บทที่ 3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์ ปัญหาของท่อลำเลียงเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งเป็นการหาในรูปแบบปิด (closed-form solution) นั้นทำได้ยากในงานวิจัยนี้จึงใช้กระบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาคำตอบ โดยเริ่มจากการแบ่งโครงสร้างของท่อลำเลียงออกตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยที่มีความยาวเท่าๆกัน จากนั้นทำการกำหนดค่าขอบเขตของตัวแปรอิสระที่ทราบค่าในแต่ละชิ้นส่วนย่อยใช้การอินทิเกรตชิงตัวเลขแบบ Gaussian quadrature เพื่อหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ให้กับระบบจะติดอยู่ในรูปของการอินทิเกรต จากนั้นทำการรวม (assemble) ชิ้นส่วนย่อยให้อยู่ในระบบรวม และใช้กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน ในการหาคำตอบของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นของท่อลำเลียง

3.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งท่อลำเลียงของไหลตามความยาวส่วนโค้งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ โดยแต่ละชิ้นส่วนมีความยาวเท่ากันซึ่งจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่ถูกแบ่งมีผลกับความแม่นยำในการหาคำตอบเชิงตัวเลข หลังจากนั้น ทำการจำลองดีกรีอิสระไว้ที่ปลายทั้งสองข้างของท่อลำเลียง แบบ 2 มิติ จะมีดีกรีอิสระจำนวน 4 ตัว จากสมการและพลังงานรวมของระบบ จะมีตัวแปรอิสระ s โดยแบ่งท่อลำเลียงเป็นชิ้นเล็ก ๆ ความยาว l ซึ่งมีขอบเขตคือ $0 \leq l \leq s_t$ เมื่อ s_t คือความยาวทั้งหมดของท่อลำเลียงโดยเราจะแบ่งท่อลำเลียงออกเป็น N ชิ้นส่วนย่อยจะได้

$$l = \frac{s_t}{N}$$

เมื่อ l คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อย

s_t คือ ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อลำเลียง

N คือ จำนวนของชิ้นส่วนย่อยทั้งหมด

ดังนั้นสมการงานรวมของระบบ π สามารถเขียนในรูปของชิ้นส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\pi = \sum_{k=1}^{N} \pi_k$$

โดยที่ π_k คือค่าของ π ของชิ้นส่วนย่อยที่ k

ในแต่ละชิ้นส่วนย่อย การเคลื่อนที่ของท่อลำเลียง $y_0(s)$ประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือ y_Lและ y_a

$$y(s_0) = y_L + y_a \tag{3.1}$$

โดยที่ y_L คือ องค์ประกอบของการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้นกับ s

y_a คือ องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับ s

องค์ประกอบการเคลื่อนที่ที่เป็นเชิงเส้น y_L หาได้โดยพิจารณาตำแหน่งปลายบนและปลายล่างของเคเบิล ส่วนองค์ประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้น y_a หาจากการประมาณค่าใช้โพลิโนเมียลอันดับที่ 3 ในเทอม s_0 จากวิธีการของไฟไนท์เอเลเมนท์ ดังนั้นสมการ y_a เขียนได้ดังนี้

$$y_a = \lfloor N \rfloor \{q\} \tag{3.2}$$

เมื่อ

$\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง

$\{q\}$ คือ เวคเตอร์ของดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อย

ดังนั้น สามารถแสดงสมการในรูปแบบของฟังก์ชันรูปร่างของเมตริกซ์สำหรับการเคลื่อนที่จากชิ้นส่วนย่อยของท่อลำเลียงของไหลโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีจำนวนดีกรีอิสระจำนวน 4 ตัวได้ดังต่อไปนี้

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \tag{3.3}$$

เมื่อเข้าสู่ระบบการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำการเขียนค่าตัวแปรของดีกรีอิสระได้ดังนี้

$$N_1 = 1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \tag{3.4ก}$$

$$N_2 = s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \tag{3.4ข}$$

$$N_3 = 3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \tag{3.4ค}$$

$$N_4 = -s\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \tag{3.4ง}$$

เมื่อชิ้นส่วนย่อยประกอบด้วยเวกเตอร์ของดีกรีอิสระ $\{q\}$ ดังนี้

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_a(0) \\ y_a'(0) \\ y_a(l) \\ y_a'(l) \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

ความเครียดในแนวแกน ε_0หาได้จากการประมาณค่าโดยใช้โพลิโนเมียลเชิงเส้นในเทอม s โดยวิธีการไฟไนท์เอเลเมนท์จะได้สมการ ε_0 ดังนี้

$$\varepsilon_0 = \lfloor M \rfloor \{d\} \tag{3.6}$$

โดยที่ $\lfloor M \rfloor$ คือ เมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่าง

$\{d\}$ คือ ดีกรีอิสระของการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนย่อย

$$\lfloor M \rfloor = \lfloor M_1 \quad M_2 \rfloor \tag{3.7}$$

โดยที่

$$M_1 = 1 - \frac{s}{l},$$

$$M_2 = \frac{s}{l} \tag{3.8}$$

โดยที่

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(0) \\ \varepsilon_0(l) \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

งาน-พลังงานรวมของระบบ π นำมาเขียนให้อยู่ในรูปชิ้นส่วนย่อยและเมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุลการแปรเปลี่ยนของงานรวมทั้งหมดจะเป็นศูนย์ หรือ $\delta\pi = 0$ โดยดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (3.6) เทียบกับ q_i จะได้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_i} = \int_0^l \left\{ [N']^T w + [N]^T \frac{T_H y_0'}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2 - {y_0'}^2}} \right\} ds \tag{3.10}$$

3.2 เงื่อนไขขอบเขต

พิกัดปลายบนของท่อลำเลียงของไหลคือ $y(x_H, y_H)$ และจุดพิกัดปลายล่างของท่อลำเลียงคือ (0,0)

ดังนั้น $y(0) = 0$

$$y(L) = y_H \tag{3.11}$$

แต่ละค่าของ $y_0 = y_L + y_a$

ทำให้ $y_a(0) = 0$ และ $y_a(H) = 0$ (3.12)

3.3 การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น

ในการแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำการแก้ไขได้ด้วยการใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสัน โดยมีระบบการเพิ่มค่าดังนี้

$$\left\{\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_i \partial Q_j}\right\}\{\Delta Q\} = \left\{\frac{\partial\pi}{\partial Q_i}\right\} \tag{3.13}$$

เมื่อ

i, j คือ ลำดับที่ของดีกรีอิสระซึ่งมีค่าเท่ากับ *1,2…..,* n จึงสามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็นดังนี้

$$[K]\{\Delta Q\} = -\{R\} \tag{3.14}$$

ดังแสดงดังสมการแสดงค่าสติฟเนสเมตริกแบบไม่เป็นเป็นเชิงเส้นของระบบรวม และ สมการแสดงค่าเวกเตอร์ของแรงในระบบรวม ดังต่อไปนี้

$$[K] = \left\{\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_i \partial Q_j}\right\} \tag{3.15}$$

และ

$$\{R\} = \left\{\frac{\partial\pi}{\partial Q_i}\right\} \tag{3.16}$$

เมื่อ

$[K]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวม

$\{R\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงในระบบรวม

ดังนั้นค่าสติฟเนสเมตริกแบบไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรวมในสภาวะสมดุลที่ทำให้ค่า $\{\Delta Q\} = 0$ และ $\{R\} = 0$ สามารถเขียนสมการระบบรวมได้ดังนี้

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial Q_i \partial Q_j} = \int_0^l \left\{ [N']^T \frac{T_H (1+\varepsilon_0)^2}{\left[\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 - {y_0'}^2}\right]^{3/2}} [N'] \right\} ds \tag{3.17}$$