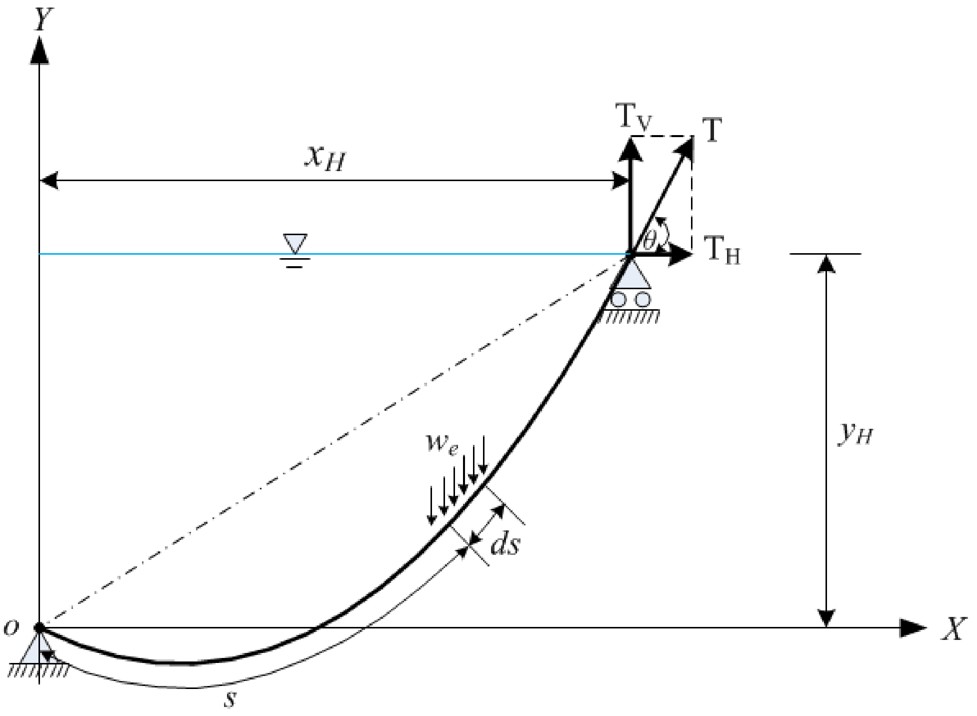
บทที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อการวิเคราะห์ผลกระทบเนื่องจากของเหลวที่ไหลภายในท่อด้วยความเร็วคงที่ต่อสภาวะสมดุลสถิตในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ความยาวส่วนโค้งเป็นตัวแปรอิสระ และให้ระยะที่วัดจากแนวราบที่กำหนดในตำแหน่งสมดุลต่างๆของท่อเป็นตัวแปรตาม โดยอาศัยหลักการแปรผันงาน พลังงานของระบบท่อลำเลียง และวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้นเพื่อหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยมีทฤษฎีในการวิเคราะห์ต่างๆดังนี้

2.1 สถิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

การวางตัวของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีระหว่างจุด 2 จุดโดยจุดด้านล่างเป็นแบบยึดหมุนได้ (hinge support) เปรียบเสมือนตัวค้ำยันท่อลำเลียงของไหล และจุดด้านบนเป็นแบบเคลื่อนที่ได้ (roller support) ซึ่งเคลื่อนที่ได้เฉพาะในแนวราบเปรียบเสมือนแท่นขุดเจาะน้ำมันแบบลอยน้ำ (floating platform) และมีแรงดึงในแนวราบ (T_H) กระทำเพื่อรักษาสภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหล ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

จะเห็นได้ว่าท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีนั้นวางตัวอยู่ระหว่างจุดยึดทั้งสองด้านแต่มีความต่างระดับของจุดยึดทั้งสองด้าน (Y_H) ท่อประเภทนี้มักนำมาใช้งานเป็นที่แพร่หลายในงานขุดเจาะน้ำมันนอกชายฝั่งทะเลลึกโดยทำหน้าที่เป็นท่อลำเลียงน้ำมัน (riser) จากปากหลุมเจาะที่นำน้ำมันขึ้นมาจากใต้พื้นทะเลที่มีความลึกมากๆ โดยจุดปลายบนทำการยึดติดกับแท่นขุดเจาะแบบต่างๆ ซึ่งมีทั้งแท่นขุดเจาะน้ำมัน และเรือขุดเจาะประเภทต่างๆตามความเหมาะสม ส่วนปลายด้านล่างนั้นอยู่บนพื้นทะเล ซึ่งในการวิเคราะห์งานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้จะทำการวิเคราะห์ในสภาวะที่มีการแอ่นตัวมากภายในสภาวะสมดุล โดยตัวแปรที่สำคัญในงานวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เน้นพฤติกรรมแบบสถิตของท่อลำเลียงของไหลที่ไหลด้วยความเร็วภายในท่อ

2.2 สมมติฐานการวิเคราะห์

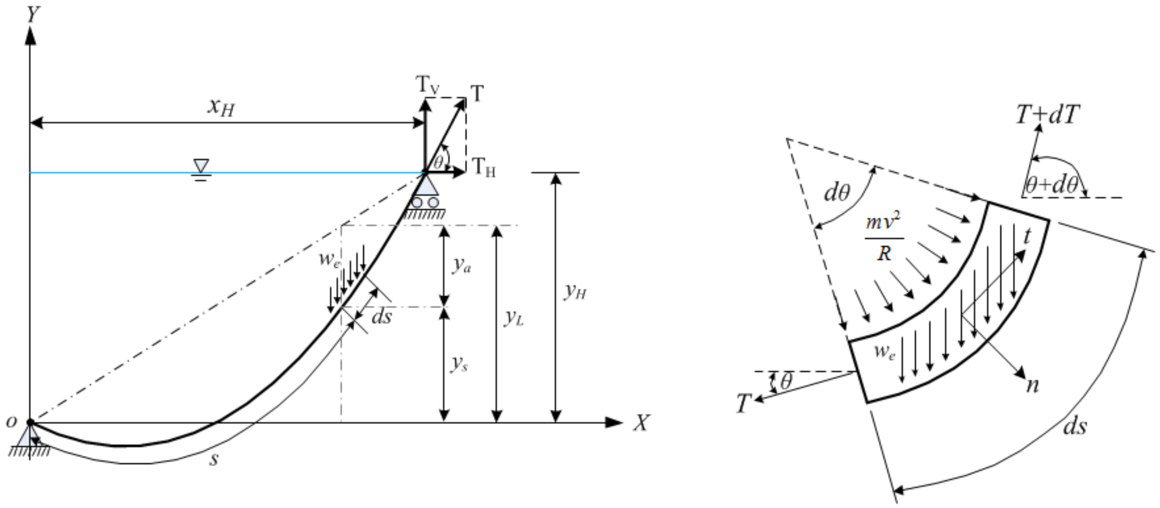
สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. ไม่คำนึงถึงผลของการยืดตัวหรือหดตัวตามแนวแกนท่อเมื่อรับแรง
2. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือน
3. การแอ่นตัวของท่อมีค่ามาก แต่ความเครียดมีค่าน้อย
4. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเสียดทานระหว่างท่อ และจุดรองรับ
5. ไม่คำนึงถึงผลของแรงดัดในเบื้องต้น
6. ไม่คำนึงถึงแรงภายนอกที่มากระทำ นอกจากน้ำหนักของท่อ และแรงกระทำจากของไหลในท่อ

2.3 สมการสมดุล

พิจารณารูปที่ 2.2 จะพบว่าประกอบด้วยแรงกระทำดังต่อไปนี้ แรงตามแนวแกนในแนวราบ (T_H) แรงเนื่องจากน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล (W_e) และแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อ (W_i) อีกทั้งมีแรงกระทำตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อซึ่งประกอบด้วย แรงกระทำตามแนวสัมผัสกับแนวท่อ (P_t) แรงกระทำตั้งฉากกับแนวท่อ (P_n) และแรงจากความเร็วของของไหลภายในท่อจากแรงดังกล่าวสามารถหาสมการสมดุล จากสมการสมดุลของแรงกระทำต่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีในสภาวะสมดุลซึ่งทำการวิเคราะห์ตามความยาวส่วนโค้ง s โดยจะทำการแบ่งท่อลำเลียงของไหลดังกล่าวออกเป็น

ชิ้นส่วนย่อยๆ การทำการวิเคราะห์ ตามความยาวส่วนโค้งย่อยๆนี้ เรียกว่า ds ดังนั้นความยาวส่วนโค้งจากจุดยึดแบบไม่เคลื่อนที่เริ่มต้นไปจนถึงจุดปลายที่สามารถเคลื่อนที่ได้ตามแนวราบ ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 ท่อลำเลียงของไหลภายใต้สภาวะสมดุลและชิ้นส่วนย่อยของท่อภายใต้สภาวะสมดุล

เมื่อสมดุลของแรงในทิศทางตั้งฉากกับแนวท่อ ($\sum F_n = 0$) จะได้

$$-T\frac{d\theta}{ds} + P_n + \frac{mv^2}{R} = 0 \tag{2.1}$$

เมื่อสมดุลของแรงในทิศทางสัมผัสกับแนวท่อ $\sum F_t = 0$ จะได้

$$\frac{dT}{ds} + P_t = 0 \tag{2.2}$$

เมื่อทำการวิเคราะห์ค่าความยาวโค้งตามชิ้นส่วนย่อยๆ สามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงมุมต่อความยาวเส้นโค้ง ($d\theta$) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \tag{2.3}$$

เมื่อ ds คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยของท่อ

θ คือ ค่ามุมของท่อลำเลียงของไหลวัดจากแนวราบไปยังแนวแกน

κ คือ ค่าความโค้ง

ρ คือ รัศมีความโค้ง

เมื่อแทนค่าแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยต่างๆ และในแบบจำลองนี้กำหนดให้ไม่คิดค่าของแรงดัด ดังนั้น $EI = 0$ ดังนั้น ค่าแรงเฉือนในสมการจึงไม่นำมาวิเคราะห์ในแบบจำลองนี้

2.4 การวิเคราะห์แบบจำลองโดยวิธีแปรผัน

จากการวิเคราะห์แรงต่างๆที่กระทำต่อท่อเลียงของไหลในสภาวะสมดุลนั้น ทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังสมการที่ (2.4) เนื่องจากสมการดังกล่าวสามารถทำการวิเคราะห์หาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ แต่ในการวิเคราะห์โดยใช้สมการหาผลเชิงตัวเลขนั้นมีความยุ่งยากในการวิเคราะห์เป็นอย่างมาก ดังนั้น จึงได้นำวิธีการสร้างฟังก์ชันงานและพลังงานขึ้นเพื่อใช้ในการช่วยทำการวิเคราะห์แบบจำลองนี้ สมการพลังงานคือแรงที่เกิดขึ้นภายในของท่อลำเลียงของไหลและงานเสมือนคือแรงกระทำที่เกิดขึ้นภายนอกของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งประกอบด้วยหลักการดังต่อไปนี้

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงดัดและความโค้งของชิ้นส่วนย่อย สามารถแสดงแรงดัดให้อยู่ในพจน์ของ y ได้ดังต่อไปนี้

ในพจน์ของ dy และ ds สามารถพิจารณาได้จากมุม $\sin\theta$ ได้ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{dy_s}{ds} \tag{2.4}$$

สามารถเปลี่ยนรูปสมการ (2.4) ให้อยู่ในรูปมุม ได้ดังนี้

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{dy_s}{ds}\right) \tag{2.5}$$

เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ s ทั้งสองข้างจะได้สมการดังนี้

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y_s''}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.6}$$

โดยที่ y_s' คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ y เทียบกับ s

y_s'' คือ อนุพันธ์อันดับสองของ y เทียบกับ s

2.4.1 งานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงกระทำที่ปลาย

เมื่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีมีพฤติกรรมการวางตัวโดยมีปลายทั้งสองด้านอยู่ในสภาวะที่มีความต่างระดับกันโดยปลายด้านบนจุดยึดแบบเป็นล้อเลื่อนที่สามารถทำการเคลื่อนที่ได้ในแนวราบ และปลายด้านล่างเป็นเป็นจุดยึดรองรับเป็นแบบหมุนที่สามารถเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นเมื่อจุดยึดที่ปลายด้านบนถูกแรงกระทำในแนวดิ่ง (T_V) และ แรงกระทำในแนวราบ (T_H) จุดยึดแบบเป็นล้อเลื่อนจะทำการเคลื่อนที่ในแนวราบทำให้ท่อลำเลียงของไหลเกิดพฤติกรรมการแอ่นตัวเกินขึ้นจนในที่สุดแรงกระทำดังกล่าวได้ดันล้อเลื่อนไปถึงจุดจุดหนึ่งจะทำให้ท่อลำเลียงของไหลสามารถอยู่ได้ในสภาวะสมดุลได้จากพฤติกรรมดังกล่าวของท่อลำเลียงของไหลสามารถนำมาวิเคราะห์และเขียนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ดังนี้

$$ds^2 = (dx - du)^2 + dy_s^2 \tag{2.7}$$

นำค่า ds^2 หารสมการ (2.7) โดยตลอด จะได้สมการ ดังต่อไปนี้

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx - du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{ds}\right)^2 \tag{2.8}$$

เมื่อค่าของ dx มีค่าเท่ากับ ds ตามแนวแกน x ดังนั้น

$$dx = ds \tag{2.9}$$

เมื่อนำค่าจากสมการ (2.9) แทนค่าในสมการ (2.8) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$u' = \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \tag{2.10}$$

เมื่อเปลี่ยนรูปของความสัมพันธ์ระหว่างระยะเคลื่อนที่ตามแนว x คือ du กับความยาวส่วนโค้งคือ ds จะได้สมการระยะการเคลื่อนที่ ดังต่อไปนี้

$$du = \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \tag{2.11}$$

เปลี่ยนรูปความสัมพันธ์โดยการอินทิเกรทสมการ (2.11) จะสามารถหาผลรวมระยะเคลื่อนที่ในแนวแกน x ได้เท่ากับ Δ_x ตามสมการ ดังต่อไปนี้

$$\Delta_x = \int_0^{s_t} \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}\right] ds \tag{2.12}$$

เพราะฉนั้นจากสมการทั้งหมดที่กล่าวมานั้นจะสามารถแสดงให้เห็นสมการงานเสมือนจากแรงภายนอกทั้งหมดจากการวิเคราะห์ ดังนี้

$$W_T = \left\{ T_H \Delta_x \big|^{s_t} + T_V \Delta_y \Big|^{s_t} \right\} \tag{2.13}$$

จากการวิเคราะห์พบว่าท่อลำเลียงของไหลมีการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x เท่านั้น เนื่องจากการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y นั้นมีค่าน้อยมากจนเกือบเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการงานเสมือนที่จุดรองรับจึงไม่นำค่าตามแนวแกน y มาทำการวิเคราะห์ในแบบจำลองนี้ ดังนั้นจึงทำให้เกิดสมการดังต่อไปนี้

$$W_T = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \left[1 - (1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} ds \tag{2.14}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการในรูปการแปรผัน ดังต่อไปนี้

$$\delta W_T = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \delta y_s' ds \tag{2.15}$$

2.4.2 งานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผล

เมื่อท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีมีแรงกระทำจากภายนอกเกิดขึ้นและอยู่ภายในสภาวะสมดุล จึงส่งผลให้แรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงของไหลนั้นแผ่กระจายไปตลอดทั้งความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลจึงทำให้ท่อเกิดพฤติกรรมการเคลื่อนตัวเกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล ดังนั้นในการวิเคราะห์แบบจำลองนี้จึงได้นำหลักการงานเสมือนมาใช้ในการวิเคราะห์แรงเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงของไหลได้ดังต่อไปนี้

$$W_w = -\int_0^{s_t} w_e y_s ds \tag{2.16}$$

เมื่อ w_e คือ แรงที่เกิดเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อรวมกับของไหลภายในท่อ ดังนั้นจะได้สมการ

$$W_w = \left(\rho_p A_p - \rho_e A_e + \rho_i A_i\right) g \tag{2.17}$$

เมื่อ A_e คือ พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ
A_i คือ พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ
A_p คือ พื้นที่หน้าตัดของท่อ
g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
ρ_e คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล
ρ_i คือ ความหนาแน่นของของไหลภายในท่อ
ρ_p คือ ความหนาแน่นของท่อ

โดยสามารถเปลี่ยนรูปให้อยู่ในรูปสมการการแปรผันได้ ดังต่อไปนี้

$$\delta W_w = -\int_0^{s_t} w_e \delta y_s ds \tag{2.18}$$

2.4.3 งานเสมือนที่เกิดจากของไหลภายในท่อ

เมื่อท่อลำเลียงของไหลมีของไหลไหลอยู่ภายในท่อ จะส่งผลทำให้เกิดแรงเนื่องจากความเร็วของของไหลขึ้นซึ่งความเร็วของของไหลภายในท่อนี้มีทิศทางของความเร็วเนื่องจากการไหลในทิศแนวแรงของแกน y และส่งผลต่อพฤติกรรมของท่อตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล ดังนั้นในการวิเคราะห์แบบจำลองท่อลำเลียงของไหลนี้จึงสามารถเขียนสมการงานเสมือนที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเร็วของของไหลภายในท่อ ดังนั้น จากรูปที่ 2.2 ซึ่งแสดงชิ้นส่วนย่อยของท่อภายใต้สภาวะสมดุลสามารถเขียนสมการความเร็วของของไหลภายในท่อตามทิศทางแนวแกน y เท่านั้น ไม่คำนึงถึงการแปรเปลี่ยนในทิศทางแนวแกน x เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่เกิดขึ้นหรือมีการเคลื่อนที่น้อยมากจนเข้าใกล้ศูนย์ ได้ดังสมการ

(2.19) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักของของไหลภายในท่อที่กระทำต่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมด สามารถแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$dF_i = -\frac{mv^2}{R} ds \tag{2.19}$$

เมื่อเปลี่ยนสมการ (2.19) ให้อยู่ในรูปของสมการความสัมพันธ์ระหว่างระยะเคลื่อนที่ตามแนวแกน y (dF_{iy}) กับความยาวส่วนโค้งย่อย (ds) จะได้สมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$dF_{iy} = -\frac{mv^2}{R} \cos\theta \, ds \tag{2.20}$$

ดังนั้นจะได้สมการความเร็วของของไหลภายในท่อจากการวิเคราะห์แบบจำลองโดยวิธีงานเสมือนได้ดังต่อไปนี้

$$dW_i = dF_{iy} y_s \tag{2.21}$$

จากการวิเคราะห์พบว่าความเร็วที่เกิดจากของไหลภายในท่อลำเลียงของไหลนั้นมีการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y แรงของความเร็วที่เกิดขึ้นนั้นส่งผลเป็นแรงแผ่กระจายตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหล อีกทั้งน้ำหนักประสิทธิผลของของไหลภายในท่อนั้นเกิดขึ้นพร้อมกับความเร็วเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถวิเคราะห์สมการของความเร็วของท่อลำเลียงของไหลได้ดังต่อไปนี้

$$W_i = \int_0^{s_t} dW_i = \int_0^{s_t} -\frac{mv^2}{R} \cos\theta \, ds \, y_s \tag{2.22}$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (2.20) และ (2.21) ลงในสมการ (2.22) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$W_i = -\int_0^{s_t} \left(\frac{mv^2}{R}\cos\theta\right) y_s \, ds \tag{2.23}$$

ดังนั้นเมื่อเปลี่ยนรูปสมการ (2.23) จะได้สมการการแปรผัน ดังต่อไปนี้

$$\delta W_i = -\int_0^{s_t} \left(\frac{mv^2}{R}\cos\theta\right) \delta y_s \, ds \tag{2.24}$$

เมื่อแทนค่าส่วนโค้งจากสมการ (2.6) แทนในสมการ (2.24) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\delta W_i = -\int_0^{s_t} \{mv^2 y_s''\} \, \delta y_s \, ds \tag{2.25}$$

จะได้สมการผลรวมของงานเสมือนของชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหล ดังนี้

$$\delta\pi = \delta W_T + \delta W_w + \delta W_i \tag{2.26}$$

โดยการแทนสมการ (2.15), (2.18) และ(2.25) ลงในสมการ (2.26) จะได้

$$\delta\pi = \int_0^{s_t} \left\{ T_H \frac{y_s'}{(1 - y_s'^2)^{\frac{1}{2}}} - w_e - mv^2 y_s'' \right\} \delta y_s ds \tag{2.27}$$