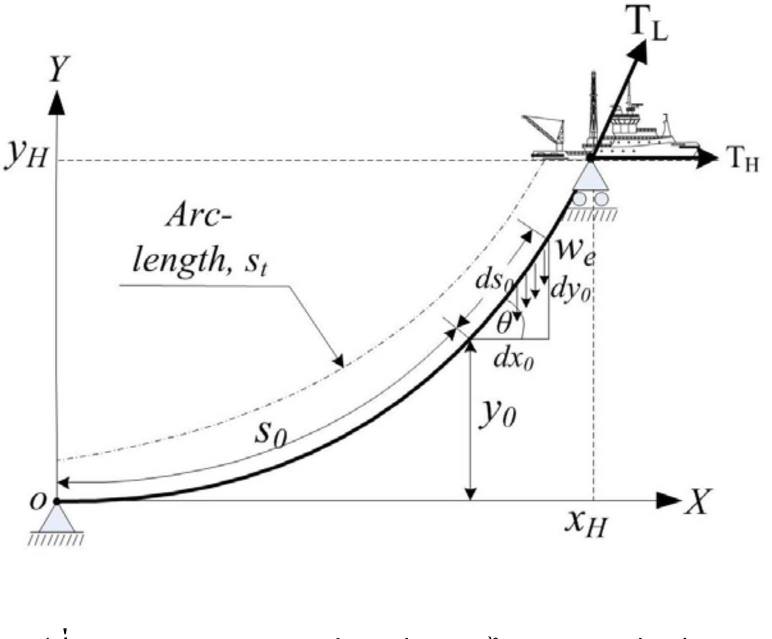
บทที่ 2
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลที่ยืดตัวได้

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีที่สภาวะสมดุลเนื่องจากแรงกระทำรูปแบบต่าง ๆ เช่นน้ำหนักประสิทธิผล แรงดึงที่ปลายบนตามแนวราบโดยการใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเป็นตัวแปรอิสระ โดยคำนึงถึงการยืดตัวตามแนวแกนของท่อลำเลียงของไหลด้วย

2.1 สมดุลสถิตหรือสถิตศาสตร์ของท่อลำเลียงแบบแคทีนารี

โครงสร้างท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารีตามทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์นี้ ได้จำลองโครงสร้างเป็นรูปแบบของท่อที่วางตัวอยู่ระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้งสองด้านโดยที่ท่อลำเลียงของไหลมีลักษณะการวางตัวแบบแคทีนารี จะถูกยึดรั้งที่ปลายทั้งสองข้างโดยปลายบนจะยึดรั้งกับวัตถุลอย หรือโครงสร้างที่อยู่ระดับผิวน้ำให้อยู่กับที่และปลายล่างยึดติดกับอุปกรณ์บริเวณพื้นทะเล ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ในสภาวะสมดุลที่อยู่ใต้ทะเลจะมีแรงกระทำในรูปแบบต่างๆ เช่น แรงกระทำเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำ แรงดันน้ำภายนอก แรงลอยตัว และน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหล ซึ่งตัวแปรเหล่านี้เป็นตัวแปรสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหา งานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์แบบมีการแอ่นตัวมาก ในการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลในสภาวะสมดุล



รูปที่ 2.1 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลแบบแคทีนารี

2.2 สมมุติฐานของการวิเคราะห์

สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. เนื้อวัสดุของท่อสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทางตลอดความยาวท่อ
2. วัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น
3. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือนและแรงดัด
4. ไม่คำนึงถึงผลของแรงเสียดทานระหว่างท่อและจุดรองรับ

2.3 ความยาวส่วนโค้งก่อนเกิดความเครียดและหลังจากเกิดความเครียด

การวิเคราะห์นี้ใช้ตัวแปร s เป็นตัวแปรอิสระกำหนดแรงดึงที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลมาให้สามารถเขียนตำแหน่งสมดุลของท่อลำเลียงของไหลเป็นระยะทางในแนวราบ $x_0(s)$ และระยะทางในแนวดิ่ง $y_0(s)$ โดยที่ตัวห้อย (subscript) 0 ของตัวแปรใดๆ แสดงให้เห็นว่าเป็นค่าของตัวแปรนั้นในสภาวะสมดุล

พิจารณารูป 2.1 จะได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{dy_0}{ds_0} \tag{2.1}$$

$$\cos\theta = \frac{dx_0}{ds_0} \tag{2.2}$$

จากนิยามความเครียดจะได้ว่า

$$\varepsilon_0 = \frac{ds_0 - ds}{ds} = \frac{ds_0}{ds} - 1 \tag{2.3}$$

$$\frac{ds_0}{ds} = 1 + \varepsilon_0 \tag{2.4}$$

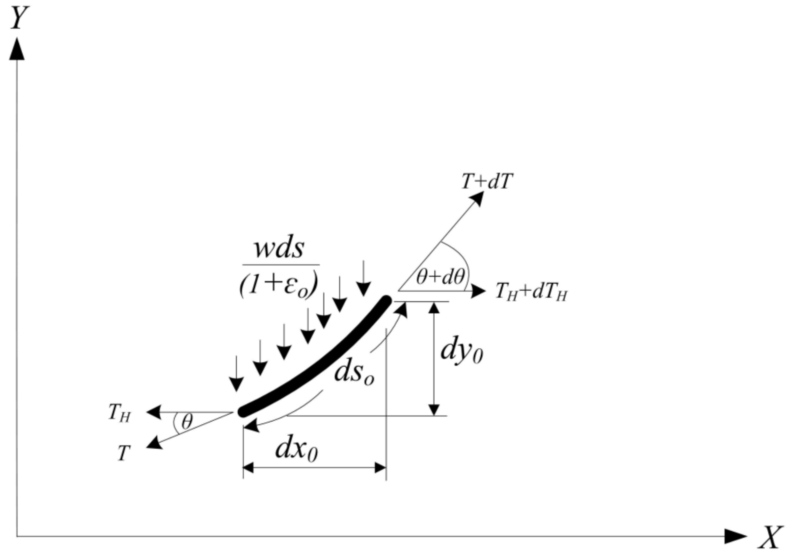
โดยที่ ε_0 คือความเครียดในแนวแกน ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s_0

ds คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด (unstrained arc length)

ds_0 คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะความเครียด (strained arc-length)

2.4 สมการการสมดุลของชิ้นส่วนเคเบิล

เมื่อพิจารณาท่อลำเลียงแบบแคทีนารีซึ่งรับแรงกระทำต่าง ๆ ในสภาวะสมดุล โดยให้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ s จากจุดเริ่มต้น แบ่งท่อลำเลียงของไหลออกเป็นชิ้นส่วนย่อยที่มี ความยาวในแนวระดับ dx_0 ความยาวในแนวดิ่ง dy_0 และความยาวส่วนโค้งขณะเกิดความเครียด ds_0 สามารถแสดงชิ้นส่วนอิสระของชิ้นส่วนย่อยและแรงกระทำต่างๆ ในสภาวะสมดุลได้ดังรูป 2.1



รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วนอิสระของชิ้นส่วนย่อยภายใต้สภาวะสมดุล

พิจารณาสมดุลของแรงในทางแกน x

$\sum F_x = 0$:; $$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) - Tcos\theta = 0 \qquad (2.5)$$

สำหรับค่ามุมที่น้อยมากๆ จะได้ $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos d\theta \approx 1$

$sin(\theta + d\theta) = \sin\theta + \cos\theta . d\theta$, และ $\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta - \sin\theta . d\theta$

จัดรูปสมการ (2.5) ใหม่ได้ดังนี้

$$T\cos\theta - Tsin\theta d\theta + dTcos\theta - dTsin\theta d\theta - Tcos\theta = 0$$

$$-Tsin\theta d\theta + dTcos\theta = 0$$

$$d(Tcos\theta) = 0 \qquad (2.6)$$

ดังนั้น

$$d\left(T\frac{dx_0}{ds_0}\right)=0 \quad (2.7)$$

$$d(T_L cos\theta)=d(T_H)=0 \quad (2.8)$$

$$T_H=T_L\cos\theta \quad (2.9)$$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงดึงในแนวระดับและแรงดึงในแนวแกนซึ่งเป็นค่าคงที่

พิจารณาสมดุลของแรงในทางแกน y

$$\sum F_y=0\,; \qquad (T+dT)\sin(\theta+d\theta)-Tsin\theta-\frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}=0 \quad (2.10)$$

สำหรับค่ามุมที่น้อยมากๆ จะได้ $sin\ d\theta\ \approx d\theta$, $\cos d\theta\ \approx\ 1$

ดังนั้น

$sin(\theta+d\theta)=sin\theta+cos\theta.d\theta,$ และ $cos(\theta+d\theta)=cos\theta-sin\theta.d\theta$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T\sin\theta+T\ \cos\theta d\theta+dT\sin\theta+dT\cos\theta d\theta-\frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}=0 \quad (2.11)$$

ผลคูณของเทอมที่มีค่าน้อยคูณกัน ผลลัพธ์จะมีค่าน้อย สามารถตัดทิ้งได้ จะได้

$$T\ \cos\theta d\theta+dT\sin\theta-\frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}=0 \quad (2.12)$$

$$d(T\sin\theta)-\frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}=0 \quad (2.13)$$

แทนค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จากสมการ (2.1) และ (2.2) ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$d\left(T\frac{dy_0}{ds_0}\right)-\frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}=0 \quad (2.14)$$

หรือ

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{T_H}{\cos\theta}\left(\frac{dy_0}{ds}\frac{ds}{ds_0}\right)\right)-\frac{w}{(1+\varepsilon_0)}=0$$

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{T_H}{\frac{dx_0}{ds}\frac{ds}{ds_0}}\left(\frac{dy_0}{ds}\frac{ds}{ds_0}\right)\right)-\frac{w}{(1+\varepsilon_0)}=0$$

$$\frac{d}{ds_0}\left(T_H\frac{y_0'}{x_0'}\right)-\frac{w}{(1+\varepsilon_0)}=0 \qquad (2.15)$$

หรือ

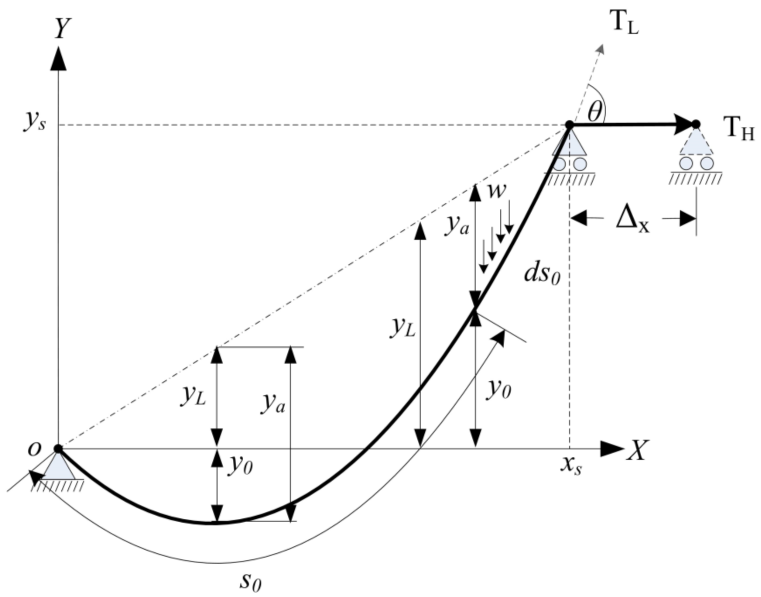
$$\frac{d}{ds}\left(T_H\frac{y_0'}{x_0'}\right)-w=0 \qquad (2.16)$$

โดยที่ $x_0' = dx_0/ds$ และ $y_0' = dy_0/ds$

สมการ (2.9) และ (2.10) เป็นสมการอนุพันธ์ของปัญหาเคเบิลที่ยืดตัวได้รับน้ำหนักบรรทุกของตัวเอง หรือปัญหาแคทีนารี

2.5 สมการแรงดึงของเคเบิล

เมื่อพิจารณาสภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลจากการวางตัวของท่อลำเลียงดังแสดงในรูป 2.3 จุดรองรับที่ปลายทั้งสองข้างโดยปลายบนจะยึดรั้งกับวัตถุลอย จะได้ระยะต่าง ๆ ของสมดุลในเคเบิลดังนี้



รูปที่ 2.3 สภาวะสมดุลของท่อลำเลียงของไหลภายใต้แรงกระทำที่ปลายบน

ตำแหน่งสมดุลที่วัดในแนวดิ่งจากแนวเอียงจากระนาบวัดระยะได้ดังนี้

$$y_L = y_0 + y_a$$

ดังนั้นระยะสมดุลของท่อลำเลียงวัดจากแนวราบ (แกน X) คือ

$$y_0 = y_L - y_a$$

ทำการดิฟเฟอเรนชิเอต y_0เทียบกับ s จะได้

$$\frac{dy_0}{ds} = \frac{dy_L}{ds} \pm \frac{dy_a}{ds} \tag{2.17}$$

โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy_0}{ds} = \frac{dy_L}{ds}\frac{dx}{ds} \pm \frac{dy_a}{ds} \tag{2.18}$$

$$\frac{dy_0}{ds} = tan \propto \sqrt{1 - \left(\frac{dy_s}{ds}\right)^2} \pm \frac{dy_a}{ds} \tag{2.19}$$

โดยที่ $tan \propto = \frac{dy_L}{dx} = \frac{y_H}{x_H}$

ในที่นี้ความชันของจุด y_0 หาได้โดย

$$y_0' = tan \propto \sqrt{1 - {y_s'}^2} \pm y_a' \tag{2.20}$$

เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงกระทำต่างๆ ภายใต้สภาวะสมดุลในแนวสัมผัส (tangenal direction) ดังแสดงในรูป 2.2

$$dT = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}\frac{dy_0}{ds_0} \tag{2.21}$$

$$dT = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)}\sin\theta \tag{2.22}$$

จากกฎของฮุค (Hooke' law) จะได้

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 \tag{2.23}$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (2.22) จะได้

$$\int_{s_0}^{s_t} dT = \int_{s_0}^{s_t} d(EA\varepsilon_0) = \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \tag{2.24}$$

เขียนสมการ (2.24) ใหม่จะได้

$$\int_{s_0}^{s_t} dT = T(st) - T(s_0) \tag{2.25}$$

$$T(s_t) - T(s_0) = \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \tag{2.26}$$

แทนค่าสมการ (2.23) ลงใน (2.26)จะได้

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 = T_L - \int_{s_0}^{s_t} \frac{w}{(1+\varepsilon_0)} dy_0 \tag{2.27}$$

โดยที่ T_L คือแรงดึงในแนวแกนกับท่อลำเลียง

$$T(s_0) = T_L - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)}[y_0(s_t) - y_0(s_0)] \tag{2.28}$$

ในที่นี้

$$y_0(s_t) = y_H$$

และ

$$y_0(s_0) = y_L - y_a$$

สมการของแรงดึงในท่อลำเลียงที่ตำแหน่งใด ๆ หาได้โดยสมการ (2.29)

$$T(s_0) = EA\varepsilon_0 = T_L - \frac{w}{(1+\varepsilon_0)}. y_H + \frac{w}{(1+\varepsilon_0)}[\tan \propto \cdot\, x - y_a] \tag{2.29}$$

2.5.1 แรงดึงประสิทธิผล (effective tension)

แรงดึงประสิทธิผลเป็นแรงดึงภายในท่อลำเลียงที่เกิดจากแรงดึงที่เกิดขึ้นจริงตามสมการ

$$T = EA\varepsilon_0 \tag{2.30}$$

โดยที่ T คือ แรงดึงประสิทธิผล

E คือ โมดูลัสของความยืดหยุ่น

2.5.2 น้ำหนักประสิทธิผล (effective weight)

น้ำหนักประสิทธิผลเป็นผลต่างระหว่างน้ำหนักของท่อลำเลียงของไหลในอากาศและแรงลอยตัวที่เกิดขึ้นจากการที่ท่อลำเลียงไปแทนที่น้ำทะเล สมการของน้ำหนักประสิทธิผลเขียนได้ดังนี้

$$w = w_c - \rho_w g A \tag{2.31}$$

โดยที่ w คือ น้ำหนักประสิทธิผลของท่อลำเลียงต่อหน่วยความยาวขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด

w_c คือ น้ำหนักของท่อลำเลียงในอากาศต่อหน่วยความยาวขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด

ρ_w คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิ้ลกับความยาวส่วนโค้งขณะที่ยังไม่เกิดความเครียด และขณะที่เกิดความเครียด เป็นดังนี้

$$wds = \frac{wds_0}{(1+\varepsilon_0)} \tag{2.32}$$

2.6 สมการของการแปรผัน (variational formulation)

ในส่วนนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองของเคเบิลที่ยืดตัวได้โดยใช้หลักการของงานเสมือนซึ่งประกอบด้วยงานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนและงานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผลขณะเกิดความเครียดซึ่งรายละเอียดจะกล่าวต่อไป

2.6.1 งานเสมือนที่เกิดจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบน

จากรูปสามเหลี่ยมของชิ้นส่วนเล็กของเคเบิลในรูปที่ 2.2 สามารถเขียนความสัมพันธ์ทางรูปร่างได้ดังนี้

$$sin\theta = \frac{dy_0}{ds_0} \tag{2.33}$$

$$cos\theta = \frac{dx_0}{ds_0} \tag{2.34}$$

โดยที่ให้ ds_0 คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ขณะเกิดความเครียด (strained arc-length) จะได้

$${ds_0}^2 = {dx_0}^2 + {dy_0}^2 \tag{2.35}$$

$${dx_0}^2 = {ds_0}^2 - {dy_0}^2 \tag{2.36}$$

$${dx_0}^2 = (1+\varepsilon_0)^2 ds^2 - {dy_0}^2 \tag{2.38}$$

โดยที่ ε_0 คือ ความเครียดในแนวแกนซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_0

หาร ds^2 ตลอดสมการ (2.38) จะได้

$$\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = (1+\varepsilon_0)^2 - \left(\frac{dy_0}{ds}\right)^2 \tag{2.39}$$

$$d\lambda = ds_0 - dx_0 \tag{2.40}$$

โดยที่ $(')$ หมายถึงการทำดิฟเฟอเรนชิเอตเทียบกับ s ดังนั้น $y_0' = \frac{dy_0}{ds}$ สมการ จึงเขียนใหม่ได้

$$dx_0 = \left[\sqrt{(1+\varepsilon_0{}^2) - y_0'^2}\right] ds \tag{2.41}$$

แทนค่าสมการ (2.4) และ (2.41) ลงในสมการ (2.40) จะได้

$$d\lambda = (1+\varepsilon_0)ds - \left[\sqrt{(1+\varepsilon_0{}^2) - y_0'^2}\right] ds \tag{2.42}$$

งานเสมือนเนื่องจากแรงดึงในแนวราบที่ปลายบนเขียนได้ดังนี้

$$\delta W_{\mathrm{T}} = -\delta \int_0^{s_t} T_H d\lambda \tag{2.43}$$

แทนค่า $d\lambda$ จากสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.43)

$$\delta W_{\mathrm{T}} = -\delta \int_0^{s_t} T_H \left[(1+\varepsilon_0) - \sqrt{(1+\varepsilon_0{}^2) - y_0'^2}\right] ds \tag{2.44}$$

การแปรผันสมการงานเสมือนเนื่องจากแรงดึงกระทำที่ปลายเท่ากับ

$$\delta W_{\mathrm{T}} = -\int_0^{s_t} T_H \left[\frac{y_0'}{\sqrt{(1+\varepsilon_0{}^2) - y'_0{}^2}}\right] \delta y'_0 ds \tag{2.45}$$

2.6.2 งานเสมือนที่เกิดจากน้ำหนักประสิทธิผลขณะเกิดความเครียด

แรงจากน้ำหนักประสิทธิผลจะกระทำแผ่กระจายตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลซึ่งทำให้เกิดงานเสมือนจากน้ำหนักดังสมการ

$$\delta W_w = -\delta \int_0^{st} w y_0 ds \tag{2.46}$$

เมื่อ w คือแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อรวมกับของไหลภายในท่อ ดังสมการ

$$w = \left(\rho_p A_p + \rho_e A_e + \rho_i A_i\right) g \tag{2.47}$$

การแปรผันสมการ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta W_w = -\int_0^{st} w \delta y_0 ds \tag{2.48}$$

โดยที่

A_e คือ พื้นที่หน้าตัดภายนอกท่อ

A_i คือ พื้นที่หน้าตัดภายในท่อ

A_p คือ พื้นที่หน้าตัดของท่อ

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ρ_e คือ ความหนาแน่นของน้ำทะเล

ρ_i คือ ความหนาแน่นของของไหลภายในท่อ

ρ_p คือ ความหนาแน่นของท่อ

ผลรวมการแปรผันสมการงานเสมือนเนื่องจากแรงดึงกระทำที่ปลายที่สภาวะสมดุล

$$\delta W = \delta W_{\mathrm{w}} + \delta W_{\mathrm{T}} = 0 \qquad (2.49)$$

$$\delta W = \int_0^{s_t} T_H \left[\frac{y_0'}{\sqrt{(1+\varepsilon_0{}^2) - {y_0'}^2}} \right] \delta y_0' ds + \int_0^{s_t} w \delta y_0 \, ds = 0 \qquad (2.50)$$

โดยการกระบวนการแปรผันจะได้สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งเป็นสมการของแรงในแนวราบตรงกับสมการที่ (2.9) และ (2.10) รายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ก

จากสมการ (2.27) และ (2.50) พบว่ามีตัวแปรไม่อิสระ 2 ตัวคือ y_0 และ ε_0 ซึ่งจะสามารถแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบของตัวแปรได้ เมื่อได้ค่าของ y_0 และ ε_0 แล้วสามารถนำไปหาค่าความยาวของท่อลำเลียงได้