

ภาคผนวก ก

ก.1 สมการสมดุลในแนวสัมผัสของเคเบิล

สมการการแปรผันงานเสมือนรวมเนื่องจากแรงดึงและน้ำหนักประสิทธิผล

$$\delta\pi = \delta W_T + \delta W_w \quad (ก.1)$$

$$\delta\pi = -\int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds - \int_0^{st} w \delta y_0 ds \quad (ก.2)$$

กำหนดให้

$$u = \frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}}$$

$$du = \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) ds$$

$$dv = \delta y'_0 ds = d(\delta y_0)$$

$$v = \delta y_0$$

แทนค่าลงในสมการ (ก.2) จะได้

$$\therefore \int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds = \frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \delta y_0 \Big|_0^{st} - \int_0^{st} \delta y_0 \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \cdot ds \quad (ก.3)$$

สมการ (ก.3) สามารถเขียนในรูปของการอินทิเกรตได้ดังนี้

$$-\int_0^{st} \left[\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right] \cdot \delta y'_0 ds = + \int_0^{st} \delta y_0 \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \cdot ds \quad (ก.4)$$

แทนค่าสมการ (ก.4) ลงในสมการ (ก.2) จะได้

$$\delta\pi = \int_0^{st} \frac{d}{ds} \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right) \delta y_0 \cdot ds - \int_0^{st} w \delta y_0 ds \quad (ก.5)$$

หรือ

$$\delta\pi = \int_0^{st} \left\{ \left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right)' - w \right\} \delta y_0 \cdot ds \quad (ก.6)$$

เขียนสมการ (ก.6) ในรูปของสมการออยเลอร์จะได้

$$\left(\frac{T_H \cdot y'_0}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - y_0'^2}} \right)' - w = 0 \quad (ก.7)$$

กำหนดให้

$$x'_0 = \sqrt{(1 + \varepsilon_0)^2 - y_0'^2}$$

แทนค่า x'_0 ลงในสมการ (ก.7) จะได้

$$\frac{d}{ds} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - w = 0$$

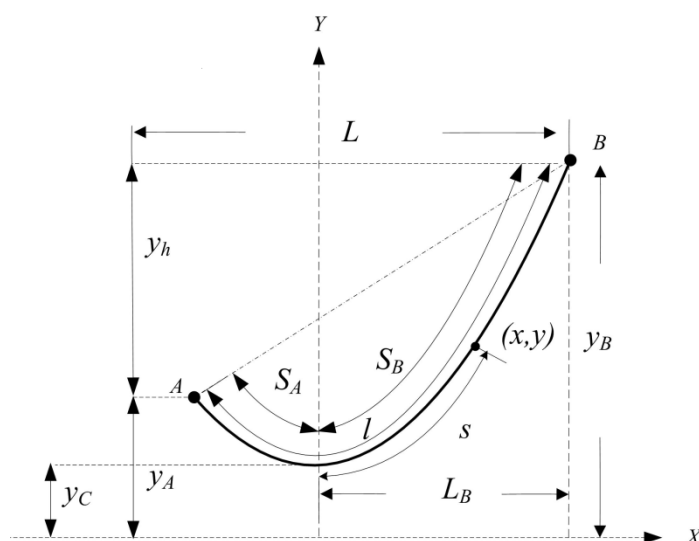
หรือ

$$\frac{d}{ds_0} \left(T_H \frac{y'_0}{x'_0} \right) - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} = 0 \quad (ก.8)$$

ดังนั้นสมการ (ก.8) จะมีค่าเท่ากับสมการสมดุลของเคเบิล

ก.ระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารี

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิต โดยสมการแคทีนารีนี้มีค่าการยกกระดับที่จุดปลายบนของเคเบิลจึงมีความแตกต่างจากงานวิจัยอื่น อีกทั้งงานวิจัยดังกล่าวนี้มีความสอดคล้องกับท้อลค่าเสี่ยงของไหลแบบแคทีนารีในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงการวิจัยเฉพาะเรื่องนี้ จึงได้นำงานวิจัยระเบียบวิธีการสำหรับการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีมาทำการวิเคราะห์ซึ่งงานวิจัยประกอบด้วยรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ ก.1 รายละเอียดของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกกระดับ

คำนิยาม

- L = ระยะทางตามแนวราบของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- y_h = ค่าความต่างระดับในแนวดิ่งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง
- l = ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี
- s = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทีนารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จนถึงจุดใดๆ (x, y)
- L_B = ระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- y_B = ความสูงที่สูงขึ้นไปจากจุดเริ่มต้นของแกนจนถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- s_B = ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งแคทีนารีระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งจนถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง
- y_C = ระยะจากจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง

จากสมการเบื้องต้น

$$y = y_c \cosh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.9})$$

$$s = y_c \sinh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.10})$$

$$T = wy_c \cosh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.11})$$

จากสมการเบื้องต้นทั้งสามสมการตามงานวิจัยดังกล่าวพบว่าจะมีจำนวนตัวแปรหลักทั้งหมดสี่ตัวที่ต้องการหาผลเฉลย ได้แก่ L, y_h, l และ y_{B-C} ซึ่งถ้าสามารถทำการหาตัวแปรหลักได้จำนวนสามในสี่ตัวแล้วก็จะสามารถทราบรูปทรงและขนาดของเส้นโค้งแคทีนารีได้

จากสมการที่ (ก.9) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_c \cosh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.12})$$

และสมการ

$$y_A = y_c \cosh \frac{L - L_B}{y_c} \quad (\text{ก.13})$$

จากสมการที่ (ก.2) เมื่อเทียบกับจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$s_B = y_c \sinh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.14})$$

และ

$$l - s_B = y_c \sinh \frac{L - L_B}{y_c} \quad (\text{ก.15})$$

จากสมการทั้งหมดเมื่อนำสมการไฮเปอร์โบลิกทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการหาค่าผลเฉลย จะได้สมการทั้งหมดที่ใช้ในการหาค่าตัวแปรหลักทั้งสี่ตัวแปรได้ ดังนั้นในงานวิจัยดังกล่าวจึงแนะนำให้หาค่าตัวแปร y_C เป็นอันดับแรกเนื่องจากเป็นค่าตัวแปรที่มีความซับซ้อนที่สุด ซึ่งจะสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{L_B}{y_C} = \frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \quad (ก.16)$$

และสมการ

$$l = y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) - y_C \sinh \left(\frac{L}{2y_C} + \tanh^{-1} \frac{y_h}{l} \right) \quad (ก.17)$$

จากรูปที่ (ก.1) $y_B = y_C + (y_B - y_C)$ นำไปแทนค่าในสมการที่ (ก.4) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$y_B = y_C + (y_B - y_C) = y_C \cosh \frac{L_B}{y_C} \quad (ก.18)$$

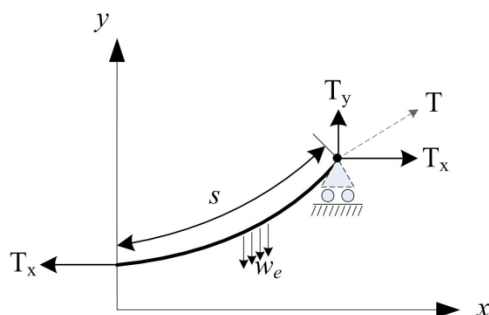
เมื่อทำการคำนวณค่า y_C ค่าจากสมการที่ (ก.17) , ใช้สมการที่ (ก.16) หาค่า L_B และใช้สมการที่ (ก.18) ในการคำนวณหาค่า $y_B - y_C$ ถ้าเกิดกรณีนอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วทั้ง 3 กรณีที่กล่าวมาแล้วสามารถทำการคำนวณค่าต่างๆได้ดังนี้

ในกรณีที่ไมทราบค่า l หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$y_h = y_B - y_C \cosh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (ก.19)$$

ในกรณีที่ไมทราบค่า y_h หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$l = y_C \sinh \left(\cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) + y_C \sinh \left(\frac{L}{y_C} - \cosh^{-1} \frac{y_B}{y_C} \right) \quad (ก.20)$$



รูปที่ ก.2 รายละเอียดแรงดึงของเส้นโค้งแบบแคทีนารียกระดับ

วิธีการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตจากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวราบได้ดังต่อไปนี้

ที่จุดที่มีการเอนตัวที่ $x = 0$, $\cosh \frac{x}{y_c} = 1$ และ $\cos \theta = 1$ นำค่าทั้งหมดแทนในสมการ

$$T_x = w y_c \quad (\text{ก.21})$$

จากรูปที่ ก.2 สามารถทำการคำนวณแรงดึงตามแนวดิ่งได้ดังต่อไปนี้ นำค่า s จากสมการ (ก.10) แทนลงในสมการ (ก.21) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$T_y = w s \sinh \frac{x}{y_c} \quad (\text{ก.22})$$

ดังนั้น นั้นค่าแรงดึงสูงสุดที่ปลายบนของเส้นโค้งแคทีนารียกระดับสามารถหาค่าได้จาก

$$T = w s \cosh \frac{L_B}{y_c} \quad (\text{ก.23})$$

ก.1 ตัวอย่างการคำนวณ

เมื่อศึกษาทฤษฎีงานวิจัยการหาผลเฉลยของสมการแคทีนารีที่ประกอบด้วยองค์ประกอบทางเรขาคณิตเป็นที่เรียบร้อยแล้วต่อไปจะแสดงตัวอย่างการคำนวณที่ใช้เปรียบเทียบค่าจากโปรแกรมโดยมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน ประกอบด้วยความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี น้ำหนักประสิทธิผล ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ และระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ ดังแสดงในตารางที่ ก.1

ตารางที่ ก.1 พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์เคเบิลแบบเส้นโค้งแคทีนารีที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน

คุณสมบัติของเคเบิล	สัญลักษณ์	ค่า	หน่วย
1. ความยาวของเส้นโค้งแคทีนารี	l	605	เมตร
2. น้ำหนักประสิทธิผล	w	9.48	นิวตันต่อเมตร
3. ค่าความต่างระดับในแนวตั้งของจุดยึดที่ปลายทั้งสอง	y_h	100	เมตร
4. แรงปฏิกิริยาแนวราบที่จุดรองรับ	T_x	5000	นิวตัน
5. ระยะในแนวราบระหว่างจุดรองรับ	L	300	เมตร

จากสมการ (ก.9) สามารถหาค่าของระยะจุดต่ำสุดของแกน y จนถึงจุดต่ำสุดของเส้นโค้ง (y_c) ได้ดังนี้

$$305 = y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}\right) - y_c \sinh\left(\frac{300}{2y_c} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}\right)$$

$$y_c = 627.2069 \text{ เมตร}$$

เมื่อได้ค่าจุดอ้างอิงต่ำสุดเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จากสมการ (ก.16) สามารถหาค่าระยะทางในแนวราบระหว่างจุดต่ำสุดของเส้นโค้งถึงจุดยึดที่ปลายบนของเส้นโค้ง (L_B) ได้ดังนี้

$$\frac{L_B}{627.2069} = \frac{300}{2(627.2069)} + \tanh^{-1} \frac{36}{305}$$

$$L_B = 224.3777 \text{ เมตร}$$

จากรูปที่ ก.1 สามารถหาค่าระดับจากจุดต่ำสุดจนถึงจุดปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี ($y_B - y_C$) ได้ดังต่อไปนี้

$$627.2069 + (y_B - y_C) = 627.2069 \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$(y_B - y_C) = 40.5644 \text{ เมตร}$$

นอกจากระยะต่างๆของเส้นโค้งเคทีนารีแล้ว สามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับที่ปลายบนได้โดยค่าแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารีสามารถหาได้จากสมการ (ก.21) ได้ดังนี้

$$T_x = 13(627.2069) = 8153.69 \text{ นิวตัน}$$

และแรงดึงในแนวดิ่งที่ปลายบนของเส้นโค้งเคทีนารี จากสมการ (ก.22) ดังนี้

$$T_y = 13(627.2069) \sinh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T_y = 2979.53 \text{ นิวตัน}$$

ดังนั้น ผลรวมของแรงดึงทั้งหมดสามารถหาค่าได้จากสมการ (ก.11)

$$T = 13(627.2069) \cosh \frac{224.3777}{627.2069}$$

$$T = 8681.03 \text{ นิวตัน}$$