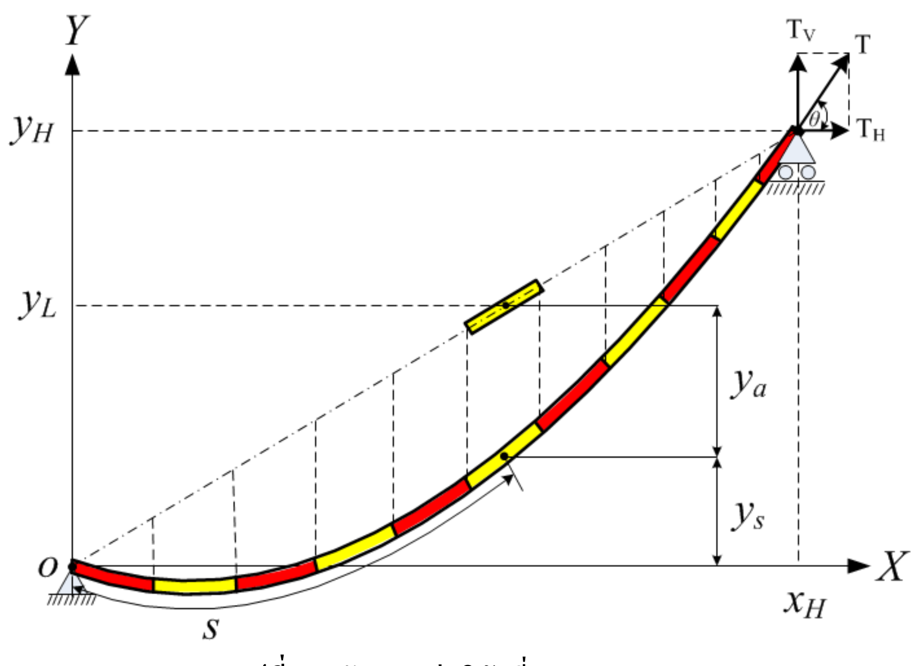
บทที่ 3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

จากทฤษฎีการวิเคราะห์และแก้ปัญหาสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นในบทที่ 2 จะเห็นได้ว่าสามารถทำการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของงานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ได้ซึ่งนำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้เพื่อหาคำตอบ โดยการแปรผันฟังก์ชันของพลังงานและงานเสมือนเพื่อเข้าสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการแบ่งท่อลำเลียงของไหลให้เป็นชิ้นส่วนย่อยๆ โดยมีอัตราส่วนเท่าๆกันในแต่ละชิ้นส่วน กำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตและทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบ Gaussian quadrature ในแต่ละชิ้นส่วนย่อยๆเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือทั้งหมดให้ของระบบรวม และหาคำตอบของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน

3.1 การแก้ปัญหาด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำได้โดยการแบ่งท่อลำเลียงของไหลตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ และทำการสร้างแบบจำลองในการวิเคราะห์โดยการกำหนดจุดปลายทั้งสองด้านของชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะมีดีกรีอิสระจำนวน 4 ตัว ประกอบด้วยดีกรีอิสระของการแอ่นตัว (y_s) และค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อยๆ (y_s') ซึ่งในการวิเคราะห์แบบจำลองดังกล่าวนี้จะทำการพิจารณาในกรณีระยะแอ่นตัวในแนวแกน y



รูปที่ 3.1 ลักษณะค่าพิกัดที่สภาวะสมดุล

จากรูปที่ 3.1 ท่อลำเลียงของไหลประกอบด้วยพิกัดของชิ้นส่วนย่อยโดยสามารถนำเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y_s = y_L - y_a \tag{3.1}$$

เมื่อ

y_s	คือ	ค่าระยะแอ่นตัวตามแกน y ณ ความยาวส่วนโค้งที่พิจารณา
y_L	คือ	ค่าระยะแอ่นตัวแบบไม่เชิงเส้น
y_a	คือ	ค่าระยะแอ่นตัวแบบไม่เชิงเส้น

ณ ตำแหน่งต่างๆของท่อลำเลียงของไหลนี้สามารถทำการประมาณค่าระยะแอ่นตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น (y_a) ได้ดังต่อไปนี้

$$y_a = \lfloor N \rfloor \{q\} \tag{3.2}$$

เมื่อ	$\lfloor N \rfloor$	คือ	เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง
	$\{q\}$	คือ	เวคเตอร์ของดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อย

ดังนั้น สามารถแสดงสมการในรูปแบบของฟังก์ชันรูปร่างของเมตริกซ์สำหรับการเคลื่อนที่จากชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหลโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีจำนวนดีกรีอิสระจำนวน 4 ตัวได้ดังต่อไปนี้

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \tag{3.3}$$

เมื่อเข้าสู่ระบบการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำการเขียนค่าตัวแปรของดีกรีอิสระได้ดังนี้

$$N_1 = 1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \tag{3.4a}$$

$$N_2 = s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \tag{3.4b}$$

$$N_3 = 3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \tag{3.4c}$$

$$N_4 = -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \tag{3.4d}$$

เมื่อชิ้นส่วนย่อยประกอบด้วยเวกเตอร์ของดีกรีอิสระ $\{q\}$ ดังนี้

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_a(0) \\ y_a'(0) \\ y_a(l) \\ y_a'(l) \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

อนุพันธ์สมการ (3.1) เทียบกับ ds จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy_s}{ds} = \frac{dy_L}{ds} - \frac{dy_a}{ds} \tag{3.6}$$

จากกฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้

$$\frac{dy_s}{ds} = \left(\frac{dy_L}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dy_a}{ds} \tag{3.7}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy_L}{dx} = \frac{y_H}{x_H} \tag{3.8}$$

และ ในฟังก์ชันของค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อยๆ y_s' ทำให้สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปของ $\frac{dx}{ds}$ ได้ดังต่อไปนี้

$$x_s' = \frac{dx}{ds} = (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

เมื่อ

x_s' คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ x เทียบกับ s

จากสมการข้างต้นแสดงค่ามุมที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแอ่นตัวของท่อลำเลียงของไหลตามชิ้นส่วนย่อย ซึ่งสมการที่ได้นี้เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ดังนั้นจะสามารถคำนวณหาค่าได้ก็ต่อเมื่อทราบค่า y_H และ x_H จากสมการ (3.8) และ (3.9) ทำให้เขียนสมการ (3.10) ได้ดังนี้

$$y_s' = \frac{y_H}{x_H} [1 - y_s'^2]^{\frac{1}{2}} - y_a' \tag{3.10}$$

โดยที่ x_H คือ ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวราบ

y_H คือ ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวดิ่ง

y_s' คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y_s เทียบกับ s

และเมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.2) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_a' = \lfloor N' \rfloor \{q\} \tag{3.11}$$

เมื่อ y_a' คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของค่าการแอ่นตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้นเทียบกับ s

$\lfloor N' \rfloor$ คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันรูปร่าง

ดังนั้น เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.10) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$y_s'' = -\frac{y_a''}{\left[1 + \frac{y_H}{x_H}\frac{y_s'}{\sqrt{1 - y_s'^2}}\right]} \tag{3.12}$$

และทำการอนุพันธ์สมการ (3.11) จะได้สมการความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

$$y_a'' = \lfloor N'' \rfloor \{q\} \tag{3.13}$$

เมื่อ	y_a''	คือ	อนุพันธ์อันดับสองของ y เทียบกับ s
	$\lfloor N'' \rfloor$	คือ	อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันรูปร่าง

เมื่อแบ่งท่อลำเลียงของไหลออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆตามความยาวส่วนโค้งจำนวณ N ชิ้น ทำให้สามารถหาค่าระยะแอ่นตัวตามแกน y ณ ความยาวส่วนโค้งที่พิจารณา y_s ได้โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งแต่ละชิ้นมีความยาวเท่ากับ l โดยสามารถทำการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$l = \frac{s_t}{N} \tag{3.14}$$

โดยที่	l	คือ	ความยาวส่วนโค้งย่อย
	N	คือ	จำนวนชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด
	s_t	คือ	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด

จากสมการทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้นทำให้สามารถเขียนสมการของระบบพลังงานของชิ้นส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

$$\pi = \sum_{k=1}^{N} \pi_k \tag{3.15}$$

เมื่อ π_k คือ ฟังก์ชันพลังงานของชิ้นส่วนย่อย

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพลังงานของชิ้นส่วนย่อย โดยเขียนให้อยู่ในรูปสมการการแปรผันของพลังงานรวมทั้งหมดจะเท่ากับศูนย์เมื่ออยู่ในสภาวะสมดุล

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i} = \int_0^l \left\{ \lfloor N \rfloor^T w_e - \lfloor N' \rfloor^T T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} - \lfloor N'' \rfloor^T m v^2 y_s'' \right\} ds = 0 \tag{3.16}$$

โดยที่ $\{Q_i\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระของระบบรวมทั้งหมด

ดังนั้นสามารถแสดง สมการในรูป ระบบรวมได้ดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} = 0 \tag{3.17}$$

3.2 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น

ในการแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถกระทำได้ด้วยการใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะทำให้ได้สมการที่ใช้คำนวณหาระบบการเพิ่มค่าตัวแปร (incremental equation) ดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \{\Delta Q\} = -\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} \tag{3.18}$$

เมื่อ i, j คือ ลำดับที่ของดีกรีอิสระซึ่งมีค่าเท่ากับ 1,2,…,n จึงสามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็นดังนี้

$$[K]\{\Delta Q\} = -\{R\} \tag{3.19}$$

ดังแสดงค่าสติฟเนสเมตริกแบบไม่เป็นเป็นเชิงเส้นของระบบรวม และ สมการแสดงค่าเวกเตอร์ของแรงในระบบรวม ดังต่อไปนี้

$$[K] = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right] \tag{3.20}$$

และ

$$\{R\} = \left[\frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right] \tag{3.21}$$

เมื่อ $[K]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม

$\{R\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงในระบบรวม

ดังนั้น ค่าสติฟเนสเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวมในสภาวะสมดุลที่ทำให้ค่า $\{\Delta Q\} = 0$ และ $\{R\} = 0$ สามารถเขียนสมการระบบรวมได้ดังนี้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i \partial q_j} = \int_0^l \left\{ \lfloor N' \rfloor^T T_H \left[\frac{1}{(1 - y'^2_s)^{\frac{3}{2}}} \right] \lfloor N' \rfloor \right\} ds \tag{3.22}$$

3.3 เงื่อนไขขอบเขตของจุดรองรับ

เงื่อนไขขอบเขตของเคเบิลแบบแคทีนารีที่ปลายทั้งสองเป็นดังนี้

ที่จุดปลายล่างหรือจุดเริ่มต้น $s = 0$ จะมีค่า $y_s(0) = 0$

ที่จุดปลายบนหรือจุดปลายสุดท้าย $s = s_t$ จะมีค่า $y_s(s_t) = y_H$