ท่อลำเลียงของไหลประกอบด้วยพิกัดของชิ้นส่วนย่อยโดยสามารถนำเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y_s = y_L - y_a \quad (3.1)$$

เมื่อ

y_s	คือ	ค่าระยะแอนตัวตามแกน y ณ ความยาวส่วนโค้งที่พิจารณา
y_L	คือ	ค่าระยะแอนตัวแบบไม่เชิงเส้น
y_a	คือ	ค่าระยะแอนตัวแบบไม่เชิงเส้น

ณ ตำแหน่งต่างๆของท่อลำเลียงของไหลนี้สามารถทำการประมาณค่าระยะแอนตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น (y_a) ได้ดังต่อไปนี้

$$y_a = [N]\{q\} \quad (3.2)$$

เมื่อ	$[N]$	คือ	เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง
	$\{q\}$	คือ	เวกเตอร์ของดิกิริอัสระของชิ้นส่วนย่อย

ดังนั้น สามารถแสดงสมการในรูปแบบของฟังก์ชันรูปร่างของเมตริกซ์สำหรับการเคลื่อนที่จากชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหลโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีจำนวนดิกิริอัสระจำนวน 4 ตัวได้ดังต่อไปนี้

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (3.3)$$

เมื่อเข้าสู่ระบบการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำการเขียนค่าตัวแปรของดิกิริอัสระได้ดังนี้

$$N_1 = 1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \quad (3.4a)$$

$$N_2 = s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \quad (3.4b)$$

$$N_3 = 3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \quad (3.4c)$$

$$N_4 = -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \quad (3.4d)$$

เมื่อเขียนส่วนย่อยประกอบด้วยเวกเตอร์ของดิกิริอัสระ $\{q\}$ ดังนี้

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_a(0) \\ y'_a(0) \\ y_a(l) \\ y'_a(l) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

อนุพันธ์สมการ (3.1) เทียบกับ ds จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy_s}{ds} = \frac{dy_L}{ds} - \frac{dy_a}{ds} \quad (3.6)$$

จากกฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้

$$\frac{dy_s}{ds} = \left(\frac{dy_L}{dx}\right) \left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dy_a}{ds} \quad (3.7)$$

ดังนั้น

$$\frac{dy_L}{dx} = \frac{y_H}{x_H} \quad (3.8)$$

และ ในฟังก์ชันของค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อยๆ y'_s ทำให้สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปของ $\frac{dx}{ds}$ ได้ดังต่อไปนี้

$$x'_s = \frac{dx}{ds} = (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

เมื่อ

x'_s คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ x เทียบกับ s

จากสมการข้างต้นแสดงค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อย ซึ่งสมการที่ได้นี้เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ดังนั้นจะสามารถคำนวณหาค่าได้ก็ต่อเมื่อทราบค่า y_H และ x_H จากสมการ (3.8) และ (3.9) ทำให้เขียนสมการ (3.10) ได้ดังนี้

$$y'_s = \frac{y_H}{x_H} [1 - y_s'^2]^{\frac{1}{2}} - y'_a \quad (3.10)$$

โดยที่ x_H คือ ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวราบ
 y_H คือ ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง
 y'_s คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y_s เทียบกับ s

และเมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.2) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y'_a = [N']\{q\} \quad (3.11)$$

เมื่อ y'_a คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของค่าการแอ่นตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้นเทียบกับ s
 $[N']$ คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันรูปร่าง

ดังนั้น เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.10) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$y_s'' = - \frac{y_a''}{\left[1 + \frac{y_H}{x_H} \frac{y_s'}{\sqrt{1 - y_s'^2}} \right]} \quad (3.12)$$

และทำการอนุพันธ์สมการ (3.11) จะได้สมการความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

$$y_a'' = [N'']\{q\} \quad (3.13)$$

เมื่อ y_a'' คือ อนุพันธ์อันดับสองของ y เทียบกับ s
 $[N'']$ คือ อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันรูปร่าง

เมื่อแบ่งท่อลำเลียงของไหลออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆตามความยาวส่วนโค้งจำนวน N ชิ้น ทำให้สามารถหาค่าระยะแอนตัวตามแกน y ณ ความยาวส่วนโค้งที่พิจารณา y_s ได้โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งแต่ละชิ้นมีความยาวเท่ากับ l โดยสามารถทำการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$l = \frac{s_t}{N} \quad (3.14)$$

โดยที่ l คือ ความยาวส่วนโค้งย่อย
 N คือ จำนวนชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด
 s_t คือ ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด

จากสมการทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้นทำให้สามารถเขียนสมการของระบบพลังงานของชิ้นส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

$$\pi = \sum_{k=1}^N \pi_k \quad (3.15)$$

เมื่อ π_k คือ พลังงานของชิ้นส่วนย่อย

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพลังงานของชิ้นส่วนย่อย โดยเขียนให้อยู่ในรูปสมการการแปรผันของพลังงานรวมทั้งหมดจะเท่ากับศูนย์เมื่ออยู่ในสภาวะสมดุล

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i} = \int_0^l \left\{ [N]^T w_e - [N']^T T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} - [N'']^T m v^2 y_s'' \right\} ds = 0 \quad (3.16)$$

โดยที่ $\{Q_i\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระของระบบรวมทั้งหมด

ดังนั้นสามารถแสดง สมการในรูป ระบบรวมได้ดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} = 0 \quad (3.17)$$

3.2 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น

ในการแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถกระทำได้ด้วยการใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะทำให้ได้สมการที่ใช้คำนวณหาระบบการเพิ่มค่าตัวแปร (incremental equation) ดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \{\Delta Q\} = - \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} \quad (3.18)$$

เมื่อ i, j คือ ลำดับที่ของดีกรีอิสระซึ่งมีค่าเท่ากับ $1, 2, \dots, n$ จึงสามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็นดังนี้

$$[K]\{\Delta Q\} = -\{R\} \quad (3.19)$$

ดังแสดงค่าสตีเฟนสมเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม และ สมการแสดงค่าเวกเตอร์ของแรงในระบบรวม ดังต่อไปนี้

$$[K] = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right] \quad (3.20)$$

และ

$$\{R\} = \left[\frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right] \quad (3.21)$$

เมื่อ $[K]$ คือ สตีเฟนสมเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม
 $\{R\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงในระบบรวม

ดังนั้น ค่าสตีเฟนสมเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวมในสภาวะสมดุลที่ทำให้ค่า $\{\Delta Q\} = 0$ และ $\{R\} = 0$ สามารถเขียนสมการระบบรวมได้ดังนี้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i \partial q_j} = \int_0^l \left\{ [N']^T T_H \left[\frac{1}{(1 - y'^2_s)^{\frac{3}{2}}} \right] [N'] \right\} ds \quad (3.22)$$

3.3 เงื่อนไขขอบเขตของจตุรรองรับ

เงื่อนไขขอบเขตของเคเบิลแบบแคทีนารีที่ปลายทั้งสองเป็นดังนี้

ที่จุดปลายล่างหรือจุดเริ่มต้น	$s = 0$	จะมีค่า	$y_s(0) = 0$
ที่จุดปลายบนหรือจุดปลายสุดท้าย	$s = s_t$	จะมีค่า	$y_s(s_t) = y_H$

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์

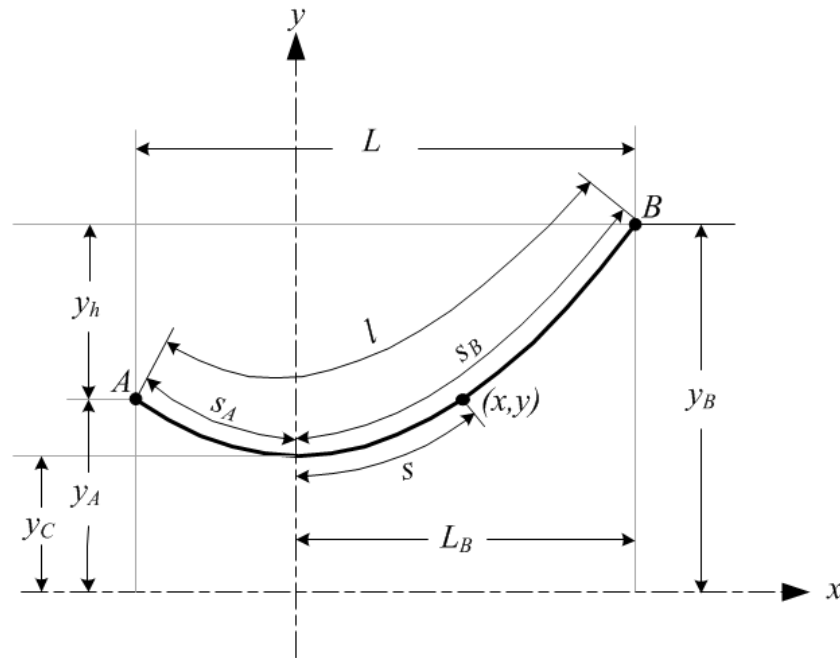
โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ได้ทำการศึกษาแบบจำลองของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีเมื่อท่อลำเลียงของไหลอยู่ในสภาวะสมดุล โดยมีผลกระทบเนื่องจากแรงภายนอก น้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงของไหล และแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อลำเลียงของไหล ซึ่งแรงทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้นส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึก จึงทำให้แบบจำลองนี้ต้องการวิเคราะห์และเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น อีกทั้งทำการเปรียบเทียบในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงที่ปลายบนของเคเบิล (T_H) การเปลี่ยนแปลงค่าความเร็ว (v) การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้ง (s_c) และการเปลี่ยนแปลงค่ายกระดับ (Y_H) โดยการนำผลที่วิเคราะห์ได้จากโปรแกรมฟอร์แทนมาทำการแสดงผลในรูปแบบกราฟและเปรียบเทียบผล ดังต่อไปนี้

4.1 การเปรียบเทียบผลกับการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการแคทีนารี

ก่อนทำการศึกษาวิเคราะห์พารามิเตอร์จำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโดยนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ของโปรแกรม และผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยของ Cella [8] โดยเปรียบเทียบกับการวิจัยของ Cella [8] นั้นได้นำผลที่ได้จากตัวโปรแกรมไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับสมการความแม่นยำของแคทีนารีเมื่ออยู่ในสภาวะที่จุดยึดปลายทั้งสองด้านของท่อลำเลียงของไหลอยู่ต่างระดับกันซึ่งอยู่ในกรณีเดียวกับงานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ พบว่า ผลเฉลยที่ได้จากสมการแม่นยำมีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ของโปรแกรม ซึ่งนำพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกันดังแสดงในตารางที่ 4.1 ประกอบด้วยคุณสมบัติดังต่อไปนี้ ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี น้ำหนักประสิทธิผล และค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง พร้อมทั้งผลจากการเปรียบเทียบข้อมูลในตารางที่ 4.2 พบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน

คุณสมบัติของเคเบิล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี	l	305	เมตร
2. น้ำหนักประสิทธิผล	w	13	นิวตันต่อเมตร
3. ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง	y_h	36	เมตร
4. แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ	T_x	8153.69	นิวตัน



รูปที่ 4.1 แสดงรายละเอียดของเส้น โคง์งเคทีนารีแบบขระคั้บ

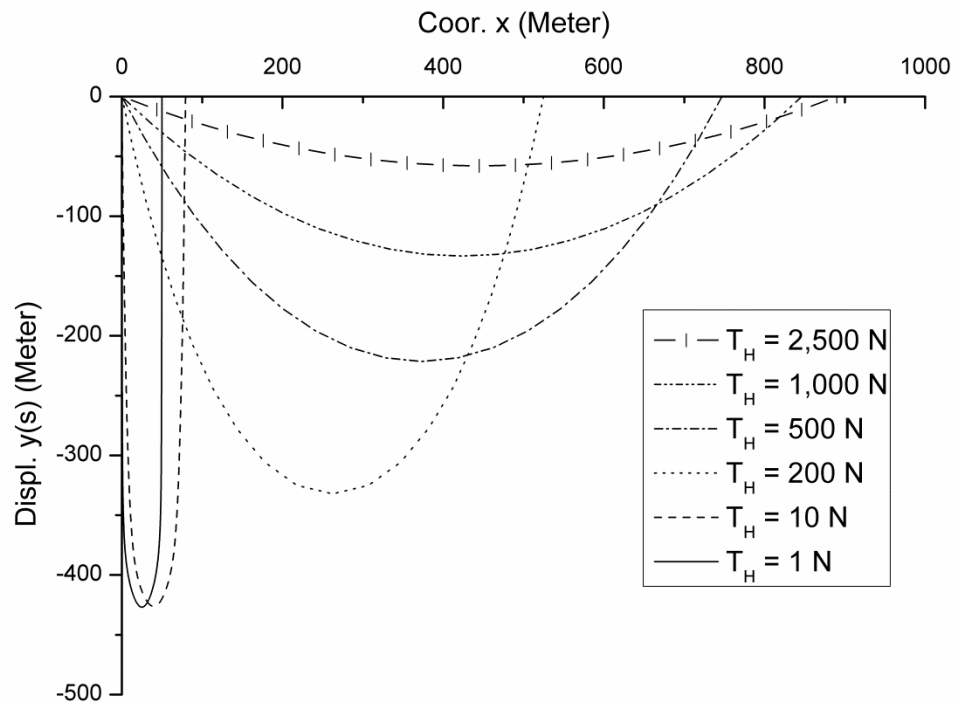
ตารางที่ 4.2 ผลการเปรียบเทียบค่าตอบเชิงตัวเลขกับงานวิจัยอื่น

คุณสมบัติของเคเบิล	หน่วย	งานวิจัยของ Cella [8]	งานวิจัยนี้
1. ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ (L)	เมตร	300	300
2. ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับที่สูงสุดจนถึง ระยะแอ่นตัวต่ำสุดของเคเบิล (L_B)	เมตร	224.3770	223.8400
3. ระยะในแนวค้งระหว่างจุดรองรับที่สูงสุดจนถึง ระยะแอ่นตัวต่ำสุดของเคเบิล ($y_B - y_C$)	เมตร	40.5644	40.5436

จากตารางที่ 4.2 จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อทำการเปรียบเทียบตัวแปรในการวิเคราะห์จะทำให้ได้ผลการเปรียบเทียบที่มีความสอดคล้องกันดังต่อไปนี้ ทำการกำหนดค่าความยาวส่วน โคง์ง น้ำหนักแผ่กระจาย ความต่างระดับในแนวค้ง และแรงปฏิกิริยาในแนวราบที่จุดรองรับให้มีค่าที่เท่ากัน เมื่อทำการวิเคราะห์ จากโปรแกรม และคำนวณจากสมการผลเฉลยของงานวิจัย พบว่า ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับที่สูงสุดจนถึงระยะแอ่นตัวต่ำสุดของเคเบิล และระยะในแนวค้งระหว่างจุดรองรับที่สูงสุดจนถึงระยะแอ่นตัวต่ำสุดของเคเบิล มีค่าใกล้เคียงกันเป็นอย่างมากดังข้อมูลที่แสดงในตารางที่ 4.2

4.2 สมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงแรงดึงในแนวราบที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน

ในกรณีนี้ได้แสดงผลโดยทำการเปลี่ยนแปลงแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิลที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยกำหนดให้มีความยาวที่เท่ากันและนำผลที่ได้มาทำการแสดงผลในรูปแบบกราฟ โดยมีคุณสมบัติของเคเบิลดังนี้ ไม่มีการขยักระดับในแนวตั้ง และไม่มีความเร็วในเคเบิลในทุกกรณี โดยใช้ชิ้นส่วนทั้งหมดในการคำนวณจำนวน 20 ชิ้น



รูปที่ 4.2 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของเคเบิลที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิล

จากรูปที่ 4.2 จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อทำการเปรียบเทียบตัวแปรในการวิเคราะห์จะทำให้ได้ผลการเปรียบเทียบที่มีความสอดคล้องกันดังต่อไปนี้ เมื่อทำการกำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง และน้ำหนักแผ่กระจายให้มีค่าคงที่ในทุกเส้นของเคเบิล แต่ทำการเปลี่ยนแปลงแรงปฏิกิริยาในแนวราบที่จุดรองรับให้มีค่าแตกต่างกันพบว่า เมื่อแรงปฏิกิริยานั้นมีค่าลงเรื่อยๆสายเคเบิลในแต่ละเส้นจะมีความแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆจนเข้าใกล้ศูนย์ในที่สุด และมีค่ามุมที่ปลายบนลดลง จนกระทั่งเคเบิลทั้งสองอยู่ในสภาวะสมดุล

แบบวางตัวขนานกันในแนวตั้ง และมีค่ามุมที่ปลายของเคเบิลเป็นศูนย์ ดังนั้นจากรูปแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าเมื่อลดแรงปฏิบัติการลงนั้นหมายความว่าค่าแรงดึงลดลงทำให้สายเคเบิลเกิดการหย่อนตัวเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆนั่นเอง

4.3 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงความเร็วที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน

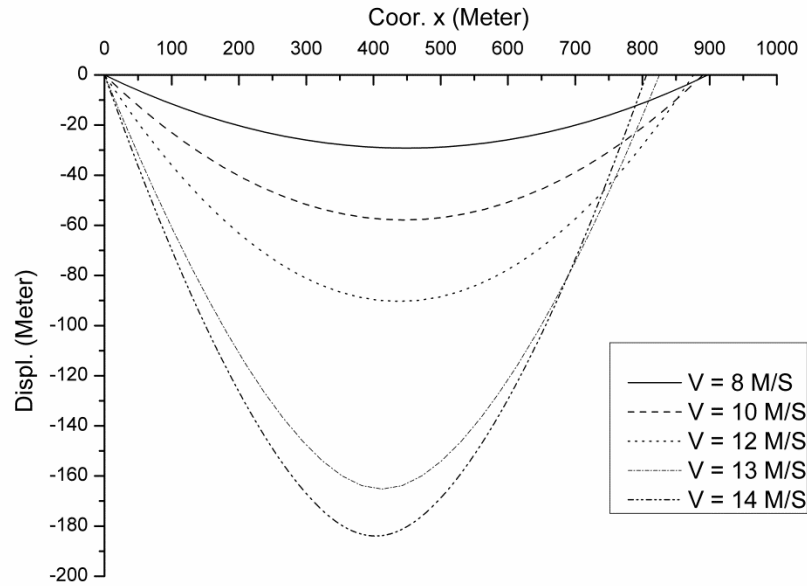
ในกรณีนี้ได้แสดงผล โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วภายในท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยกำหนดให้มีความยาวที่เท่ากันและนำผลที่ได้มาทำการแสดงผลในรูปแบบกราฟ โดยมีคุณสมบัติของท่อลำเลียงดังนี้ ไม่มีการยกกระดบในแนวตั้ง มีค่าแรงดึงที่ปลายบนเท่ากัน มีค่าความยาวส่วนโค้งเท่ากัน แต่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็วในท่อลำเลียง ดังแสดงข้อมูลการวิเคราะห์ให้เห็นในตารางที่ 4.3 ดังนี้

ตารางที่ 4.3 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน โดยเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วของของไหลภายในท่อลำเลียง

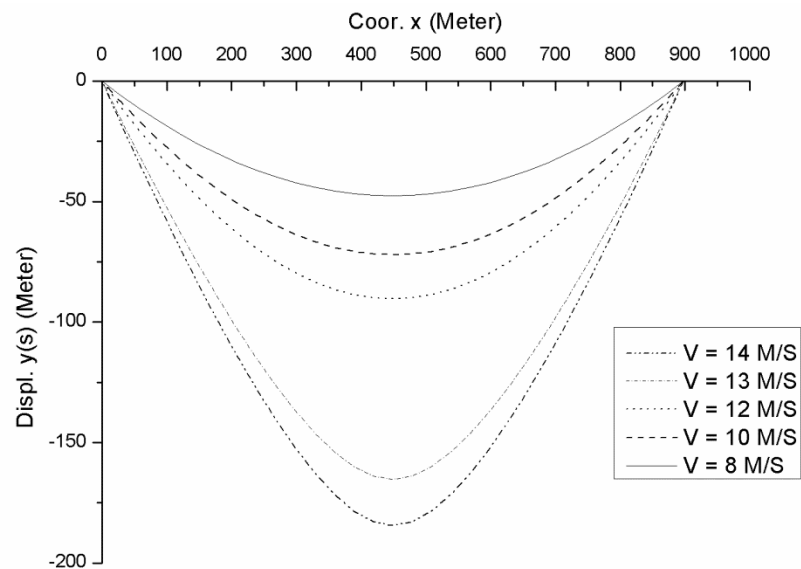
คุณสมบัติของท่อลำเลียงของไหล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. แรงดึงที่ปลายบน	T_H	5000	กิโลนิวตัน
2. ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง	Y_H	0	เมตร
3. ความยาวส่วนโค้ง	s_t	900	เมตร
4. ความเร็วของของไหลภายในท่อ	v	8, 10, 12, 13, 14	เมตรต่อวินาที

จากรูปที่ 4.3 แสดงพฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกันจะเห็นว่าเมื่อทำการวิเคราะห์แบบจำลอง สามารถแสดงผลดังต่อไปนี้กำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง แรงปฏิบัติการในแนวราบที่จุดรองรับ และน้ำหนักแผ่กระจายให้มีค่าคงที่ในทุกเส้นของท่อลำเลียง แต่ทำการเปลี่ยนแปลงความเร็วภายในท่อลำเลียงให้มีค่าแตกต่างกันพบว่า เมื่อเพิ่มความเร็วภายในท่อลำเลียงจะมีความแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้นจนมีค่าเข้าใกล้ค่าศูนย์ในที่สุด ดังนั้นจากรูปที่ 4.3 แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าเมื่อเพิ่มความเร็วภายในท่อลำเลียง ตั้งแต่ค่า 8, 10, 12, 13 และ 14 เมตรต่อวินาที หากใส่ค่าความเร็วมากเกินไป 14 เมตรต่อวินาทีแล้วจะทำให้กราฟที่ได้เกิดการหักงอและไม่เป็นเส้นโค้งแคทินารี ค่าความเร็วของของไหลภายในท่อลำเลียงที่นำมาวิเคราะห์ทั้งหมดจึงน้อยกว่า 14 เมตรต่อวินาที นั้นหมายความว่าเมื่อความเร็วเพิ่มขึ้นจะทำให้ท่อลำเลียงเกิดการหย่อนตัวเพิ่มมากขึ้นนั่นเอง และรูปที่ 4.4 แสดงพฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน และทำการเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วน

โค้งจะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าความยาวส่วนโค้งจะทำให้ระยะตามแนวแกน x มีค่าใกล้เคียงกันมากจนเปรียบเสมือนเป็นจุดเดียวกัน



รูปที่ 4.3 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน



รูปที่ 4.4 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงความเร็วของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับระดับเดียวกัน และเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้ง

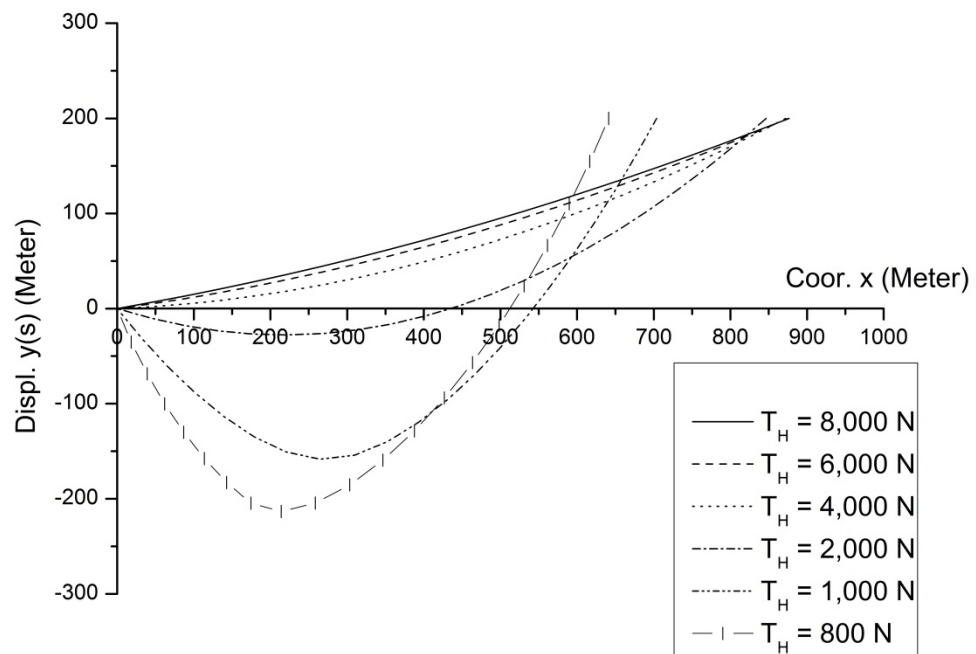
4.4 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงแรงดึงที่ปลายบน

สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงแรงดึงที่ปลายบนทางแนวราบที่แตกต่างกันและนำผลที่ได้มาทำการแสดงผลในรูปแบบกราฟ โดยมีคุณสมบัติของท่อน้ำเลี้ยงดังนี้ ความยาวส่วนโค้งของท่อน้ำเลี้ยงของไหล ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้งหรือระยะยกของท่อน้ำเลี้ยงของไหล และความเร็วของของไหล ภายในท่อน้ำเลี้ยงที่ในทุกกรณี ดังที่แสดงข้อมูลการวิเคราะห์ให้เห็นในตารางที่ 4.4 ซึ่งเปลี่ยนแปลงเพียงค่าแรงดึงที่ปลายบน ดังนี้

ตารางที่ 4.4 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อน้ำเลี้ยงของไหลที่มีความเร็วของของไหลภายในท่อในสถานะสมดุล ในกรณีที่เปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงที่จุดปลายบนของท่อน้ำเลี้ยงของไหลแบบแอ่นตัวมาก

คุณสมบัติของท่อน้ำเลี้ยงของไหล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. แรงดึงที่ปลายบน	T_H	1000, 2000, 4000, 6000, 8000	กิโลนิวตัน
2. ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง	Y_H	200	เมตร
3. ความยาวส่วนโค้ง	s_t	900	เมตร
4. ความเร็วของของไหลภายในท่อ	v	5	เมตรต่อวินาที

จากรูปที่ 4.5 จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อทำการกำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง ความเร็วของของไหลภายในท่อ และน้ำหนักแผ่กระจายให้มีค่าคงที่ในทุกเส้นของท่อน้ำเลี้ยง แต่ทำการเปลี่ยนแปลงแรงดึงที่ปลายบนของท่อน้ำเลี้ยงของไหลให้มีค่าแตกต่างกันพบว่า เมื่อเพิ่มค่าแรงดึงที่ปลายบนของท่อน้ำเลี้ยงของไหลเพิ่มมากขึ้นท่อน้ำเลี้ยงของไหลในแต่ละเส้นจะมีความแอ่นตัวลดลงจนมีความค่ามุมที่ปลายบนของท่อน้ำเลี้ยงเพิ่มมากขึ้น การแอ่นตัวลดลง ดังนั้นจากรูปแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า เมื่อเพิ่มค่าแรงดึงที่ปลายบนของท่อน้ำเลี้ยง จะทำให้ท่อน้ำเลี้ยงของไหลมีความแอ่นตัวลดลงทำให้ค่ามุมที่ปลายบนมีค่าเพิ่มขึ้นซึ่งในทางตรงกันข้ามเมื่อลดค่าแรงดึงที่ปลายบนของท่อน้ำเลี้ยงจะทำให้ท่อน้ำเลี้ยงของไหลมีความแอ่นตัวมากขึ้นทำให้ค่ามุมที่ปลายบนมีค่าลดลงตามไปด้วย



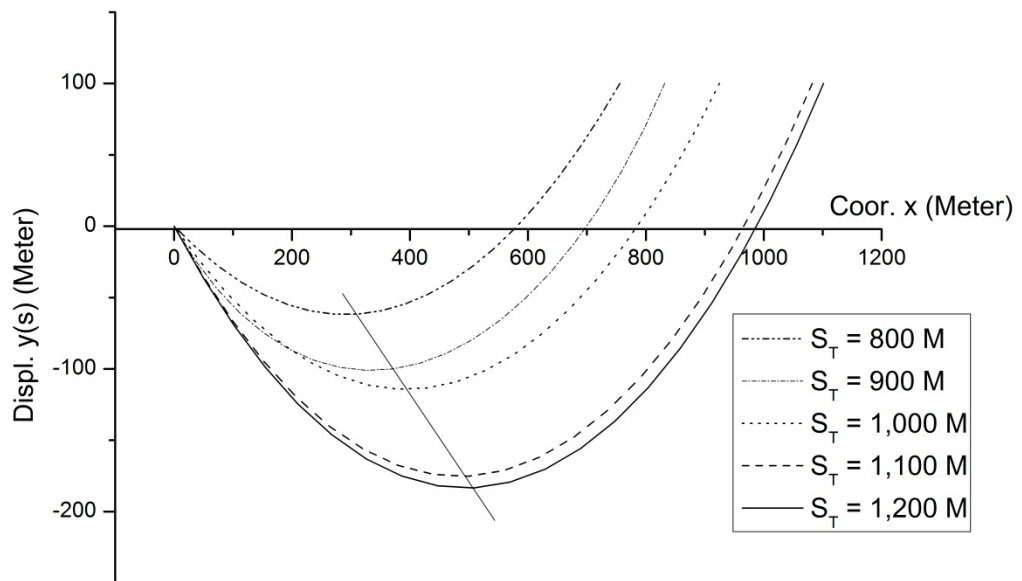
รูปที่ 4.5 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของท้อลำเลียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดึงที่จุดปลายบนทางแนวราบของท้อลำเลียงของไหลแบบแอนตัวมาก

4.5 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้ง

สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้งของท้อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยกำหนดให้มีความยาวที่แตกต่างกันและนำผลที่ได้มาแสดงผลในรูปแบบกราฟ โดยมีคุณสมบัติของท้อลำเลียงของไหลดังนี้ แรงดึงที่ปลายบนของท้อลำเลียงของไหล ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่งหรือระยะยกของท้อลำเลียงของไหล และความเร็วของของไหลภายในท้อมีค่าคงที่ในทุกกรณี ดังที่แสดงข้อมูลการวิเคราะห์ให้เห็นในตารางที่ 4.5 ซึ่งเปลี่ยนแปลงเพียงค่าความยาวส่วนโค้ง ดังนี้

ตารางที่ 4.5 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล
ในสภาวะสมดุล

คุณสมบัติของท่อลำเลียงของไหล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. แรงดึงที่ปลายบน	T_H	1000	กิโลนิวตัน
2. ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง	Y_H	100	เมตร
3. ความยาวส่วนโค้ง	s_t	800, 900, 1000, 1100, 1200	เมตร
4. ความเร็วของของไหลภายในท่อ	v	0	เมตรต่อวินาที



รูปที่ 4.6 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของท่อลำเลียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการ
เปลี่ยนแปลงค่าความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลแบบแอนตัวมาก

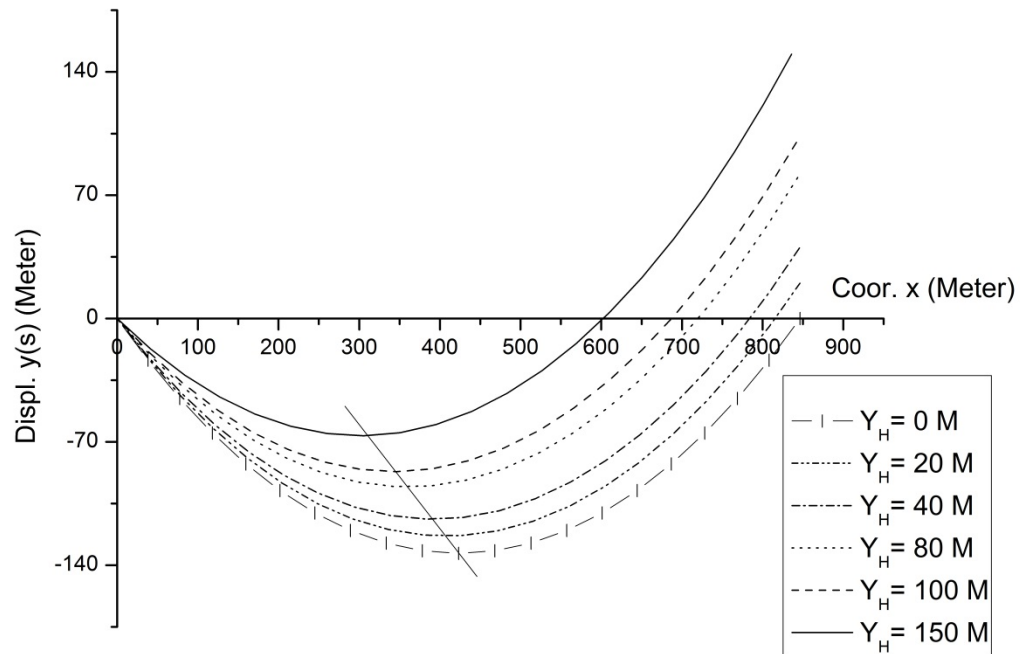
จากรูปที่ 4.6 แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องของเส้นทางเดินที่จุดต่ำสุดของเส้นโค้งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งในกรณีต่างๆ พบว่า ส่วนโค้งของการแสดงผลในรูปแบบกราฟมีแนวโน้มอยู่ในแนวเดียวกัน โดยสังเกตได้จากเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งในหลายๆ การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้ง และเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งระยะที่จุดปลายของท่อลำเลียงของไหลจะขยับเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อลดความยาวส่วนโค้งลง อีกทั้งมุมที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลในแต่ละเส้นจะมีมุมที่มืองศาใกล้เคียงกันจึงทำให้เส้นทางเดินที่จุดต่ำสุดของเส้นโค้งเป็นไปในทิศทางเดียวกัน

4.6 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่ง

สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่งของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยมีการเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่งที่แตกต่างกันและนำผลที่ได้มาทำการผลในรูปแบบกราฟ โดยมีคุณสมบัติของท่อลำเลียงของไหลดังนี้ แรงดึงที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหล ความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล และความเร็วของของไหลภายในท่อลำเลียงให้มีค่าคงที่ในทุกกรณี ดังที่แสดงข้อมูลการวิเคราะห์ให้เห็นในตารางที่ 4.6 ซึ่งเปลี่ยนแปลงเพียงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่ง ดังนี้

ตารางที่ 4.6 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่มีระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่งของท่อลำเลียงของไหลในสถานะสมดุล

คุณสมบัติของท่อลำเลียงของไหล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. แรงดึงที่ปลายบน	T_H	1000	กิโลนิวตัน
2. ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่ง	Y_H	0, 20, 40, 60, 80, 100, 150	เมตร
3. ความยาวส่วนโค้ง	s_t	900	เมตร
4. ความเร็วของของไหลภายในท่อ	v	0	เมตรต่อวินาที



รูปที่ 4.7 พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของท้อลำเอียงของไหลที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน โดยทำการเปลี่ยนแปลงค่าการยกระดับของจุดยึดทั้งสองด้านของท้อลำเอียงของไหลแบบแอนตัวมาก

จากรูปที่ 4.7 แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องของเส้นทางเดินที่จุดต่ำสุดของเส้นโค้งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง แสดงให้เห็นว่ามีแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงการแสดงผลในรูปแบบกราฟแนวเดียวกันในทุกๆกรณี โดยสังเกตได้จากเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งของการเปลี่ยนแปลงระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง และแสดงให้เห็นว่าเมื่อท้อลำเอียงของไหลนี้มีระยะความยาวส่วนโค้งคงที่ในทุกกรณีแต่ระดับในระยะที่แตกต่างกันทำให้เกิดการแอนตัวและมีค่ามุมที่ปลายบนสอดคล้องกันหรือเกือบเท่ากัน ดังนั้นแนวโน้มของแบบจำลองในกรณีเปลี่ยนแปลงค่าต่างระดับจะมีทิศทางของเส้นทางเดินที่จุดต่ำสุดไปในทิศทางที่สอดคล้องกัน

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ได้ทำการศึกษาแบบจำลองของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีเมื่อท่อลำเลียงของไหลอยู่ในสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเล ทำการศึกษาโดยใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์ด้วยวิธีการแปรผันสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นวิเคราะห์โดยหลักการงานพลังงาน ซึ่งทำการวิเคราะห์จากความเร็วของของไหลภายในท่อ น้ำหนักประสิทธิผล และแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหล และเพื่อให้การวิเคราะห์สะดวกยิ่งขึ้นจึงทำการวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำของวิธีนิวตัน-ราฟสัน โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงถูกพัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข และนำผลที่ได้มาทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี โดยการใช้ระเบียบวิธีสำหรับหาผลเฉลยแบบแม่นยำ (exact solution) ของสมการแคทีนารีแบบขยับระดับ พบว่า ผลที่ได้มีความสอดคล้องกัน และทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากโปรแกรมโดยการแสดงผลในรูปแบบกราฟ จึงสามารถสรุปผลได้ดังต่อไปนี้

1. เมื่อเพิ่มแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิลที่ระดับเดียวกัน ค่าความแอ่นตัวของเคเบิลจะมีค่าลดลง และมีค่ามุมที่ปลายบนเพิ่มขึ้น
2. เมื่อเพิ่มความเร็วของของไหลภายในเคเบิลที่ระดับเดียวกันค่าความแอ่นตัวของเคเบิลจะมีค่าเพิ่มมากขึ้น และมีค่ามุมที่ปลายบนเพิ่มมากขึ้น
3. เมื่อเพิ่มค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีแบบขยับระดับ จะมีค่ามุมที่ปลายบนเพิ่มขึ้น ในทางกลับกันจะมีค่ามุมที่ปลายล่างลดลง
4. เมื่อเพิ่มความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี พบว่า ค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลจะมีค่าเพิ่มขึ้น
5. เมื่อเพิ่มค่าขยับระดับ หรือ ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง ค่ามุมที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีจะมีค่าใกล้เคียงกัน

5.1 ข้อเสนอแนะ

1. พิจารณาการยึดตัวของท่อลำเลียงของไหล
2. พิจารณาการสั่นแบบอิสระของท่อลำเลียงของไหล
3. พิจารณาพฤติกรรมทางสถิติศาสตร์ และพลศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลเมื่อมีแรงภายนอกกระทำ

เอกสารอ้างอิง

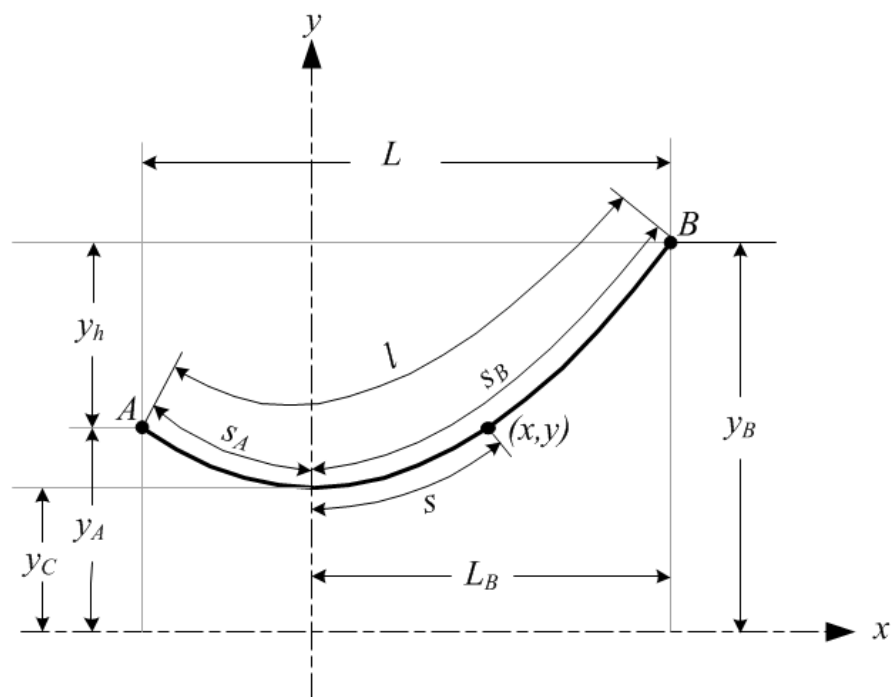
1. Moe, G. and Chucheepsakul, S., 1988, "The Effect of Internal Flow on Marine Risers", **International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, February 7-12, 1988, Houston, Texas, pp. 375-381.
2. Patel, M.H., and Seyed, F.B., 1989, "Internal flow-induced behavior of flexible risers" , **Journal of Structural Engineering** , 11, October , 1989, London, UK, pp. 266-280.
3. Wu, M.C. and Lou, J.Y.K., 1990, "Effects of Rigidity and Internal Flow on Marine Riser Dynamics", **Applied Ocean Research**, Vol. 13, No. 5, September, 1992, pp. 235-244.
4. Huang, 1993, "Kinematics of Transported Mass Inside Risers and Pipes", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 11, June 6-11, 1993, Singapore, pp. 331-336.
5. Chucheepsakul, S. and Huang, T., 1994, "Influence of Transported Mass on the Equilibrium Configuration of Risers", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 11, April 10-15, 1994, Osaka, Japan, pp. 246-250.
6. Moe, G., Stromsem, K.C., and Fylling, I., 1994, "Behaviour of Riser with Internal Flow Under Various Boundary Conditions", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 11, April 10-15, 1994, Osaka, Japan, pp. 258-262.
7. Chucheepsakul, S., Huang, T. and Monprapussorn, T., 2001, "Stability Analysis of Extensible Flexible Marine Pipes Transporting Fluid", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 11, June 17-22, 2001, Stavanger, Norway, pp. 722-729.
8. Cella, P., 1999, "Methodology for Exact Solution of Catenary", **Journal of Structural Engineering**, Vol. 125, No. 12, Dec, 1999, pp. 1451-1453.

ภาคผนวก ก

ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลี่ยของสมการแคทีนารี

ก.ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิต โดยสมการแคทีนารีนี้มีค่าการยกระดับที่จุดปลายบนของเคเบิลจึงมีความแตกต่างจากงานวิจัยอื่น อีกทั้งงานวิจัยดังกล่าวนี้มีความสอดคล้องกับต่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ จึงได้นำงานวิจัยระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีมาทำการวิเคราะห์ซึ่งงานวิจัยประกอบด้วยรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ ก.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกระดับ

คำนิยาม

- L = ระยะทางตามแนวราบของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- y_h = ค่าความต่างระดับในแนวดิ่งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- l = ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี
- s = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทีนารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งจนถึงจุดใดๆ (x, y)
- L_B = ระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง

y_B = ความสูงที่สูงขึ้นไปจากจุดเริ่มต้นของแกนจนถึงจุดยึดที่ปลายบนของ
เส้นโค้ง

s_B = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทินารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง
จนถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง

y_C = ระยะจากจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง

จากสมการเบื้องต้น

$$y = y_C \cosh \frac{x}{y_C} \quad (\text{ก.1})$$

$$s = y_C \sinh \frac{x}{y_C} \quad (\text{ก.2})$$

$$T = wy_C \cosh \frac{x}{y_C} \quad (\text{ก.3})$$

จากสมการเบื้องต้นทั้งสามสมการตามงานวิจัยดังกล่าวพบว่าจะมีจำนวนตัวแปรหลักทั้งหมดสี่ตัวที่
ต้องการหาผลเฉลย ได้แก่ L, y_h, l และ y_{B-C} ซึ่งถ้าสามารถทำการหาตัวแปรหลักได้จำนวนสาม
ในสี่ตัวแล้วก็จะสามารถทราบรูปทรงและขนาดของเส้นโค้งแคทินารีได้

จากสมการที่ (ก.1) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_C \cosh \frac{L_B}{y_C} \quad (\text{ก.4})$$

และสมการ

$$y_A = y_C \cosh \frac{L - L_B}{y_C} \quad (\text{ก.5})$$

จากสมการที่ (ก.2) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$s_B = y_C \sinh \frac{L_B}{y_C} \quad (\text{ก.6})$$

และ

$$l - s_B = y_C \sinh \frac{L - L_B}{y_C} \quad (\text{ก.7})$$

จากสมการทั้งหมดเมื่อนำสมการไฮเปอร์โบลิกทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการหาค่าผลเฉลย จะ
ได้สมการทั้งหมดที่ใช้ในการหาค่าตัวแปรหลักทั้งสี่ตัวแปรได้ ดังนั้นในงานวิจัยดังกล่าวจึงแนะนำ
ให้หาค่าตัวแปร y_C เป็นอันดับแรกเนื่องจากเป็นค่าตัวแปรที่มีความซับซ้อนที่สุด ซึ่งจะสามารถหา
ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{L_B}{y_C} = \frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \quad (\text{ก.8})$$

และสมการ

$$l = y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) - y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) \quad (\text{ก.9})$$

จากรูปที่ (ก.1) $y_B = y_C + (y_B - y_C)$ นำไปแทนค่าในสมการที่ (ก.4) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_C + (y_B - y_C) = y_C \cosh \frac{L_B}{y_C} \quad (\text{ก.10})$$

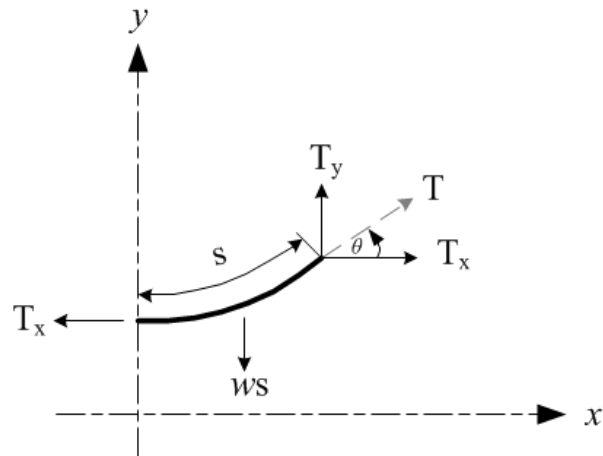
เมื่อทำการคำนวณค่า y_C ค่าจากสมการที่ (ก.9), ใช้สมการที่ (ก.8) หาค่า L_B และใช้สมการที่ (ก.
10) ในการคำนวณหาค่า $y_B - y_C$ ถ้าเกิดกรณีนอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วทั้ง 3 กรณีที่กล่าวมาแล้ว
สามารถทำการคำนวณค่าต่างๆได้ดังนี้

ในกรณีที่ไมทราบค่า l หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$y_h = y_B - y_C \cosh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (\text{ก.11})$$

ในกรณีที่ไมทราบค่า y_h หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$l = y_C \sinh \left(\cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) + y_C \sinh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (\text{ก.12})$$



รูปที่ ก.2 รายละเอียดแรงดึงของเส้น โคงแบบแคทีนารีย์ระดับ

วิธีการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตจากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวราบได้ดังต่อไปนี้

ที่จุดที่มีการแอนตัวที่ $x = 0$, $\cosh \frac{x}{y_c} = 1$ และ $\cos \theta = 1$ นำค่าทั้งหมดแทนในสมการ

$$T_x = w y_c \quad (\text{ก.13})$$

จากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวตั้งได้ดังต่อไปนี้ นำค่า s จากสมการ (ก.2) แทนลงในสมการ (ก.13) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$T_y = w s \sinh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.14})$$

ดังนั้น นั้นค่าแรงดึงสูงสุดที่ปลายบนของเส้น โคงแคทีนารีย์นี้สามารถหาค่าได้จาก

$$T = w s \cosh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.15})$$

ก.1 ตัวอย่างการคำนวณ

เมื่อศึกษาทฤษฎีงานวิจัยการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิตเป็นที่เรียบร้อยแล้วต่อไปจะแสดงตัวอย่างการคำนวณที่ใช้เปรียบเทียบค่าจากโปรแกรม โดยมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน ประกอบด้วยความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี น้ำหนักประสิทธิผล ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ และระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ ดังแสดงในตารางที่ ก.1

ตารางที่ ก.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน

คุณสมบัติของเคเบิล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี	l	305	เมตร
2. น้ำหนักประสิทธิผล	w	13	นิวตันต่อเมตร
3. ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง	y_h	36	เมตร
4. แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ	T_x	8153.69	นิวตัน
5. ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ	L	300	เมตร

จากสมการ (ก.9) สามารถหาค่าของระยะจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง (y_c) ได้ดังนี้

$$305 = y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}\right) - y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}\right)$$

$$y_c = 627.2069 \text{ เมตร}$$

เมื่อได้ค่าจุดอ้างอิงต่ำสุดเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จากสมการ (ก.8) สามารถหาค่าระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง (L_B) ได้ดังนี้

$$\frac{L_B}{627.2069} = \frac{300}{2(627.2069)} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}$$

$$L_B = 224.3777 \text{ เมตร}$$

จากรูปที่ ก.1 สามารถหาค่าระดับจากจุดต่ำสุดจนถึงจุดปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี ($y_B - y_C$) ได้ดังต่อไปนี้

$$627.2069 + (y_B - y_C) = 627.2069 \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$(y_B - y_C) = 40.5644 \text{ เมตร}$$

นอกจากระยะต่างๆของเส้นโค้งเคทีนารีแล้ว สามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับที่ปลายบนได้ โดยค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารีสามารถหาได้จากสมการ (ก.13) ได้ดังนี้

$$T_x = 13(627.2069) = 8153.69 \text{ นิวตัน}$$

และแรงดึงในแนวดิ่งที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี จากสมการ (ก.14) ดังนี้

$$T_y = 13(627.2069) \sinh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T_y = 2979.53 \text{ นิวตัน}$$

ดังนั้น ผลรวมของแรงดึงทั้งหมดสามารถหาค่าได้จากสมการ (ก.3)

$$T = 13(627.2069) \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T = 8681.03 \text{ นิวตัน}$$

ภาคผนวก ข
โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ข.1 ตัวแปรที่สำคัญในโปรแกรมคอมพิวเตอร์

EF()	=	เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อย
EI	=	ผลคูณของโมดูลัสความยืดหยุ่นกับโมเมนต์ความเฉื่อย
EK(.)	=	สติเฟเนสมเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อย
H	=	ความยาวของชิ้นส่วนย่อยตามส่วนโค้ง
IB	=	เงื่อนไขขอบเขตของจุดรองรับของชิ้นส่วนย่อย
ITMAX	=	จำนวนครั้งของการกระทำซ้ำมากที่สุดที่กำหนด
MBAND	=	จำนวนแถวของแบนด์เมตริกซ์
NDF	=	จำนวนดีกรีอิสระต่อจุดข้อ
NEL	=	ลำดับที่ของชิ้นส่วนย่อย
NELEM	=	จำนวนชิ้นส่วนย่อย
NODE	=	ลำดับที่ของจุดข้อ
NODI()	=	ลำดับที่ของจุดข้อด้านซ้ายของชิ้นส่วนย่อย
NODJ()	=	ลำดับที่ของจุดข้อด้านขวาของชิ้นส่วนย่อย
NUMDF	=	จำนวนดีกรีอิสระของระบบรวม
NUMNP	=	จำนวนจุดข้อของระบบรวม
Q()	=	ดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อย
QO()	=	ดีกรีอิสระของระบบรวม
SH()	=	แรงเฉือนที่เกิดขึ้น
SK(.)	=	สติเฟเนสมเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม
SL	=	ระยะช่วงพาด
ST	=	ความยาวส่วนโค้ง
TF()	=	เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อท่อ
TH	=	แรงดึงตามแนวราบที่ปลายบน
TOLER	=	ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด
WT()	=	ค่าสัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนักสำหรับจุดในการอินทิเกรตของ Gauss
XH	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวราบ
XT()	=	ค่าของตำแหน่งของจุดในการอินทิเกรตของ Gauss
YH	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง

ข.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

```

C      Program "Riser.for"
C      Finite element computer program for static equilibrium analysis of
C      inextensible cables with internal flow using Lagrangian coordinates
C      and cubic polynomials shape functions
C      Revised 14 October 2014
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK
      COMMON/BLKN/NEL
      COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
      COMMON/CINT/XT(4),WT(4)
      DIMENSION SK(200,4),EK(4,4),KON(200),QO(200),Q(4),KK(4),NODI(100)
      DIMENSION NODJ(100),TF(200),EF(4),P(4),R(4),S(4),IB(6),DQO(200)
      DIMENSION SX(200),TENODE(200),DYSND(200)
      CHARACTER*20 OUT
901  FORMAT(A)
      OPEN(UNIT=5,FILE='Riser_input',STATUS='UNKNOWN')
      WRITE(*,902)
902  FORMAT(' OUTPUT FILE NAME : ',\ )
      READ(*,901) OUT
      OPEN(6,FILE=OUT,STATUS='NEW')
      READ(5,*) LSTEP
      WRITE(6,2001)
2001  FORMAT('OUTPUT OF LAGRANGIAN CABLE PROGRAM "Riser.for"')
      READ(5,*) NELEM,ITMAX,TOLER,YH,ST,FTOP,WE,DE,DI,V,DENP,DENE,DENI
2002  FORMAT(10X,'NUMBER OF ELEMENTS      ',I5,/
      *      10X,'NUMBER OF ITERATIONS    ',I5,/
      *      10X,'TOLERANCE                ',F12.6,/
      *      10X,'SUPPORT ELEVATION        ',F12.6/

```



```
NODJ(J)=J+1
100 CONTINUE
  DO 25 I=1,2
    L1=(NDF+1)*(I-1)+1
    IB(L1)=NELEM*(I-1)+1
    IB(L1+1)=0
    IB(L1+2)=1
      IB(L1+3)=1
  25 CONTINUE
C
  CALL SETINT
C
  DO 55 I=1,NUMDF
    QO(I)=0.
  55 CONTINUE
      IF(LSTEP.EQ.1) THEN
        GOTO 57
      END IF
C
  56  READ(5,*,END=3000) YH,ST,FTOP,WE,DE,DI,V,DENP,DENE
      IF(WE.EQ.0.) THEN
        WE=GRAV*(DENP*AP-DENE*AE+DENI*AI)/1000.
      END IF
C
  57 CONTINUE
      DYS=0.
      DO 50 ITER=1,ITMAX
        DO 10 I=1,NUMDF
          TF(I)=0.
          DO 10 J=1,MBAND
            10 SK(I,J)=0.
```

```

        IF(ITER.EQ.1) THEN
            CK=0.
        ELSE
            CK=YH/SL
        END IF

    DO 1000 NEL=1,NELEM
        CALL ELEQ(KON,QO,Q)

        DO 20 I=1,4
            EF(I)=0.

            DO 20 J=1,4
20      EK(I,J)=0.

                DO 30 L=1,4

                    CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)

                    DO 40 I=1,4

                        EF(I)=EF(I)-FTOP*WT(L)*R(I)*DYS/DYSM1**0.5*DS
*           -WE*WT(L)*P(I)*DS-MI*V**2*DDYS*WT(L)*P(I)*DS

                            DO 40 J=1,4

                                EK(I,J)=EK(I,J)+FTOP*WT(L)*R(I)*R(J)/DYSM1**1.5*DS

40      CONTINUE
30      CONTINUE
C
        KK(2)=2*NODI(NEL)
        KK(4)=2*NODJ(NEL)
        KK(1)=KK(2)-1
        KK(3)=KK(4)-1
        DO 400 I=1,4
            II=KK(I)
            TF(II)=TF(II)-EF(I)
            DO 400 J=1,4
                IF(KK(J).LT.II) GOTO 400
                JJ=KK(J)-II+1

```

```

      SK(II,JJ)=SK(II,JJ)+EK(I,J)
400 CONTINUE
1000 CONTINUE
C
C INSERT BOUNDARY CONDITIONS
C
      CALL BOUND(SK,TF,IB,NUMDF,MBAND)
C
C SOLVE SIMULTANEOUS EQUATIONS
C
      CALL BANSOL(SK,TF,NUMDF,MBAND,200,4)
C
C INCREMENTAL PROCESS
C
      SUM=0.
      DO 70 I=1,NUMDF
      TEMP=QO(I)
      DQO(I)=TF(I)
      QO(I)=QO(I)+DQO(I)
      DIFF=ABS(TEMP-QO(I))
      SUM=SUM+DIFF
70 CONTINUE
      SL=0.
      DO 1010 NEL=1,NELEM
      CALL ELEQ(KON,QO,Q)
      SG=0.
      DO 60 L=1,4
      CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
60 SG=SG+WT(L)*DYSM1**0.5*DS
      SL=SL+SG
      ND=NEL+1

```

```

        SX(1)=0.
        SX(ND)=SL
        IF(NEL.EQ.1)THEN
            SII=0.D0
            CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
C     DYSND(1)=DYS
C     UPDATE DYS
        DYSND(1)=CK*(DYSM1)**0.5-QO(2)
C     UPDATE DYS NO2
        DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
C     UPDATE DYS NO3
        DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
C     UPDATE DYS NO4...
        DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
        SII=1.D0
        CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
        DYSND(2)=DYS
        DYSND(2)=CK*(1.-DYSND(2)**2)**0.5-Q(4)
        ELSE
            SII=1.D0
        CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
        DYSND(ND)=DYS
        END IF
1010 CONTINUE
C
C COMPUTE AXIAL TENSION
C
        SUM1=0.
        DO 500 NODE=1,NUMNP
            ND=2*NODE-1
            NDM1=ND+1

```

```

CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
      SKL=YH/SQRT(SL**2+YH**2)
      TAN=YH/SL
      ZETAT=ASIN(SKL)-ASIN(QO(NUMDF))
      ZETA=ASIN(SKL)-ASIN(QO(ND+1))
      ZETAN=ASIN(QO(ND+1))
      FTOPL=FTOP/COS(ASIN(DYSND(NUMNP)))
      TENODE(NODE)=FTOPL-WE*(YH-(TAN*SX(NODE)-QO(ND)))
500  CONTINUE
      IF(ABS(SUM).LE.TOLER) GOTO 90
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,107) ITER
107  FORMAT(/10X,'NUMBER OF ITERATION      ',I5)
C  PRINT OUT THE RESULTS
      CALL RESULT(QO,SL,YH,SX,TENODE,FTOPL,DYSND,V)
C  TEST FOR CONVERGENCE
50  CONTINUE
      WRITE(*,108)
108  FORMAT(10X,'NO CONVERGENCE')
90  CONTINUE
C
      GOTO 56
3000 STOP
      END

SUBROUTINE SETINT
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
COMMON/CINT/XI(4),W(4)
XI(1)=-0.861136311594053D0
XI(2)=-0.339981043584856D0

```

```
XI(3)=-XI(2)
XI(4)=-XI(1)
W(1)=0.347854845137453D0
W(2)=0.652145154862546D0
W(3)=W(2)
W(4)=W(1)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE ELEQ(KON,QO,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION KON(200),QO(200),Q(4)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK
COMMON/BLKN/NEL
L=2*(NEL-1)
N1=KON(L+1)
N2=KON(L+2)
K1=2*(N1-1)
K2=2*(N2-1)
DO 2 I=1,2
J1=K1+I
J2=K2+I
Q(I)=QO(J1)
2 Q(I+2)=QO(J2)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE SHAPE1(SI,P,R,S,DS,Q,DYS,DYSM1,DDYS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```

COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK
COMMON/BLKN/NEL
DIMENSION P(4),R(4),S(4),Q(4)
XI=(1.+SI)*DS
P(1)=1.-3.*XI**2/H**2+2.*XI**3/H**3
P(2)=XI*(1.-2.*XI/H+XI**2/H**2)
P(3)=3.*XI**2/H**2-2.*XI**3/H**3
P(4)=XI*(-XI/H+XI**2/H**2)
R(1)=(-6.*XI/H+6.*XI**2/H**2)/H
R(2)=1.-4.*XI/H+3.*XI**2/H**2
R(3)=(6.*XI/H-6.*XI**2/H**2)/H
R(4)=-2.*XI/H+3.*XI**2/H**2
S(1)=-6./H**2+12.*XI/H**3
S(2)=(-4.+6.*XI/H)/H
S(3)=6./H**2-12.*XI/H**3
S(4)=(-2.+6.*XI/H)/H
YA=P(1)*Q(1)+P(2)*Q(2)+P(3)*Q(3)+P(4)*Q(4)
DYA=R(1)*Q(1)+R(2)*Q(2)+R(3)*Q(3)+R(4)*Q(4)
  DDYA=S(1)*Q(1)+S(2)*Q(2)+S(3)*Q(3)+S(4)*Q(4)
  DYAM1=1.-DYA**2
  DYS1=CK*SQRT(1.-DYS**2)-DYA
DYSM=1.-DYS1**2.
  FDYS=DYS1-CK*SQRT(DYSM)+DYA
  DFDYS=1.+CK*DYS1/SQRT(DYSM)
  DYS=DYS1-FDYS/DFDYS
  DYSM1=1.-DYS**2
  DDYS=-DDYA/(1.+CK*DYS/((1.-DYS**2)**0.5))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE BOUND(SK,TF,IB,NUMDF,MBAND)
  IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
  COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
  DIMENSION SK(200,4),TF(200),IB(6)
  DO 100 L=1,2
    L1=(NDF+1)*(L-1)+1
    NO=IB(L1)
    K1=NDF*(NO-1)
    DO 90 I=1,NDF
      L2=L1+I
      IF(IB(L2)) 90,10,90
10    KR=K1+I
      DO 50 J=2,MBAND
        KV=KR+J-1
        IF(NUMDF-KV) 30,20,20
20    SK(KR,J)=0.
30    KV=KR-J+1
      IF(KV) 50,50,40
40    SK(KV,J)=0.
50    CONTINUE
      SK(KR,1)=1.
      TF(KR)=0.
90    CONTINUE
100   CONTINUE
      RETURN
      END

SUBROUTINE BANSOL(S,R,NSIZE,MBAND,NDIM,MDIM)
  IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
  DIMENSION S(NDIM,MDIM),R(NDIM)

```

```
700 DO 790 N=1,NSIZE
      DO 780 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 780
      I=N+L-1
      C=S(N,L)/S(N,1)
      J=0
      DO 750 K=L,MBAND
      J=J+1
750 S(I,J)=S(I,J)-C*S(N,K)
      S(N,L)=C
780 CONTINUE
790 CONTINUE
800 DO 830 N=1,NSIZE
      DO 820 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 820
      I=N+L-1
      R(I)=R(I)-S(N,L)*R(N)
820 CONTINUE
830 R(N)=R(N)/S(N,1)
      DO 860 M=2,NSIZE
      N=NSIZE+1-M
      DO 850 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 850
      K=N+L-1
      R(N)=R(N)-S(N,L)*R(K)
850 CONTINUE
860 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```

SUBROUTINE RESULT(QO,SL,YH,SX,TNODE,FTOPL,DYSND,V)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK
COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
COMMON/BLKN/NEL
DIMENSION X(200),QO(200),SX(200),TNODE(200),DYSND(200)
WRITE(6,110) FTOPL,FTOP,YH,SL,V
110 FORMAT(10X,'IN-LINE TENSION OF CABLE (FTOPL) ',F10.4,5X,'kN'/
* 10X,'HORIZONTAL TENSION (FTOP) ',F10.4,5X,'kN'/
* 10X,'SUPPORT ELEVATION ',F10.4,5X,'M'/
* 10X,'CABLE SPAN LENGTH ',F10.4,5X,'M'/
* 10X,'INTERNAL VELOCITY ',F10.4,5X,'M/SEC'/)
TAN=YH/SL
SK=YH/SQRT(SL**2+YH**2)
WRITE(6,111)
DO 80 L=1,NUMNP
NL=NUMNP-L
NL1=NL+1
DTS=NL*H
K1=NDF*NL+1
K2=K1+1
X(K1)=TAN*SX(NL1)-QO(K1)
SLOPE=ASIN(SK)-ASIN(QO(K2))
X(K2)=SIN(SLOPE)
80 WRITE(6,112) NL1,DTS,SX(NL1),X(K1),X(K2),DYSND(NL1)
*,ASIN(DYSND(NL1)),TNODE(NL1),TNODE(NL1)*COS(ASIN(DYSND(NL1)))
111 FORMAT(10X,'NODE',7X,'LENGTH S',5X,'COOR. X',3X,'DISPL. Y(S)',6X,
*'DY/DS',8X,'DYSND',6X,'ZETA(rad)',5X,'TENSION(kN)',8X,'TH(kN)'/)
112 FORMAT(7X,I5,5X,5F12.4,3X,F12.6,3X,F12.4,3X,F12.4)
RETURN
END

```

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาววรรณวิศา ศิริ
วัน เดือน ปีเกิด	31 สิงหาคม 2531
ประวัติการศึกษา	
ระดับมัธยมศึกษา	มัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนดำรงราษฎร์สงเคราะห์ จังหวัดเชียงราย พ.ศ. 2550
ระดับปริญญาตรี	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ พ.ศ. 2554
ระดับปริญญาโท	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมนอกฝั่ง)มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี พ.ศ. 2557
ประวัติการทำงาน	วิศวกรโยธา บริษัท อิตาเลียนไทย จำกัด(มหาชน) พ.ศ. 2554 - 2556 บริษัท ออริคอนคอนเซ็ปต์เทคโนโลยีไทยแลนด์ จำกัด(มหาชน) พ.ศ. 2556 – ปัจจุบัน