

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ตั้งแต่ทฤษฎีที่จะอธิบายเกี่ยวกับคุณสมบัติทางกลของวัสดุ วิธีการหาค่าความเค้น และความเครียด และการเตรียมตัวอย่างวัสดุที่จะนำมาทดสอบ ศาสตร์ของชีวกลศาสตร์ที่นำความรู้โดยการนำหลักกลศาสตร์มาประยุกต์กับการเคลื่อนไหวของมนุษย์เข้ามาเกี่ยวข้อง สรีระวิทยาของข้อเข่า และลักษณะการเดินที่ถูกต้องเพื่อนำไปใช้ในการจำลองการเคลื่อนไหว นอกจากนี้ คุณสมบัติของวัสดุประเภทไฮเปอร์อีลาสติกสามารถนำมาใช้ในงานวิจัยนี้โดยจะกำหนดคุณสมบัติของเอ็นเป็นวัสดุประเภทนี้ ซึ่งจะมีด้วยกันหลายโมเดล และควรเลือกโมเดลที่เหมาะสมเพื่อให้ได้แบบจำลองการเคลื่อนไหวที่ถูกต้องมากที่สุด

2.1 คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ เช่น ความแข็ง (Hardness) ความแข็งแรง (Strength) ความเหนียว (Ductility) ความหนืด (Viscosity) ฯลฯ เป็นสิ่งที่จะบอกว่าวัสดุนั้น ๆ สามารถที่จะรับหรือทนทานแรง หรือพลังงานเชิงกลภายนอกที่มากกระทำได้ดีมากน้อยเพียงใด ในงานวิศวกรรม คุณสมบัติเชิงกลมีความสำคัญมากที่สุด การที่เครื่องจักรหรืออุปกรณ์ใด ๆ จะสามารถทำงานได้อย่างปลอดภัยขึ้นอยู่กับคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ทำเครื่องจักร อุปกรณ์นั้น ๆ เป็นสำคัญ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นของคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุรวมทั้งการทดสอบที่สำคัญบางประเภท เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาขั้นต่อไป

2.1.1 ความเค้น

ตามความเป็นจริงความเค้นหมายถึง แรงต้านทานภายในเนื้อวัสดุที่มีต่อแรงภายนอกที่มากกระทำต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ แต่เนื่องจากความไม่เหมาะสมทางปฏิบัติ และความยากในการวัดหาค่านี้ จึงมักจะกล่าวถึงความเค้นในรูปของแรงภายนอกที่มากกระทำต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ด้วยเหตุผลที่ว่า แรงกระทำภายนอกมีความสอดคล้องกับแรงต้านทานภายใน การหาค่าความเค้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้คือ

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.1)$$

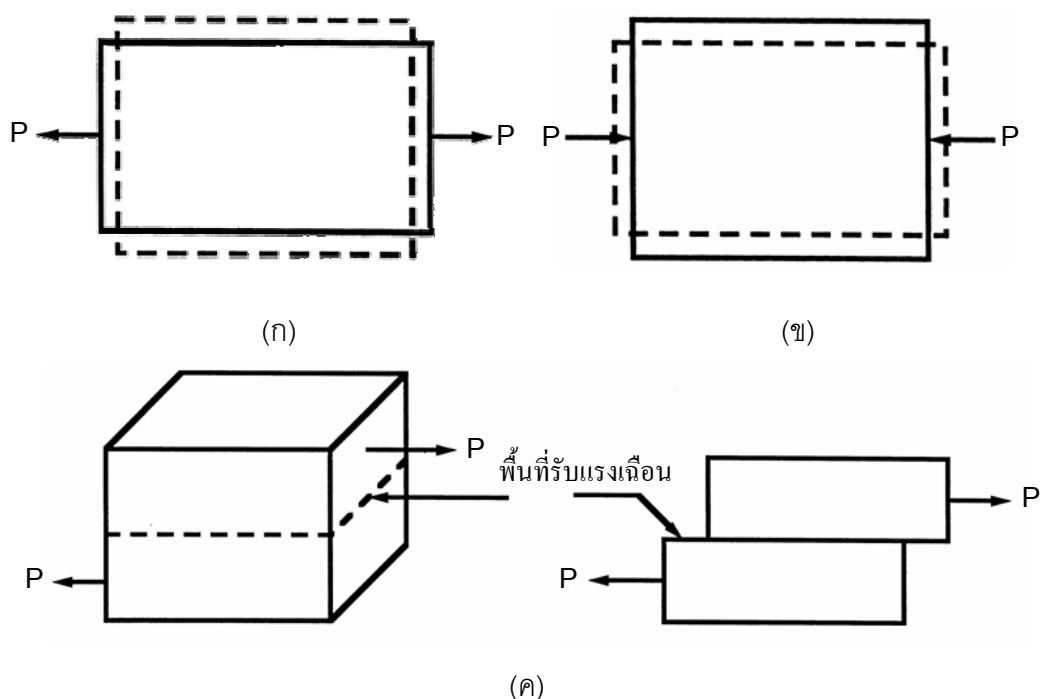
เมื่อ σ = ความเค้น (Stress) มีหน่วยเป็นปาสกาล (Pa, 1 Pa = 1N/m²)
หรือ kgf/mm² หรือ psi (lbf/in²)

P = แรงภายนอกที่มากระทำ มีหน่วยเป็น N หรือ kgf หรือ lbf

A = พื้นที่ภาคตัดขวางที่แรงกระทำ: m² หรือ mm² หรือ in²

โดยทั่วไปความเค้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ชนิด ตามลักษณะของแรงที่มากระทำ

1. ความเค้นแรงดึง (Tensile stress) เกิดขึ้นเมื่อมีแรงดึงมากระทำตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัดขวาง โดยพยายามจะแยกเนื้อวัสดุให้แยกขาดออกจากกัน ดังภาพที่ 2.1ก



ภาพที่ 2.1

ลักษณะของแรงกระทำชนิดต่าง ๆ

(ก) แรงดึง (Tension)

(ข) แรงกด (Compression)

(ค) แรงเฉือน (Shear)

2. ความเค้นแรงอัด (Compressive stress) เกิดขึ้นเมื่อมีแรงกดมากระทำตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัดขวาง เพื่อพยายามอัดให้วัสดุมีขนาดสั้นลง ดังภาพที่ 2.1ข

3. ความเค้นแรงเฉือน (Shear stress) ใช้สัญลักษณ์ τ เกิดขึ้นเมื่อมีแรงมากระทำให้ทิศทางขนานกับพื้นที่ภาคตัดขวาง เพื่อให้วัสดุเคลื่อนผ่านจากกันดังภาพที่ 2.1ค มีค่าเท่ากับแรงเฉือน (Shear force) หารด้วยพื้นที่ภาคตัดขวาง A ซึ่งขนานกับทิศทางของแรงเฉือน

ในทางปฏิบัติความเค้นที่เกิดขึ้นอาจจะมีทั้ง 3 แบบนี้พร้อม ๆ กัน

2.1.2 ความเครียดและการเสียรูป

ความเครียด (Strain) คือ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุ (Deformation) เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ (เกิดความเค้น) การเสียรูปของวัสดุนี้เป็นผลมาจากการเคลื่อนที่ภายในเนื้อวัสดุ ซึ่งลักษณะของมันสามารถแบ่งเป็น 2 ชนิดใหญ่ ๆ คือ

1. การเสียรูปแบบยืดหยุ่นหรือความเครียดแบบคืนรูป (Elastic deformation or Elastic Strain) เป็นการเสียรูปในลักษณะที่เมื่อปลดแรงกระทำ อะตอมซึ่งเคลื่อนไหวยเนื่องจากผลของความเค้นจะเคลื่อนกลับเข้าตำแหน่งเดิม ทำให้วัสดุคงรูปร่างเดิมไว้ได้ ตัวอย่างได้แก่ พวงยางยืด สปริง ถ้าเราดึงมันแล้วปล่อยมันจะกลับไปที่ขนาดเท่าเดิม

2. การเสียรูปแบบพลาสติกหรือความเครียดแบบคงรูป (Plastic deformation or plastic strain) เป็นการเสียรูปที่ถึงแม้ว่าจะปลดแรงกระทำนั้นออกแล้ววัสดุก็ยังคงรูปร่างตามที่ถูกเปลี่ยนไปนั้น โดยอะตอมที่เคลื่อนที่ไปแล้วจะไม่กลับไปตำแหน่งเดิม

วัสดุทุกชนิดจะมีพฤติกรรมการเสียรูปทั้งสองชนิดนี้ขึ้นอยู่กับแรงที่มากระทำหรือความเค้นว่ามีมากน้อยเพียงใด หากไม่เกินขีดการคืนรูป (Elastic limit) แล้ว วัสดุนั้นก็จะมีพฤติกรรมคืนรูปแบบยืดหยุ่น (Elastic behavior) แต่ถ้าความเค้นเกินกว่าขีดการคืนรูปแล้ววัสดุก็จะเกิดการเปลี่ยนรูปแบบถาวรหรือแบบพลาสติก (Plastic deformation)

นอกจากความเครียดทั้ง 2 ชนิดนี้แล้ว ยังมีความเครียดอีกประเภทหนึ่งซึ่งพบในวัสดุประเภทโพลิเมอร์ เช่น พลาสติก เรียกว่าความเครียดกึ่งยืดหยุ่นจะมีลักษณะที่เมื่อปราศจากแรงกระทำวัสดุจะมีการคืนรูป แต่จะไม่กลับไปมีรูปร่างเหมือนเดิม

การวัดและคำนวณหาความเครียดมีอยู่ 2 ลักษณะคือ

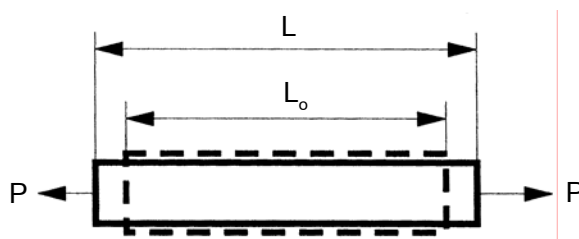
1. แบบเส้นตรง ความเครียดที่วัดได้จะเรียกว่า ความเครียดเชิงเส้น (Linear strain) จะใช้ได้เมื่อแรงที่มากระทำมีลักษณะเป็นแรงดึงหรือแรงกด ดังภาพที่ 2.2 ค่าของความเครียดจะเท่ากับความยาวที่เปลี่ยนไปต่อความยาวเดิม ดังสมการ

$$e = \frac{\Delta L}{L_o} \quad (2.2)$$

เมื่อ e = ความเครียดเชิงเส้น

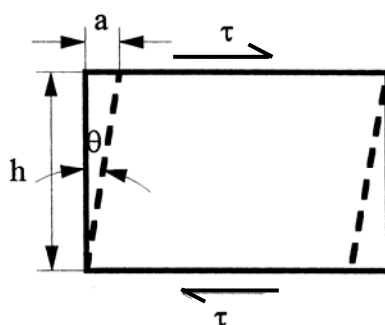
ΔL = ความยาวที่เปลี่ยนไป ($L - L_o$)

L_o = ความยาวเดิมของวัสดุที่สนใจ หรือ Gage length



ภาพที่ 2.2

ความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain)



ภาพที่ 2.3

ความเครียดเฉือน (Shear strain)

2. แบบเฉือน เรียกว่า ความเครียดเฉือน (Shear strain) ใช้กับกรณีที่แรงที่กระทำมีลักษณะเป็นแรงเฉือน (τ) ดังภาพที่ 2.3 ค่าของความเครียดจะเท่ากับระยะที่เคลื่อนที่ไปต่อระยะห่างระหว่างระนาบ ดังสมการ

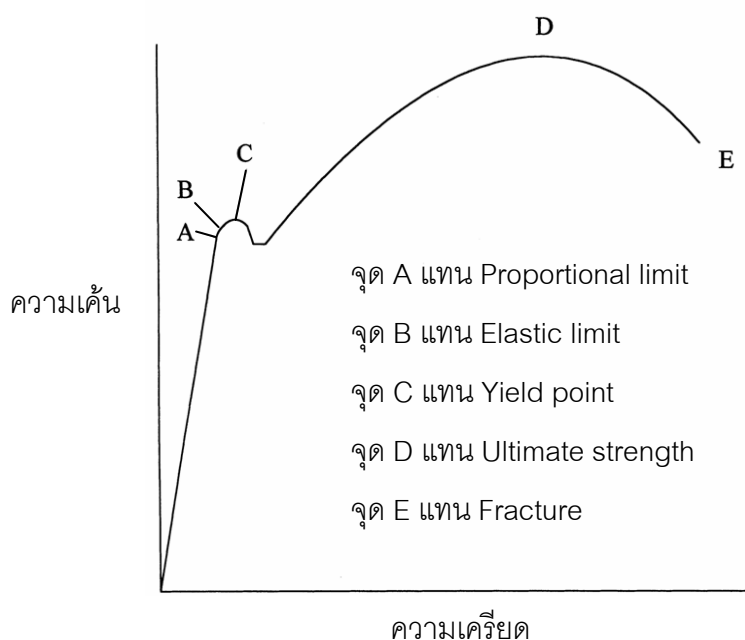
$$\gamma = \frac{a}{h} \quad (2.3)$$

- เมื่อ $\gamma = \tan \theta \approx \theta$ (Radian ในกรณีที่มุมเล็ก มีหน่วยเป็น Radian)
 a = ระยะที่เคลื่อนที่ไป (Displacement)
 h = ระยะห่างระหว่างระนาบ
 θ = มุมที่เปลี่ยนไป

จะเห็นว่าค่าของความเครียดทั้งสองแบบไร้หน่วย เพราะตัวตั้งและตัวหารมีหน่วยเป็นความยาวอยู่แล้ว

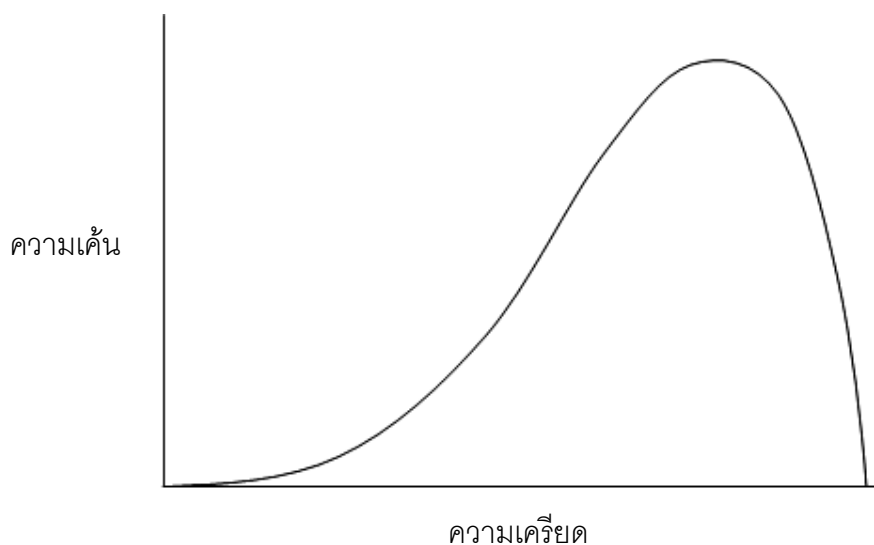
2.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain curve) ซึ่งได้จากการทดสอบแรงดึง (Tensile test) เป็นหลัก โดยจะพล็อตค่าของความเค้นในแกนตั้งและความเครียดในแกนนอน ดังรูป 2.4 การทดสอบแรงดึง นอกจากจะให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดแล้ว ยังจะแสดงความสามารถในการรับแรงดึงของวัสดุ ความเปราะ เหนียวของวัสดุ (Brittleness and ductility) และบางครั้งอาจใช้บอกความสามารถในการขึ้นรูปของวัสดุ (Formability) ได้อีกด้วย



ภาพที่ 2.4

เส้นโค้งความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve) แบบมีจุดคราก (Yield point)



ภาพรูปที่ 2.5

เส้นโค้งความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve) สำหรับวัสดุประเภทเนื้อเยื่ออ่อน (Soft tissue)

จากภาพ 2.5 แสดงเส้นโค้งความเค้น-ความเครียดของวัสดุประเภทเนื้อเยื่ออ่อน ซึ่งสามารถหาได้จากการทดลอง และไม่สามารถบ่งบอกจุดคุณสมบัติทางกลได้เหมือนกับวัสดุโลหะทั่วไป และสำหรับงานวิจัยนี้จะนำค่านี้ไปใช้โดยการหาสมการของเส้นโค้งที่มีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน (Fit curve)

2.1.4 การทดสอบแรงดึง

การทดสอบแรงดึงเป็นการทดสอบที่ใช้สำหรับทดสอบคุณสมบัติทางกลพื้นฐานของวัสดุ โดยในการทดสอบจะเป็นการให้แรงในแนวเส้นตรงแก่ชิ้นงานในทิศทางตรงข้ามกันเพื่อสร้างแรงดึงขึ้นในชิ้นงาน โดยทั่วไปแล้วชิ้นงานสำหรับการทดสอบแรงดึงนี้จะมีลักษณะเรียวยาว (อัตราส่วนระหว่างความยาวและความกว้างมีค่ามาก) และปลายทั้งสองสามารถถูกจับยึดโดยเครื่องทดสอบได้ การใช้ชิ้นงานที่มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั้น มักจะไม่เหมาะต่อการทดสอบโดยทั่วไป ทั้งนี้เนื่องจากชิ้นงานเมื่อถูกแรงดึงสามารถที่จะเกิดการแตกหักหรือขาดในบริเวณใดก็ได้ตลอดความยาวของชิ้นงานเนื่องจากขนาดพื้นที่ของหน้าตัดที่เท่ากัน ทำให้ทุกบริเวณตกอยู่ภายใต้ความเค้นที่ใกล้เคียงกัน การแตกหักอาจเกิดขึ้นนอกบริเวณจับยึดทั้งสองข้างเนื่องมาจากความเสียหายของวัสดุที่เกิดจากแรงบีบที่ใช้จับยึดชิ้นงาน ผลการทดสอบจากการใช้

ชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า อาจจะมีค่าที่ต่ำกว่าค่าคุณสมบัติที่แท้จริงของวัสดุได้ ยกเว้นแต่ในการทดสอบฟิล์มหรือแผ่นพลาสติกบางหรือชิ้นงานบางประเภทที่การเตรียมชิ้นงานทำได้ลำบาก อาจจะต้องใช้ชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในการทดสอบ

เพื่อเป็นแนวทางการแก้ปัญหาดังกล่าว ชิ้นงานทดสอบแรงดึงจึงถูกกำหนดให้มีลักษณะรูปร่างที่มีพื้นที่หน้าในบริเวณที่ต้องการวัดความเครียดอยู่ในบริเวณตรงกึ่งกลางของชิ้นงานและมีขนาดที่เล็กกว่าพื้นที่หน้าสำหรับการจับยึดในบริเวณปลาย หรือมีลักษณะคล้ายที่ยกน้ำหนัก (Dumbbell) โดยจะมีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมหรือสี่เหลี่ยมก็ได้ การออกแบบเช่นนี้ก็เพื่อที่จะกำหนดได้ว่าชิ้นงานทดสอบจะเกิดการแตกหักในบริเวณกึ่งกลางชิ้นงานเนื่องจากเป็นบริเวณที่มีค่าความเค้นมากที่สุด (เนื่องจากมีพื้นที่หน้าตัดที่ต่ำที่สุด) ไม่แตกหักบริเวณจับยึด อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติแล้ว การที่จะทดสอบแล้วชิ้นงานเกิดการแตกหักในบริเวณกึ่งกลางนั้นยังขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยอีกด้วย ไม่ว่าจะเป็นการเตรียมชิ้นงานทดสอบ การติดตั้งชิ้นงานทดสอบ และความสมบูรณ์ของอุปกรณ์ เป็นต้น

ประเภทของชิ้นงานทดสอบแรงดึงสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ประเภทหลักได้แก่

1. ดัมเบลแบบเอวแคบ (Narrow-waisted dumbbell)

ชิ้นงานประเภทนี้เป็นชิ้นงานทดสอบทั่วไปสำหรับพลาสติก เหมาะสำหรับใช้ทดสอบพลาสติกทั้งแข็งและอ่อน นอกจากใช้ในการทดสอบแรงดึงแล้ว ชิ้นงานประเภทนี้ยังสามารถนำไปใช้ทดสอบแรงดัดและทดสอบแรงกระแทกได้ โดยตัดปลายทั้งสองข้างสำหรับยึดจับ

2. ดัมเบลแบบเอวกว้าง (Broad-waisted dumbbell)

ชิ้นงานประเภทนี้เหมาะสำหรับใช้ในการทดสอบพลาสติกอ่อนนิ่ม โดยเฉพาะอย่างยิ่งพลาสติกที่สามารถยืดตัวได้สูง ได้แก่จำพวกยางต่าง ๆ หรือพลาสติกนิ่ม

3. ดัมเบลกระดูกสุนัข (Dog bone dumbbell)

ชิ้นงานประเภทนี้เหมาะสำหรับการทดสอบพลาสติกประเภทเทอร์โมเซต ในกรณีที่ชิ้นงานแบบดัมเบลโค้งเข้าไม่เหมาะสม อย่างไรก็ตามชิ้นงานประเภทนี้ไม่นิยมสำหรับการทดสอบในปัจจุบัน

4. แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Parallel-side strip)

ชิ้นงานประเภทนี้เหมาะสำหรับการทดสอบวัสดุเชิงประกอบ ในกรณีที่เรียงตัวของเส้นใยเสริมแรงมีผลทำให้การตัดชิ้นงานเป็นรูปดัมเบลทำได้ลำบากและผลการทดสอบไม่

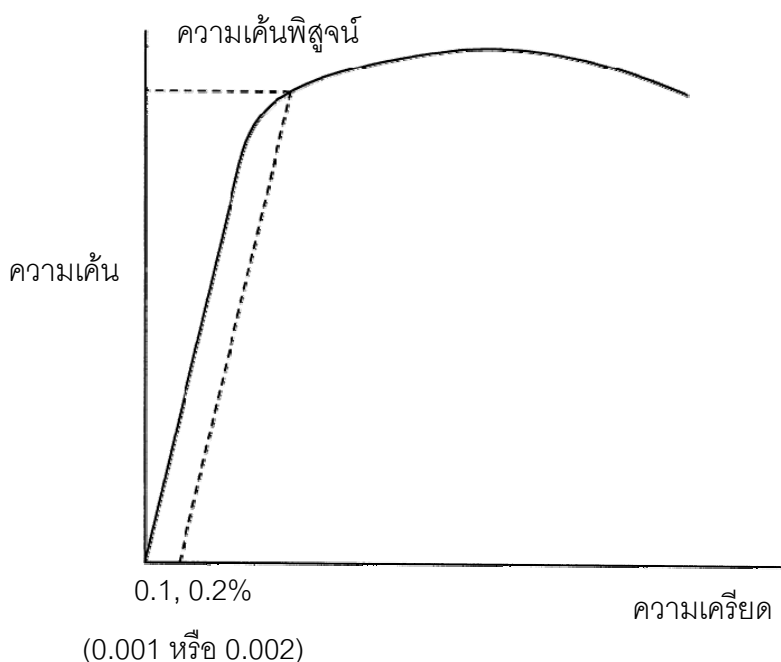
แน่นอน แต่การใช้ชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้อาจจะประสบปัญหาของการแตกหักบริเวณจับยึด เพื่อเพิ่มความแข็งแรงในบริเวณนั้นนอกจากวัสดุเชิงประกอบแล้ว ชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ยังถูกใช้ในการทดสอบฟิล์มพลาสติกอีกด้วย

วิธีการทดสอบนั้น เริ่มจากการนำตัวอย่างที่จะทดสอบมาตั้งอย่างช้า ๆ แล้วบันทึกค่าของความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นไว้ แล้วมาพล็อตเป็นเส้นโค้งดังรูปที่ 2.4 ขนาดและรูปร่างของชิ้นทดสอบมีต่าง ๆ กัน ขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุนั้น ๆ มาตรฐานต่าง ๆ ของการทดสอบ เช่น มาตรฐานของ ASTM (American society of testing and materials) BS (British standards) JIS (Japanese industrial standards) หรือแม้แต่ มอก. (มาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรมไทย) ได้กำหนดขนาดและรูปร่างของชิ้นทดสอบไว้ ทั้งนี้เพื่อให้ผลของการทดสอบเชื่อถือได้ พร้อมกับกำหนดความเร็วในการเพิ่มแรงกระทำเอาไว้ด้วย

จากการศึกษาเส้นโค้งความเค้น-ความเครียด เราพบว่า เมื่อเราเริ่มดึงชิ้นทดสอบอย่างช้า ๆ ชิ้นทดสอบจะค่อย ๆ ยืดออก จนถึงจุดจุดหนึ่ง (จุด A) ในภาพที่ 2.4 ซึ่งในช่วงนี้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดจะเป็นสัดส่วนคงที่ ทำให้ได้กราฟที่เป็นเส้นตรง ตามกฎของฮุก (Hook's law) ซึ่งกล่าวว่าความเค้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเครียด จุด A นี้ เรียกว่า พิกัดสัดส่วน (Proportional limit) และภายใต้พิกัดสัดส่วนนี้ วัสดุจะแสดงพฤติกรรมการคืนรูปแบบยืดหยุ่น (Elastic behavior) นั่นคือเมื่อปล่อยแรงกระทำ ชิ้นทดสอบจะกลับไปมีขนาดเท่าเดิม

เมื่อเพิ่มแรงกระทำต่อไปจนเกินพิกัดสัดส่วน เส้นกราฟจะค่อย ๆ โค้งออกจากเส้นตรง วัสดุหลายชนิดจะยังคงแสดงพฤติกรรมการคืนรูปได้อีกเล็กน้อยจนถึงจุด ๆ หนึ่ง (จุด B) เรียกว่า พิกัดยืดหยุ่น (Elastic limit) ซึ่งจุดนี้จะเป็นจุดกำหนดว่าความเค้นสูงสุดที่จะไม่ทำให้เกิดการแปรรูปถาวร (Permanent deformation or offset) กับวัสดุนั้น เมื่อผ่านจุดนี้ไปแล้ววัสดุจะมีการเปลี่ยนรูปอย่างถาวร (Plastic deformation) ลักษณะการเริ่มต้นของความเครียดแบบพลาสติกนี้เปลี่ยนแปลงไปตามชนิดของวัสดุในโลหะหลายชนิด เช่น พวกเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำ (Low carbon steel) จะเกิดการเปลี่ยนรูปอย่างรวดเร็ว โดยไม่มีการเพิ่มความเค้น (บางครั้งอาจจะลดลงก็มี) ที่จุด C ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการเปลี่ยนรูปแบบพลาสติก จุด C นี้เรียกว่าจุดคราก (Yield Point) และค่าของความเค้นที่จุดนี้เรียกว่า ความเค้นจุดคราก (Yield stress หรือ Yield strength) ค่าความเค้นจุดครากนี้มีประโยชน์กับวิศวกรมาก เพราะเป็นจุดแบ่งระหว่างพฤติกรรมการคืนรูปกับพฤติกรรมการคงรูป และในกรณีของโลหะจะเป็นค่าความแข็งแรงสูงสุดที่ใช้ประโยชน์ได้โดยไม่เกิดการเสียหาย

วัสดุหลายชนิดเช่น อะลูมิเนียม ทองแดง จะไม่แสดงจุดครากอย่างชัดเจน แต่ก็มีวิธีที่จะหาได้โดยกำหนดความเครียดที่ 0.10 - 0.20% ของความยาวกำหนดเดิม (Original gage length) แล้วลากเส้นขนานกับกราฟช่วงแรกไปจนตัดเส้นกราฟที่โค้งไปทางด้านขวา ดังภาพที่ 2.6 ค่าความเค้นที่จุดตัดนี้จะนำมาใช้แทนค่าความเค้นจุดครากได้ ความเค้นที่จุดนี้บางครั้งเรียกว่า ความเค้นพิสูจน์ (Proof stress) หรือความเค้น 0.1% หรือ 0.2% offset ดังแสดงใน ภาพที่ 2.6

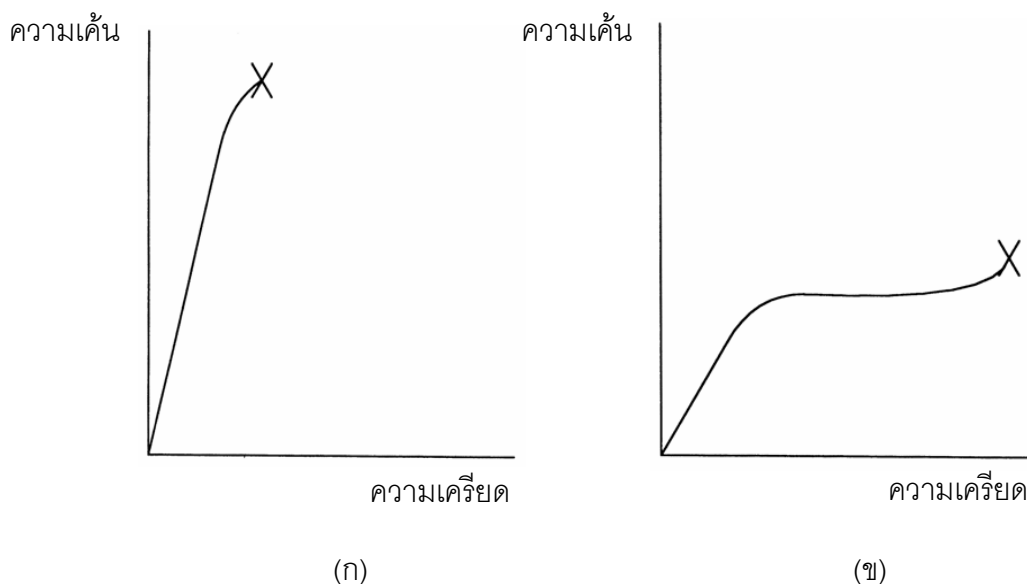


ภาพที่ 2.6

เส้นโค้งความเค้น – ความเครียดแบบที่ไม่มีจุดคราก

หลังจากจุดครากแล้ว วัสดุจะเปลี่ยนรูปแบบพลาสติกโดยความเค้นจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นช้า ๆ หรืออาจจะคงที่จนถึงจุดสูงสุด (จุด D) ค่าความเค้นที่จุดนี้เรียกว่า Ultimate strength หรือความเค้นแรงดึง (Tensile strength) ซึ่งเป็นค่าความเค้นสูงสุดที่วัสดุจะทนได้ก่อนที่จะขาดหรือแตกออกจากกัน (Fracture) เนื่องจากวัสดุหลายชนิดสามารถเปลี่ยนรูปร่างอย่างพลาสติกได้มาก ๆ ค่าความเค้นสูงสุดนี้สามารถนำมาคำนวณใช้งานได้ นอกจากนี้ ค่านี้อย่างยิ่งใช้เป็นดัชนีเปรียบเทียบคุณสมบัติของวัสดุได้ด้วยว่า คำว่า ความแข็งแรง (Strength) ของวัสดุ หรือกำลังวัสดุนั้น โดยทั่วไปจะหมายถึงค่าความเค้นสูงสุดที่วัสดุทนได้

ที่จุดสุดท้าย (จุด E) ของกราฟ เป็นจุดที่วัสดุเกิดการแตกหรือขาดออกจากกัน (Fracture) สำหรับโลหะบางชนิด เช่น เหล็กกล้าคาร์บอนต่ำหรือโลหะเหนียว ค่าความเค้นประลัย (Rupture strength) นี้จะต่ำกว่าความเค้นสูงสุด เพราะเมื่อเลยจุด D ไป พื้นที่ภาคตัดขวางของตัวอย่างทดสอบลดลง ทำให้พื้นที่ที่ต้านทานแรงดึงลดลงด้วย ในขณะที่เรายังคงคำนวณค่าของความเค้นจากพื้นที่หน้าตัดเดิมของวัสดุก่อนที่จะทำการทดสอบแรงดึง ดังนั้นค่าของความเค้นจึงลดลง ส่วนโลหะอื่น ๆ เช่น โลหะที่ผ่านการขึ้นรูปเย็น (Cold work) มาแล้ว มันจะแตกหักที่จุดความเค้นสูงสุด โดยไม่มีการลดขนาดพื้นที่ภาคตัดขวาง ดังภาพ 2.7ก ทำนองเดียวกับกลุ่มวัสดุเปราะ (Brittle materials) เช่น เซรามิก ที่มีการเปลี่ยนรูปอย่างพลาสติกน้อยมากหรือไม่มีเลย ส่วนกรณีของวัสดุที่เป็นพลาสติกจะเกิดแตกหักโดยที่ความต้องการความเค้นสูงขึ้น ดังภาพ 2.7ข



ภาพที่ 2.7

เปรียบเทียบเส้นโค้งความเค้น – ความเครียดของวัสดุเปราะและวัสดุพลาสติก

(ก) วัสดุเปราะ

(ข) วัสดุพลาสติก

เส้นโค้งความเค้น-ความเครียดนี้ นอกจากจะใ้บอกค่าความแข็งแรง ณ จุดคราก (Yield strength) ความเค้นสูงสุดและความเค้นประลัยแล้ว ยังจะใ้บอกค่าต่าง ๆ ได้อีก ดังนี้ คือ

1. ความเหนียว (Ductility) คือค่าที่บอกเป็นเปอร์เซ็นต์ การยืดตัว (Percentage Elongation) และการลดพื้นที่ภาคตัดขวาง (Reduction of Area) โดยที่

$$\text{เปอร์เซ็นต์การยืดตัว (\%EI)} = \frac{L_f - L_o}{L_o} \times 100\% \quad (2.4)$$

เมื่อ L_f = ความยาวของเกจหลังจากดึงจนขาด
 L_o = ความยาวของเกจเริ่มต้น

$$\text{การลดพื้นที่ภาคตัดขวาง (\%R.A.)} = \frac{A_o - A_f}{A_o} \times 100\% \quad (2.5)$$

เมื่อ A_o = พื้นที่หน้าตัดก่อนดึง
 A_f = พื้นที่หน้าตัดหลังจากดึงจนขาด

ในทางปฏิบัติเรามักใช้ค่า %EI มากกว่าเพราะสะดวกในการวัด ความเหนียวของวัสดุนี้จะเป็นตัวบอกความสามารถในการขึ้นรูปของมัน คือถ้าวัสดุมีความเหนียวดี (%EI สูง) ก็สามารถนำไปขึ้นรูป เช่น รีด ตีขึ้นรูป ดึงเป็นลวด ฯลฯ ได้ง่าย แต่ถ้ามีความเหนียวต่ำ (เปราะ, Brittle) ก็จะนำไปขึ้นรูปยากหรือทำไม่ได้ เป็นต้น

2. Modulus of elasticity or stiffness ภายใต้พิภพสัดส่วนซึ่งวัสดุมีพฤติกรรมเป็นอิลาสติก อัตราส่วนระหว่างความเค้นต่อความเครียดจะเท่ากับค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เรียกว่า Modulus of elasticity (E) หรือ Young's modulus หรือ Stiffness

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{PL}{A\Delta L} \quad (2.6)$$

มักมีหน่วยเป็น ksi (1 ksi=1000 psi) หรือ kgf/mm² หรือ GPa (สังเกตว่าเป็นหน่วยเดียวกับหน่วยของความเค้น)

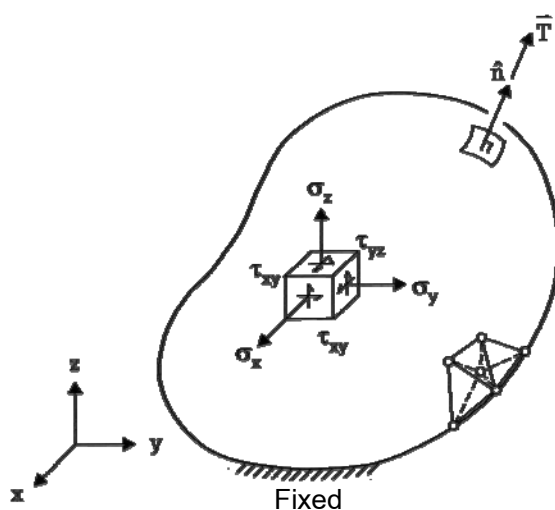
ถ้าแรงที่มากกระทำเป็นแรงเฉือนเราเรียกค่าคงที่นี้ว่า Shear modulus หรือ Modulus of rigidity (G)

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Ph}{Aa} \quad (2.7)$$

ค่า E และ G ของวัสดุแต่ละชนิดจะมีค่าเฉลี่ยคงที่ และเป็นตัวบอกความสามารถคงรูป (Stiffness, rigidity) ของวัสดุ นั่นคือ ถ้า E และ G มีค่าสูง วัสดุจะเปลี่ยนรูปร่างอย่างยืดหยุ่นได้น้อย แต่ถ้า E และ G ต่ำ มันก็จะเปลี่ยนรูปร่างอย่างยืดหยุ่นได้มาก ค่า E และ G นี้มีประโยชน์มากสำหรับงานออกแบบวัสดุที่ต้องรับแรงต่าง ๆ

2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ภาพที่ 2.8 แสดงวัตถุทางตันรูปร่างใด ๆ ใน 3 มิติ คือพิกัดจุด x - y - z บนผิวบางส่วน ของวัตถุนี้อาจถูกจับยึดตรึงแน่น (fixed) ในขณะที่ผิวบางส่วนอาจถูกแรงภายนอกกระทำ หรือผิวบางส่วนอาจปล่อยอิสระไว้ (Free boundary) โดเมนของวัตถุทางตันนี้สามารถแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์แบบ 3 มิติทรงสี่หน้า (Tetrahedral element) ย่อย ๆ ได้ดังแสดงในรูป หนึ่ง วัตถุทางตันนี้จะมีรูปร่างใด ๆ ก็ได้แน่นอนว่าจะเป็นรูปร่างของเครื่องยนตรถยนต์ซึ่งอาจมีส่วนเว้าส่วนโค้งหรือกลวงอยู่ภายใน รูปร่างซึ่งมีลักษณะซับซ้อนเช่นนี้สามารถแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์แบบ 3 มิติทรงสี่หน้าที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมากได้



ภาพที่ 2.8

โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของวัตถุทรงตันภายใต้แรงกระทำใด ๆ

ที่ตำแหน่งใด ๆ ก็ตามในวัตถุทรงตันนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงความสมดุลของแรงในแนวแกน x y และ z คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

โดย σ_x σ_y σ_z แทนค่าความเค้นฉาก (Normal stress) ในแนวแกน x y z ตามลำดับ และ τ_{xy} τ_{xz} τ_{yz} แทนค่าความเค้นเฉือน (Shearing stress)

บนผิวรอบนอกบางส่วนของวัตถุทรงตันนี้อาจจะประกอบไปด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันไป เช่น ผิวบางส่วนอาจมีการกำหนดระยะเคลื่อนตัว ในขณะที่ผิวส่วนอื่นๆ อาจมีการกำหนดเงื่อนไขของความเค้นผิว (surface traction) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ คือ

$$\bar{T} = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} + T_z \hat{k} \quad (2.9)$$

โดย T_x T_y T_z แทนค่าความเค้นที่ผิวในทิศแกน x y z ตามลำดับค่าความเค้นที่ผิวเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าความเค้นฉากและความเค้นเฉือนได้ คือ

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

โดย n_x n_y n_z เป็นทิศทางโคไซน์ (Direction cosine) ของเวกเตอร์

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k} \quad (2.11)$$

ซึ่งเป็นเวกเตอร์หน่วย (Unit vector) ที่ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นค่าของความเค้นย่อย (Stress components) ต่าง ๆ ในสมการ (2.10) มีความสัมพันธ์กับค่าของความเครียดย่อย (Stress components) ดังนี้

$$\begin{matrix} \{\sigma\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [C] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \{\epsilon\} \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (2.12)$$

เวกเตอร์ในสมการ (2.12) นี้ประกอบด้วย

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} ; \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

โดย $\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z$ แทนค่าความเครียดฉาก (Normal strain) ในแนวแกน x y z ตามลำดับ

$\tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}$ แทนค่าความเครียดเฉือน (Shearing strain)

เมทริกซ์ $[C]$ แทนเมทริกซ์ความยืดหยุ่นของวัสดุ (Material elasticity matrix) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

โดย E แทนค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)

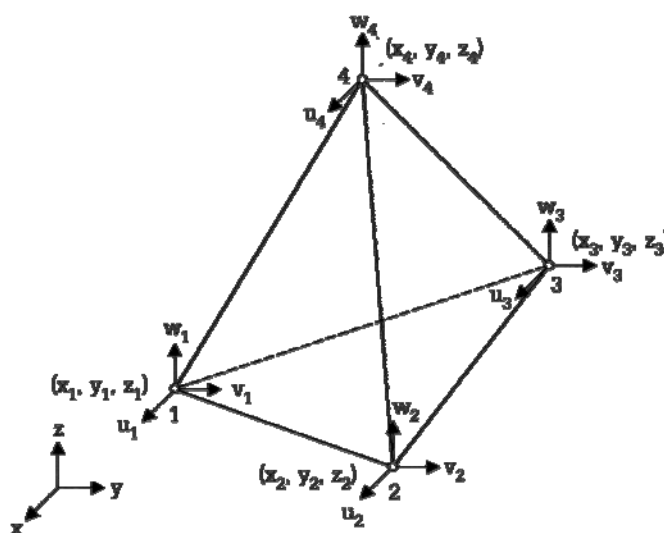
ν แทนค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง (Poisson's ratio)

ค่าความเครียดย่อยต่าง ๆ ข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัว u, v, w ได้ตามทฤษฎีของการเสียรูปน้อย (Small deformation theory) ดังนี้

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.15)$$

กล่าวคือ จำนวนตัวไม่รู้ค่าสำหรับปัญหาทุกวัตถุทรงตันคือค่าของการเสียรูป u, v, w เท่านั้น เมื่อทราบค่าของการเสียรูปเหล่านี้แล้วจึงนำไปคำนวณหาค่าของความเครียดย่อยและค่าของความเค้นย่อยตามสมการ (2.15) และ (2.12) ได้ตามลำดับ

จากความเข้าใจข้างต้นนี้เองทำให้ทราบว่าแต่ละจุดต่อ (Node) ในรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ ค่าของการเสียรูป u, v และ w ในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับภาพที่ 2.9 แสดงเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ ดังนั้นในแต่ละเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อนี้จึงประกอบไปด้วยตัวไม่รู้ค่ารวม 12 ค่า



ภาพที่ 2.9

เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ

ลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u v และ w บนเอลิเมนต์ต่างถูกกำหนดให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ยกตัวอย่างเช่น

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (2.16)$$

โดย α_i $i = 1, 2, 3, 4$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขที่จุดต่อทั้งสี่ดังนี้

$$\text{จุดต่อ 1 : } u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \quad (2.17 \text{ ก})$$

$$\text{จุดต่อ 2 : } u(x_2, y_2, z_2) = u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \quad (2.17 \text{ ข})$$

$$\text{จุดต่อ 3 : } u(x_3, y_3, z_3) = u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \quad (2.17 \text{ ค})$$

$$\text{จุดต่อ 4 : } u(x_4, y_4, z_4) = u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \quad (2.17 \text{ ง})$$

สมการ (2.17 ก) ถึง (2.17 ง) สามารถนำมาใช้หาค่าคงที่ α_i $i = 1, 2, 3, 4$ ได้ จากนั้นจึงเขียนสมการ (2.16) ให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ คือ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ &= \underset{(1 \times 4)}{[N]} \underset{(4 \times 1)}{\{u\}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

โดย $[N]$ เรียกว่า เมทริกซ์ของการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation matrix) และ $\{u\}$ แทนเวกเตอร์ของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (Vector of nodal u-displacement) ในแนวแกน x

รายละเอียดของฟังก์ชันการประมาณภายในของเมทริกซ์ $[N]$ ประกอบด้วย

$$N_i(x, y, z) = L_i(x, y, z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.19)$$

โดย L_i เรียกว่า โคออร์ดิเนตปริมาตร (Volumn coordinate) ซึ่งมีรายละเอียดคือ

$$L_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.20)$$

$$\text{ในที่นี้ } V = \text{ปริมาตรของเอลิเมนต์} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.21 \text{ ก})$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} ; \quad c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.21 \text{ ข})$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} ; \quad d_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ส่วนค่าคงที่ตัวอื่น ๆ ได้แก่ a_i , b_i , c_i , d_i เมื่อ $i = 2, 3, 4$ สามารถเขียนออกมาได้ในทำนองเดียวกันโดยใช้การวนสลับเปลี่ยนตัวเลข (Cyclic permutation) เช่น

$$a_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

เป็นต้น

ดังนั้น ลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u , v , w ในแนวแกน x , y , z บนเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ คือ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \begin{matrix} [N] \{u\} \\ (1 \times 4) (4 \times 1) \end{matrix} \\ v(x, y, z) &= \begin{matrix} [N] \{v\} \\ (1 \times 4) (4 \times 1) \end{matrix} \\ w(x, y, z) &= \begin{matrix} [N] \{w\} \\ (1 \times 4) (4 \times 1) \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

โดย เมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน $[N]$ มีรายละเอียดดังแสดงในสมการ (2.19) ถึง (2.21)

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) เริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.8) ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก ซึ่งในที่นี้คือฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i แล้วอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งปริมาตรของเอลิเมนต์นั้นจากนั้นจึงกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\int_V N_i \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV &= 0 \\ \int_V N_i \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dV &= 0 \\ \int_V N_i \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dV &= 0\end{aligned}\quad (2.23)$$

โดย v แทนปริมาณของเอลิเมนต์นั้น ๆ ส่วนฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i ในขั้นนี้อยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ ยกตัวอย่างเช่น หากเราเลือกใช้เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อแล้วฟังก์ชันการประมาณภายในจะเกิดจากการเขียนลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u v w ในสมการ (2.22) รวมเข้าด้วยกันคือ

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} N(x, y, z) \end{bmatrix}_{(3 \times 12)} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}_{(12 \times 1)} \quad (2.24)$$

$$\text{โดย } \begin{bmatrix} \bar{\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 & u_4 & v_4 & w_4 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ซึ่งหมายถึง เวกเตอร์ของความเครียดย่อยในสมการ (2.15) สามารถเขียนในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ $\begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}$ ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\}_{(6 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{Bmatrix} = [B(x, y, z)]_{(6 \times 12)} \{\delta\}_{(12 \times 1)} \quad (2.26)$$

โดย $[B]$ แทนเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดย่อยและการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

จากการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค่างตามสมการ (2.23) นี้ ทำให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงที่หน้าแบบ 4 จุดต่อต่งแสดงในรูปที่ 2.9 อันประกอบไปด้วย 12 สมการย่อยซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[K]_{(12 \times 12)} \{\delta\}_{(12 \times 1)} = \{F\}_{(12 \times 1)} \quad (2.27)$$

โดย $[K]$ แทนเมทริกซ์ของความแข็งแรง (Stiffness matrix) ซึ่งคำนวณได้จาก

$$[K]_{(12 \times 12)} = [B]_{(12 \times 6)}^T [C]_{(16 \times 6)} [B]_{(6 \times 12)} V \quad (2.28)$$

โดย $[C]$ แทนเมทริกซ์ความยืดหยุ่นของวัสดุตามสมการ (2.14)

V แทนปริมาณของเอลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่นั้น

ส่วนเวกเตอร์ $\{F\}$ ทางด้านขวามือของสมการ (2.27) แทนโหลดเวกเตอร์ (Load vector) ซึ่งอาจเกิดจากแรงดัน (Pressure) ที่กระทำบนผิวภายนอก ยกตัวอย่างเช่น หากด้านซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2-3-4 ในภาพที่ 2.9 เป็นด้านที่ผิวภายนอกของโมเดลซึ่งถูกแรงดันที่มีค่า p_x, p_y, p_z กระทำในทิศแกน x, y, z ตามลำดับแล้วเวกเตอร์ $\{F\}$ ที่เกิดขึ้นคือ

$$[F]^T = \frac{A_{2-3-4}}{3} [0 \ 0 \ 0 \ p_x \ p_y \ p_z \ p_x \ p_y \ p_z \ p_x \ p_y \ p_z] \quad (2.29)$$

โดย A_{2-3-4} แทนพื้นที่ของด้านซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2-3-4 เป็นต้น

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (2.27) พร้อมไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ดังสมการ (2.28) และ (2.29) นี้เองที่นำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และฝังตัวอยู่ในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ที่ใช้วิเคราะห์ปัญหารูปทรงตันใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กันได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (2.22) จะถูกคำนวณสำหรับทุก ๆ เอลิเมนต์ก่อนนำมาประกอบกันเข้าเป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการรวมนี้ แล้วจึงแก้สมการรวมทั้งระบบเพื่อหาค่าของการเคลื่อนตัว u v w ในทิศทาง x y z ของทุก ๆ จุดต่อ

เมื่อทราบค่าของการเคลื่อนตัว u v w ของทุก ๆ จุดต่อแล้ว จึงคำนวณหาค่าความเครียดย่อยในแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้สมการ (2.22) ก่อนนำไปหาค่าความเค้นย่อยโดยใช้สมการ (2.12) ต่อไป นั่นคือ

$$\{\sigma\}_{(6 \times 1)} = [C]_{(6 \times 6)} [B]_{(6 \times 12)} \{\delta\}_{(12 \times 1)} \quad (2.30)$$

ค่าของความเค้นย่อยทั้ง 6 ค่าที่คำนวณได้ตามสมการ (2.25) ในแต่ละเอลิเมนต์ทรงแปดหน้าแบบ 4 จุดต่อนี้ต่างมีค่าคงที่ทั่วทั้งเอลิเมนต์นั้น หลาย ๆ ซอฟต์แวร์จึงทำการเฉลี่ยค่าของความเค้นย่อยเหล่านี้ไปยังตำแหน่งของจุดต่อซึ่งห้อมล้อมด้วยหลายเอลิเมนต์ ก่อนแสดงผลลัพธ์ออกมาเป็นระดับสีบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นดูมีความเป็นจริงมากขึ้น

2.3 ชีวกลศาสตร์ (Biomechanics)

ชีวกลศาสตร์ เป็นวิทยาศาสตร์ที่ศึกษาถึงแรงภายนอก และแรงภายในที่ทำกับร่างกายมนุษย์ และผลที่เกิดขึ้นจากแรงนี้ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลง และการเคลื่อนไหว อย่างไรก็ตามมีข้อสังเกตว่า ความหมายเหล่านี้ก็ยังไม่เป็นที่ยอมรับอย่างแท้จริง จึงอาจกล่าวได้ว่าชีวกลศาสตร์ อาจจะกำลังเริ่มต้นก้าวไปสู่การเปลี่ยนแปลง เช่นเดียวกับคำว่า Kinesiology

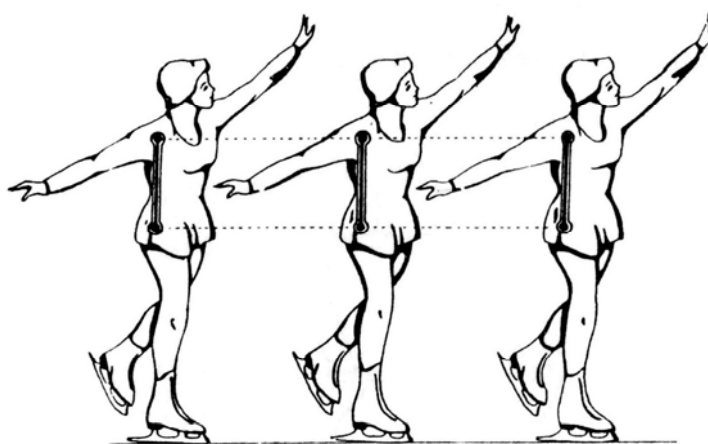
2.3.1 การเคลื่อนที่ในทางชีวกลศาสตร์

การเคลื่อนที่สามารถอธิบายได้ 3 ลักษณะดังนี้

1. การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Translation motion)

การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหรือร่างกายเคลื่อนที่โดยทุกส่วนของวัตถุหรือร่างกาย เดินทางไปเป็นระยะที่เท่ากัน และในเส้นทางเดียวกันโดยมีระยะเวลาเท่ากัน

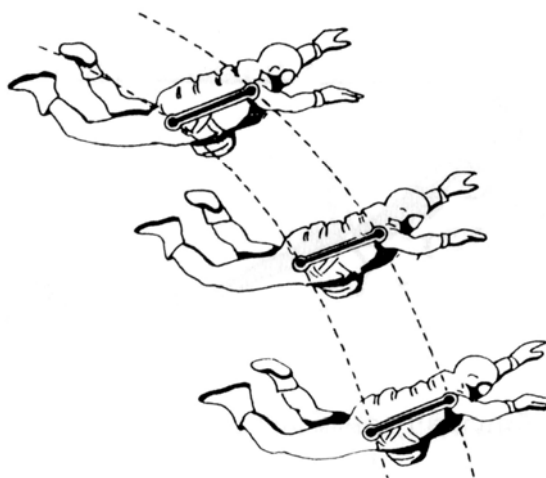
ควรพิจารณาว่าการเคลื่อนที่ใดเป็นแบบเส้นตรง ให้พิจารณา การเคลื่อนที่ของเส้นตรงที่ลากผ่านวัตถุหรือร่างกายนั้น โดยถ้าในขณะที่เคลื่อนที่เส้นตรงนี้คงระยะความยาวเท่าเดิม และขนานกับตำแหน่งแรกที่อยู่ การเคลื่อนที่นั้นก็ถือว่าเป็นแบบ Translation หรือ เป็นแบบเส้นตรง ดังรูปที่ 2.10 แสดงให้เห็นว่า มีระยะทางเท่ากัน ทิศทางเดียวกัน และเวลาเท่ากัน ในรูปจะเห็นว่า เส้นสมมุติจากการเชื่อม 2 จุด คือ หัวไหล่ขวา และกระดูกสะโพกขวา เส้นประ แสดงให้เห็น การเคลื่อนที่ของทั้ง 2 จุด ไปในระยะ ทิศทาง และเวลาเดียวกัน



ภาพที่ 2.10

การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear translation)

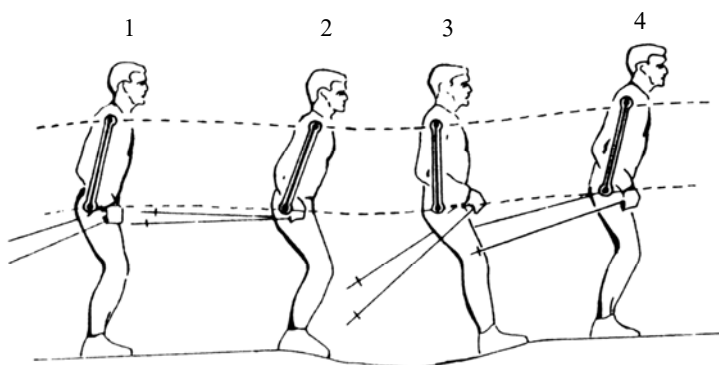
ภาพที่ 2.11 แสดงให้เห็นนักกระโดดร่มดิ่งพสุธา ในช่วงที่ดิ่งลอยตัวแบบอิสระ (Free fall) เป็นการเคลื่อนที่แบบ Translation เพราะตำแหน่งของเส้นที่เชื่อมทั้ง 2 จุดนั้น เคลื่อนไปในระยะ ทิศทาง และเวลาเดียวกัน แต่ในภาพที่ 2.11 เส้นทางการเดินทางของจุดทั้ง 2 เป็นเส้นโค้งแทนที่จะเป็นเส้นตรง (ข้อสังเกต : การเคลื่อนที่แบบ Translation ที่เป็นเส้นตรง และเส้นโค้ง จะเรียกว่า Rectilinear translation และ Curvilinear translation ตามลำดับ)



ภาพที่ 2.11

การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง (Curvilinear translation)

ภาพที่ 2.12 ถึงแม้ว่าจุดแรก และจุดสุดท้าย จะแสดงให้เห็นคล้ายการเคลื่อนไหวนอนแบบเส้น แต่ตำแหน่งที่ 2 และ 3 ในภาพจะชี้ให้เห็นว่าไม่ใช่แบบเส้นตรง

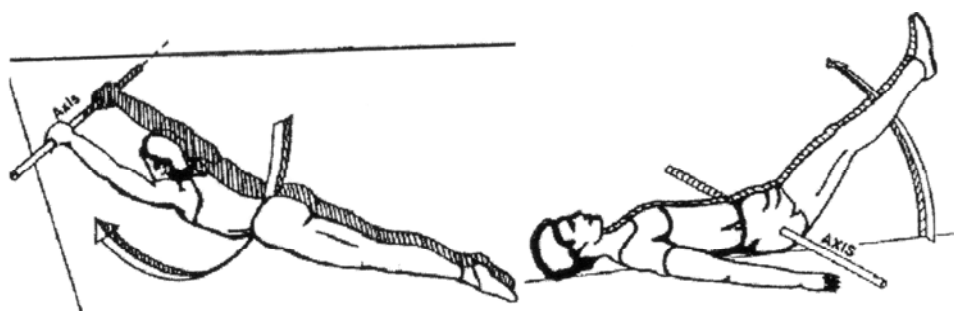


ภาพที่ 2.12

การเคลื่อนที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear motion)

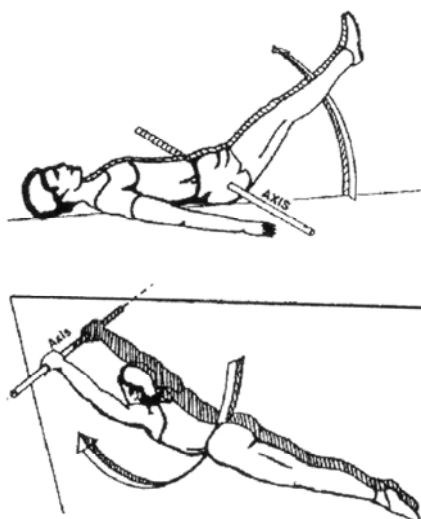
2. การเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation motion)

เป็นการเคลื่อนที่โดยวัตถุหรือร่างกายเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนตำแหน่งรอบ ๆ เส้นอ้างอิงในอากาศ โดยวัตถุ หรือร่างกายเคลื่อนไปด้วยมุมที่เท่ากัน ทิศทางเดียวกัน และเวลาเท่ากัน เส้นสมมุติในอากาศนี้อาจพาดผ่านวัตถุหรือร่างกายนั่นเองหรือเรียกว่า แกนของการหมุน (Axis of rotation) ซึ่งแกนของการหมุนจะตั้งฉากกับระนาบ ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ และร่างกาย



ภาพที่ 2.13

นักยิมนาสติก แสดงตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบหมุนในการยกขาขึ้น
จากพื้นจนกระทั่งขาตั้งฉากกับพื้น



ภาพที่ 2.14

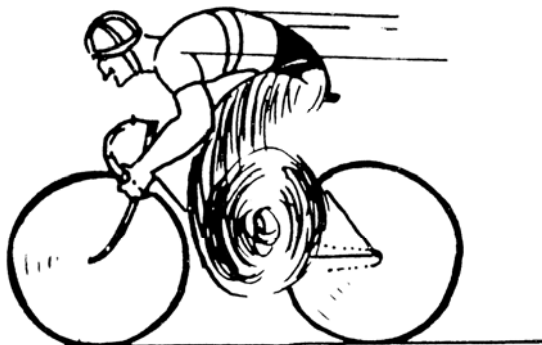
ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบหมุนที่แกนของการหมุนอยู่นอก
วัตถุที่เคลื่อนที่ (บาร์ หรือ แกน)

จะเห็นว่าทั้ง 2 ภาพ แสดงระนาบของวัตถุ หรือร่างกายที่เคลื่อนที่กับระนาบของแกนการหมุนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

3. การเคลื่อนที่แบบผสมผสาน (General motion)

ในด้านเทคนิคเชิงกีฬา การเคลื่อนที่แบบหมุนจะพบมากกว่าการเคลื่อนที่แบบเส้นตรง แต่จะพบมากที่สุด คือการเคลื่อนที่แบบผสมผสาน ซึ่งมีทั้งการหมุนและการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง ดังภาพ นักปั่นจักรยาน ส่วนบนของร่างกายจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงซึ่งเป็นผลจากการเคลื่อนที่แบบหมุนของส่วนขา

การผสมผสานการเคลื่อนที่แบบหมุน และเส้นตรง มักจะมีการผสมผสานอื่น ๆ รวมอยู่ด้วย เช่น การเคลื่อนที่แบบหมุนหลาย ๆ อัน เข้าด้วยกันในเวลาเดียวกัน ดังภาพที่ 2.16 แสดงการหมุนของส่วนขาอย่างน้อย 3 ส่วนพร้อมกัน ส่วนแรกคือการหมุนของต้นขาไปรอบ ๆ แกนที่ลากผ่านกระดูกข้อต่อสะโพก ส่วนที่สอง คือ ขาหมุนรอบแกนที่ลากผ่านข้อเข่า และส่วนสุดท้ายคือ การหมุนของเท้ารอบ ๆ แกนที่ลากผ่านข้อเท้า ดังนั้นจะเห็นว่า การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบผสมผสานของหลาย ๆ ส่วนอาจยุ่งยากซับซ้อนได้



ภาพที่ 2.15

ปั่นจักรยาน

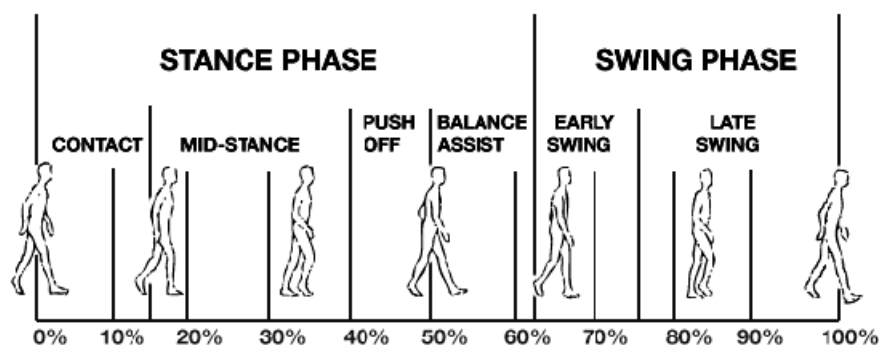


ภาพที่ 2.16

การหมุนของส่วนขา

2.3.2 การเคลื่อนไหวในท่าเดิน (Gait Cycle)

จุดมุ่งหมายในหัวข้อนี้ คือแสดงสภาพปกติของการเดินซึ่งเมื่อมีการเคลื่อนไหวในท่าเดินที่ถูกสุขลักษณะก็จะสามารถช่วยลดผลกระทบจากการเคลื่อนไหวตามกระดูกสันหลังหรือตามข้อต่อต่าง ๆ เช่น สะโพก เข่า ข้อเท้า และเท้า ถ้าหากข้อต่อต่าง ๆ เหล่านี้เกิดการบาดเจ็บร่างกายของมนุษย์ก็จะมีปรับเปลี่ยนให้มีการเคลื่อนไหวที่ให้ภาระต่าง ๆ ไปลงที่จุดที่บาดเจ็บน้อยลง แต่จะไปลงที่จุดอื่นแทน ซึ่งถ้าเกิดขึ้นในระยะยาวก็อาจจะมีผลทำให้ข้อต่ออื่น ๆ ได้รับภาระมากเกินไปที่ร่างกายมนุษย์ได้ออกแบบมาก็อาจจะเกิดการบาดเจ็บตามมาได้ และในแผนภาพด้านล่างนี้ก็เป็นารเคลื่อนไหวที่ถูกต้องและถูกสุขลักษณะซึ่งจำสามารถนำไปใช้อ้างอิงกับผู้ป่วยเพื่อบำบัดรักษาให้มีการเดินใกล้เคียงกับสภาพปกติมากที่สุด



ภาพที่ 2.17

ลำดับการเดิน

Stance phase ระยะนี้ขาขวาเริ่มสัมผัสพื้น ซึ่งระยะนี้จะเป็นช่วงรับดูดซับแรงที่มายังร่างกายเมื่อเท้าเราสัมผัสกับพื้นในช่วงแรก ซึ่งจะมีการใช้หลักการของคาคบในบริเวณข้อเท้าเพื่อรับแรงดัดและลดแรงกระแทก และฝ่าเท้าจะทำหน้าที่ชะลอการเคลื่อนไหว ซึ่งต้องไม่มีการเคลื่อนไหวเพื่อสร้างความสมดุลของร่างกาย

Mid-Stance ระยะนี้จะเป็นช่วงที่น้ำหนักลงมาเต็มฝ่าเท้าแล้วแขนซ้ายก็จะมี การแขวนแขนผ่านลำตัว แล้วขาซ้ายจะเริ่มยกขึ้นแล้วมีการแกว่งไปในอากาศเพื่อก้าวไปข้างหน้าซึ่ง น้ำหนักทั้งหมดของร่างกายจะไปลงที่ขาขวา ในขณะเดียวกันข้อเข่าก็จะเริ่มเหยียดตรง และจะไม่มี การหมุนใด ๆ เกิดขึ้น

Push-Off ในขั้นตอนนี้ขาขวาได้มีการดูดซับแรงกระแทกทั้งหมด ซึ่งจะเริ่มมี การผลัก และสปริงตัวเองเพื่อเข้าสู่วงจรต่อไป สะโพกและข้อเข่าจะมีการหมุนยังทางด้านหลัง ข้อเท้าจะเริ่มมีการขยับอีกครั้ง

Balance assist ภาระทั้งหมดจะความสมดุลกันในขาทั้ง 2 ข้างและจะเริ่มมี การโอนถ่ายภาระจากขาขวาไปยังขาซ้าย

Swing phase ระยะจะเป็นช่วงที่ขาขวาจะมีการแกว่งในอากาศตามใน แผนภาพซึ่งจะอธิบายได้อีก 2 ระยะ

Early swing ช่วงเริ่มต้นของการแกว่งขาเพื่อยกขาออกจากพื้น สะโพก ข้อเข่า ข้อเท้า นิ้วเท้า ะร่วมกันส่งแรงเพื่อยกขาขึ้น

Late swing เป็นช่วงการเคลื่อนไหวให้ขาขวาแกว่งไปข้างหน้าเพื่อพร้อมที่ลง สัมผัสกับพื้น สะโพกจะมีการเคลื่อนไหว แต่ข้อเข่าจะเริ่มมีการเหยียดตรงอีกครั้งเพื่อให้ขา มีการ เคลื่อนไหวไปข้างหน้าต่อไปได้

2.3.3 ระนาบของร่างกาย (Anatomic Plane)

ในร่างกายของมนุษย์สามารถแบ่งระนาบการเคลื่อนไหวของร่างกายออกเป็น 3 แบบใหญ่ ๆ ดังนี้

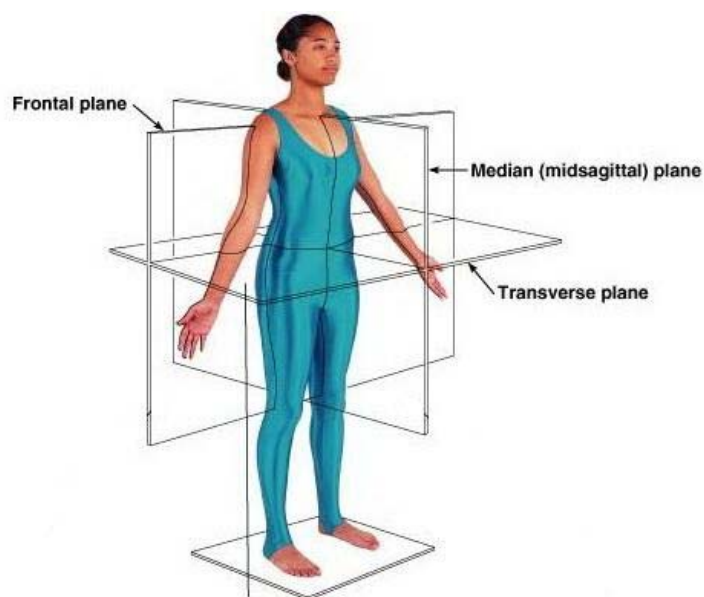
1. Sagittal plane คือ ระนาบที่แบ่งส่วนของร่างกายออกเป็น ซีกซ้าย - ซีกขวา เช่น งอแขน - เขยียดแขน งอขา - ยืดขา
2. Frontal plane คือ ระนาบที่แบ่งส่วนของร่างกายออกเป็น ซีกหน้า - ซีกหลัง เช่น การตีกอล์ฟ การกางแขน การกระโดดตบ
3. Transverse plane คือ ระนาบที่แบ่งส่วนของร่างกายออกเป็น ส่วนบน - ส่วนล่าง เช่น การหมุนลำตัว ส่วนบน - ล่าง การหมุนข้อเท้า เข่า

ประโยชน์ของการแบ่งการเคลื่อนไหวของร่างกายมนุษย์ออกเป็นระนาบต่างๆ เพื่อสะดวกต่อการศึกษางานของข้อต่อ ulyang และอวัยวะต่าง ๆ ของร่างกายว่า สามารถเคลื่อนไหวได้ในมุมใดบ้าง รวมทั้งยังทำให้ทราบได้อีกว่าในขณะที่ร่างกายกำลังเกิดการเคลื่อนไหวอยู่นั้นร่างกายของเรากำลังเคลื่อนไหวขนานอยู่กับระนาบที่ต้องการหรือไม่

นอกจากระนาบทั้ง 3 แบบ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ยังมีอีกระนาบหนึ่งที่สำคัญที่ควรทราบคือ

ระนาบทะแยงมุม (Diagonal plane) ซึ่งแบ่งออกได้ 3 แบบ ดังนี้คือ

1. ทะแยงมุมในแนวสูง ข้อไหล่
2. ทะแยงมุมในแนวต่ำ ข้อสะโพก
3. ผสม ข้อไหล่และสะโพก



ภาพที่ 2.18
ระนาบของร่างกาย

คำศัพท์ เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนไหวส่วน ต่าง ๆ ของร่างกาย

flexion	การงอ
extension	การเหยียด
abduction	การกาง
adduction	หุบ
pronation	คว่ำ นอนคว่ำ
supination	หงาย นอนหงาย
rotation	หมุนขิดลำตัว
circumduction	การหมุนแขนข้างลำตัว (รูปกรวย)
inversion	การจุ่มปลายเท้าบิดเข้าหาลำตัวด้านใน
eversion	การจุ่มปลายเท้าบิดออกนอกลำตัวด้านนอก
elevation	ขากรรไกร ดันขึ้นข้างบน
depression	การกดลงของขากรรไกรล่าง
protraction	ขากรรไกรล่างยื่นออกมาด้านหน้า

retraction	ขากรรไกรล่างกลับเข้าด้านหลัง
hyperextension	การงอปลายเท้า การเหยียดข้อเท้า
dorsiflexion	การงอข้อเท้า งอปลายเท้า

2.4 สรีระวิทยานบนบริเวณข้อเข่า

เอ็นจะสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ เอ็นยึด (Ligament) และเอ็นกล้ามเนื้อ (Tendon) เอ็นยึดจะมีหน้าที่เป็นเยื่อที่ยึดระหว่างกระดูกกับกระดูกเข้าด้วยกัน ส่วนเอ็นกล้ามเนื้อจะมีหน้าที่เป็นเยื่อที่ยึดระหว่างกระดูกกับกล้ามเนื้อเข้าด้วยกัน ส่วนในเรื่องคุณสมบัติจะมีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน แต่จะแตกต่างกันเพียงแต่ตำแหน่งการยึดเท่านั้น

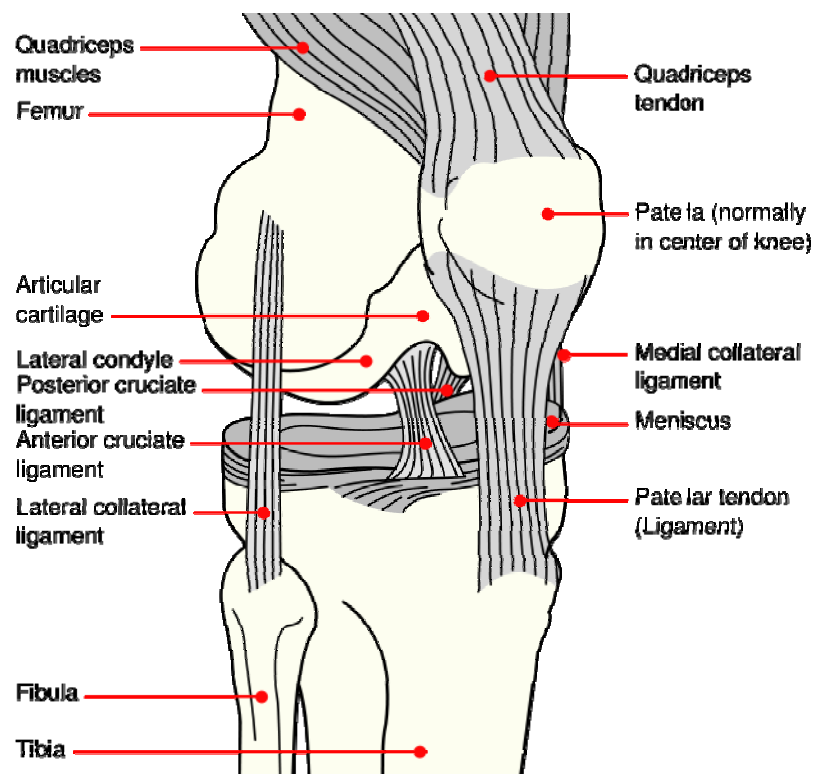
เอ็นที่อยู่บริเวณหัวเข่าจะมีด้วยกัน 6 ชนิดคือ

1. Quadriceps
2. Patellar tendon
3. Medial collateral ligament
4. Posterior cruciate ligament
5. Anterior cruciate ligament
6. Lateral collateral ligament

ข้อเข่าเป็นข้อต่อที่มีขนาดใหญ่ที่สุดในร่างกาย และมีโครงสร้างที่ละเอียดซับซ้อน จะมีลักษณะดังต่อไปนี้ ข้อเข่าเป็นข้อที่มีลักษณะแบบบานพับ (Hinge joint) อันประกอบไปด้วยกระดูกปลายของกระดูกต้นขา (Femur) กับส่วนต้นของกระดูกขา (Tibia) โดยที่มีกระดูกลูกสะบ้า (Patella) ประกบวางอยู่ทางด้านหน้าทำให้เกิดเป็นข้อเข่าขึ้นอันประกอบไปด้วยข้อต่อ Tibiofemoral และข้อต่อ Patellofemoral ทำให้ข้อเข่าสามารถเคลื่อนไหวได้มากในการงอ (Flexion) การเหยียด (Extension) และมีการเคลื่อนไหวได้เล็กน้อยในแนวการหมุน (Rotation) การที่ข้อสามารถเคลื่อนไหวได้ดีในแนวดังกล่าว จะต้องอาศัยกล้ามเนื้อและเส้นเอ็น ที่ยึดเพื่อให้ความมั่นคงแก่ข้อเข่า

หน้าที่และความสำคัญของเส้นเอ็นที่อยู่รอบ ๆ ข้อก็คือการให้ความมั่นคงแข็งแรงต่อข้อต่อ โดยการที่มีเอ็นยึดกระดูกข้อต่อเอาไว้ ไม่ให้ข้อต่อนั้นหลุดแยกออกจากกัน ขณะที่มีการเคลื่อนไหวของข้อนั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ที่ข้อเข่าจะมีเอ็นแกนซึ่งอยู่ภายในข้อเข่า ให้ความมั่นคงในแนวหน้า - หลัง (Anterior posterior direction) เอ็นสำคัญดังกล่าวนี้ประกอบไปด้วย เอ็นไขว้หน้า

(Anterior cruciate ligament หรือเรียกย่อว่า ACL) และเอ็นไขว้หลัง (Posterior cruciate ligament หรือ PCL) ไขว้ประสานอยู่เกิดเป็นเอ็นแกนเข้า โดยที่เอ็นทั้งสองเส้นจะทำงานสอดประสานกันอย่างดียิ่ง หน้าที่หลักของเอ็นไขว้หน้าคือป้องกันการเคลื่อนตัวไปข้างหน้าของกระดูก tibia ส่วนเอ็นไขว้หลัง หน้าที่หลักก็คือป้องกันการเคลื่อนที่ไปข้างหลังของกระดูก Tibia นอกจากนี้เอ็นไขว้หน้า โดยโครงสร้างแล้ว จะมีส่วนสำคัญสองส่วนคือ ส่วนด้านหน้ากับส่วนด้านหลัง กล่าวคือขณะที่มีการงอข้อเข่า เอ็นไขว้หน้าส่วนด้านหน้า จะต้องตึง ส่วนด้านหลังของเอ็นไขว้หน้า จะหย่อนตัว ตัวเมื่อเหยียดเข่าก็จะเกิดเหตุการณ์ตรงกันข้ามคือเอ็นไขว้หน้าส่วนหน้าหย่อน ส่วนหลังจะตึง นอกจากนี้ความมั่นคงของข้อเข่า ยังต้องอาศัยเอ็นประกับข้อที่อยู่ภายนอกข้อเข่าอีกอัน ได้แก่เอ็นประกับเข่า ทางด้านนอก (Lateral collateral ligament หรือ LCL) และเอ็นประกับเข่า ทางด้านใน (Medial collateral ligament หรือ MCL) ทำหน้าที่ป้องกันและให้ความมั่นคง ในแนว ด้านในด้านนอก (Varus – valgus direction) การบาดเจ็บของเอ็นเข่าจะเกิดขึ้นเมื่อเอ็นนั้น ๆ ได้รับการกระทบโดยตรง (Contusion) หรือตัวเอ็นไม่สามารถทนรับต่อแรงที่มากกระทำในแนว ที่เอ็นนั้นทำหน้าที่อยู่ซึ่งอาจเกิดการบาดเจ็บเพียงเส้นใดเส้นหนึ่งหรือเกิดร่วมกันหลาย เส้นก็ได้ขึ้นกับแรงที่มากกระทำและความแข็งแรงของกล้ามเนื้อรอบ ๆ ข้อเข่ารวมไปถึงทักษะและความแข็งแรงของร่างกาย

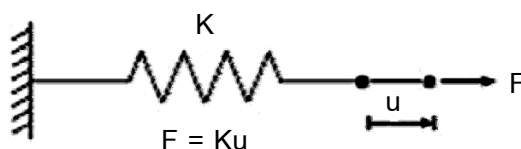


ภาพที่ 2.19
เอ็นบริเวณหัวเข่า

2.5 คุณสมบัติของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้นำมาใช้ศึกษางานวิจัย โดยเน้นไปในส่วนของวัสดุประเภทไฮเปอร์อีลาสติก ซึ่งมีคุณสมบัติส่วนใหญ่คล้ายยาง โดยจะมีคุณสมบัติที่ยืดหยุ่นมาก แต่ในบางกรณีด้วยเหตุผลความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นเมื่อได้รับการกระตุ้น วัสดุประเภทนี้จะมีความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดในลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity relation) ซึ่งจะแตกต่างจากวัสดุประเภทโลหะทั่วไป และอาจสามารถมองวัสดุประเภทไฮเปอร์อีลาสติกนี้เป็นวัสดุประเภทเนื้อเยื่ออ่อน (Soft tissue) และเอ็นได้เช่นกัน เอกสารอ้างอิงที่สนับสนุนความคิดนี้รวมถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะช่วยให้การศึกษาดังกล่าวมีประสิทธิภาพ การคำนวณแรง การจำลองแบบการใช้งานในสภาวะจริง และการวิจัยในทางวิศวกรรมต่าง ๆ ในสมัยปัจจุบันมีความก้าวหน้ามากขึ้น

ในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเชิงเส้นโดยทั่วไปความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับระยะยืดจะเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law)

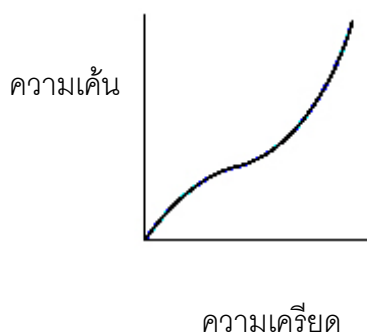


ภาพที่ 2.20

กฎความสัมพันธ์ของฮุค

เมื่อ F เป็นแรงกระทำ K เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของวัสดุ และ u เป็นระยะยืด

ความสัมพันธ์ลักษณะนี้จะแตกต่างกับวัสดุประเภทยาง ในกรณียางธรรมชาติจะมีความยืดหยุ่นสูง เมื่อเทคโนโลยีมีความก้าวหน้า ต่อมาจึงได้มีการเติมส่วนผสมสารเคมีเข้าไปเพื่อให้คุณสมบัติมีความทนทานมากขึ้น พฤติกรรมของยางจึงเปลี่ยนไปตามสารประกอบที่เติมเข้าไป ซึ่งจะมีคุณสมบัติที่เปลี่ยนไป โดยค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นจะสูงขึ้น และการยืดตัวจะไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับภาระที่ได้รับเหมือนกรณีของวัสดุจำพวกโลหะหรืออีกนัยหนึ่ง เรียกว่า พฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear behavior) ซึ่งก็จะเหมือนกับวัสดุประเภทเนื้อเยื่อ และเอ็น



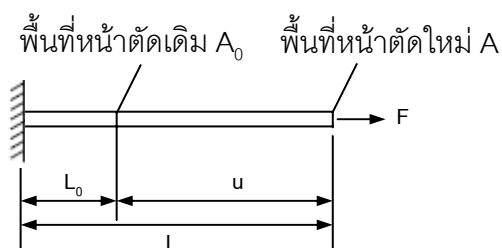
ภาพที่ 2.21

พฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้นของยาง

2.5.1 อัตราส่วนระยะยืด

กรณีการทดสอบดึงแกนเดียวของชิ้นงานที่เป็นยาง การวัดระยะที่ยืดออกตามแนวการดึงจะเขียนเป็นระหว่างระยะทั้งหมดกับความยาวเดิม

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{(L_0 + u)}{L_0} = 1 + \frac{u}{L_0} \quad (2.31)$$



ภาพที่ 2.22

ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนระยะยืด

โดยทั่วไปในกรณีที่ต้องการศึกษาการยืดตัวของวัสดุที่มีรูปทรงต่าง ๆ สามารถทำได้โดยทดสอบแบบดึงสองแกนเท่ากัน จะอธิบายความสัมพันธ์ของอัตราส่วนระยะยืดได้ทั้งสามทิศทางตามแนวแกนหลัก x y z ในการวิเคราะห์การเสียรูปมาก (Large strain deformation) รวมถึงการคำนวณหาตัวอินวาเรียนต์ของความเครียด (Strain invariants, I_j) ซึ่งนำไปใช้คำนวณในฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain energy function) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

2.5.2 ความเค้นและความเครียด

ในการวิเคราะห์การเสียรูปของวัสดุประเภทอีลาสโตเมอร์ (Elastomer) ซึ่งมีคุณสมบัติไฮเปอร์อีลาสติก โปรแกรมที่ใช้คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ส่วนใหญ่ จะใช้พื้นฐานการวิเคราะห์จากสมการที่เรียกว่า Green Lagrange strain, E ในกรณีที่ไม่มีพฤติกรรมการดึงในแกนเดียวจะเขียนได้เป็น

$$E = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad (2.32)$$

สอดคล้องกับความเค้นอันดับที่ 2 ของ Piola Kirchhoff, S_2

$$S_2 = \frac{F}{A} \left(\frac{L_0}{L} \right)^2 \quad (2.33)$$

ถึงแม้ว่าความเค้นอันดับที่ 2 ของ Piola Kirchhoff จะมีความเหมาะสมที่จะใช้กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของพฤติกรรมทางกลของวัสดุ แต่ในการคำนวณพฤติกรรมของโครงสร้างนั้นทำได้ยาก นักวิจัยส่วนใหญ่จึงใช้ความสัมพันธ์ของความเค้นเคาซี (Cauchy stress, σ) และความเครียดลอการิทึม (Logarithmic strain, ϵ) แทนดังนี้

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.34)$$

$$\epsilon = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) \quad (2.35)$$

หรือเขียนเป็นความเค้นทางวิศวกรรม (Engineering stress, S_1) และความเครียดทางวิศวกรรม (Engineering strain, e)

$$S_1 = \frac{F}{A_0} \quad (2.36)$$

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.37)$$

2.5.3 แบบจำลองฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain Energy Function)

ในการวิเคราะห์หระเปียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของวัสดุประเภทอีลาสโตเมอร์แบบจำลองของวัสดุจะแตกต่างจากฟังก์ชันพลังงานความเครียดทั่วไป ซึ่งเรียกพฤติกรรมของวัสดุประเภทนี้ว่า ไฮเปอร์อีลาสติก ผลิตภัณฑ์ที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมลักษณะนี้ จำเป็นต้องหาสมการแสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด เพื่อให้อธิบายพฤติกรรมการยืดหยุ่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear elastic deformation) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันความหนาแน่นของพลังงานความเครียด (Stain energy density function, W) ดังสมการด้านล่าง

$$W = W(u) \quad (2.38)$$

เมื่อ U คือเทนเซอร์ระยะยืด (Stretch tensor) มีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal matrix) ซึ่งประกอบไปด้วย λ_1 λ_2 และ λ_3 เป็นระยะยืดในทิศทางตามแนวแกนหลัก x y z สำหรับวัสดุไอโซโทรปิก (Isotropic material) พลังงานความเครียดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันสมมาตร (Symmetric function) ของ λ_1 λ_2 และ λ_3 ได้

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.39)$$

ความสัมพันธ์ของระยะยืดตามแนวแกนหลักใด ๆ λ_i กับแรงต่อพื้นที่ f_i ในกรณีที่ชนิวัสดุเป็นไอโซโทรปิก Treloar (1975) อธิบายโดยใช้ฟังก์ชันพลังงานความเครียดโดย

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (2.40)$$

พลังงานความเครียด w อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของ Strain invariants

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูป

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.42)$$

ในกรณีที่พิจารณาเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้ สามารถเขียนได้ว่า

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{(V + \Delta V)}{V} = 1 \quad (2.43)$$

เมื่อ V คือปริมาตร ส่งผลให้

$$I_3 = J^2 = 1 \quad (2.44)$$

ดังนั้น

$$W = W(I_1, I_2) \quad (2.45)$$

ความเค้นหลักเคาซี (Cauchy principal stress) ซึ่งเป็นแรงต่อพื้นที่ที่เปลี่ยนแปลง (Strained area) สามารถอธิบายได้จากสมการ (2.45)

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} f_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + \sigma \quad (2.46)$$

2.5.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Constitutive Model)

ฟังก์ชันพลังงานความเครียด W เพื่อใช้อธิบายพฤติกรรมความยืดหยุ่น แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Elastic Deformation) แบ่งออกได้เป็นสองกลุ่มใหญ่ ๆ กลุ่มแรกเป็นแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมจากการสังเกต (Phenomenological model) พัฒนามาจากความสัมพันธ์ความเค้นกับการเปลี่ยนรูปเมื่อไม่พิจารณาถึงโครงสร้างภายในโมเลกุล กลุ่มที่สองเป็นแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมทางกายภาพ (Physical based model) เป็นการพัฒนามาจากกลไกโครงสร้างระดับจุลภาคโดยใช้ทฤษฎีจลนศาสตร์ (Kinetic theory) หรือทฤษฎีกลศาสตร์สถิติ (Statistical mechanics theory) สมมติฐานจากการเคลื่อนที่ระดับโซโมเลกุลในแต่ละ เอลิเมนต์ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุพอลิเมอร์ประเภทยางถูกนำมาเชื่อมโยงกับการเปลี่ยนแปลงทางเอนโทรปี (Entropy)

1. แบบจำลองที่แทนพฤติกรรมจากการสังเกต (Phenomenological Model)

เป็นแบบจำลองที่อ้างอิงกับข้อมูลทดสอบ โดยค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองนี้ ไม่มีความหมายทางกายภาพ แต่เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการปรับแบบจำลองให้เข้ากับข้อมูลที่ได้จากการทดสอบหรือการทำนายพฤติกรรมโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ การจำลองพฤติกรรมเชิงกลของวัสดุในลักษณะนี้มีข้อดีคือ มีความแม่นยำในช่วงที่มีข้อมูลทดลอง แต่มีข้อเสียคือไม่สามารถใช้สมการดังกล่าวทำนายพฤติกรรมในลักษณะที่มีการทดสอบเพียงอย่างเดียวได้ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีการทดสอบวัสดุในหลาย ๆ ลักษณะเพื่อใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมให้มีความถูกต้องมากที่สุด

1.1 แบบจำลองพหุนาม (Polynomial Model)

ฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain energy function) สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบไอโซโทรปิกและอัดตัวไม่ได้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมของค่าที่ไม่ผันแปรของเทนเซอร์การเสียรูปได้

$$W = \sum_{i+j+k=1}^N C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 3)^k \quad (2.47)$$

โดยที่ C_{ijk} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง

จากสมมติฐานที่กำหนดให้ยางเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้ ดังนั้น $I_3 = 1$ จากสมการที่ 2-12 แบบจำลองพหุนามจึงลดรูปเป็น

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.48)$$

เมื่อ $N = 2$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (2.49)$$

สมการข้างต้นเป็นแบบจำลองที่นิยมนำมาใช้ทำนาย เนื่องจากจำนวนเทอมที่ใช้มีความเหมาะสมประกอบไปด้วยเทอมของ First invariant, I_1 และ Second invariant, I_2

พิจารณาสภาวะดึงแกนเดียว (Uniaxial tension) สามารถเขียนเป็นเทนเซอร์ระยะยืดได้

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

จากความสัมพันธ์

$$f = \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda} \quad (2.51)$$

$$f = 2(1-\lambda^{-3})[C_{10}\lambda + C_{01} + 2C_{20}(I_1 - 3) + C_{11}(I_1 - 3 + \lambda(I_2 - 3)) + 2C_{02}(I_2 - 3)] \quad (2.52)$$

ความเค้นจริง

$$T = \lambda f = 2\lambda(1-\lambda^{-3})[C_{10}\lambda + C_{01} + 2C_{20}(I_1 - 3) + C_{11}(I_1 - 3 + \lambda(I_2 - 3)) + 2C_{02}(I_2 - 3)] \quad (2.53)$$

1.2 แบบจำลองมูนีรีฟลิน (Mooney-Rivlin Model)

แบบจำลองมูนีรีฟลินจะมีด้วยกัน 2, 3, 5 และ 9 พารามิเตอร์

2 พารามิเตอร์ (C_{10}, C_{01})

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (2.54)$$

3 พารามิเตอร์ (C_{10}, C_{01}, C_{11})

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (2.55)$$

5 พารามิเตอร์ ($C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}$)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (2.56)$$

9 พารามิเตอร์ ($C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{12}, C_{03}$)

$$\begin{aligned} W = & C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \\ & + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 \\ & + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{21}(I_1 - 3)^2(I_2 - 3) \\ & + C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)^2 + C_{03}(I_2 - 3)^3 \end{aligned} \quad (2.57)$$

พิจารณาที่สภาวะการดึงแบบแกนเดียว สำหรับ 2 พารามิเตอร์

$$f = 2C_{10}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2C_{01}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (2.58)$$

1.3 แบบจำลองออกเดน (Ogden Model)

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (2.59)$$

เป็นแบบจำลองที่นิยมใช้อีกหนึ่งรูปแบบ สามารถทำนายพฤติกรรมของวัสดุได้ดี แต่จะมีความยากในการใช้งาน เขียนอยู่ในรูปแบบผลรวมของอัตราส่วนการยืดตัว มีค่าโมดูลัสของการเฉือนคือ

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (2.60)$$

อันดับของแบบจำลองออกเดนที่นิยมใช้คือแบบจำลองออกเดนอันดับที่ 3 ($n = 3$)

พิจารณาที่สภาวะดึงแบบแกนเดียว

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda^{\alpha_i - 1} - \lambda^{\frac{-\alpha_i}{2} - 1} \right) \quad (2.61)$$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i \lambda}{\alpha_i} \left(\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{\frac{-\alpha_i}{2}-1} \right) \quad (2.62)$$

1.4 แบบจำลองของโยห์ (Yeoh Model)

$$W = \sum_{i=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i \quad (2.63)$$

$$\text{เมื่อ } N = 3$$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (2.64)$$

มีพื้นฐานมาจากแบบจำลองพหุนาม โดยกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ C_{ij} บางตัวมีค่าเป็นศูนย์ในกรณีที่ $j = 0$ จึงเรียกสมการนี้อีกลักษณะหนึ่งว่า สมการพหุนามลดรูป (Reduce polynomial Model) โดยกำหนดเป็นแบบจำลองพหุนามลดรูปอันดับที่ 3 ($n = 3$) จะสังเกตได้ว่าจะมีแต่ค่าอินวาเรียนท์ I_1 (First invariant) เท่านั้น โดยโยห์ได้ให้เหตุผลของการลดรูปสมการว่าเทอมของ I_2 (Second invariant) มีอิทธิพลน้อยไม่ส่งผลต่อการทำนายพฤติกรรมจึงสามารถตัดทิ้งได้ ถ้าสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของยางจะแสดงออกมาในรูปตัวอักษร S ดังนั้นในช่วงที่ใส่ภาระเข้าไปในช่วงแรก ค่าสัมประสิทธิ์ C_{10} แสดงถึงโมดูลัสของการเฉือน ค่า C_{20} จะแสดงถึงอิทธิพลต่อช่วงกลางของกราฟที่เป็นจุดเปลี่ยนซึ่งเป็นช่วงอ่อนตัวและค่า C_{30} จะแสดงอิทธิพลต่อกราฟช่วงปลาย ซึ่งเป็นช่วงที่มีการแข็งตัวขึ้น ทำให้วิเคราะห์ได้ว่าแบบจำลองของโยห์ใช้ได้ดีกับการวิเคราะห์ยางที่มีระยะยืดตัวมาก

พิจารณาที่สภาวะดึงแบบแกนเดียว

$$f = 2(\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^3 i C_{i0} (I_1 - 3)^{i-1} \quad (2.65)$$

$$T = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \sum_{i=1}^3 i C_{i0} (I_1 - 3)^{i-1} \quad (2.66)$$

2. แบบจำลองที่แทนพฤติกรรมกายภาพ (Physical Based Model)

เนื่องจากแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมจากการสังเกต ไม่สามารถทำนายพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปลักษณะอื่น ๆ ที่ไม่ได้มีผลการทดลองมาก่อน เนื่องจากแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมจากการสังเกตจะอ้างอิงข้อมูลจากการทดลองมาทำนายพฤติกรรม จากปัญหาดังกล่าว จึงมีการพัฒนาแบบจำลองที่นำความรู้ด้านกลไกการเสียรูปและการวิเคราะห์โครงสร้างโมเลกุล ดังนั้นแม้ว่าข้อมูลจากการทดลองมีไม่เพียงพอ แต่แบบจำลองที่แทนพฤติกรรมกายภาพสามารถทำนายพฤติกรรมในช่วงที่ไม่มีข้อมูลได้

2.1 แบบจำลองนีโอฮุกเกียน (Neo-Hookean Model)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (2.67)$$

แบบจำลองนี้มีค่าคงที่ C_{10} ซึ่งเป็นโมดูลัสของการเฉือน (Shear modulus) สามารถทำนายพฤติกรรมได้ดีเมื่อเทียบกับการทดลองดึงแกนเดียวในช่วง 0 – 40 % พิจารณาที่สภาวะการดึงแบบแกนเดียว

$$f = \frac{dW}{d\lambda} = C_{10} \left(2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) \quad (2.68)$$

$$T = \lambda f = 2C_{10} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.75)$$

2.2 แบบจำลองอรรูดาบอยซ์ (Arruda-Boyce Model)

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (2.69)$$

$$\text{โดยที่ } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{20}, C_3 = \frac{11}{1050}, C_4 = \frac{19}{7000},$$

$$C_5 = \frac{519}{673750}$$

μ เป็นโมดูลัสการเฉือน (Shear modulus) ที่ความเครียดต่ำ, λ_m เป็นการลีดตัว
ของระยะยืด

แบบจำลองนี้เรียกอีกอย่างว่า แบบจำลอง Eight Chain model
เนื่องจากพิสูจน์มาจากทฤษฎี Non-Gaussian network ที่กำหนดให้มีสปริง 8 อันเชื่อมต่อกันที่จุด
ศูนย์กลางของ เอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ (Cubic element) ค่าคงที่ได้มาจากการขยายอนุกรมของ
Inverse langevin function จากรูปแบบของสมการในทฤษฎีข้างต้นสามารถนำค่าคงที่มาใช้ได้
มากกว่า 5 เทอมที่กล่าวมา แต่มีนักวิจัยหลายคนพบว่าเทอมที่เหลือส่งผลต่อพฤติกรรมของวัสดุ
น้อยมากจึงสามารถพิจารณาตัดออกได้

พิจารณาที่สภาวะการดึงแบบแกนเดียว

$$f = 2\mu(\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^5 \frac{iC_i}{\lambda_m^{2i-2}} I_1^{i-1} \quad (2.70)$$

$$T = 2\mu\lambda(\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^5 \frac{iC_i}{\lambda_m^{2i-2}} I_1^{i-1} \quad (2.71)$$

2.3 แบบจำลองวานเดอร์วาลส์ (Van Der Waals Model)

$$W = \mu \left\{ -(\lambda_m^2 - 3) [\ln(1 - \eta)\eta] - \frac{2}{3} a \left(\frac{\tilde{I} - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (2.72)$$

$$\text{โดยที่ } \tilde{I} = (1 - \beta)I_1 + \beta I_2$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\tilde{I} - 3}{\lambda_m^2 - 3}}$$

$$a = \frac{1}{\lambda_m - \frac{1}{\lambda_m^2} + \frac{2c_{01}}{3\mu}} \quad \text{คือ Global interaction parameter}$$

$$\beta = \text{Invariant Mixture Parameter}$$

แบบจำลองวานเดอวาลส์มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แบบจำลองคิเลียน (Kilian model) แบบจำลองนี้แตกต่างจากแบบจำลองอื่นตรงที่มีค่า Locking stretch (λ_m) เป็นค่าที่ใช้บ่งบอกถึงข้อจำกัดในการยืดตัวของโครงข่ายต่อโยงแบบ Non-Gaussian จากโครงสร้างสมการจะเห็นว่าพลังงานความเครียดของวานเดอวาลส์ มีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าไม่จำกัด (Infinity) ดังนั้นแบบจำลองชนิดนี้จึงไม่สามารถอธิบายการดึงที่มีระยะยืดสูงกว่า λ_m ได้ ซึ่งถือเป็นข้อจำกัดในการใช้งาน

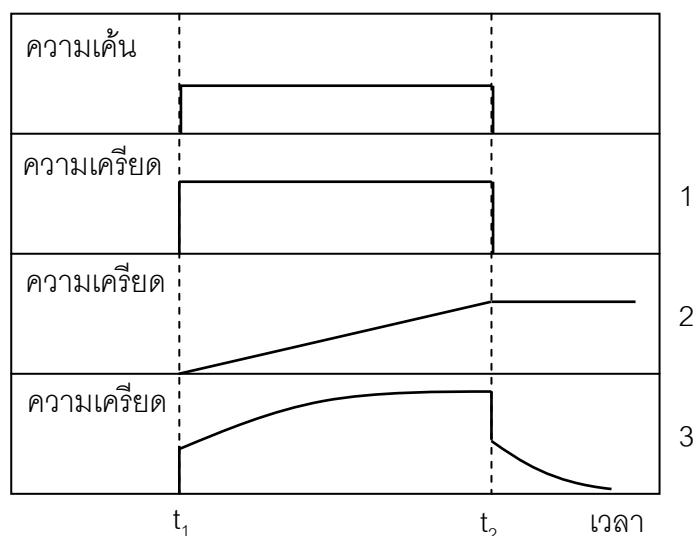
พิจารณาที่สมการการดึงแกนเดียว

$$f = \mu(1-\lambda^{-3})\left[\frac{1}{1-\eta}\right] - a\sqrt{\frac{\tilde{I}-3}{2}}(\lambda(1-\beta)+\beta) \quad (2.73)$$

$$T = \mu\lambda(1-\lambda^{-3})\left[\frac{1}{1-\eta}\right] - a\sqrt{\frac{\tilde{I}-3}{2}}(\lambda(1-\beta)+\beta) \quad (2.74)$$

2.6 คุณสมบัติของวัสดุวิสโคอิลาสติก

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อกล่าวถึงสมบัติทางกลของสสารแล้ว วัสดุในอุดมคติที่รู้จักกันดีได้แก่ ของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) และของเหลวหนืด (Viscous liquid) โดยของแข็งยืดหยุ่นนั้น เมื่อได้รับแรงกระทำจากภายนอกก็จะมี การเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปอยู่สมดุลใหม่ หากแรงกระทำนั้นถูกปลดลงให้เป็นศูนย์ วัสดุก็จะคืนสภาพกลับสู่รูปร่างหรือสมดุลดั้งเดิมทันที (ยกเว้นในกรณีที่ผ่านจุดคราก) ตรงกันข้ามกับของเหลวหนืดซึ่งจะเปลี่ยนรูปร่างโดยไม่สามารถกลับคืนตัวมาอยู่ในสภาพเดิมเมื่อไม่มีแรงกระทำแล้ว ซึ่งความสัมพันธ์จะเป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's law) และกฎของนิวตัน (Newton's law) ตามลำดับ แต่พลาสติกบางประเภทและก้ำกึ่งนั้นไม่สามารถจะจัดอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งข้างต้นเนื่องจากมีลักษณะเป็นไปได้ทั้งของแข็งเปราะของแข็งยืดหยุ่น หรือของเหลวหนืด ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่าง ๆ เช่น อุณหภูมิ เวลา อัตราเร็วในการทดสอบตัวอย่าง เป็นต้น ซึ่งวัสดุที่มีคุณสมบัติเช่นนี้จะเรียกว่าวัสดุวิสโคอิลาสติก (Viscoelastic materials) และลักษณะพฤติกรรมเช่นนี้จะเรียกสภาพวิสโคอิลาสติก (Viscoelasticity) ภาพที่ 2.23 แสดงการตอบสนองของวัสดุประเภทต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาเมื่อวัสดุได้รับความเค้น ณ เวลา t_1 และนำแรงเค้นออก ณ เวลา t_2 จะเห็นได้ว่าวัสดุวิสโคอิลาสติกนั้นจะแสดงสมบัติที่ผสมกันของทั้งของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวหนืด



ภาพที่ 2.23

การตอบสนองของวัสดุประเภทต่าง ๆ เมื่อได้รับความเค้นโดย 1 แทนของแข็งยืดหยุ่น 2 แทนของเหลวหนืด 3 แทนวัสดุวิโคอีลาสติก

2.6.1 วิสโคอีลาสติกแบบเชิงเส้น (Linear viscoelasticity)

ทฤษฎีของวิสโคอีลาสติก แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด ที่ไม่เป็นสัดส่วนคงที่แต่ขึ้นอยู่กับเวลาในการตอบสนองของวัสดุ คือ ความสัมพันธ์นี้จะมีลักษณะที่ไม่คงที่แต่จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งถ้าสภาพวิสโคอีลาสติกแบบเชิงเส้นนั้น ความสัมพันธ์ก็จะขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้นดังที่กล่าวมาแล้วและสามารถเขียนความสัมพันธ์โดยทั่วไปในลักษณะของสมการอนุพันธ์ได้ ดังสมการ 2.75

$$a_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sigma}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_0 \sigma = b_m \frac{\partial^m \epsilon}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \epsilon}{\partial t^{m-1}} + \dots + b_0 \epsilon \quad (2.75)$$

โดย σ คือ ความเค้น ϵ คือความเครียด t คือ เวลา a และ b คือ ค่าคงที่ซึ่งจะไม่ขึ้นอยู่กับความเค้นและความเครียดแต่อาจขึ้นอยู่กับเวลาได้

สำหรับแบบจำลองทางกล (Mechanical models) ซึ่งอธิบายสมบัติของวัสดุวิสโคอีลาสติกแบบเชิงเส้นโดยนำสปริงและลูกสูบมาต่อเรียงกันนั้นก็เป็นกรณีพิเศษของสมการ (2.75) เช่นเดียวกันโดยแบบจำลองพื้นฐานที่สุด คือ แบบจำลองของวอยท์ (Voigt) และแม็กเวลล์ (Maxwell) ดังนี้

แบบจำลองของวอยท์ (Voigt element)

$$a_0 \sigma = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.76)$$

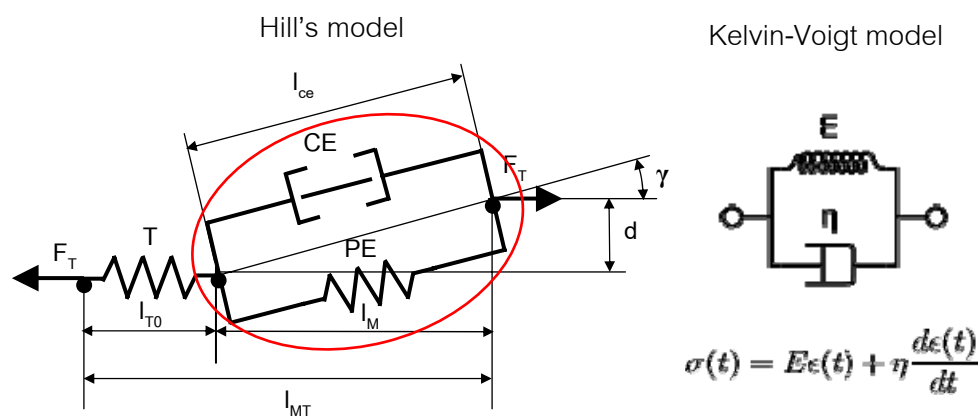
โดยที่ค่าคงที่ค่าอื่นยกเว้น a_0 b_0 และ b_1 มีค่าเป็นศูนย์

แบบจำลองของแมกซ์เวลล์ (Maxwell element)

$$a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_0 \sigma = b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.77)$$

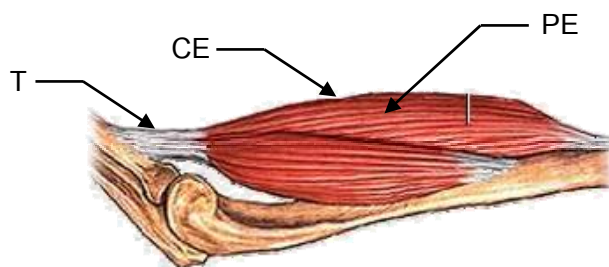
โดยที่ค่าคงที่ค่าอื่นยกเว้น a_0 b_0 และ b_1 มีค่าเป็นศูนย์

สมการข้างต้นสามารถอธิบายโครงสร้างทางกลศาสตร์ของกล้ามเนื้อได้ ซึ่งภายในกล้ามเนื้อแต่ละมัดจะมีลักษณะโครงสร้างของกล้ามเนื้อดังแสดงภาพที่ 2.24 ซึ่งกล้ามเนื้อแต่ละมัดจะแสดงพฤติกรรมของวัสดุ 2 แบบคือวิสโคอิลาสติก และอิลาสติก จากภาพที่ 2.24 ในวงกลมคือส่วนที่มีพฤติกรรมแบบวิสโคอิลาสติก



ภาพที่ 2.24

แบบจำลอง Hill's model และ Kelvin-Voigt model



ภาพที่ 2.25
ลักษณะของกล้ามเนื้อ

ในภาพที่ 2.25 CE (Contractile element) หมายถึง เยื่อหุ้มบาง ๆ ที่อยู่บริเวณรอบ ๆ กล้ามเนื้อแต่ละมัด

PE (Parallel-Elastic element) หมายถึง กล้ามเนื้อ

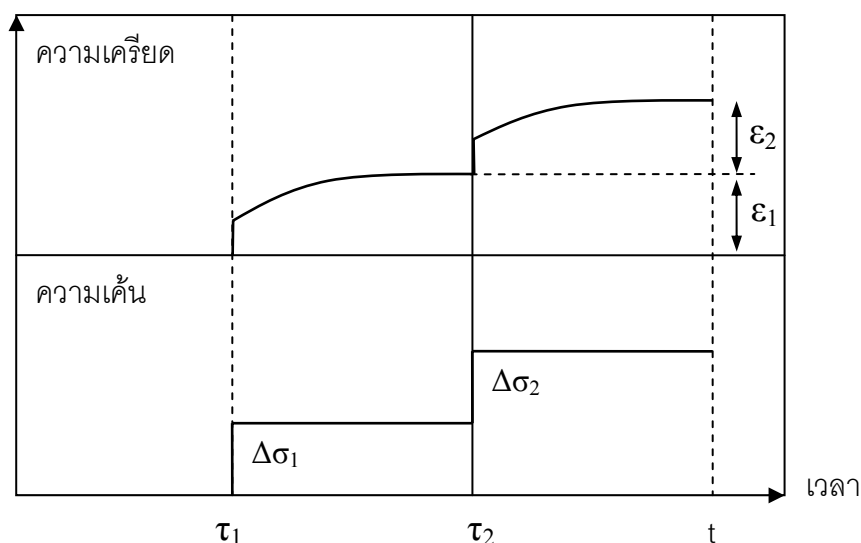
T (Tendon) หมายถึง เอ็น

กล้ามเนื้อจะสามารถแสดงให้เห็นอยู่ในรูปของโครงสร้างทางกลได้ดังภาพ 2.25 ซึ่งจะสามารถอธิบายได้จากแบบจำลองของ Kelvin-Vogt และจากแบบจำลองจึงสามารถสรุปได้ว่าเอ็นจะแสดงพฤติกรรมคล้ายสปริงซึ่งมีคุณสมบัติเป็นอีลาสติก

นอกจากนี้สมการอนุพันธ์นี้แล้ว ในการอธิบายความสัมพันธ์ของวัสดุวิสโคอีลาสติกยังสามารถใช้สมการอินทิ-เกรชันได้อีกด้วย ซึ่งใช้หลักการของ Boltzmann superposition โดยจะแสดงว่าสมบัติของวัสดุจะไม่ถูกระทบจากความเค้นที่เคยได้รับก่อนหน้านี้ ซึ่งเมื่อมีการให้แรงเค้นลงบนวัสดุเป็นจำนวนหลาย ๆ ครั้ง ความเครียดโดยรวมของวัสดุจะมีค่าเท่ากับผลรวมของความเครียดย่อยในแต่ละขั้นตอนของการให้แรงเค้นดังสมการ (2.78)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t - \tau_1) + \Delta\sigma_2 J(t - \tau_2) + \dots + \Delta\sigma_n J(t - \tau_n) \quad (2.78)$$



ภาพที่ 2.26

หลักการของ Boltzmann Superposition

ตัวอย่างแสดงให้เห็นในภาพที่ 2.26 ซึ่งการใส่แรงเค้น (σ) ณ เวลา τ_1 และใส่แรงเค้นค่าเดิมเพิ่มเข้าไปอีกครั้ง ณ เวลา τ_2 ความเครียดรวม(σ) ณ เวลา t จะเท่ากับ $\epsilon_1 + \epsilon_2$ โดย ϵ_1 และ ϵ_2 คือความเครียดที่เกิดจากความเค้นจากขั้นที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่งจากความสัมพันธ์นี้เองจะช่วยให้สามารถทำนายสภาพหรือค่าของความเค้น (หรือความเครียด) ของวัสดุได้ถ้าหากทราบถึงประวัติที่ผ่านความเค้น (หรือความเครียด) ย่อย

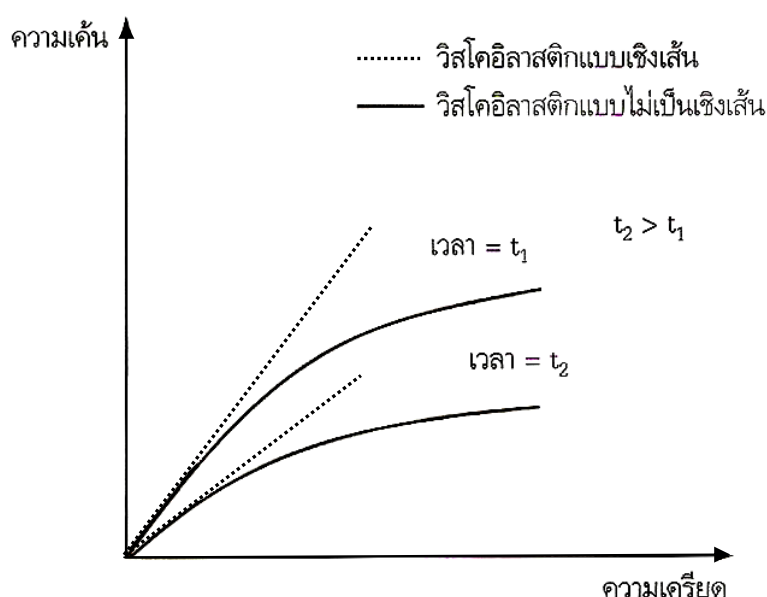
2.6.2 สภาพวิสโคอีลาสติกแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Viscoelasticity)

โดยธรรมชาติแล้ว พลาสติกแสดงสมบัติวิสโคอีลาสติกแบบเชิงเส้นดังที่กล่าวมาแล้วนั้นถึงระดับของความเครียดหรือความเค้นระดับหนึ่งเท่านั้น ซึ่งมักจะเป็นค่าที่ต่ำ เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าสูงเกินระดับนี้แล้ว พลาสติกจะแสดงสมบัติแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear viscoelasticity) โดยความสัมพันธ์ของความเครียดและความเค้นนั้นนอกจากจะขึ้นอยู่กับเวลาแล้วยังขึ้นอยู่กับระดับของค่าความเครียดหรือความเค้นอีกด้วยดังแสดงในสมการ (2.79) และ (2.80)

$$\epsilon(t) = f(t)g(\sigma) \quad \text{หรือ} \quad \sigma(t) = f(t)g(\epsilon) \quad (2.79)$$

$$\epsilon(t) = f(t, \sigma) \quad \text{หรือ} \quad \sigma(t) = f(t, \epsilon) \quad (2.80)$$

สมการ (2.79) แสดงถึงความสัมพันธ์เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าต่ำ ความซับซ้อนของความสัมพันธ์ยังไม่ สูงมาก คือ ฟังก์ชันของเวลาและความเค้นหรือความเครียด ยังสามารถแยกพิจารณาอิสระจากกันได้ ในขณะที่เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าสูงขึ้นฟังก์ชัน ดังกล่าวจะไม่สามารถแยกออกจากกันได้ (สมการ (2.80)) รูปที่ 2.9 แสดงการเปรียบเทียบระหว่าง สภาพวิสโคอิลาสติกแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นในรูปของความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด ณ เวลาต่างกันจะเห็นได้ว่าความเค้นหรือความเครียดสูงขึ้นความสัมพันธ์ก็จะเป็น เส้นตรงมากขึ้น

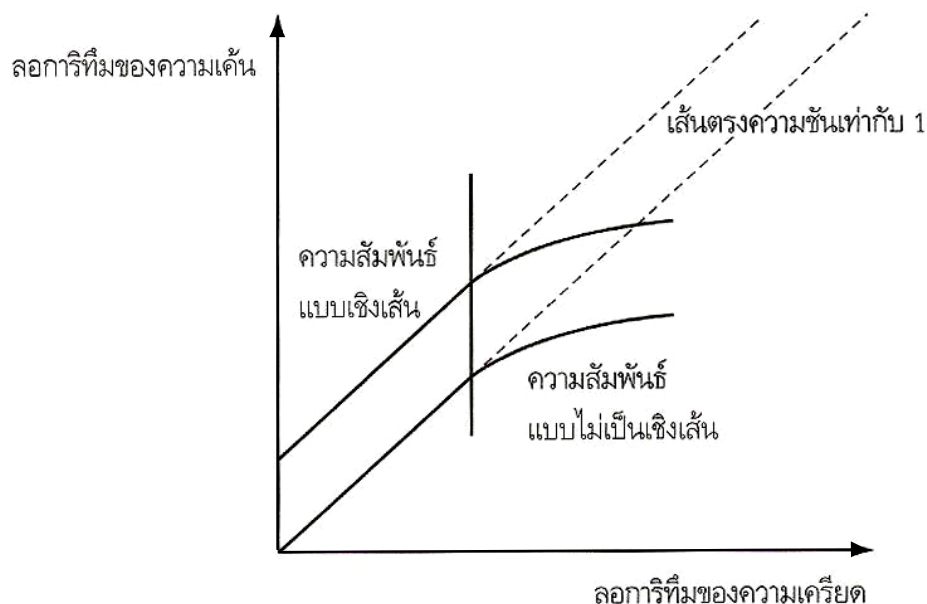


ภาพที่ 2.27

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดแสดงสภาพวิสโคอิลาสติก
แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น

เพื่อความชัดเจนในการที่จะทราบว่าความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นหรือไม่ สามารถทำได้โดยการใช้ความสัมพันธ์ในรูปของลอการิทึมของทั้ง 2 แกนแทน ดังแสดงในภาพที่ 2.28 ซึ่งเส้นตรงที่ทำมุม 45 องศา มีค่าความชันเท่ากับ 1 จะเป็นตัวแทนของลักษณะเชิงเส้น กราฟที่เบี่ยงเบนออกไปจากค่าความชันนี้จะหมายถึงลักษณะที่ไม่เชิงเส้น พลาสติกประเภทต่าง ๆ ก็จะมีระดับของความเครียดหรือความเค้นที่เริ่มแสดงสมบัติแบบไม่เชิงเส้นที่ต่างกัน พลาสติกพื้นฐาน

โดยทั่วไปจะเริ่มแสดงสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อค่าความเครียดสูงเกินกว่าประมาณ 1% ในขณะที่พลาสติกกึ่งผลึกจะเริ่มที่ค่าความเครียดต่ำกว่ามาก คือ ประมาณ 0.1-0.2%



ภาพที่ 2.28

การใช้ลอการิทึมในการพิจารณาสภาพวิสโคอิลาสติกแบบเชิงเส้นแบบไม่เชิงเส้น

อย่างไรก็ตามแม้การวิเคราะห์โดยใช้กระบวนการของสภาพวิสโคอิลาสติกแบบไม่เชิงเส้นทำนายพฤติกรรมของพลาสติก แต่ก็ยังมีข้อจำกัดเนื่องจากรูปแบบของสมการดูซับซ้อน ทำให้เข้าใจยากและยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับความแม่นยำเมื่อใช้ในกรณีที่ค่าความเค้นถูกลดลง แทนที่จะเพิ่มขึ้น

2.6.3 อิทธิพลของตัวแปรอื่นกับสภาพวิสโคอิลาสติกแบบไม่เชิงเส้น

นอกจากความเค้นหรือความเครียด (แล้วแต่กรณี) ที่มีผลต่อความไม่เชิงเส้นของสภาพวิสโคอิลาสติกแล้ว ปัจจัยหรือตัวแปรอื่นที่สามารถมีผลต่อระดับความไม่เชิงเส้นของพลาสติก ได้แก่ อุณหภูมิและการที่สมบัติไม่เท่ากันในสองทิศทาง (Anisotropy) ในกรณีแรก เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ความแข็งแรงของพลาสติก (เช่น โพลีคาร์บอนเนต) จะเกิดขึ้นที่ระดับความเค้นหรือความเครียดที่ต่ำลง สำหรับในกรณีของการที่สมบัติไม่เท่ากันในสองทิศทางนั้น ระดับหรือลักษณะของการเกิดสมบัติไม่เท่ากันในสองทิศทาง ในที่สุดจะมีผลทำให้ระดับความไม่เชิงเส้นของพลาสติก

ชนิดเดียวกันแตกต่างกันได้ ตัวอย่างเช่น ชี้นงานตัวอย่างที่ตัดจากแผ่นโพลิเอทิลีนชนิดความหนาแน่นต่ำ หลังจากถูกดึงในทิศทางเดียวจะมีระดับความไม่เชิงเส้นที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับมุมในการตัดชิ้นงานจากแผ่นตัวอย่างเทียบกับทิศทางของการดึง ชิ้นงานที่ตัดที่มุมน้อยกว่า 45 องศา จะแสดงสมบัติวิสโคอิลาสติกเชิงเส้นจนถึงระดับความเครียดประมาณ 0.7% ในขณะที่ชิ้นงานที่ถูกตัดในมุมที่มากกว่า 45 องศา จะมีระดับของความเครียดที่วัสดุจะคงสมบัติเชิงเส้นลดต่ำลง จนเมื่อมุมมีค่าเท่ากับ 90 องศา หรือตั้งฉากกับทิศทางการดึง ความเป็นเชิงเส้นจะอยู่ระดับความเครียดต่ำมาก คือ ประมาณ 0.1% เท่านั้น

2.7 การเคลื่อนไหวในโปรแกรมจำลองการเคลื่อนไหว

การเคลื่อนไหวที่ใช้ในโปรแกรมวิเคราะห์การเคลื่อนไหวจะเป็นการมองกระดูกในร่างกายเป็นเพียงลิงค์ และข้อต่อซึ่งการวิเคราะห์การเคลื่อนไหวโดยใช้หลักของจลนศาสตร์ของการเคลื่อนไหว สมการคิเนเมติกส์สำหรับการระบุตำแหน่ง และทิศทาง เพื่อทำนายลักษณะการเคลื่อนไหวในร่างกายมนุษย์

2.7.1 จลนศาสตร์ของการเคลื่อนไหว

จลนศาสตร์ หรือที่เรียกว่าคิเนเมติกส์ (Kinematics) เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของวัตถุ จลนศาสตร์สำหรับการเคลื่อนไหวนั้นมีการพิจารณาอยู่ 2 กรณีด้วยกัน ดังนี้

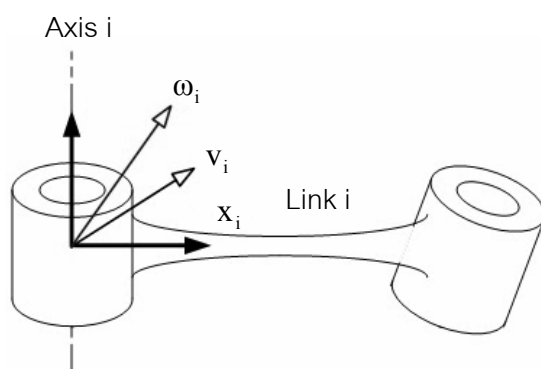
1. ฟอว์เวิร์ด คิเนเมติกส์ (Forward kinematics) คือ การวิเคราะห์การเคลื่อนที่และทิศทางของตัวทำงานส่วนปลาย เมื่อทราบค่าตำแหน่งข้อต่อของร่างกาย ซึ่งเป็นการคำนวณตามลำดับจากข้อต่อไปยังส่วนปลาย

2. อินเวอร์ส คิเนเมติกส์ (Inverse kinematics) คือ การวิเคราะห์หาตำแหน่งข้อต่อต่าง ๆ ของร่างกาย เมื่อรู้ค่าตำแหน่งและทิศทางของตัวทำงานส่วนปลาย (ตำแหน่งเป้าหมาย) ซึ่งเป็นการคำนวณย้อนกลับจากตัวทำงานส่วนปลายมายังข้อต่อต่าง ๆ ฟอว์เวิร์ด คิเนเมติกส์นั้น เป็นการคำนวณหาตำแหน่งและทิศทางของร่างกายจากค่าของมุมข้อต่อ เช่น ข้อสะโพก ข้อเข่า และขนาดของ ลิงค์ เช่น ความยาวกระดูกต้นขา ความยาวกระดูกปลายขา ซึ่งเป็นการแทนค่าตัวแปร (มุมข้อต่อ) เพื่อหาตำแหน่งของร่างกาย ในทางกลับกัน อินเวอร์สคิเนเมติกส์เป็นการคำนวณย้อนกลับ จากการระบุตำแหน่งและทิศทางร่างกายก่อนตามต้องการ แล้วหาค่ามุมของทุกข้อต่อที่ต้องหมุนไป นั่นหมายความว่า เราต้องหาค่ามุมข้อต่อจากตำแหน่งเป้าหมาย

ของร่างกาย ในทางปฏิบัติแล้ว อินเวอร์สคิเนเมติกส์มีความสำคัญมากกว่า เพราะส่วนควบคุมต้องคำนวณค่ามุมของแต่ละข้อต่อจากข้อมูลตำแหน่งเป้าหมายและสั่งการให้ร่างกายเคลื่อนที่ไปสมการที่ใช้บอกตำแหน่ง และทิศทางของร่างกายนั้นขึ้นกับโครงสร้าง และอวัยวะของแต่ละส่วนร่างกาย และข้อต่อแต่ละส่วนก็จะมีสมการกำกับตำแหน่ง และทิศทางที่ต่างกันออกไป สำหรับการคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ทำได้โดยการแทนค่าตัวแปรของข้อต่อ และลิงค์ ลงในชุดสมการของการเคลื่อนไหวเพื่อหาค่าตำแหน่งและทิศทาง แต่การคำนวณอินเวอร์สคิเนเมติกส์ ค่าตัวแปรของข้อต่อนั้นเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการ เมื่อแทนค่าตำแหน่งและทิศทางของตัวทำงานส่วนปลายลงไปในสมการของการเคลื่อนไหวมนุษย์ จึงจะสามารถระบุตำแหน่งและทิศทาง การเคลื่อนไหวได้ทั้งหมด ซึ่งในโปรแกรมวิเคราะห์การเคลื่อนไหว ที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะเป็นการคำนวณแบบอินเวอร์สคิเนเมติกส์

2.7.2 ความเร็วส่งผ่านจากลิงค์สู่ลิงค์

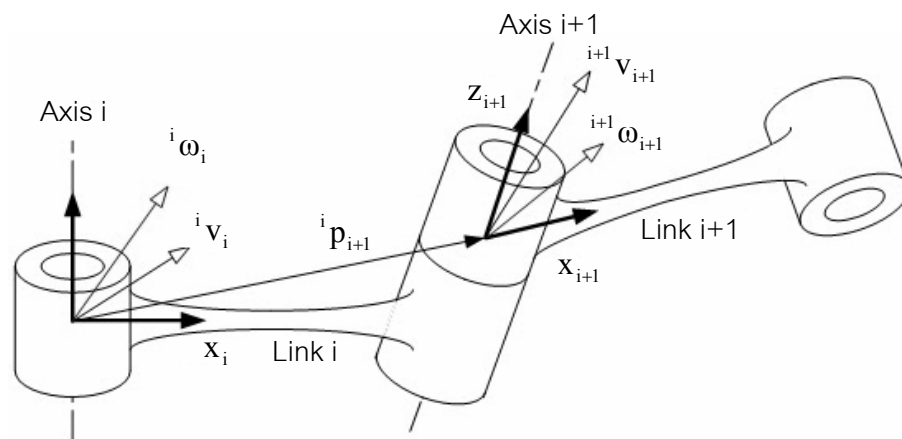
เมื่อร่างกายมีการเคลื่อนไหวโดยสมมุติให้อวัยวะต่างเป็นลิงค์ การพิจารณาการเคลื่อนที่ของลิงค์ในร่างกาย จะถูกกำหนดเป็นกรอบอ้างอิงสมบูรณ์เสมอ v_i คือ ความเร็วเชิงเส้นของจุดกำเนิดของกรอบประจำลิงค์ i และ ω_i คือ ความเร็วเชิงมุมของกรอบประจำลิงค์ i เมื่อร่างกายเคลื่อนที่ ณ ขณะเวลาหนึ่ง ลิงค์จะมีทั้งความเร็วเชิงเส้น และความเร็วเชิงมุม ดังแสดงตามภาพที่ 2.29



ภาพที่ 2.29

เวกเตอร์ความเร็วเชิงเส้น และความเร็วเชิงมุมของลิงค์ i

ลิงค์แต่ละลิงค์จะเกิดการเคลื่อนที่ และมีความเร็วสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน ดังนั้น ในการคำนวณความเร็วเชิงเส้น และความเร็วเชิงมุมของลิงค์ของร่างกาย จึงควรทำตามลำดับโดย เริ่มจากลิงค์ส่วนแรกไปยังลิงค์ส่วนปลาย ความเร็วสมบูรณ์ของลิงค์ $i+1$ เป็นผลมาจากความเร็วของลิงค์ i รวมกับผลความเร็วของตัวลิงค์ $i+1$ เอง ทุกลิงค์ถูกสมมุติให้เป็นวัตถุแข็งเกร็ง ซึ่งมีเวกเตอร์ระบุความเร็วเชิงเส้น และความเร็วเชิงมุมกำกับไว้ จากภาพที่ 2.29 เวกเตอร์ความเร็วถูกระบุไว้โดยอ้างอิงเทียบกับกรอบประจำลิงค์นั้น ๆ และเป็นอิสระจากฟิสิกส์ของฐานลิงค์ส่วนแรก เมื่อลิงค์ถูกประกอบเข้าด้วยกันดังภาพที่ 2.30 ลิงค์ i และลิงค์ $i+1$ มีเวกเตอร์ความเร็วประจำลิงค์ของมันเอง ผลของความเร็วในการหมุนของข้อต่อถูกกำหนดด้วยเวกเตอร์ ω ที่อ้างอิงเทียบกับกรอบประจำลิงค์นั้น ๆ



ภาพที่ 2.30

เวกเตอร์ความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมของลิงค์ที่อยู่ติดกัน

ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมของลิงค์ $i+1$ สามารถหาได้จากผลรวมระหว่างความเร็วของลิงค์ i กับผลของการหมุนของข้อต่อ $i+1$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการอยู่ในรูปของกรอบ i ได้เป็น

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^iR\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.81)$$

เมื่อ

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

ซึ่งแสดงถึงการหมุนรอบแกน $\hat{Z}$ ของกรอบ $i+1$ ในที่นี้ เมทริกซ์บอกการหมุน ${}^{i+1}R$ ถูกนำมาใช้เพื่อแปลงความเร็วของการหมุนของข้อต่อ $i+1$ ให้อยู่ในรูปของกรอบ i ด้วยเหตุนี้ จึงทำให้ความเร็วเชิงมุมของกรอบ i และกรอบ $i+1$ รวมกันได้

คูณทั้งสองข้างของสมการ (2.81) ด้วยเมทริกซ์ ${}^{i+1}R$ จะได้ความเร็วเชิงมุมของลิงค์ $i+1$ เทียบกับกรอบ $i+1$ ดังนี้

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.83)$$

ความเร็วเชิงเส้นของจุดกำเนิดของกรอบ $i+1$ เป็นผลเนื่องมาจากความเร็วเชิงเส้นของกรอบ i และผลจากการหมุนของข้อต่อ i ซึ่งเป็นทำนองเดียวกับการเคลื่อนที่ตามสมการ (2.83) โดยที่ ${}^iP_{i+1}$ เป็นค่าคงที่ เพราะระยะห่างระหว่างกรอบทั้งสองคงที่ จะได้

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (2.84)$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย ${}^{i+1}R$ จะได้

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R \left({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1} \right) \quad (2.85)$$

สมการ (2.83) และ (2.85) เป็นสมการสำคัญ ที่ใช้บอกความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงมุม และความเร็วเชิงเส้นของกรอบประจำลิงค์

สำหรับข้อต่อแบบเลื่อน ความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมที่เขียนอยู่ในรูปของกรอบ $i+1$ คือ

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R^i \omega_i \quad (2.86)$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.87)$$

สมการ ความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมของกรอบประจำลิงค์ที่นำเสนอนี้ ในหัวข้อนี้ สามารถนำไปใช้หาความเร็วจากลิงค์ i สู่อิงค์ $i+1$ ได้ ทำให้สามารถคำนวณหาความเร็วเชิงเส้น ${}^N v_N$ และความเร็วเชิงมุม ${}^N \omega_N$ ของแต่ละลิงค์จากอวัยวะที่เริ่มเคลื่อนที่ไปจนถึงลิงค์สุดท้ายได้ตามลำดับ

2.7.3 สมการของนิวตัน และสมการของออยเลอร์

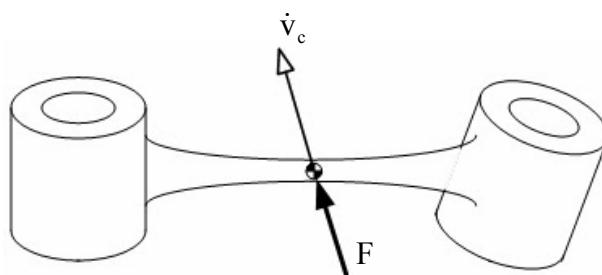
เมื่อสมมติให้อวัยวะต่าง ๆ ในร่างกายของมนุษย์เป็นลิงค์ที่เป็นวัตถุแข็งเกร็ง และทราบตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลและข้อมูลเทนเซอร์ความเฉื่อยของแต่ละลิงค์แล้ว จะทำให้ทราบการกระจายมวลของทั้งระบบโดยสมบูรณ์ ในการบังคับเพื่อทำนายการเคลื่อนที่ของร่างกายนั้น เราต้องทำการเร่ง และห้วงลิงค์ต่าง ๆ โดยอาศัยแรงในการขับเคลื่อน ซึ่งมีความสัมพันธ์อยู่กับความเร่ง และการกระจายมวลของระบบ สมการของนิวตันแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ในการเคลื่อนที่ระหว่างแรง มวล และความเร่ง ส่วนสมการของออยเลอร์ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด โมเมนต์ความเฉื่อย ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมของระบบ

1. สมการของนิวตัน

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุหรือลิงค์ ดังรูปที่ 1 ซึ่งแสดงภาพของวัตถุแข็งเกร็งที่มีความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลเท่ากับ $\dot{v}_c$ แรง F ที่กระทำกับจุดศูนย์กลางมวล เพื่อให้วัตถุมีความเร่งดังกล่าว เป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน ที่ว่า

$$F = m\dot{v}_c \quad (2.88)$$

เมื่อ m คือ มวลทั้งหมดของวัตถุ



ภาพที่ 2.31

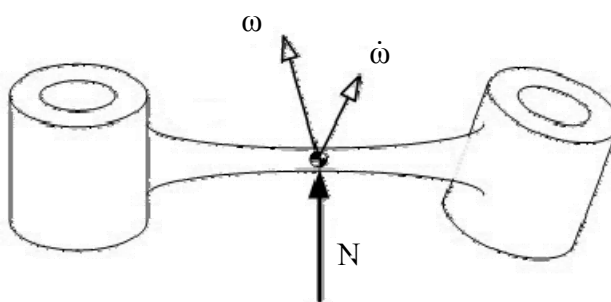
ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับความเร่งของวัตถุที่จุดศูนย์กลางมวล

2. สมการของออยเลอร์

หากพิจารณาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งที่มีความเร็วเชิงมุม ω และความเร่งเชิงมุม $\dot{\omega}$ ดังรูปที่ 7.5 ในกรณีเช่นนี้ โมเมนต์ ที่กระทำกับวัตถุเพื่อให้เกิดการหมุนดังกล่าว สามารถคำนวณได้จากสมการของออยเลอร์ ดังนี้

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{I}}\omega + \omega \times \omega \mathbf{I} \quad (2.89)$$

เมื่อ $\mathbf{I}$ คือ เทนเซอร์ความเฉื่อยของวัตถุอ้างอิงเทียบกับกรอบ [C] ซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล



ภาพที่ 2.32

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับการเคลื่อนที่เชิงมุมของวัตถุ