



ผลกระทบของการยึดตัวต่อสภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเล

นางสาวสุวิมล ธรรมไชย

การศึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ปีการศึกษา 2557

ผลกระทบของการยึดตัวต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเล

นางสาวสุวิมล ธรรมไชย วศ.บ. (วิศวกรรมโยธา)

การศึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง

..... ประธานกรรมการสอบโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง
(ผศ. ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล)

..... กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง
(ศ. ดร.สมชาย ชูชีพสกุล)

..... กรรมการ
(ดร.บุญมี ชินนาบุญ)

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

หัวข้อการศึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง	ผลกระทบของการยึดตัวต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเล
หน่วยกิต	6
ผู้เขียน	นางสาวสุวิมล ธรรมไชย
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศ. ดร.สมชาย ชูชีพสกุล
หลักสูตร	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	เทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา
ภาควิชา	วิศวกรรมโยธา
คณะ	วิศวกรรมศาสตร์
ปีการศึกษา	2557

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการวิเคราะห์การยึดตัวตามแนวแกนที่มีผลต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึก วิธีการวิเคราะห์ที่ใช้ในการศึกษาเริ่มจากการสร้างสมการรวมของงานเสมือนประกอบไปด้วย งานเสมือนจากแรงดึงในแนวราบ และงานเสมือนจากน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยให้ความยาวของเคเบิลก่อนการยึดตัวเป็นตัวแปรอิสระเพื่อนำมาแก้ปัญหาค่าตำแหน่งสมดุลและตำแหน่งที่ทำให้เกิดความเครียดซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และกระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองในการวิเคราะห์ใช้กระบวนการแปรผันของสมการงานและพลังงานทำให้ได้สมการออยเลอร์ซึ่งเหมือนกันกับสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อย งานวิจัยนี้ยังได้เสนอตัวแปรที่แสดงให้เห็นผลกระทบของการยึดตัวในแนวแกนต่อตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

คำสำคัญ : การยึดตัวตามแนวแกน / ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ / สมการแคทีนารี / สมการการแปรผัน

Special Research Study Title	Effect of Axial Deformation on Equilibrium Configuration of Catenary Riser in Sea Water
Special Research Study Credits	6
Candidate	Miss Suvimon Thamachai
Special Research Study Advisors	Prof.Dr. Somchai Chuchepsukul
Program	Master of Engineering
Field of Study	Civil Engineering Technology
Department	Civil Engineering
Faculty	Engineering
Academic Year	2014

Abstract

This special research study presents the effect of axial deformation on equilibrium configuration of catenary risers in sea water. The method of analysis is based on the virtual work formulation which involves the virtual work of the horizontal tension and self-weight of the catenary. The unstrained arc length of the cable is used as the independent variable. The equilibrium position and the axial strain are the unknowns which are solved numerically by using the finite element method and Newton-Raphson iterative process. The model formulation is validated by performing variation of the virtual work expression to obtain the Euler equation, which is identical to the one obtained by the equilibrium equation of a catenary segment. Parametric studies are given to demonstrate the effects of an axial deformation on the equilibrium configurations of catenary riser.

Keywords : Axial deformation/Finite Element Analysis/Steel Catenary Riser/Variation formulation

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยต้องขอกราบขอบพระคุณ ศ. ดร. สมชาย ชูชีพสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการวิจัยเฉพาะเรื่อง ที่กรุณาให้คำปรึกษา ข้อคิดเห็นตลอดจนแนวคิดการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นรวมไปถึงเสนอแนะแนวทางในการศึกษาค้นคว้าด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งตลอดมา รวมถึง ผศ. ดร. ชัยณรงค์ อธิสกุล และ ดร. บุญมี ชินนาบุญ ที่กรุณาให้เกียรติมาเป็นประธานและกรรมการในการสอบและกรุณาให้แนวคิดและคำแนะนำเพิ่มเติมเพื่อให้โครงการวิจัยฉบับนี้มีความถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ทั้งนี้รวมไปถึงทุกท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องฉบับนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญ	จ
รายการตาราง	ช
รายการรูปประกอบ	ฉ
รายการสัญลักษณ์	ญ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	1
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	3
1.4 ขอบเขตงานวิจัย	3
บทที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลที่ยึดตัวได้	4
2.1 สมดุลสถิตหรือสถิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลแบบคาทีนารี	4
2.2 สมมติฐานการวิเคราะห์	5
2.3 ความยาวส่วนโค้งก่อนเกิดความเครียดและหลังเกิดความเครียด	5
2.4 สมการสมดุลของชิ้นส่วนเคเบิล	6
2.5 สมการแรงดึงของเคเบิล	8
2.5 สมการของการแปรผัน	12

บทที่ 3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	15
3.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์	15
3.2 เงื่อนไขขอบเขต	18
3.3 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น	19
บทที่ 4 ผลและการวิเคราะห์	21
4.1 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการ แคทีนารี	21
4.2 สภาวะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน ของเคเบิลที่มีจุดรองรับระดับเดียวกันภายใต้สภาวะสมดุล	22
4.3 สภาวะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนความยาวส่วนโค้งของเคเบิล ที่จุดรองรับต่างกัน	24
4.4 ผลการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวดิ่งจากจุดรองรับ ของเคเบิล	25
4.5 ผลของค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงกรณีที่กำหนดแรงดึง ที่ปลายบน	26
4.6 สภาวะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นที่ระยะทาง ในแนวราบหลังการยึดตัวคงที่	29
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษา	31
เอกสารอ้างอิง	33

ภาคผนวก	35
ก.1 สมการสมมูลในแนวสัมผัสของเคเบิ้ล	36
ก.2 ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี	38
ข. โปรแกรมคอมพิวเตอร์	44
ประวัติผู้วิจัย	59

รายการตาราง

ตารางที่	หน้า
4.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เปรียบเทียบการคำนวณเชิงตัวเลข กับสมการแคทีนารี	21
4.2 ผลการเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขกับการคำนวณเชิงตัวเลข กับสมการแคทีนารี	22
4.3 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงแรงดึงในแนวราบ ที่ปลายบน	23
4.4 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้ง ของเคเบิล	24
4.5 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวตั้ง จากจุดรองรับ	25
4.6 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์กรณีกำหนดให้แรงดึงที่ปลายบนคงที่	27
4.7 ความสามารถในการยึดตัวของเคเบิลในกรณีกำหนดแรงดึงที่ปลายบน	27
4.8 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์กรณีกำหนดให้ระยะทางในแนวราบหลัง การยึดตัวมีค่าคงที่	29
4.7 ผลของการยึดตัวของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นที่ ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคงที่	29
ก.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุด รองรับต่างระดับกัน	42

รายการรูปประกอบ

รูปที่	หน้า
2.1 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี	4
2.2 ชั้นส่วนอิสระของชั้นส่วนย่อยภายใต้สภาวะสมดุล	6
2.3 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลภายใต้แรงกระทำที่ปลายบน	8
4.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบคาทีนารียกรระดับ	22
4.2 สภาวะสมดุลของเคเบิลต่าง ๆ เมื่อเปลี่ยนค่าแรงดึงที่ปลายบน	23
4.3 พฤติกรรมของเคเบิลที่มีจุดรองรับต่างระดับกันเมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งของเคเบิล	24
4.4 พฤติกรรมของเคเบิลที่จุดรองรับเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวตั้ง	26
4.5 ผลของการยึดตัวที่มีต่อตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงในกรณีกำหนดแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน	28
4.6 ผลของการยึดตัวที่ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นต่างๆ ที่ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคงที่	30
ก.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบคาทีนารียกรระดับ	38
ก.2 รายละเอียดแรงดึงของเส้นโค้งแบบคาทีนารียกรระดับ	41

รายการสัญลักษณ์

A	=	พื้นที่หน้าตัดของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
A_e	=	พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ
A_i	=	พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ
A_p	=	พื้นที่หน้าตัดของท่อ
D	=	เส้นผ่านศูนย์กลางของเคเบิล
ds	=	ความยาวของชิ้นส่วนเล็กๆ ของเคเบิลขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
ds_0	=	ความยาวของชิ้นส่วนเล็กๆ ของเคเบิลขณะที่เกิดความเครียด
$\{D\}$	=	ดิกิริโอสระของความเครียดของระบบรวม
$\{d\}$	=	ดิกิริโอสระของความเครียดของชิ้นส่วนย่อย
E	=	โมดูลัสของความยืดหยุ่น
F_x	=	แรงภายนอกในแนวแกน x
F_y	=	แรงภายนอกในแนวแกน y
g	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
y_H	=	ความลึกของระดับน้ำทะเล
i, j	=	ลำดับที่ของดิกิริโอสระ
$[K]$	=	สติเฟนสมเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม
$[M]$	=	เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับความเครียด
$[N]$	=	เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการเคลื่อนที่
$\{q\}$	=	ดิกิริโอสระของการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนย่อย
$\{Q\}$	=	ดิกิริโอสระของการเคลื่อนที่ของระบบรวม
$\{R\}$	=	คอลัมน์เวกเตอร์ เป็นผลรวมของ $\{\partial\pi / \partial d_i\}$ ในระบบรวม
s	=	ความยาวของส่วนโค้งขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
s_0	=	ความยาวส่วนโค้งขณะที่เกิดความเครียด
s_t	=	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของเคเบิล
T	=	แรงดึงภายในของเคเบิล
T_H	=	แรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิล
T_L	=	แรงดึงในแนวแกนที่ปลายบนของเคเบิล
w	=	น้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล
w_c	=	น้ำหนักของเคเบิลในอากาศ
W	=	งานเนื่องจากแรงภายนอก

W_T	=	งานเสมือนเนื่องจากแรงดึงที่กระทำที่ปลายบนของเคเบิล
W_w	=	งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิล
x_o	=	ตำแหน่งของเคเบิลในแนวระดับที่สถานะสมดุล
x'_o	=	การทำให้เฟอเรนซิเอต x_o เทียบกับ s
y_L	=	องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ที่เป็นเชิงเส้นกับ s
y_a	=	องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับ s
y_o	=	ตำแหน่งของเคเบิลในแนวตั้งที่สถานะสมดุล
y'_o	=	การทำให้เฟอเรนซิเอต y_o เทียบกับ S
θ	=	มุมที่ปลายบนของเคเบิล กระทำกับแนวระดับ
δ	=	การแปรผัน
ϵ_o	=	ความเครียดในแนวแกน ณ ตำแหน่งสมดุล
ρ_w	=	ความหนาแน่นของน้ำทะเล
π	=	งาน-พลังงานรวมของระบบ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความสำคัญ และที่มาของปัญหา

ในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งในปัจจุบันแพร่หลายมากขึ้น ท่อลำเลียงของไหล (Riser) เป็นองค์ประกอบสำคัญที่ใช้ในงานวิศวกรรมนอกฝั่งทั้งการขุดเจาะและการลำเลียงปิโตรเลียมจากหลุมผลิตและใช้ในการขนถ่ายปิโตรเลียมระหว่างแท่นผลิตซึ่งแหล่งปิโตรเลียมในทะเลที่ค้นพบใหม่ในปัจจุบันมักอยู่ในระดับที่มีความลึกมากขึ้น มีแรงกระทำที่จะทำให้เกิดการยืดตัวของท่อลำเลียงของไหลเมื่อเวลาผ่านไป การเลือกท่อลำเลียงของไหลที่เหมาะสมจึงมีความสำคัญมากต่อแหล่งผลิตปิโตรเลียม

งานวิจัยเกี่ยวกับท่อลำเลียงของไหลในทะเล โดยทั่วไปจะไม่คำนึงถึงผลของการยืดตัวตามแนวแกน ถ้าท่อลำเลียงเกิดความเครียดในแนวแกนน้อย ผลการวิเคราะห์ที่อยู่ในเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ แต่ถ้าท่อลำเลียงมีความเครียดในแนวแกนมาก ความสามารถในการยืดตัวสูง ผลการวิเคราะห์โดยไม่คำนึงถึงผลของการยืดตัวตามแนวแกนจะมีความผิดพลาดสูง ซึ่งไม่ตรงกับสภาพความเป็นจริงของท่อลำเลียง ดังนั้นงานวิจัยนี้จะมุ่งศึกษาเกี่ยวกับการยืดตัวต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึกโดยใช้ความยาวเป็นตัวแปรอิสระ

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับผลกระทบของการยืดตัวต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงสรุปได้ดังนี้

Huang [1] ทำการสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์สถานะสมดุลสถิตย์ของเคเบิลในทะเล 2 มิติ และคำนึงถึงการยืดตัวตามแนวแกนของเคเบิล แต่ไม่คำนึงถึงผลกระทบเนื่องจากอัตราส่วนปัวซองแบบจำลองครอบคลุมทั้ง 2 กรณีคือ กรณีที่ทราบค่าแรงดึงที่ปลายบน และกรณีที่ทราบค่าความยาวของเคเบิลวิเคราะห์โดยวิธีแปรผัน โดยแบบจำลองนี้สามารถบอกการเคลื่อนที่ไปในแนวราบเนื่องจากผลของแรงดึงและการยืดตัวของเคเบิลได้

Chucheepsakul, et al. [2] ทำการศึกษาถึงผลของการยืดตัวตามแนวแกนและอัตราส่วนปัวซองที่มีต่อสถานะสมดุลของเคเบิลในทะเล โดยให้ความลึกของระดับน้ำทะเลเป็นตัวแปรอิสระ พบว่า ถ้าเคเบิลมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นน้อยผลของการยืดตัวตามแนวแกนจะทำให้ตำแหน่งสมดุลของเคเบิลมีค่าเปลี่ยนแปลงไปมาก ถ้าเคเบิลมีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นสูงผลของการยืดตัวตามแนวแกน จะทำให้ตำแหน่งสมดุลของเคเบิลเปลี่ยนแปลงไปน้อยมาก ในทุกกรณี ผลของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนปัว

ของ จะมีผลต่อตำแหน่งสมดุลเพียงเล็กน้อย โดยเฉพาะเคเบิลที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น สูง ๆ ผลของอัตราส่วนปัวซองสามารถตัดทิ้งได้

Huang และ Chucheepsakul [3] ทำการวิเคราะห์ผลกระทบของการยึดตัวต่อความถี่ธรรมชาติของเคเบิลในทะเล โดยคำนึงถึงการยึดตัวตามแนวแกนของเคเบิล จากงานวิจัยนี้พบว่าความถี่ธรรมชาติจะเพิ่มขึ้นเมื่อแรงดึงจะเพิ่มขึ้น และในทางเดียวกัน เมื่อค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นเพิ่มขึ้นค่าความถี่ธรรมชาติก็จะเพิ่มขึ้นด้วยกล่าวคือถ้าค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นน้อยค่าความถี่ธรรมชาติของเคเบิลในทะเลจะน้อย ถ้าค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมากค่าความถี่ธรรมชาติของเคเบิลในทะเลจะมากขึ้นด้วย

Thai และ Kim [4] เสนอการวิเคราะห์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างของเคเบิลซึ่งมีการวิเคราะห์แรงกระทำทั้งสมดุลสถิตย์และพลศาสตร์โดยพิจารณาผลกระทบจากน้ำหนักและแรงดึงต่อความยืดหยุ่นของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี โดยเป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาวิเคราะห์โครงสร้างของเคเบิลแบบตาข่าย พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถใช้เวลาในการหาผลเฉลยในเวลาอันสั้นและใช้ได้ดีกว่าโปรแกรมวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไป

Punjarat และ Chucheepsakul [5] ทำการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากในสภาวะสมดุลทางสถิตย์ของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีในทะเลลึก โดยหลักการแปรผันของงานและพลังงานซึ่งประกอบไปด้วยงานเสมือนจากน้ำหนักประสิทธิผล แรงลากจากความเร็วกระแสน้ำ และแรงดึงตามแนวราบที่ปลายบนสมการงานและพลังงานเป็นฟังก์ชันของความยาวส่วนโค้งในพิกัดลากรางจ์ การเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขในกรณีของคาน เคเบิล และท่อลำเลียงของไหลของจากงานวิจัยนี้กับงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังศึกษาเกี่ยวกับผลของแรงดึงตามแนวราบที่มีต่อปลายบนต่อพิกัดการวางตัวในสภาวะสมดุล

Greco, et al. [7] นำเสนอการวิเคราะห์เคเบิลแบบเป็นตาข่ายโดยวิเคราะห์แคทีนารี แบบสามมิติที่ยึดตัวได้ พิจารณาสภาวะสมดุลของจุดเชื่อมเคเบิลและการเสถียรของเคเบิลโดยออกแบบจำลองโดยใช้กระบวนการนิวตัน-ราฟสันเพื่อหาค่าความเค้นเริ่มต้นของเคเบิลและการเสถียรของเคเบิลแบบเป็นตาข่าย วิธีการนี้จะสามารถหาผลการยึดตัวของตาข่ายในรูปแบบสามมิติได้

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1 เพื่อพัฒนาแบบจำลองเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลที่ยึดตัวได้ในสองมิติ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง และแรงคึงที่ปลายบน
- 2 ศึกษาผลกระทบของค่าความยืดหยุ่นต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียง

1.4 ขอบเขตงานวิจัย

แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นอาศัยหลักการของงานเสมือนของแรงคึงในแนวราบที่ปลายบนและงานเสมือนของน้ำหนักบรรทุกทุกประสิทธิผลของท่อลำเลียง โดยมีขอบเขตการศึกษาดังต่อไปนี้

- 1.แบบจำลองเป็นแบบสองมิติ
- 2.การยึดตัวเป็นแบบเส้นตรงเป็นไปตามกฎของฮุก
- 3.ไม่คำนึงถึงแรงภายนอกอื่นนอกจากน้ำหนักบรรทุกของท่อลำเลียงและแรงคึง
- 4.ไม่คิดผลของการคดและแรงเฉือน

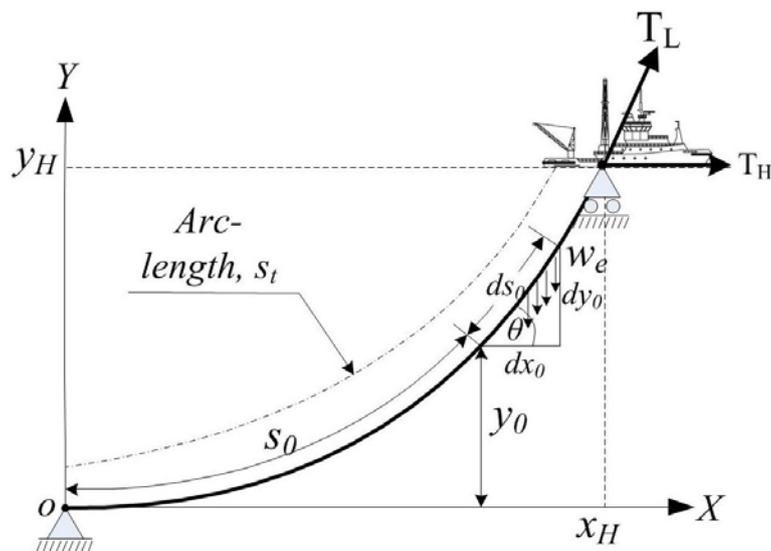
บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลที่ยืดตัวได้

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีที่สภาวะสมดุลเนื่องจากแรงกระทำรูปแบบต่าง ๆ เช่น น้ำหนักประสิทธิผล แรงดึงที่ปลายบนตามแนวราบโดยการยืดความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเป็นตัวแปรอิสระ โดยคำนึงถึงการยืดตัวตามแนวแกนของท่อลำเลียงของไหลด้วย

2.1 สมดุลสถิตหรือสถิตศาสตร์ของท่อลำเลียงแบบแคทีนารี

โครงสร้างท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีตามทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์นี้ ได้จำลองโครงสร้างเป็นรูปแบบของท่อที่วางตัวอยู่ระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้งสองด้าน โดยที่ท่อลำเลียงของไหลมีลักษณะการวางตัวแบบแคทีนารี จะถูกยึดครั้งที่ปลายทั้งสองข้างโดยปลายบนจะยึดครั้งกับวัตถุลอย หรือโครงสร้างที่อยู่ระดับผิวน้ำให้อยู่กับที่และปลายล่างยึดติดกับอุปกรณ์บริเวณพื้นทะเล ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ในสภาวะสมดุลที่อยู่ใต้ทะเลจะมีแรงกระทำในรูปแบบต่างๆ เช่น แรงกระทำเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ แรงดันน้ำภายนอก แรงลอยตัว และน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งตัวแปรเหล่านี้เป็นตัวแปรสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหา งานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์แบบมีการแอนตัวมาก ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลในสภาวะสมดุล



รูปที่ 2.1 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

2.2 สมมุติฐานของการวิเคราะห์

สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. เนื้อวัสดุของท่อสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทางตลอดความยาวท่อ
2. วัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น
3. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือนและแรงค้ำ
4. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเสียดทานระหว่างท่อและจุกรองรับ

2.3 ความยาวส่วนโค้งก่อนเกิดความเครียดและหลังจากเกิดความเครียด

การวิเคราะห์นี้ใช้ตัวแปร s เป็นตัวแปรอิสระกำหนดแรงดึงที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลมาทำให้สามารถเขียนตำแหน่งสมมูลของท่อลำเลียงของไหลเป็นระยะทางในแนวราบ $x_0(s)$ และระยะทางในแนวตั้ง $y_0(s)$ โดยที่ตัวห้อย (subscript) 0 ของตัวแปรใดๆ แสดงให้เห็นว่าเป็นค่าของตัวแปรนั้นในสภาวะสมมูล

พิจารณารูป 2.1 จะได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\sin \theta = \frac{dy_0}{ds_0} \quad (2.1)$$

$$\cos \theta = \frac{dx_0}{ds_0} \quad (2.2)$$

จากนิยามความเครียดจะได้ว่า

$$\varepsilon_0 = \frac{ds_0 - ds}{ds} = \frac{ds_0}{ds} - 1 \quad (2.3)$$

$$\frac{ds_0}{ds} = 1 + \varepsilon_0 \quad (2.4)$$

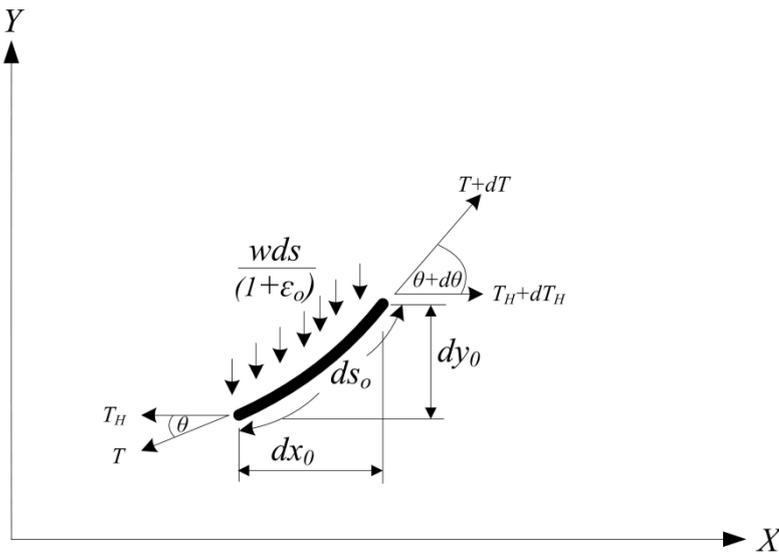
โดยที่ ε_0 คือความเครียดในแนวแกน ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s_0

ds คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด (unstrained arc length)

ds_0 คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะความเครียด (strained arc-length)

2.4 สมการการสมดุลของชิ้นส่วนเคเบิล

เมื่อพิจารณาท่อลำเลียงแบบแคทีนารีซึ่งรับแรงกระทำต่าง ๆ ในสภาวะสมดุล โดยให้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ s จากจุดเริ่มต้น แบ่งท่อลำเลียงของไหลออกเป็นชิ้นส่วนย่อยที่มีความยาวในแนวระดับ dx_0 ความยาวในแนวตั้ง dy_0 และความยาวส่วนโค้งขณะเกิดความเครียด ds_0 สามารถแสดงชิ้นส่วนอิสระของชิ้นส่วนย่อยและแรงกระทำต่างๆ ในสภาวะสมดุลได้ดังรูป 2.1



รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วนอิสระของชิ้นส่วนย่อยภายใต้สภาวะสมดุล

พิจารณาสมดุลของแรงในทางแกน x

$$\sum F_x = 0: \quad (T + dT) \cos(\theta + d\theta) - T \cos \theta = 0 \quad (2.5)$$

สำหรับค่ามุมที่น้อยมากๆ จะได้ $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos d\theta \approx 1$

$$\sin(\theta + d\theta) = \sin \theta + \cos \theta \cdot d\theta, \text{ และ } \cos(\theta + d\theta) = \cos \theta - \sin \theta \cdot d\theta$$

จัดรูปสมการ (2.5) ใหม่ได้ดังนี้

$$T \cos \theta - T \sin \theta d\theta + dT \cos \theta - dT \sin \theta d\theta - T \cos \theta = 0$$

$$-T \sin \theta d\theta + dT \cos \theta = 0$$

$$d(T \cos \theta) = 0 \quad (2.6)$$

ดังนั้น

$$d\left(T \frac{dx_0}{ds_0}\right) = 0 \quad (2.7)$$

$$d(T_L \cos \theta) = d(T_H) = 0 \quad (2.8)$$

$$T_H = T_L \cos \theta \quad (2.9)$$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงดึงในแนวระดับและแรงดึงในแนวแกนซึ่งเป็นค่าคงที่

พิจารณาสมดุลของแรงในทางแกน y

$$\sum F_y = 0; \quad (T + dT) \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta - \frac{w ds_0}{(1 + \epsilon_0)} = 0 \quad (2.10)$$

สำหรับค่ามุมที่น้อยมากๆ จะได้ $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos d\theta \approx 1$

ดังนั้น

$$\sin(\theta + d\theta) = \sin \theta + \cos \theta \cdot d\theta, \quad \text{และ} \quad \cos(\theta + d\theta) = \cos \theta - \sin \theta \cdot d\theta$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T \sin \theta + T \cos \theta d\theta + dT \sin \theta + dT \cos \theta d\theta - \frac{w ds_0}{(1 + \epsilon_0)} = 0 \quad (2.11)$$

ผลคูณของเทอมที่มีค่าน้อยคูณกัน ผลลัพธ์จะมีค่าน้อย สามารถตัดทิ้งได้ จะได้

$$T \cos \theta d\theta + dT \sin \theta - \frac{w ds_0}{(1 + \epsilon_0)} = 0 \quad (2.12)$$

$$d(T \sin \theta) - \frac{w ds_0}{(1 + \epsilon_0)} = 0 \quad (2.13)$$

แทนค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากสมการ (2.1) และ (2.2) ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$d\left(T \frac{dy_0}{ds_0}\right) - \frac{w ds_0}{(1 + \epsilon_0)} = 0 \quad (2.14)$$

หรือ

$$\frac{d}{ds_0} \left(\frac{T_H}{\cos \theta} \left(\frac{dy_0}{ds} \frac{ds}{ds_0} \right) \right) - \frac{w}{(1 + \epsilon_0)} = 0$$

$$\frac{d}{ds_0} \left(\frac{T_H}{\frac{dx_0}{ds} \frac{ds}{ds_0}} \left(\frac{dy_0}{ds} \frac{ds}{ds_0} \right) \right) - \frac{w}{(1 + \varepsilon_0)} = 0$$

$$\frac{d}{ds_0} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - \frac{w}{(1 + \varepsilon_0)} = 0 \quad (2.15)$$

หรือ

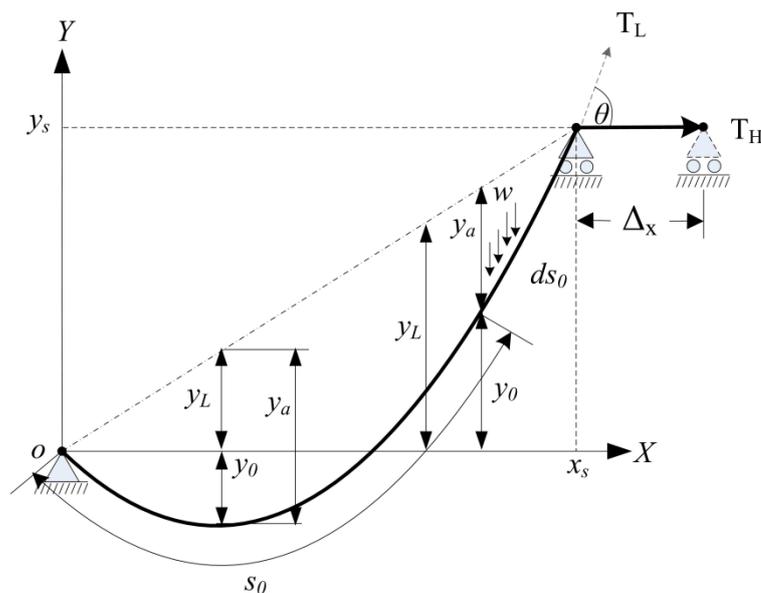
$$\frac{d}{ds} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - w = 0 \quad (2.16)$$

โดยที่ $x'_0 = dx_0/ds$ และ $y'_0 = dy_0/ds$

สมการ (2.9) และ (2.10) เป็นสมการอนุพันธ์ของปัญหาเคเบิลที่ยึดตัวได้รับน้ำหนักบรรทุกของตัวเองหรือปัญหาแคทีนารี

2.5 สมการแรงดึงของเคเบิล

เมื่อพิจารณาสถานะสมดุลของท่อน้ำหนักของไหลจากการวางตัวของท่อน้ำหนักดังแสดงในรูป 2.3 จุดรองรับที่ปลายทั้งสองข้างโดยปลายบนจะยึดรั้งกับวัตถุลอย จะได้ระยะต่าง ๆ ของสมดุลในเคเบิลดังนี้



รูปที่ 2.3 สถานะสมดุลของท่อน้ำหนักของไหลภายใต้แรงกระทำที่ปลายบน

ตำแหน่งสมมูลที่วัดในแนวตั้งจากแนวเอียงจากระนาบวัดระยะได้ดังนี้

$$y_L = y_0 + y_a$$

ดังนั้นระยะสมมูลของท่อลำเลียงวัดจากแนวราบ (แกน X) คือ

$$y_0 = y_L - y_a$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียล y_0 เทียบกับ s จะได้

$$\frac{dy_0}{ds} = \frac{dy_L}{ds} \pm \frac{dy_a}{ds} \quad (2.17)$$

โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy_0}{ds} = \frac{dy_L}{ds} \frac{dx}{ds} \pm \frac{dy_a}{ds} \quad (2.18)$$

$$\frac{dy_0}{ds} = \tan \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{dy_s}{ds}\right)^2} \pm \frac{dy_a}{ds} \quad (2.19)$$

โดยที่ $\tan \alpha = \frac{dy_L}{dx} = \frac{y_H}{x_H}$

ในที่นี้ความชันของจุด y_0 หาได้โดย

$$y'_0 = \tan \alpha \sqrt{1 - y_s'^2} \pm y'_a \quad (2.20)$$

เมื่อพิจารณาสมมูลของแรงกระทำต่างๆ ภายใต้สภาวะสมมูลในแนวสัมผัส (tangential direction) ดังแสดงในรูป 2.2

$$dT = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)} \frac{dy_0}{ds_0} \quad (2.21)$$

$$dT = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)} \sin \theta \quad (2.22)$$

จากกฎของฮุก (Hooke's law) จะได้

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 \quad (2.23)$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (2.22) จะได้

$$\int_{s_0}^{s_t} dT = \int_{s_0}^{s_t} d(EA\varepsilon_0) = \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \quad (2.24)$$

เขียนสมการ (2.24) ใหม่จะได้

$$\int_{s_0}^{s_t} dT = T(s_t) - T(s_0) \quad (2.25)$$

$$T(s_t) - T(s_0) = \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \quad (2.26)$$

แทนค่าสมการ (2.23) ลงใน (2.26) จะได้

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 = T_L - \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \quad (2.27)$$

โดยที่ T_L คือแรงดึงในแนวแกนกับท่อลำเลียง

$$T(s_0) = T_L - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} [y_0(s_t) - y_0(s_0)] \quad (2.28)$$

ในที่นี้

$$y_0(s_t) = y_H$$

และ

$$y_0(s_0) = y_L - y_a$$

สมการของแรงดึงในท่อลำเลียงที่ตำแหน่งใด ๆ หาได้โดยสมการ (2.29)

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 = T_L - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} \cdot y_H + \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} [\tan \alpha \cdot x - y_a] \quad (2.29)$$

2.5.1 แรงดึงประสิทธิผล (effective tension)

แรงดึงประสิทธิผลเป็นแรงดึงภายในท่อลำเลียงที่เกิดจากแรงดึงที่เกิดขึ้นจริงตามสมการ

$$T = EA\varepsilon_0 \quad (2.30)$$

โดยที่ T คือ แรงดึงประสิทธิผล
 E คือ โมดูลัสของความยืดหยุ่น

2.5.2 น้ำหนักประสิทธิผล (effective weight)

น้ำหนักประสิทธิผลเป็นผลต่างระหว่างน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหลในอากาศและแรงลอยตัวที่เกิดขึ้นจากการที่ท่อลำเลียงไปแทนที่น้ำทะเล สมการของน้ำหนักประสิทธิผลเขียนได้ดังนี้

$$w = w_c - \rho_w g A \quad (2.31)$$

โดยที่ w คือ น้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงต่อหน่วยความยาวขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
 w_c คือ น้ำหนักของท่อลำเลียงในอากาศต่อหน่วยความยาวขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด
 ρ_w คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล
 g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิลกับความยาวส่วนโค้งขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด และขณะที่เกิดความเครียด เป็นดังนี้

$$wds = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)} \quad (2.32)$$

2.6 สมการของการแปรผัน (variational formulation)

ในส่วนนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองของเคเบิลที่ยึดตัวได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนซึ่งประกอบด้วยงานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนและงานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผลขณะเกิดความเครียดซึ่งรายละเอียดจะกล่าวต่อไป

2.6.1 งานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน

จากรูปสามเหลี่ยมของชิ้นส่วนเล็กของเคเบิลในรูปที่ 2.2 สามารถเขียนความสัมพันธ์ทางรูปร่างได้ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{dy_0}{ds_0} \quad (2.33)$$

$$\cos\theta = \frac{dx_0}{ds_0} \quad (2.34)$$

โดยที่ให้ ds_0 คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะเกิดความเครียด (strained arc-length) จะได้

$$ds_0^2 = dx_0^2 + dy_0^2 \quad (2.35)$$

$$dx_0^2 = ds_0^2 - dy_0^2 \quad (2.36)$$

$$dx_0^2 = (1 + \varepsilon_0)^2 ds^2 - dy_0^2 \quad (2.38)$$

โดยที่ ε_0 คือ ความเครียดในแนวแกนซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_0

หาร ds^2 ตลอดสมการ (2.38) จะได้

$$\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = (1 + \varepsilon_0)^2 - \left(\frac{dy_0}{ds}\right)^2 \quad (2.39)$$

$$d\lambda = ds_0 - dx_0 \quad (2.40)$$

โดยที่ (') หมายถึงการทำดิฟเฟอเรนเชียลเทียบกับ s ดังนั้น $y_0' = \frac{dy_0}{ds}$ สมการ จึงเขียนใหม่ได้

$$dx_0 = \left[\sqrt{(1 + \varepsilon_0^2) - y_0'^2} \right] ds \quad (2.41)$$

แทนค่าสมการ (2.4) และ (2.41) ลงในสมการ (2.40) จะได้

$$d\lambda = (1 + \varepsilon_0)ds - \left[\sqrt{(1 + \varepsilon_0^2) - y_0'^2} \right] ds \quad (2.42)$$

งานเสมือนเนื่องจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนเขียนได้ดังนี้

$$\delta W_T = -\delta \int_0^{st} T_H d\lambda \quad (2.43)$$

แทนค่า $d\lambda$ จากสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.43)

$$\delta W_T = -\delta \int_0^{st} T_H \left[(1 + \varepsilon_0) - \sqrt{(1 + \varepsilon_0^2) - y_0'^2} \right] ds \quad (2.44)$$

การแปรผันสมการงานเสมือนเนื่องจากแรงดึงกระทำที่ปลายเท่ากับ

$$\delta W_T = -\int_0^{st} T_H \left[\frac{y_0'}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0^2) - y_0'^2}} \right] \delta y_0' ds \quad (2.45)$$

2.6.2 งานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผลขณะเกิดความเครียด

แรงจากน้ำหนักประสิทธิผลจะกระทำแก่กระจายตลอดความยาวส่วน โต้ของท่อลำเลียงของไหลซึ่งทำให้เกิดงานเสมือนจากน้ำหนักตั้งสมการ

$$\delta W_w = -\delta \int_0^{st} w y_0 ds \quad (2.46)$$

เมื่อ w คือแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อรวมทั้งของไหลภายในท่อ ดังสมการ

$$w = (\rho_p A_p + \rho_e A_e + \rho_i A_i)g \quad (2.47)$$

การแปรผันสมการ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta W_w = -\int_0^{st} w \delta y_0 ds \quad (2.48)$$

โดยที่		
A_e	คือ	พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ
A_i	คือ	พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ
A_p	คือ	พื้นที่หน้าตัดของท่อ
g	คือ	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
ρ_e	คือ	ความหนาแน่นของน้ำทะเล
ρ_i	คือ	ความหนาแน่นของของไหลภายในท่อ
ρ_p	คือ	ความหนาแน่นของท่อ

ผลรวมการแปรผันสมการงานเสมือนเนื่องจากแรงดึงกระทำที่ปลายที่สถานะสมดุล

$$\delta W = \delta W_w + \delta W_T = 0 \quad (2.49)$$

$$\delta W = \int_0^{s_t} T_H \left[\frac{y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0^2) - y_0'^2}} \right] \delta y_0' ds + \int_0^{s_t} w \delta y_0 ds = 0 \quad (2.50)$$

โดยการกระบวนกรแปรผันจะได้สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งเป็นสมการของแรงในแนวราบตรงกับสมการที่ (2.9) และ (2.10) รายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ก

จากสมการ (2.27) และ (2.50) พบว่ามีตัวแปรไม่อิสระ 2 ตัวคือ y_0 และ ε_0 ซึ่งจะสามารถแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบของตัวแปรได้ เมื่อได้ค่าของ y_0 และ ε_0 แล้วสามารถนำไปหาค่าความยาวของท่อลำเลียงได้

บทที่ 3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์ ปัญหาของทอ์ล้าเสียงเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งเป็นการหาในรูปแบบปิด (closed-form solution) นั้นทำได้ยากในงานวิจัยนี้จึงใช้กระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาคำตอบ โดยเริ่มจากการแบ่งโครงสร้างของทอ์ล้าเสียงออกตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยที่มีความยาวเท่าๆกัน จากนั้นทำการกำหนดค่าขอบเขตของตัวแปรอิสระที่ทราบค่าในแต่ละชิ้นส่วนย่อยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบ Gaussian quadrature เพื่อหาค่าตัวแปรต่างๆ ที่ให้กับระบบจะติดอยู่ในรูปของการอินทิเกรต จากนั้นทำการรวม (assemble) ชิ้นส่วนย่อยให้อยู่ในระบบรวม และใช้กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน ในการหาคำตอบของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นของทอ์ล้าเสียง

3.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งทอ์ล้าเสียงของไหลตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ โดยแต่ละชิ้นส่วนมีความยาวเท่ากันซึ่งจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่ถูกแบ่งมีผลกับความแม่นยำในการหาคำตอบเชิงตัวเลข หลังจากนั้น ทำการจำลองดิกรีอิสระไว้ที่ปลายทั้งสองข้างของทอ์ล้าเสียง แบบ 2 มิติ จะมีดิกรีอิสระจำนวน 4 ตัว จากสมการและพลังงานรวมของระบบ จะมีตัวแปรอิสระ s โดยแบ่งทอ์ล้าเสียงเป็นชิ้นเล็ก ๆ ความยาว l ซึ่งมีขอบเขตคือ $0 \leq l \leq s_t$ เมื่อ s_t คือความยาวทั้งหมดของทอ์ล้าเสียงโดยเราจะแบ่งทอ์ล้าเสียงออกเป็น N ชิ้นส่วนย่อยจะได้

$$l = \frac{s_t}{N}$$

เมื่อ l คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อย

s_t คือ ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของทอ์ล้าเสียง

N คือ จำนวนของชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด

ดังนั้นสมการงานรวมของระบบ π สามารถเขียนในรูปของชิ้นส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\pi = \sum_{k=1}^N \pi_k$$

โดยที่ π_k คือค่าของ π ของชิ้นส่วนย่อยที่ k

ในแต่ละชั้นส่วนย่อย การเคลื่อนที่ของท่อลำเลียง $y_0(s)$ ประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือ y_L และ y_a

$$y(s_0) = y_L + y_a \quad (3.1)$$

โดยที่ y_L คือ องค์ประกอบของการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้นกับ s

y_a คือ องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับ s

องค์ประกอบของการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้น y_L หาได้โดยพิจารณาค่าแห่งปลายบนและปลายล่างของเคเบิล ส่วนองค์ประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้น y_a หาจากการประมาณค่าใช้โพลีโนเมียลอันดับที่ 3 ในเทอม s_0 จากวิธีการของไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นสมการ y_a เขียนได้ดังนี้

$$y_a = [N]\{q\} \quad (3.2)$$

เมื่อ

$[N]$ คือ เมทริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง

$\{q\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระของชั้นส่วนย่อย

ดังนั้น สามารถแสดงสมการในรูปแบบของฟังก์ชันรูปร่างของเมทริกซ์สำหรับการเคลื่อนที่จากชั้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหลโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีจำนวนดีกรีอิสระจำนวน 4 ตัวได้ดังต่อไปนี้

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (3.3)$$

เมื่อเข้าสู่ระบบการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำการเขียนค่าตัวแปรของดิกกรีอิสระได้ดังนี้

$$N_1 = 1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \quad (3.4ก)$$

$$N_2 = s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \quad (3.4ข)$$

$$N_3 = 3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \quad (3.4ค)$$

$$N_4 = -s\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \quad (3.4ง)$$

เมื่อขึ้นส่วนย่อยประกอบด้วยเวกเตอร์ของดิกกรีอิสระ $\{q\}$ ดังนี้

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_a(0) \\ y'_a(0) \\ y_a(l) \\ y'_a(l) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

ความเครียดในแนวแกน ε_0 หาได้จากการประมาณค่าโดยใช้โพลีโนเมียลเชิงเส้นในทอม s โดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะได้สมการ ε_0 ดังนี้

$$\varepsilon_0 = [M]\{d\} \quad (3.6)$$

โดยที่ $[M]$ คือ เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง

$\{d\}$ คือ ดิกกรีอิสระของการเคลื่อนที่ของขึ้นส่วนย่อย

$$[M] = [M_1 \quad M_2] \quad (3.7)$$

โดยที่

$$M_1 = 1 - \frac{s}{l},$$

$$M_2 = \frac{s}{l} \quad (3.8)$$

โดยที่

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(0) \\ \varepsilon_0(l) \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

งาน-พลังงานรวมของระบบ π นำมาเขียนให้อยู่ในรูปชิ้นส่วนย่อยและเมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุลการแปรเปลี่ยนของงานรวมทั้งหมดจะเป็นศูนย์ หรือ $\delta\pi = 0$ โดยดิฟเฟอเรนเชียลสมการ (3.6) เทียบกับ q_i จะได้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i} = \int_0^l \left\{ [N']^T w + [N]^T \frac{T_H y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2 - y'^2}} \right\} ds \quad (3.10)$$

3.2 เงื่อนไขขอบเขต

พิกัดปลายบนของท่อนำเสียงของไหลคือ $y(x_H, y_H)$ และจุดพิกัดปลายล่างของท่อนำเสียงคือ $(0,0)$

ดังนั้น

$$y(0) = 0$$

$$y(L) = y_H \quad (3.11)$$

แต่ค่าของ

$$y_0 = y_L + y_a$$

ทำให้

$$y_a(0) = 0 \text{ และ } y_a(H) = 0 \quad (3.12)$$

3.3 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น

ในการแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำการแก้ไขได้ด้วยการใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสัน โดยมีระบบการเพิ่มค่าดังนี้

$$\left\{ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \{\Delta Q\} = \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} \quad (3.13)$$

เมื่อ

i, j คือ ลำดับที่ของดีกรีอิสระซึ่งมีค่าเท่ากับ $1, 2, \dots, n$ จึงสามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็นดังนี้

$$[K]\{\Delta Q\} = -\{R\} \quad (3.14)$$

ดังแสดงดังสมการแสดงค่าสตีเฟนสมเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม และ สมการแสดงค่าเวกเตอร์ของแรงในระบบรวม ดังต่อไปนี้

$$[K] = \left\{ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \quad (3.15)$$

และ

$$\{R\} = \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial Q_i} \right\} \quad (3.16)$$

เมื่อ

$[K]$ คือ สตีเฟนสมเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม
 $\{R\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงในระบบรวม

ดังนั้นค่าสตีเฟนเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวมในสถานะสมดุลที่ทำให้ค่า $\{\Delta Q\} = 0$ และ $\{R\} = 0$ สามารถเขียนสมการระบบรวมได้ดังนี้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial Q_i \partial Q_j} = \int_0^l \left\{ [N']^T \frac{T_H (1 + \varepsilon_0)^2}{\left[\sqrt{(1 + \varepsilon_0)^2 - y_0'^2} \right]^{3/2}} [N'] \right\} ds \quad (3.17)$$

บทที่ 4 ผลและการวิเคราะห์

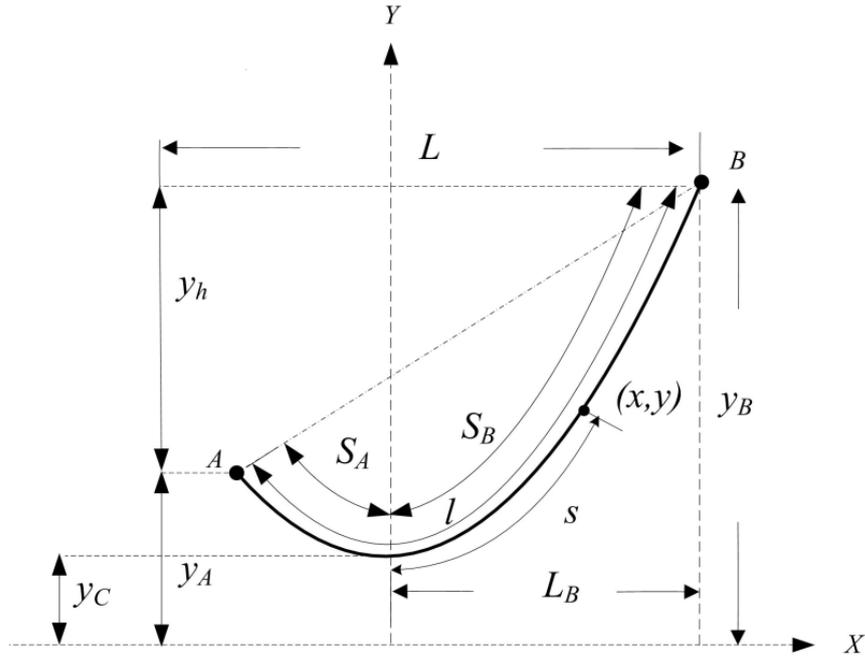
วัตถุประสงค์ในงานวิจัยนี้คือการวิเคราะห์การยึดตัวในสถานะสมดุลทางสถิติของท่อลำเลียงของไหลแบบคาทีนารีในทะเลลึก โดยแนวทางการศึกษาจะใช้วิธีเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรบางตัวเพื่อที่จะทราบถึงผลกระทบของตัวแปรนั้นต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลในทะเล โดยใช้หลักการแปรผันของสมการงานและพลังงานใช้ความโค้งเป็นตัวแปรอิสระ โดยผลการวิเคราะห์ที่ได้ได้มาจากการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันซึ่งจะทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบผลกับงานวิจัยอื่นเพื่อให้มั่นใจว่าผลที่ได้มีความถูกต้อง งานวิจัยนี้จะพิจารณาตัวอย่างทั้งในกรณีของการวิเคราะห์ของคานช่วงเดียวของท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับในระดับเดียวกัน และท่อลำเลียงที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน จากนั้นจะทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบผลของแรงดึงในแนวราบที่กระทำที่ปลายบนและค่าความแข็งแรงของวัสดุต่อพิภคการวางตัวในสถานะสมดุลและความยาวส่วนโค้งทั้งหมด

4.1 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการแคทีนารี

ก่อนที่จะทำการศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ ที่มีต่อสถานะสมดุลของท่อลำเลียงในทะเลจำเป็นต้องมีการตรวจสอบและเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยนี้ เปรียบเทียบกับการคำนวณสมการแคทีนารีเพื่อตรงสอบความถูกต้องของสมการและแบบจำลอง การตรวจสอบจะตรวจสอบโดยการวิเคราะห์เคเบิลที่มีจุดรองรับต่างระดับกันดังแสดงในรูปที่ 4.1 กำหนดแรงดึงที่ปลายบนและไม่คำนึงถึงการยึดตัวตามแนวแกน การเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขกับงานวิจัย [6] ใช้ข้อมูลในการวิเคราะห์ดังนี้

ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เปรียบเทียบการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการแคทีนารี

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
แรงดึงที่ปลายบน	T_H	8153.69	นิวตัน
ความลึกของระดับน้ำทะเล	H	36	เมตร
ความยาวส่วนโค้ง	s_t	305	เมตร
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	13	นิวตันต่อเมตร



รูปที่ 4.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบแคทีนารีระดับ

ตารางที่ 4.2 ผลการเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขกับการคำนวณเชิงตัวเลขกับสมการแคทีนารี

พารามิเตอร์ (เมตร)	สัญลักษณ์	Pual Cella [6]	งานวิจัยนี้
ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวระนาบ	L	300	300
ระยะจากจุดต่ำสุดถึงปลายบนของเคเบิลในแนวระนาบ	L_B	224.1477	223.9334
ระยะจากจุดต่ำสุดถึงปลายบนของเคเบิลในแนวตั้ง	y_H	40.5644	40.5643

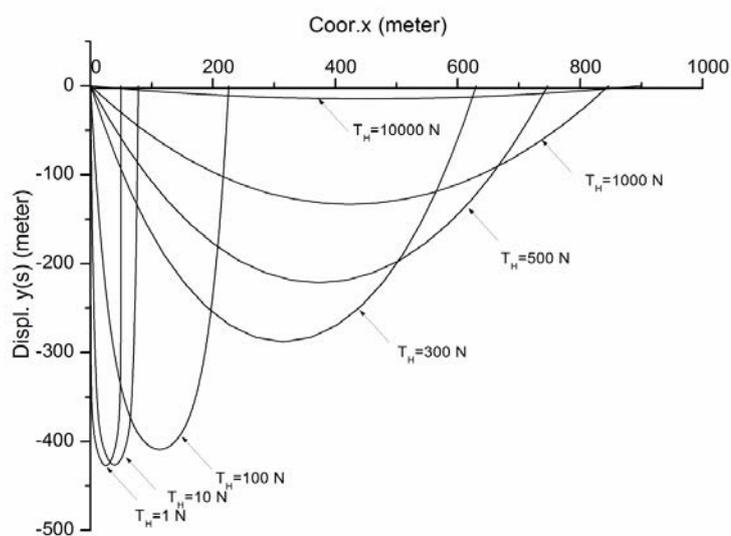
การเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับงานวิจัย Pual Cella [6]พบว่างานวิจัยนี้ได้คำตอบเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ตัวอย่างการคำนวณของ Pual Cella [6] ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.

4.2 สภาวะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิลที่มีจุดรองรับระดับเดียวกันภายใต้สภาวะสมดุล

การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิลที่มีจุดรองรับในระดับเดียวกันต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงไปโดยให้ความยาวก่อนการยึดตัวคงที่ น้ำหนักของเคเบิลคงที่ตลอดความยาว โดยให้เคเบิลนี้ไม่เกิดการยึดตัวตามแนวแกนใช้ข้อมูลในการวิเคราะห์ดังนี้ ตารางที่ 4.3 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
แรงดึงที่ปลายบน	T_H	1, 10, 100, 300, 500, 1000, 10000	นิวตัน
ความยาวส่วนโค้ง	S_t	869	เมตร
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
โมดูลัสความยืดหยุ่น	E	1.79×10^6	นิวตันต่อตารางเมตร
พื้นที่หน้าตัด	A	4.15×10^{-4}	ตารางเมตร

จากกราฟรูปที่ 4.2 แสดงผลการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเคเบิลที่มีจุดรองรับในระดับเดียวกัน พบว่าเมื่อแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนลดลง การแอ่นตัวของเคเบิลจะมีค่ามากขึ้น



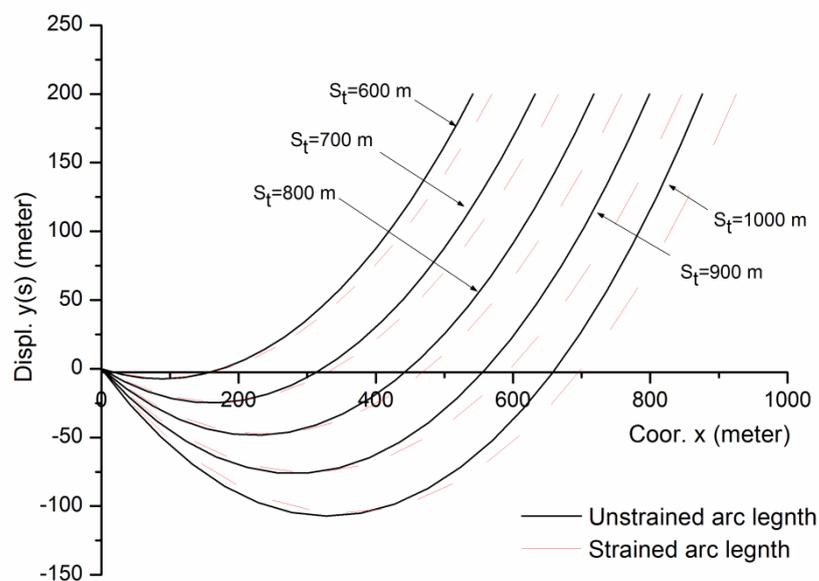
รูปที่ 4.2 สภาวะสมดุลของเคเบิลต่าง ๆ เมื่อเปลี่ยนค่าแรงดึงที่ปลายบน

4.3 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนความยาวส่วนโค้งของเคเบิลที่จุดรองรับต่างระดับ

การวิเคราะห์พฤติกรรมของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้ง โดยให้ ระยะจากจุดรองรับในแนวตั้ง แรงดึงในแนวราบที่ปลายบน น้ำหนักของเคเบิล และ โมดูลัสความยืดหยุ่นของเคเบิลแต่ละเส้นมีค่าคงที่และเท่ากันทุกเส้น โดยใช้พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ดังนี้

ตารางที่ 4.4 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งของเคเบิล

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
แรงดึงที่ปลายบน	T_H	5000	นิวตัน
ความยาวส่วนโค้ง	S_t	600, 700, 800, 900, 1000	เมตร
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
โมดูลัสความยืดหยุ่น	E	1.79×10^6	นิวตันต่อตารางเมตร
ระยะทางจากจุดรองรับในแนวตั้ง	y_H	200	เมตร
พื้นที่หน้าตัด	A	4.15×10^{-4}	ตารางเมตร



รูปที่ 4.3 พฤติกรรมของเคเบิลที่มีจุดรองรับต่างระดับกันเมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งของเคเบิล

จากกราฟรูปที่ 4.3 แสดงการวิเคราะห์เมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งของเคเบิลจะได้รูปร่างการวางตัวของเคเบิลไปในแนวทางเดียวกัน เมื่อเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้นมุมที่ปลายล่างจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องของเส้นทางเดินที่จุดต่ำสุดของเส้นโค้งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความยาว และเมื่อเปรียบเทียบพฤติกรรมของเคเบิลที่เกิดการยืดตัวและไม่เกิดการยืดตัว จะพบว่าเคเบิลที่เกิดการยืดตัวก็ยังวางตัวไปในแนวทางเดียวกันกับเคเบิลก่อนการยืดตัว ความยาวส่วนโค้งของเคเบิลจะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุมุมที่ปลายล่างไม่มีความเปลี่ยนแปลงมากนักเนื่องจากจุดรองรับของเคเบิลที่ปลายบนมีการเคลื่อนที่ในแนวราบได้จากกราฟจะเห็นได้ชัดเจนว่าเคเบิลเกิดการยืดตัวและความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น

4.4 ผลการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวดิ่งจากจุดรองรับของเคเบิล

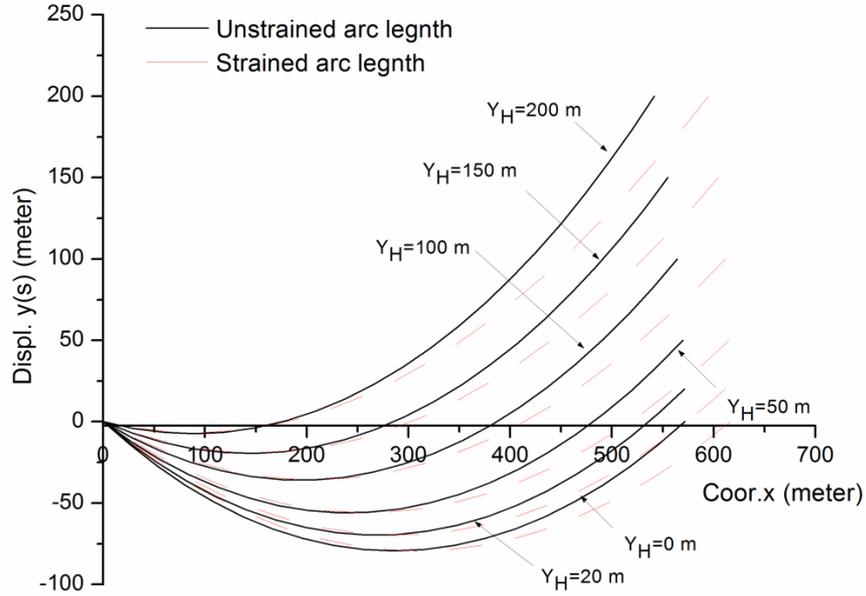
การวิเคราะห์พฤติกรรมของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะจากจุดรองรับในแนวดิ่งโดยให้ความยาวส่วนโค้งก่อนเกิดการยืดตัว แรงดึงในแนวราบที่ปลายบน น้ำหนักของเคเบิล และโมดูลัสความยืดหยุ่นของเคเบิลแต่ละเส้นมีค่าคงที่และเท่ากันทุกเส้น โดยใช้พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ดังนี้

ตารางที่ 4.5 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ในกรณีเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวดิ่งจากจุดรองรับ

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
แรงดึงที่ปลายบน	T_H	5000	นิวตัน
ความยาวส่วนโค้ง	s_t	600	เมตร
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
โมดูลัสความยืดหยุ่น	E	1.79×10^{13}	นิวตันต่อตารางเมตร
ระยะทางจากจุดรองรับในแนวดิ่ง	y_H	0, 20, 50, 100, 150, 200	เมตร
พื้นที่หน้าตัด	A	4.15×10^{-4}	ตารางเมตร

จากกราฟรูปที่ 4.4 แสดงการวางตัวของเคเบิลที่มีจุดรองรับที่ปลายบนในระดับต่าง ๆ กัน จะเห็นว่าเมื่อมีการยกระดับมากขึ้นมุมที่ปลายล่างจะมีค่าลดลง การแอ่นตัวก็จะมีค่าน้อยลงสอดคล้องกันและมีแนวโน้มการเรียงตัวของเคเบิลแต่ละเส้นเป็นไปในทิศทางเดียวกัน และเมื่อกำหนดให้เคเบิลมีความสามารถในการยืดตัวเปรียบเทียบกับเคเบิลที่ไม่เกิดการยืดตัว ผลที่ได้คือ การวางตัวของเคเบิลเป็นไปในทิศทางเดียวกันมุมที่ปลายล่างไม่เปลี่ยนแปลงไปมากนัก จากกราฟจะเห็นว่า ความยาวของ

เคเบิลมีค่าเพิ่มขึ้นและจุดรองรับที่ปลายขยับเคลื่อนที่ไปในแนวราบในระดับเดียวกันกับเคเบิลที่ยังไม่ยืดตัว



รูปที่ 4.4 พฤติกรรมของเคเบิลที่จุดรองรับเมื่อเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวนิ่ง

4.5 ผลของค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงกรณีที่กำหนดแรงดึงที่ปลายบน

ค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงของไหลเป็นตัวแปรไร้หน่วยที่บ่งบอกว่าท่อลำเลียงของไหลนั้นมีความสามารถในการยึดตัวมากหรือน้อย เช่นถ้าค่าความสามารถในการยึดตัวสูง ท่อลำเลียงของไหลนั้นจะมีความสามารถในการยึดตัวสูง

การวิเคราะห์ในกรณีที่กำหนดแรงดึงที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลของจะกำหนดให้ค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงคือ T_H / EA

ข้อมูลทางกายภาพเบื้องต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลของค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงของไหลที่มีต่อสถานะสมดุลมีดังนี้

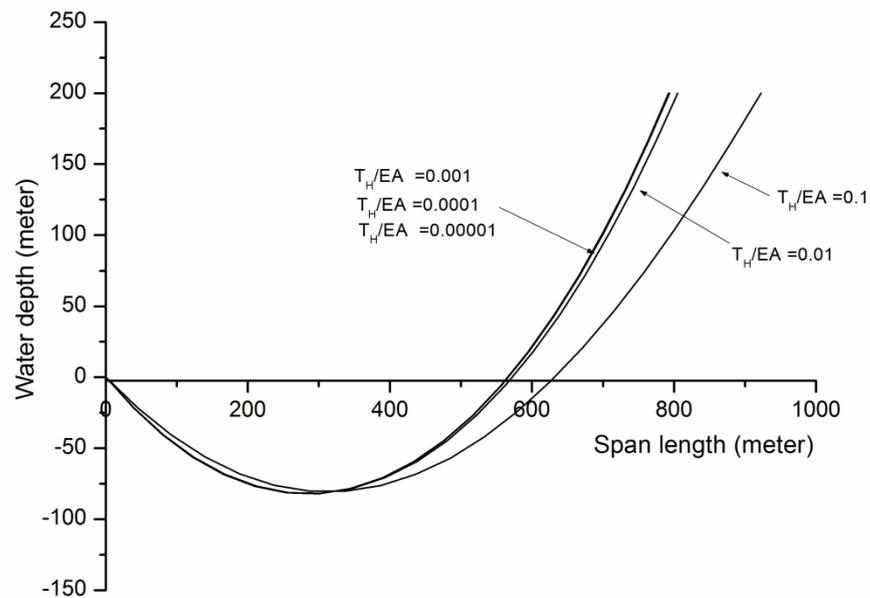
ตารางที่ 4.6 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์กรณีกำหนดให้แรงดึงที่ปลายบนคงที่

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
แรงดึงที่ปลายบน	T_H	5000	นิวตัน
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
ระยะทางจากจุดรองรับในแนวตั้ง	y_H	200	เมตร
ความยาวส่วนโค้ง	s_t	900	เมตร
พื้นที่หน้าตัด	A	7.068×10^{-2}	ตารางเมตร
โมดูลัสความยืดหยุ่น	E	7.074×10^5 - 7.074×10^9	นิวตันต่อตารางเมตร

ตารางที่ 4.7 ความสามารถในการยืดตัวของเคเบิลในกรณีกำหนดแรงดึงที่ปลายบน

T_H / EA	แรงดึงที่ปลายบน	โมดูลัสความยืดหยุ่น	ความยาวของท่อน้ำเคเบิลหลังเกิดการยืดตัวตามแนวแกน
0.1	5000	7.074×10^5	1011.46
0.01	5000	7.074×10^6	910.5641
0.001	5000	7.074×10^7	901.0503
0.0001	5000	7.074×10^8	900.1049
0.00001	5000	7.074×10^9	900.0105

ตารางที่ 4.7 แสดงผลการวิเคราะห์ในกรณีที่กำหนดแรงดึงปลายบนของท่อน้ำเคเบิลของไหล ถ้าท่อน้ำเคเบิลของไหลมีค่าความสามารถในการยืดตัวเพิ่มขึ้น พบว่าความยาวของท่อน้ำเคเบิลของไหลก่อนและหลังเกิดการยืดตัวตามแนวแกนมีค่าลดลง มุมที่ปลายล่างมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนมุมที่ปลายบนมีค่าลดลง ผลการวิเคราะห์ที่ได้ นำมาเขียนกราฟระหว่างการเคลื่อนที่ในแนวระดับกับความลึกของน้ำทะเลโดยทำการแปรเปลี่ยนค่าความสามารถในการยืดตัว ดังแสดงในรูป 4.5



รูปที่ 4.5 ผลของการยึดตัวที่มีต่อตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงกรณีกำหนดแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน

จากลักษณะการวางตัวของท่อลำเลียงในรูป 4.5 จะเห็นได้ว่า ท่อลำเลียงที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นน้อย ๆ จะทำให้เกิดการยึดตัวได้มากแบบจำลองนี้ให้จุดรองรับที่ปลายบนสามารถเคลื่อนตัวได้อย่างอิสระในแนวระดับ จุดปลายบนของท่อลำเลียงจึงเคลื่อนตัวเข้าเพราะที่จุดต่ำสุดของท่อลำเลียงเกิดการยึดและหย่อนตัวลง เมื่อเพิ่มค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมากขึ้นค่าความสามารถในการยึดตัวของท่อลำเลียงจะลดลงจนเข้าใกล้ค่าศูนย์ หรือไม่เกิดการยึดตัว ลักษณะการวางตัวของท่อลำเลียงจะวางตัวเสมือนว่าไม่เกิดการยึดตัว จุดปลายบนมีการเคลื่อนที่น้อยมาก หรือสรุปได้ว่าถ้าค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นสูงมาก ๆ จะไม่มีผลกับการแปรเปลี่ยนตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียง

ในกรณีที่ท่อลำเลียงมีค่าความสามารถในการยึดตัวน้อย ๆ เช่น $T_H/EA = 0.001$ และ 0.0001 พบว่าผลการวิเคราะห์มีค่าใกล้เคียงกันดังนั้นสรุปได้ว่า เมื่อท่อลำเลียงมีค่าความสามารถในการยึดตัวน้อยกว่า 0.001 จะไม่มีผลกระทบต่อสภาวะ สมดุลของท่อลำเลียงของไหล

4.6 สถานะสมดุลของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นที่ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคองที่

การวิเคราะห์พฤติกรรมของเคเบิลเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น โดยให้ความยาวส่วนโค้งก่อนการยึดตัวคองที่และระยะทางจากจุดรองรับในแนวราบหลังการยึดตัวคองที่ ระยะจากจุดรองรับในแนวคั้งคองที่ และระยะทางจากจุดรองรับในแนวราบหลังการยึดตัวคองที่ น้ำหนักของเคเบิลแต่และเส้นมีค่าคองที่และเท่ากันทุกเส้น โดยใช้พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ดังนี้

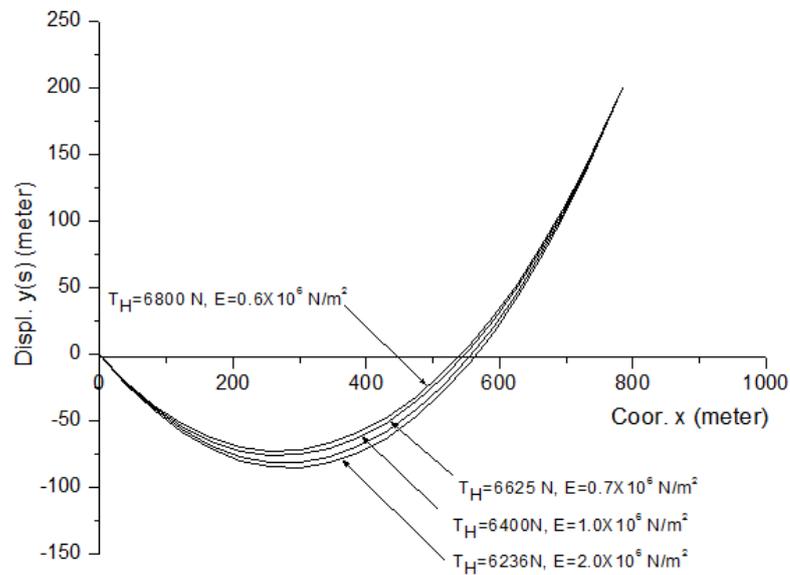
ตารางที่ 4.8 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์กรณีกำหนดให้ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคองที่

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
ระยะทางจากจุดรองรับในแนวคั้ง	Y_H	200	เมตร
น้ำหนักสุทธิของเคเบิล	w	13	นิวตันต่อเมตร
ความยาวส่วนโค้ง	S_t	900	เมตร
พื้นที่หน้าตัด	A	4.15×10^{-4}	ตารางเมตร

ตารางที่ 4.9 ผลของการยึดตัวของเคเบิลเมื่อแปรเปลี่ยนค่า โมดูลัสความยืดหยุ่นที่ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคองที่

โมดูลัสความยืดหยุ่น (นิวตันต่อตารางเมตร)	แรงคั้งในแนวราบที่ปลายบน (นิวตัน)	ความยาวส่วนโค้งของเคเบิลก่อนการยึดตัว (เมตร)	ระยะทางในแนวราบก่อนการยึดตัว (เมตร)	ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัว (เมตร)
0.6×10^6	6800	900	575.3660	782.7667
0.7×10^6	6625	900	603.8569	782.6454
1.0×10^6	6400	900	655.6948	782.6842
2.0×10^6	6236	900	718.3346	783.2312

ตารางที่ 4.9 แสดงผลการวิเคราะห์ในกรณีที่กำหนดระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัว ถ้าค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าของแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนที่ทำให้ระยะทางจากจุดรองรับในแนวราบหลังการยึดตัวมีค่าเท่ากันในแต่ละค่าของโมดูลัสความยืดหยุ่นจะมีค่าลดลง ระยะทางในแนวราบก่อนการยึดตัวมีค่าเพิ่มขึ้นแปรผันตรงกับค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น มุมที่ปลายล่างมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนมุมที่ปลายบนมีค่าลดลง ผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงไว้ในรูป 4.6



รูปที่ 4.6 ผลของการยึดตัวที่ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นต่างๆ ที่ระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวคงที่

จากรูปที่ 4.6 พบว่าเมื่อระยะทางในแนวราบหลังการยึดตัวมีค่าคงที่ที่ต่อลำเลียงมีการแอ่นตัวเพิ่มมากขึ้นเมื่อค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่เดียวกันแรงดึงในแนวราบก่อนข้างคงที่หรือมีการแปรเปลี่ยนเล็กน้อยโดยแรงดึงมีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 6515.15 นิวตัน

บทที่ 5 สรุปผลการศึกษา

โครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้นำเสนอการวิเคราะห์สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีที่ยึดตัวได้ตามแนวแกนแบบจำลองในการวิเคราะห์ที่ใช้ โดยมีความยาวส่วนโค้งเป็นตัวแปรอิสระ เป็นการวิเคราะห์ในกรณีที่กำหนดแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของท่อลำเลียง การวิเคราะห์สมการของท่อลำเลียงเริ่มจากสมการสมดุลของท่อลำเลียงในแนวสัมผัสเพื่อหาค่าแรงดึงภายในของท่อลำเลียงแล้วหาสมการงานและพลังงานรวมของระบบ จากนั้นใช้วิธีการแปรผัน จะได้สมการแปรผันของงานและพลังงานรวมของระบบ วิธีการหาคำตอบใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบ่งท่อลำเลียงออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวแกน ในชิ้นส่วนย่อยแต่ละชิ้นจะใช้วิธีการอินทิเกรตแบบ Gaussian quadrature จากนั้นรวมชิ้นส่วนย่อยมาอยู่ในระบบรวม แล้วใช้กระบวนการกระทำซ้ำแบบ Newton-Raphson ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขจากตัวอย่างงานวิจัยที่ผ่านมา งานวิจัยนี้ในกรณีของคานช่วงเดียวที่มีการแอ่นตัวมากของท่อลำเลียงซึ่งมีจุดรองรับที่ปลายทั้งสองด้านอยู่ต่างระดับกัน พบว่าได้คำตอบที่สอดคล้องกันซึ่งแสดงถึงประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จากงานวิจัยนี้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการยึดตัวของท่อลำเลียงในสภาวะสมดุลสถิต หลังจากนั้นได้วิเคราะห์ผลการศึกษา ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. กรณีที่กำหนดแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของท่อลำเลียง ถ้ากำหนดค่าความสามารถในการยึดตัวเพิ่มขึ้น ความยาวของท่อลำเลียงก่อนและหลังการยึดตัวตามแนวแกนจะลดลง
2. ผลการวิเคราะห์ปัญหาของท่อลำเลียง พบว่า ท่อลำเลียงที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นน้อย ผลของการยึดตัวตามแนวแกนทำให้ตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงมีการเปลี่ยนแปลงไปมาก ส่วนท่อลำเลียงที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นสูง ผลของการยึดตัวตามแนวแกน จะทำให้ตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงเปลี่ยนแปลงไปน้อยมาก
3. กรณีที่กำหนดให้ระยะทางในแนวราบจากจุดรองรับหลังการยึดตัวของเคเบิลมีค่าคงที่ พบว่าที่ตำแหน่งใดๆ เมื่อค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มมากขึ้น ในขณะเดียวกันแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนค่อนข้างคงที่หรือแปรเปลี่ยนไปน้อยมาก

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยต่อไปในอนาคตสำหรับโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้นำเสนอการวิเคราะห์สถานะสมมูลสถิตใน 2 มิติ ซึ่งสามารถใช้เป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์งานวิจัยต่อไปในอนาคตได้ดังนี้

1. การวิเคราะห์การยึดตัวในสถานะสมมูลสถิตใน 3 มิติ
2. การวิเคราะห์การยึดตัวเนื่องจากมีแรงจากของไหล
3. การวิเคราะห์การยึดตัวเนื่องจากแรงทางพลศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

1. Chucheepsakul, S., Huang, T. and Laohapotjanart, P., 1995, "Effect of Axial Deformation on the Equilibrium Configurations of Marine Cables", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 5, June 11-16, 1995, The Hague, The Netherlands, pp. 244-248.
2. Greco, L., Impollonia N. and Coumo M., 2014, "A Procedure for The Static Analysis of Cable Structure Following Elastic Catenary Theory", **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 51, pp. 1521-1533
3. Huang, T., 1992, "A Static Equilibrium Formulation Including Axial Deformation for Marine Cables", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 2, June 14-19, 1992, San Francisco, USA, pp. 252-255.
4. Chucheepsakul, S. and Huang, T., 1997, "Effect of Axial Deformation on Natural Frequencies of Marine Cables", **International Offshore and Polar Engineering Conference**, 7, May 25-30, 1997, Honolulu, USA, pp. 131-136
5. Punjarat,O., Chucheepsakul, S., "Large Displacement Static Analysis of a Steel Catenary Riser in Deepwater", **King Mongkut's Inst. of Technology, Bangkok ,Thailand..**
6. Cella, P., 1999, "Methodology for Exact Solution of Catenary", **Journal of Structural Engineering**, Vol. 125, No. 12, Dec, 1999, pp. 1451-1453.

7. Thai H.-T. and Kim S.-E., 2011, "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Cable Structure", **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 47, pp. 237-246.

ภาคผนวก ก

ก.1 สมการสมดุลในแนวสัมผัสของเคเบิล

สมการการแปรผันงานเสมือนรวมเนื่องจากแรงดึงและน้ำหนักประสิทธิผล

$$\delta\pi = \delta W_T + \delta W_w \quad (ก.1)$$

$$\delta\pi = -\int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds - \int_0^{st} w \delta y_0 ds \quad (ก.2)$$

กำหนดให้

$$u = \frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}}$$

$$du = \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) ds$$

$$dv = \delta y'_0 ds = d(\delta y_0)$$

$$v = \delta y_0$$

แทนค่าลงในสมการ (ก.2) จะได้

$$\therefore \int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds = \frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \delta y_0 \Big|_0^{st} - \int_0^{st} \delta y_0 \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \cdot ds \quad (ก.3)$$

สมการ (ก.3) สามารถเขียนในรูปของการอินทิเกรตได้ดังนี้

$$-\int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds = + \int_0^{st} \delta y_0 \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \cdot ds \quad (ก.4)$$

แทนค่าสมการ (ก.4) ลงในสมการ (ก.2) จะได้

$$\delta\pi = \int_0^{st} \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \delta y_0 \cdot ds - \int_0^{st} w \delta y_0 ds \quad (ก.5)$$

หรือ

$$\delta\pi = \int_0^{st} \left\{ \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right)' - w \right\} \delta y_0 \cdot ds \quad (ก.6)$$

เขียนสมการ (ก.6) ในรูปของสมการออยเลอร์จะได้

$$\left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right)' - w = 0 \quad (ก.7)$$

กำหนดให้

$$x'_0 = \sqrt{(1 + \varepsilon_0)^2 - y_0'^2}$$

แทนค่า x'_0 ลงในสมการ (ก.7) จะได้

$$\frac{d}{ds} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - w = 0$$

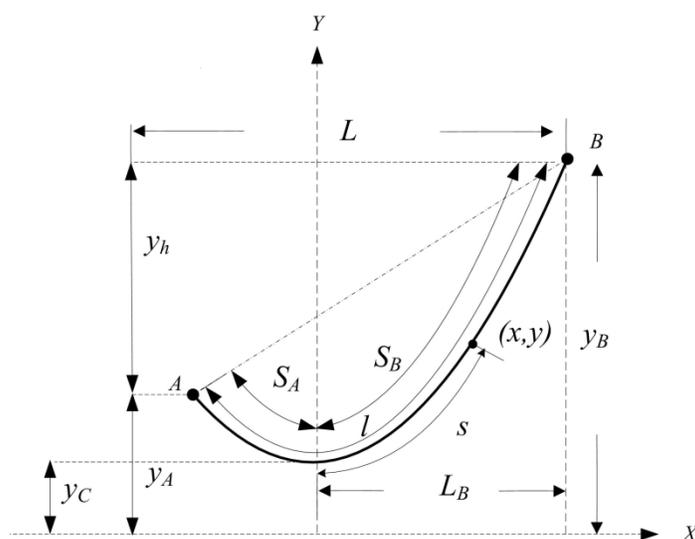
หรือ

$$\frac{d}{ds_0} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} = 0 \quad (ก.8)$$

ดังนั้นสมการ (ก.8) จะมีค่าเท่ากับสมการสมดุลของเคเบิล

ก. ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิต โดยสมการแคทีนารีนี้มีค่าการยกกระดับที่จุดปลายบนของเคเบิลจึงมีความแตกต่างจากงานวิจัยอื่น อีกทั้งงานวิจัยดังกล่าวนี้มีความสอดคล้องกับท้อลค่าเสียงของไหลแบบแคทีนารีในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ จึงได้นำงานวิจัยระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีมาทำการวิเคราะห์ซึ่งงานวิจัยประกอบด้วยรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ ก.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกกระดับ

คำนิยาม

- L = ระยะทางตามแนวราบของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- y_h = ค่าความต่างระดับในแนวดิ่งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- l = ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี
- s = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทีนารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จนถึงจุดใดๆ (x, y)
- L_B = ระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- y_B = ความสูงที่สูงขึ้นไปจากจุดเริ่มต้นของแกนจนถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- s_B = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทีนารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งจนถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- y_C = ระยะจากจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง

จากสมการเบื้องต้น

$$y = y_c \cosh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.9})$$

$$s = y_c \sinh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.10})$$

$$T = wy_c \cosh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.11})$$

จากสมการเบื้องต้นทั้งสามสมการตามงานวิจัยดังกล่าวพบว่าจะมีจำนวนตัวแปรหลักทั้งหมดสี่ตัวที่ต้องการหาผลเฉลย ได้แก่ L, y_h, l และ y_{B-C} ซึ่งถ้าสามารถทำการหาตัวแปรหลักได้จำนวนสามในตัวแล้วก็จะสามารถทราบรูปทรงและขนาดของเส้นโค้งแคทีนารีได้

จากสมการที่ (ก.9) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_c \cosh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.12})$$

และสมการ

$$y_A = y_c \cosh \frac{L - L_B}{y_c} \quad (\text{ก.13})$$

จากสมการที่ (ก.2) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$s_B = y_c \sinh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.14})$$

และ

$$l - s_B = y_c \sinh \frac{L - L_B}{y_c} \quad (\text{ก.15})$$

จากสมการทั้งหมดเมื่อนำสมการไฮเปอร์โบลิกทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการหาค่าผลเฉลย จะได้สมการทั้งหมดที่ใช้ในการหาค่าตัวแปรหลักทั้งสี่ตัวแปรได้ ดังนั้นในงานวิจัยดังกล่าวจึงแนะนำให้หาค่าตัวแปร y_C เป็นอันดับแรกเนื่องจากเป็นค่าตัวแปรที่มีความซับซ้อนที่สุด ซึ่งจะสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{L_B}{y_C} = \frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \quad (ก.16)$$

และสมการ

$$l = y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) - y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) \quad (ก.17)$$

จากรูปที่ (ก.1) $y_B = y_C + (y_B - y_C)$ นำไปแทนค่าในสมการที่ (ก.4) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_C + (y_B - y_C) = y_C \cosh \frac{L_B}{y_C} \quad (ก.18)$$

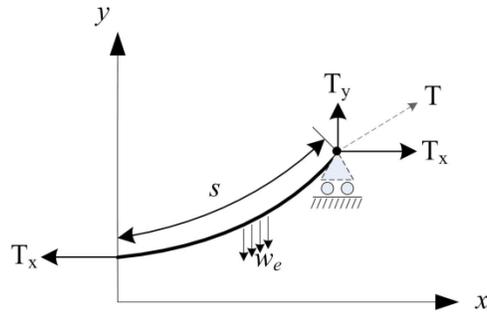
เมื่อทำการคำนวณค่า y_C ค่าจากสมการที่ (ก.17), ใช้สมการที่ (ก.16) หาค่า L_B และใช้สมการที่ (ก.18) ในการคำนวณหาค่า $y_B - y_C$ ถ้าเกิดกรณีนอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วทั้ง 3 กรณีที่กล่าวมาแล้วสามารถทำการคำนวณค่าต่างๆได้ดังนี้

ในกรณีที่ไมทราบค่า l หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$y_h = y_B - y_C \cosh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (ก.19)$$

ในกรณีที่ไมทราบค่า y_h หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$l = y_C \sinh \left(\cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) + y_C \sinh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (ก.20)$$



รูปที่ ก.2 รายละเอียดแรงดึงของเส้น ใ้คงแบบแคทีนารีย์ระดับ

วิธีการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตจากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวราบได้ดังต่อไปนี้

ที่จุดที่มีการแอนตัวที่ $x = 0$, $\cosh \frac{x}{y_c} = 1$ และ $\cos \theta = 1$ นำค่าทั้งหมดแทนในสมการ

$$T_x = w y_c \quad (\text{ก.21})$$

จากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวตั้งได้ดังต่อไปนี้ นำค่า s จากสมการ (ก.10) แทนลงในสมการ (ก.21) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$T_y = w s \sinh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.22})$$

ดังนั้น นั้นค่าแรงดึงสูงสุดที่ปลายบนของเส้น ใ้คงแคทีนารีย์สามารถหาค่าได้จาก

$$T = w s \cosh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.23})$$

ก.1 ตัวอย่างการคำนวณ

เมื่อศึกษาทฤษฎีงานวิจัยการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิตเป็นที่เรียบร้อยแล้วต่อไปจะแสดงตัวอย่างการคำนวณที่ใช้เปรียบเทียบค่าจาก โปรแกรมโดยมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน ประกอบด้วยความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี น้ำหนักประสิทธิผล ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ และระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ ดังแสดงในตารางที่ ก.1

ตารางที่ ก.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน

คุณสมบัติของเคเบิล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี	l	605	เมตร
2. น้ำหนักประสิทธิผล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
3. ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง	y_h	100	เมตร
4. แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ	T_x	5000	นิวตัน
5. ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ	L	300	เมตร

จากสมการ (ก.9) สามารถหาค่าของระยะจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง (y_c) ได้ดังนี้

$$305 = y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} + \tanh^{-1}\frac{36}{305}\right) - y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} - \tanh^{-1}\frac{36}{305}\right)$$

$$y_c = 627.2069 \text{ เมตร}$$

เมื่อได้ค่าจุดอ้างอิงต่ำสุดเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จากสมการ (ก.16) สามารถหาค่าระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง (L_B) ได้ดังนี้

$$\frac{L_B}{627.2069} = \frac{300}{2(627.2069)} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}$$

$$L_B = 224.3777 \text{ เมตร}$$

จากรูปที่ ก.1 สามารถหาค่าระดับจากจุดต่ำสุดจนถึงจุดปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี ($y_B - y_C$) ได้ดังต่อไปนี้

$$627.2069 + (y_B - y_C) = 627.2069 \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$(y_B - y_C) = 40.5644 \text{ เมตร}$$

นอกจากระยะต่างๆของเส้นโค้งเคทีนารีแล้ว สามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับที่ปลายบนได้โดยค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารีสามารถหาได้จากสมการ (ก.21) ได้ดังนี้

$$T_x = 13(627.2069) = 8153.69 \text{ นิวตัน}$$

และแรงดึงในแนวดิ่งที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี จากสมการ (ก.22) ดังนี้

$$T_y = 13(627.2069) \sinh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T_y = 2979.53 \text{ นิวตัน}$$

ดังนั้น ผลรวมของแรงดึงทั้งหมดสามารถหาค่าได้จากสมการ (ก.11)

$$T = 13(627.2069) \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T = 8681.03 \text{ นิวตัน}$$

ภาคผนวก ข
โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ข.1 ตัวแปรที่สำคัญในโปรแกรมคอมพิวเตอร์

EF()	=	เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อย
EI	=	ผลคูณของโมดูลัสความยืดหยุ่นกับ โมเมนต์ความเฉื่อย
EK()	=	สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อย
H	=	ความยาวของชิ้นส่วนย่อยตามส่วน โค้ง
IB	=	เงื่อนไขขอบเขตของจุดรองรับของชิ้นส่วนย่อย
ITMAX	=	จำนวนครั้งของการกระทำซ้ำมากที่สุดที่กำหนด
MBAND	=	จำนวนแถวของแบนด์เมตริกซ์
NDF	=	จำนวนดีกรีอิสระต่อจุดข้อ
NEL	=	ลำดับที่ของชิ้นส่วนย่อย
NELEM	=	จำนวนชิ้นส่วนย่อย
NODE	=	ลำดับที่ของจุดข้อ
NODI()	=	ลำดับที่ของจุดข้อด้านซ้ายของชิ้นส่วนย่อย
NODJ()	=	ลำดับที่ของจุดข้อด้านขวาของชิ้นส่วนย่อย
NUMDF	=	จำนวนดีกรีอิสระของระบบรวม
NUMNP	=	จำนวนจุดข้อของระบบรวม
Q()	=	ดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อย
QO()	=	ดีกรีอิสระของระบบรวม
SH()	=	แรงเฉือนที่เกิดขึ้น
SK(),	=	สติฟเนสเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม
SL	=	ระยะช่วงพาด
ST	=	ความยาวส่วน โค้ง
TF()	=	เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อท่อ
TH	=	แรงดึงตามแนวราบที่ปลายบน
TOLER	=	ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด
WT()	=	ค่าสัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนักสำหรับจุดในการอินทิเกรตของ Gauss
XH	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวราบ
XT()	=	ค่าของตำแหน่งของจุดในการอินทิเกรตของ Gauss
YH	=	ระยะระหว่างจุดรองรับในแนวตั้ง

ข.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

```

C      Program "LexcableR.for"
C      Finite element computer program for static equilibrium analysis of
C      cables with axial deformations using Lagrangian coordinates and
C      cubic polynomials shape functions
C      Revised 16 October 2014

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK,YH
COMMON/BLKN/NEL
COMMON/SIN2/NDFD,NBW,NUMNPD
COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
COMMON/CINT/XT(4),WT(4)
DIMENSION SK(200,4),EK(4,4),KON(200),QO(200),Q(4),KK(4),NODI(100)
DIMENSION NODJ(100),TF(200),EF(4),P(4),R(4),S(4),IB(6),DQO(200)
DIMENSION EPN(50),EPN1(50),EPN2(50),TENODE(50),SX(200)
      DIMENSION DYSND(200),DYSEL(200)
      CHARACTER*20 OUT
901  FORMAT(A)
      OPEN(UNIT=5,FILE='LexcableR_input',STATUS='UNKNOWN')
      WRITE(*,902)
902  FORMAT(' OUTPUT FILE NAME : ',\ )
      READ(*,901) OUT
      OPEN(6,FILE=OUT,STATUS='NEW')
      READ(5,*) LSTEP
      READ(5,*) NELEM,ITMAX,TOLER,YH,ST,FTOP,W,DO,DI,E
      WRITE(6,2001)
2001  FORMAT(10X,'OUTPUT OF EXTENSIBLE CABLES PROGRAM "LexcableR.for"')
      WRITE(6,2002) NELEM,ITMAX,TOLER,YH,ST,FTOP,W,DO,DI,E
2002  FORMAT(10X,'NUMBER OF ELEMENTS      ',I5,/
*      10X,'NUMBER OF ITERATIONS      ',I5,/

```

```

* 10X,'TOLERANCE          ',F12.6,/
* 10X,'SUPPORT ELEVATION  ',F12.6,/
* 10X,'TOTAL ARC LENGTH   ',F12.6,5X,'M'/
* 10X,'TENSION            ',F12.6,5X,'N'/
* 10X,'DISTRIBUTED LOAD   ',F12.6,5X,'N/M'/
* 10X,'OUTSIDE DIAMETER   ',F12.6,5X,'M'/
* 10X,'INSIDE DIAMETER    ',F12.6,5X,'M'/
* 10X,'ELASTIC MODULUS    ',E12.6,5X,'MPa'/

PI=3.1415926
GRAV=9.81
AO=PI*DO**2/4.
AI=PI*DI**2/4.
AS=(AO-AI)*1000000.
EA=E*AS
NDF=2
MBAND=4
NUMNP=NELEM+1
NUMDF=NUMNP*NDF
H=ST/FLOAT(NELEM)
DS=H/2.
DO 100 J=1,NELEM
N1=2*(J-1)
KON(N1+1)=J
KON(N1+2)=J+1
NODI(J)=J
NODJ(J)=J+1
100 CONTINUE
DO 25 I=1,2
L1=(NDF+1)*(I-1)+1
IB(L1)=NELEM*(I-1)+1
IB(L1+1)=0

```

```
      IB(L1+2)=1
25 CONTINUE
C
      CALL SETINT
C
      DO 55 I=1,NUMDF
55   QO(I)=0.
      DO 54 I=1,NUMNP
          EPN(I)=0.
          EPN1(I)=0.
          EPN2(I)=0.
          TENODE(I)=0.
54   CONTINUE
C
          IF(LSTEP.EQ.1) THEN
              GOTO 57
          END IF
C
56   READ(5,*,END=3000) YH,ST,FTOP,W,DO,DI,E
C
57 DO 50 ITER=1,ITMAX
      DO 10 I=1,NUMDF
          TF(I)=0.
          DO 10 J=1,MBAND
10   SK(I,J)=0.
          IF(ITER.EQ.1) THEN
              CK=0.
              DYS=0.
          ELSE
              CK=YH/SL
          END IF
```

```

DO 1000 NEL=1,NELEM
CALL ELEQ(KON,QO,Q)
DO 20 I=1,4
EF(I)=0.
DO 20 J=1,4
20 EK(I,J)=0.
DO 30 L=1,4
CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
DO 40 I=1,4
EF(I)=EF(I)-FTOP*WT(L)*R(I)*DYS/DYSM1**0.5*DS
*      -W*WT(L)*P(I)*DS
DO 40 J=1,4
EK(I,J)=EK(I,J)+FTOP*WT(L)*R(I)*R(J)*(1+EPS)**2/DYSM1**1.5*DS
40 CONTINUE
30 CONTINUE
C
      DYSEL(NEL)=DYS
C
KK(2)=2*NODI(NEL)
KK(4)=2*NODJ(NEL)
KK(1)=KK(2)-1
KK(3)=KK(4)-1
DO 400 I=1,4
II=KK(I)
TF(II)=TF(II)-EF(I)
DO 400 J=1,4
IF(KK(J).LT.II) GOTO 400
JJ=KK(J)-II+1
SK(II,JJ)=SK(II,JJ)+EK(I,J)
400 CONTINUE
1000 CONTINUE

```

```
C
C INSERT BOUNDARY CONDITIONS
C
  CALL BOUND(SK,TF,IB,NUMDF,MBAND)
C
C SOLVE SIMULTANEOUS EQUATIONS
C
  CALL BANSOL(SK,TF,NUMDF,MBAND,200,4)
C
C INCREMENTAL PROCESS
C
  SUM=0.
  DO 70 I=1,NUMDF
    TEMP=QO(I)
    DQO(I)=TF(I)
    QO(I)=QO(I)+DQO(I)
    DIFF=ABS(TEMP-QO(I))
    SUM=SUM+DIFF
  70 CONTINUE
C
C COMPUTE UNSTRAINED AND STRAINED SPAN LENGTH
C   SG=unstrained span element length
C   SL=unstrained span length
C   SG0=strained span element length
C   SL0=strained span length
C
  SL=0.
  SLO=0.
  DO 1010 NEL=1,NELEM
    CALL ELEQ(KON,QO,Q)
  1010 SG=0.
```

```

      SGO=0.
DO 60 L=1,4
CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
      SG=SG+WT(L)*(1.-DYS**2)**0.5*DS/(1.+EPS)
      SGO=SGO+WT(L)*DYSM1**0.5*DS
60  CONTINUE
      SL=SL+SG
      SLO=SLO+SGO
      ND=NEL+1
      SX(1)=0.
      SX(ND)=SL
      IF(NEL.EQ.1)THEN
      SII=0.D0
      CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
C   DYSND(1)=DYS
C   UPDATE DYS
      DYSND(1)=CK*(DYSM1)**0.5-QO(2)
C   UPDATE DYS NO2
      DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
C   UPDATE DYS NO3
      DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
C   UPDATE DYS NO4
      DYSND(1)=CK*(1.-DYSND(1)**2)**0.5-QO(2)
C
      SII=1.D0
      CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
      DYSND(2)=DYS
      DYSND(2)=CK*(1.-DYSND(2)**2)**0.5-Q(4)
      ELSE
      SII=1.D0
      CALL SHAPE1(SII,P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)

```

```

DYSND(ND)=DYS
      END IF
1010 CONTINUE
C
C COMPUTE AXIAL STRAIN USING NEWTION'S METHOD
C
      SUM1=0.
      DO 500 NODE=1,NUMNP
      ND=2*NODE-1
      CALL SHAPE1(XT(L),P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
C
      FTOPL=FTOP/COS(ASIN(DYSND(NUMNP)))
      EAEP=EA*EPN(NODE)
      FEPN=EAEP-FTOPL+W*(YH-(CK*SX(NODE)-QO(ND)))/(1.+EPN(NODE))
      DFEPN=EA-W*(YH-(CK*SX(NODE)-QO(ND)))/(1.+EPN(NODE))**2
      EPN2(NODE)=EPN1(NODE)-FEPN/DFEPN
      DIFF1=ABS(EPN2(NODE)-EPN1(NODE))
      SUM1=SUM1+DIFF1
      EPN1(NODE)=EPN2(NODE)
      EPN(NODE)=EPN2(NODE)
C      TENODE(NODE)=EA*EPN(NODE)
C      TENODE(NODE)=FTOPL-W*(YH-(TAN*SX(NODE)-QO(ND)))/(1.+EPN(NODE))
      TENODE(NODE)=FTOPL-W*(YH-(CK*SX(NODE)-QO(ND)))/(1.+EPN(NODE))
500  CONTINUE

C TEST FOR CONVERGENCE
C
      IF(ABS(SUM).LE.TOLER) GOTO 90
C  IF(ABS(SUM).LE.TOLER .AND. ABS(SUM1).LE.TOLER) GOTO 90
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,107) ITER

```

```
107 FORMAT(/10X,'NUMBER OF ITERATIONS      ',I5)
C
C PRINT OUT THE RESULTS
C
      CALL RESULT(QO,SL,SLO,SX,EPN,TENODE,FTOPL,DYSND)
50 CONTINUE
      WRITE(*,108)
108 FORMAT(10X,'NO CONVERGENCE')
90 CONTINUE
C
      GOTO 56
3000 STOP
      END
```

```
SUBROUTINE SETINT
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
COMMON/CINT/XI(4),W(4)
XI(1)=-0.861136311594053D0
XI(2)=-0.339981043584856D0
XI(3)=-XI(2)
XI(4)=-XI(1)
W(1)=0.347854845137453D0
W(2)=0.652145154862546D0
W(3)=W(2)
W(4)=W(1)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE ELEQ(KON,QO,Q)
```

```

IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION KON(200),QO(200),Q(4)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK,YH
COMMON/BLKN/NEL
L=2*(NEL-1)
N1=KON(L+1)
N2=KON(L+2)
K1=2*(N1-1)
K2=2*(N2-1)
DO 2 I=1,2
J1=K1+I
J2=K2+I
Q(I)=QO(J1)
2 Q(I+2)=QO(J2)
RETURN
END

SUBROUTINE SHAPE1(SI,P,R,S,DS,Q,YA,DYA,DYAM1,DYS,DYSM1,EPN,EPS)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK,YH
COMMON/BLKN/NEL
DIMENSION P(4),R(4),S(4),Q(4)
DIMENSION PE(2),QE(2),EPN(50)
XI=(1.+SI)*DS
P(1)=1.-3.*XI**2/H**2+2.*XI**3/H**3
P(2)=XI*(1.-2.*XI/H+XI**2/H**2)
P(3)=3.*XI**2/H**2-2.*XI**3/H**3
P(4)=XI*(-XI/H+XI**2/H**2)
R(1)=(-6.*XI/H+6.*XI**2/H**2)/H
R(2)=1.-4.*XI/H+3.*XI**2/H**2

```

```

R(3)=(6.*XI/H-6.*XI**2/H**2)/H
R(4)=-2.*XI/H+3.*XI**2/H**2
S(1)=-6./H**2+12.*XI/H**3
S(2)=(-4.+6.*XI/H)/H
S(3)=6./H**2-12.*XI/H**3
S(4)=(-2.+6.*XI/H)/H
QE(1)=EPN(NEL)
QE(2)=EPN(NEL+1)
PE(1)=1.-XI/H
PE(2)=XI/H
EPS=PE(1)*QE(1)+PE(2)*QE(2)
YA=P(1)*Q(1)+P(2)*Q(2)+P(3)*Q(3)+P(4)*Q(4)
DYA=R(1)*Q(1)+R(2)*Q(2)+R(3)*Q(3)+R(4)*Q(4)
DYAM1=(1.+EPS)**2-DYA**2
    DYS1=CK*SQRT(1.-DYS**2)-DYA
    DYSM=1.-DYS1**2.
    FDIS=DYS1-CK*SQRT(DYSM)+DYA
    DFDYS=1.+CK*DYS1/SQRT(DYSM)
    DYS=DYS1-FDIS/DFDIS
    DYSM1=1.-DYS**2
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE BOUND(SK,TF,IB,NUMDF,MBAND)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
DIMENSION SK(200,4),TF(200),IB(6)
DO 100 L=1,2
L1=(NDF+1)*(L-1)+1
NO=IB(L1)

```

```
K1=NDF*(NO-1)
DO 90 I=1,NDF
L2=L1+I
IF(IB(L2)) 90,10,90
10 KR=K1+I
DO 50 J=2,MBAND
KV=KR+J-1
IF(NUMDF-KV) 30,20,20
20 SK(KR,J)=0.
30 KV=KR-J+1
IF(KV) 50,50,40
40 SK(KV,J)=0.
50 CONTINUE
SK(KR,1)=1.
TF(KR)=0.
90 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE BANSOL(S,R,NSIZE,MBAND,NDIM,MDIM)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION S(NDIM,MDIM),R(NDIM)
700 DO 790 N=1,NSIZE
DO 780 L=2,MBAND
IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 780
I=N+L-1
C=S(N,L)/S(N,1)
J=0
DO 750 K=L,MBAND
```

```

      J=J+1
750 S(I,J)=S(I,J)-C*S(N,K)
      S(N,L)=C
780 CONTINUE
790 CONTINUE
800 DO 830 N=1,NSIZE
      DO 820 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 820
      I=N+L-1
      R(I)=R(I)-S(N,L)*R(N)
820 CONTINUE
830 R(N)=R(N)/S(N,1)
      DO 860 M=2,NSIZE
      N=NSIZE+1-M
      DO 850 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.) GOTO 850
      K=N+L-1
      R(N)=R(N)-S(N,L)*R(K)
850 CONTINUE
860 CONTINUE
      RETURN
      END

SUBROUTINE RESULT(QO,SL,SLO,SX,EPN,TNODE,FTOPL,DYSND)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON/PASS1/FTOP,W,C,ST,H,CK,YH
COMMON/COM2/NDF,NUMNP,NELEM
COMMON/BLKN/NEL
DIMENSION X(200),QO(200),EPN(50),TNODE(50),SX(200),DYSND(200)
WRITE(6,110) FTOPL,FTOP,YH,SL,SLO

```

```

110 FORMAT(10X,'TOTAL TENSION(FTOPL)      ',F16.4,5X,'N'/
*      10X,'HORIZONTAL TENSION(FTOP)    ',F16.4,5X,'N'/
*      10X,'SUPPORT ELEVATION          ',F16.4,5X,'M'/
*      10X,'UNSTRAINED CABLE SPAN LENGTH ',F16.4,5X,'M'/
*      10X,'STRAINED CABLE SPAN LENGTH  ',F16.4,5X,'M'/)
      CK=YH/SL
      SK=YH/SQRT(SL**2+YH**2)

      WRITE(6,111)
      DO 80 L=1,NUMNP
      NL=NUMNP-L
      NL1=NL+1
      DTS=NL*H
      K1=NDF*NL+1
      K2=K1+1
      X(K1)=CK*SX(NL1)-QO(K1)
      SLOPE=ASIN(SK)-ASIN(QO(K2))
      X(K2)=SIN(SLOPE)
80  WRITE(6,112) NL1,DTS,SX(NL1),(X(J),J=K1,K2),DYSND(NL1),EPN(NL1),
*      TNODE(NL1),TNODE(NL1)*COS(ASIN(DYSND(NL1)))
111 FORMAT(10X,'NODE',5X,'ARC-LENGTH',5X,'COORD. X',3X,'DISPL Y',8X,
*      'DY/DS',7X,'DYSND',7X,'STRAIN',7X,'TENSION(N)',8X,'TH'/)
112 FORMAT(7X,I5,5X,6F12.6,5X,F12.6,5X,F12.6)

      RETURN

      END

```

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล

นางสาวสุวิมล ธรรมไชย

วัน เดือน ปีเกิด

15 กันยายน 2527

ประวัติการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษา

มัธยมศึกษาตอนปลาย

โรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาคาร พ.ศ. 2545

ระดับปริญญาตรี

วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี พ.ศ. 2549

ระดับปริญญาโท

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา

(วิศวกรรมนอกฝั่ง) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

พ.ศ. 2557

ประวัติการศึกษา

วิศวกรโยธา บริษัททีมาก่อสร้าง จำกัด พ.ศ.2549

วิศวกรโยธา บริษัทดานิลี่ ฟาร์ อีสต์ จำกัด พ.ศ.2550-2554

วิศวกรโครงสร้าง บริษัทไอเบล (ประเทศไทย) จำกัด

พ.ศ.2554 - ปัจจุบัน