บทที่2

ตัวแบบและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงตัวแบบและทฤษฎีต่างๆ รวมถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยและรายละเอียดของวิธีการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนด้วยวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) และวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method) นอกจากนี้จะอธิบายถึง ค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของวิธีการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนของวิธีทั้งสอง ซึ่งมีรายละเอียดต่างๆ ดังนี้

2.1 ตัวแบบและทฤษฎี

2.1.1 วิธีการคำนวณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนสำหรับธุรกิจประกันวินาศภัยโดยการกำหนดโดยใช้ประสบการณ์ในอดีต (Run – off Method)

การประมาณการเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนต้องมีการจัดรูปแบบข้อมูลเพื่ออำนวยความสะดวกต่อการประมาณการเงินสำรองค่าสินไหมทดแทน โดยต้องแสดงให้เห็นถึงพัฒนาการของค่าสินไหมอย่างชัดเจน ซึ่งวิธีการจัดรูปแบบข้อมูลที่นิยมวิธีหนึ่งก็คือการจัดข้อมูลให้อยู่ในรูปตารางการพัฒนาการของค่าสินไหมทดแทนรูปสามเหลี่ยม (Loss Development Triangle) โดยในแต่ละแถวของตารางข้อมูลจะแสดงถึงปีที่เกิดอุบัติเหตุหรือปีที่เกิดความเสียหาย (accident year) นอกจากนี้ข้อมูลที่ปรากฏในแต่ละคอลัมน์ของตารางดังกล่าวจะช่วยในการติดตามความเปลี่ยนแปลงของค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นในแต่ละปีอุบัติเหตุซึ่งอาจแสดงเป็นรายปี รายไตรมาสหรือรายเดือน โดยทั่วไปแล้วในแต่ละคอลัมน์จะแสดงเป็นช่วงปีหรือช่วงไตรมาส (สำนักงานคณะกรรมการกำกับและส่งเสริม การประกอบธุรกิจประกันภัย และ สำนักงานอัตราเบี้ยประกันวินาศภัย , 2551)

ในการคำนวณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนโดยใช้ประสบการณ์ในอดีตเป็นตัวรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับการจ่ายค่าสินไหมทดแทน และค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นในอดีต วิธีนี้จำเป็นต้องใช้เทคนิคหลากหลายเทคนิคในการประมาณค่าสินไหมทดแทนที่จะเกิดขึ้นในอนาคตจากข้อมูลปัจจุบันและข้อมูลในอดีตที่ถูกต้อง เพื่อมั่นใจว่าผลจากการประมาณการในอนาคต หรือเป็นที่แน่ชัดว่าค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นในอนาคตมีความแตกต่างจากค่าสินไหมที่เกิดขึ้นในอดีตด้วยเหตุผลบางประการ ซึ่งผู้รับประกันภัยต้องปรับเปลี่ยนสมมติฐานในการประมาณค่าสินไหม

ทดแทนให้เหมาะสม โดยต้องคำนึงถึงปัจจัยต่างๆ อาทิ อัตราเงินเฟ้อ การเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนคืนจากคู่กรณีหรือจากมูลค่าซากของทรัพย์สินที่เสียหาย

2.1.2 **วิธีบูตสแตรป** (Bootstrapping method)

วิธีบูตสแตรปเป็นวิธีการประมาณค่าโดยใช้การสุ่มตัวอย่างซ้ำ แต่วิธีการสุ่มตัวอย่างซ้ำจะใช้การสร้างตัวอย่างชุดใหม่จากตัวอย่างสุ่มที่มีเพียงชุดเดียวโดยการสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ (resampling with replacement) วิธีการนี้ถูกเสนอโดย Efron (1979)

Efron (1979) เสนอให้ใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่ขนาด n จากตัวอย่างสุ่มชุดเดียวที่มีเพื่อสร้างชุดตัวอย่างขนาด n ที่เป็นไปได้ นั่นคือแทนที่จะสุ่มตัวอย่างซ้ำๆจากประชากรที่มีการแจกแจงเอฟ (F Distribution) แต่จะใช้การสุ่มตัวอย่างจากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่าง (Empirical distribution function : F_n) ของข้อมูลตัวอย่างโดยมีวิธีการดำเนินการดังนี้

กำหนดให้ θ เป็นค่าจริงของพารามิเตอร์

$\hat{\theta}_B$ เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแตรป

สุ่มตัวอย่างมา n ตัว คือ $x_1, x_2, ..., x_n$ ที่เป็นอิสระกันมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่างๆ ให้ θ เป็นพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณในประชากรดังกล่าวนี้ และให้ $\hat{\theta}_B$ เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป ที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างขนาด n จากนั้นสร้างฟังก์ชันการแจกแจง โดยให้ความน่าจะเป็นของ x_i , $i = 1,2,...,n$ เป็น $1/n$ ซึ่งเรียกฟังก์ชันการแจกแจงแบบนี้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่าง (Empirical distribution function)

การสุ่มตัวอย่างจะทำการสุ่มตัวอย่างทีละ 1 ค่าจำนวน n ครั้ง จากชุดของตัวอย่าง $x_1, x_2, ..., x_n$ โดยค่าที่ได้จะคืนกลับไปในชุดตัวอย่างก่อนที่จะมีการสุ่มตัวอย่างครั้งต่อไป ให้ $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ เป็นชุดของตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มได้ ซึ่งจะเรียกชุดของตัวอย่างดังกล่าวนี้ว่าตัวอย่างบูตสแตรป (bootstrap sample) ซึ่งการหาค่าประมาณด้วยวิธีบูตสแตรป จะเริ่มจาก

ครั้งที่ 1 ทำการสุ่มตัวอย่างทีละ 1 ค่า แบบคืนที่จำนวน n ครั้ง จากชุดของตัวอย่าง จะได้ $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ แล้วคำนวณค่าประมาณของ θ จะได้ค่าประมาณ คือ $\hat{\theta}_1^*$

ครั้งที่ 2 ทำการสุ่มตัวอย่างทีละ 1 ค่า แบบคืนที่จำนวน n ครั้ง จากชุดของตัวอย่าง จะได้ $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ แล้วคำนวณค่าประมาณของ θ จะได้ค่าประมาณ คือ $\hat{\theta}_2^*$

•

•

•

ครั้งที่ B ทำการสุ่มตัวอย่างทีละ 1 ค่าแบบคืนที่จำนวน n ครั้ง จากชุดของตัวอย่าง จะได้ $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ แล้วคำนวณค่าประมาณของ θ จะได้ค่าประมาณ คือ $\hat{\theta}_B^*$

ด้วยการทำซ้ำ ดังที่กล่าวมาแล้วจำนวน B ครั้ง จะได้ค่าประมาณของ θ จำนวน B ตัวคือ $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*..., \hat{\theta}_B^*$ นำมาสร้างฮิสโตแกรม (histogram) โดยกำหนดให้แต่ละตัวมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{B}$ จะได้การแจกแจงของตัวสถิติตัวอย่างบูตสแตรป (bootstrap sampling distribution)

ให้ $\hat{\theta}_B$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรป ซึ่งการหาค่าประมาณแบบจุดจะถูกกำหนดโดย

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{t=1}^{B} \hat{\theta}_t^*}{B}$$

การหาค่าประมาณแบบช่วงของพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธีบูตสแตรปที่ระดับนัยสำคัญ α จะได้ว่า

$$P\left(\hat{\theta}_{BL} < \theta < \hat{\theta}_{BU}\right) = 1 - \alpha$$

ซึ่งหาจากการแจกแจงตัวสถิติตัวอย่างบูตสแตรป $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*..., \hat{\theta}_B^*$ ที่ได้ นำมาจัดเรียงจากค่าน้อยไปหามาก จากนั้นคำนวณหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ $100\left(\alpha/2\right)$ กำหนดให้เป็น $\hat{\theta}_{BL}$ และหาค่าที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ $100\left(1-\alpha/2\right)$ กำหนดให้เป็น $\hat{\theta}_{BU}$ ดังนั้นจะได้ช่วงความเชื่อมั่นด้วย วิธีบูตสแตรป คือ $\left[\hat{\theta}_{BL}, \hat{\theta}_{BU}\right]$

2.1.3 วิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method)

2.1.3.1 วิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method)

วิธีบันไดลูกโซ่ เป็นวิธีที่นักคณิตศาสตร์ประกันภัยนิยมใช้ในการประมาณการค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (ultimate loss) เพื่อนำไปสู่การคำนวณอัตราเบี้ยประกันภัยและเงินสำรองค่าสินไหมทดแทน ซึ่งหลักการของวิธีนี้คือการประมาณความรับผิดชอบรวมของแต่ละปี โดยเริ่มด้วยการเปรียบเทียบสัดส่วนโดยตรงระหว่างเงินจ่ายในปีที่ผ่านมากับเงินจ่ายปีต่อไปที่ได้เกิดขึ้นแล้ว โดยการนำสัดส่วนมาเป็นตัวคูณเพื่อหาความรับผิดชอบรวม จากนั้นจึงคำนวณหาค่าสินไหมทดแทนคงค้างหรือเงินสำรอง โดยการนำค่าสินไหมทดแทนที่ได้จ่ายไปแล้วทั้งหมดสำหรับปีเริ่มนั้นหักออกจากความรับผิดด้วย จะได้เป็นค่าสินไหมทดแทนคงค้างสำหรับปีนั้น (มานพ วราภักดิ์ , 2550)

จากข้อมูลค่าสินไหมทดแทนของการประกันภัยชนิดหนึ่ง แสดงจำนวนเงินจ่ายเป็นมูลค่าสะสมจากปีที่เกิดภัยปีที่ i ถึงปีที่ k แทนด้วย $C_{i,k}$ โดยเงินสำรองสำหรับปีที่ i (x_i) คือความรับผิด

รวมทั้งหมดสำหรับปีเริ่ม i เมื่อเริ่มจ่ายค่าสินไหมทดแทนแล้วถึงปีที่ k $\left(l_{i,k}\right)$ ลบด้วยค่าสินไหมทดแทนรวมจ่ายตั้งแต่ปีที่ i ถึงปีที่ k ได้ว่า

$$x_i = l_{i,k} - C_{i,k}$$

2.1.3.2 ตัวแบบสโตแคสติก (Stochastic Model) (Mack , 1993)

ให้ C_{ik} เป็นมูลค่าสะสมจ่ายจากปีอุบัติเหตุที่ i ถึงปี k โดยที่ $1 \le i \le I$ และ $1 \le k \le I$ ดังนั้น เงินสำรองค่าสินไหมทดแทนปีที่ i คือ $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$, $i = 2,...,I$

ข้อสมมติเบื้องต้นของตัวแบบบันไดลูกโซ่

(1) $E\left(C_{i,k+1} \mid C_{i1},...,C_{ik}\right) = C_{ik} f_k$, $1 \le i \le I$, $1 \le k \le I-1$

ซึ่งวิธีบันไดลูกโซ่ ต้องนำค่า f_k มาประมาณโดย

$$\hat{f}_k = \sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k+1} \Big/ \sum_{J=1}^{I-k} C_{jk} \ , 1 \le k \le I-1$$

ประกอบกับค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (ultimate claim) มีค่าเท่ากับ C_{iI} โดย

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{I-1}$$

หรือหาเงินสำรองค่าสินไหมทดแทน (R_i) โดย

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i}\left(\hat{f}_{I+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{I-1} - 1\right)$$

(2) เวกเตอร์ $\{C_{i1},...,C_{iI}\}$ และเวกเตอร์ $\{C_{j1},...,C_{jI}\}$ เป็นอิสระกันระหว่างปีอุบัติเหตุที่ต่างกัน $i \ne j$

(3) $Var\left(C_{i,k+1} \mid C_{i1},...,C_{ik}\right) = C_{ik}\sigma_k^2$, $1 \le i \le I$, $1 \le k \le I-1$

จากพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า σ_k^2 , $1 \le k \le I-1$ นั้นคือข้อสมมติเกี่ยวกับความแปรปรวนที่มีความหมายภายใต้วิธีนี้ ค่าประมาณของ σ_k^2 สามารถหาได้โดย

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k \right)^2 ,1 \le k \le I-2$$

$$\hat{\sigma}^2_{I-1} = min\left(\hat{\sigma}^4_{I-2}/\hat{\sigma}^2_{I-3}\ ,\ min\left(\hat{\sigma}^2_{I-3}/\hat{\sigma}^2_{I-2}\right)\right)$$

2.1.4 วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน(Bornhuetter-Ferguson Method)

2.1.4.1 วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (The Bornhuetter-Ferguson Method)

ในหลายๆกรณี การใช้วิธีการประมาณเงินสำรองโดยใช้ข้อมูลค่าสินไหมทดแทนจ่ายหรือค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้น อาจไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่น่าเชื่อถือได้ เช่น กรณีที่การรับประกันภัยประเภทใหม่ๆ ซึ่งมีข้อมูลในอดีตน้อย หรือการประกันภัยที่มักมีรูปแบบความเสียหายผันผวนอันเนื่องมาจากความเสียหายขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นเป็นครั้งคราว นอกจากนี้ ยังรวมถึงการประกันภัยประเภทที่การรายงานความเสียหายใช้ระยะเวลายาวนาน (10ปี หรือมากกว่านั้น) และมีการรายงานข้อมูลความเสียหายในช่วง 2-3 ปีแรกเพียงเล็กน้อย (สำนักงานคณะกรรมการกำกับและส่งเสริม การประกอบธุรกิจประกันภัย และ สำนักงานอัตราเบี้ยประกันวินาศภัย , 2551)

ให้ C_{ik} เป็นมูลค่าสะสมจ่ายจากปีอุบัติเหตุที่ i ถึงปีที่ k โดยที่ $1 \le i\ ,\ k \le n$ และกำหนดให้ v_i เป็นเบี้ยประกันภัยปีที่ i และให้การเพิ่มขึ้นของมูลค่าสะสมจ่ายจากปีอุบัติเหตุที่ i ถึงปีที่ k $\left(S_{i,k}\right)$ คือ $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ และให้ U_i เป็นค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (ultimate claim) ที่ไม่ทราบค่าของปีอุบัติเหตุที่ i ดังนั้นเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนปีที่ i คือ $R_i = U_i - C_{i,n+1-i}$ ซึ่งสุดท้ายแล้ว $S_{i,n+1} = U_i - C_{i,n}$ เป็นค่าสินไหมที่เพิ่มขึ้นหลังจากปีพัฒนาการที่ n

การประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนด้วยวิธีดังกล่าวนี้ หลีกเลี่ยงการพึ่งพาจากค่าสินไหมทดแทนรวมในปัจจุบัน $\left(C_{i,n+1-i}\right)$ นั้นคือ

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i \cdot \left(1 - \hat{z}_{n+1-i}\right) \qquad \text{เมื่อ } \hat{U}_i = v_i \hat{q}_i$$

เพื่อเป็นการประยุกต์วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method) นักคณิตศาสตร์ประกันภัยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ q_i และ z_k สำหรับทุกค่า i และ k โดยค่า q_i คืออัตราส่วนของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (ultimate claim) และค่า z_k คือร้อยละของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (ultimate claim) บ่อยครั้งที่ค่า z_k ได้จากอัตราส่วนที่ต่อเนื่องกันของบันไดลูกโซ่ ซึ่งก็คือ $\hat{f}_2,\ldots,\hat{f}_n$ พร้อมกับการเลือกปัจจัยพัฒนาการในท้ายระยะเวลา (tail factor : $\hat{f}_\infty$) สิ่งที่ตามมาก็คือ

$$\hat{z}_n = \hat{f}_\infty^{-1}, \hat{z}_{n-1} = \left(\hat{f}_n \hat{f}_\infty\right)^{-1}, \ldots,\ \hat{z}_1 = \left(\hat{f}_2 \cdots \hat{f}_n \hat{f}_\infty\right)^{-1}$$

2.1.4.2 ตัวแบบสโตแคสติก (Stochastic Model) (Mack , 2008)

จากสูตรการคำนวณเงินสำรองของบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน เป็นที่ชัดเจนว่าเป็นรูปแบบที่เหมาะสมสำหรับวิธีนี้โดยมีการจัดประเภทแบบไขว้ (Cross-classified of the type)

$E(C_{ik}) = x_i z_k$ หรือเท่ากันกับ $E(S_{i,k}) = x_i y_k$ $1 \le i \le n$ และ $1 \le k \le n+1$

เนื่องจากค่า x_i และ y_k มีลักษณะเฉพาะต่อปัจจัยคงที่ ด้วยเหตุนี้ส่วนใหญ่จึงไม่เกิดข้อผิดพลาด โดยการกำหนดให้ $y_1 + \ldots + y_n + y_{n+1} = 1$ ส่งผลให้ $E(U_i) = E(S_{i,1} + \ldots + S_{i,n+1})$ และ $E(U_i) = E(x_i y_1 + \ldots + x_i y_{n+1}) = x_i$ ด้วย และแสดงให้เห็นว่า x_i สามารถพิจารณาไปถึงการหาค่าทั้งหมดสำหรับปีอุบัติเหตุที่ i จึงสันนิษฐานได้อีกว่าสิ่งที่เพิ่มเข้าไปใน $Var(U_i)$ นั้นเป็นสัดส่วนของ x_i หรือ $Var(U_i/x_i)$ เป็นสัดส่วนของ $1/x_i$ นี่เป็นข้อสมมติที่เป็นปกติสำหรับสิ่งที่ส่งผลถึงค่าความแปรปรวน

นอกจากนี้ คุณสมบัติที่สำคัญของบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน คือ ความเป็นอิสระกันระหว่างค่าสินไหมทดแทนในอดีตและอนาคต จึงแนะนำให้สมมติว่าการเพิ่มขึ้นทั้งหมดของ $S_{i,k}$ โดยให้ปีอุบัติเหตุเดียวกันเป็นอิสระต่อกัน

ด้วยเหตุนี้ในการนำไปใช้ควรทำตามรูปแบบการเพิ่มขึ้นของ $S_{i,k}$, $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n+1$ โดยมีข้อสมมติดังนี้

1. การเพิ่มขึ้นของ $S_{i,k}$ เป็นอิสระกัน
2. ไม่ทราบพารามิเตอร์ x_i, y_k เมื่อ $E(S_{i,k}) = x_i y_k$ และ $y_1 + \ldots + y_{n+1} = 1$
3. ไม่ทราบค่าคงที่ที่เหมาะสมของ s_k^2 เมื่อ $Var(S_{i,k}) = x_i s_k^2$

จากข้อสมมติทั้ง 3 นี้ได้ว่า $Var(U_i) = Var(S_{i,1} + \ldots + S_{i,n+1}) = x_i(s_i^2 + \ldots + s_{n+1}^2)$ ซึ่ง $Var(U_i)$ เป็นสัดส่วนของ x_i อย่างที่ได้สันนิษฐานไว้ และ

$$\begin{aligned} E(R_i) &= E(S_{i,n+2-i} + \ldots + S_{i,n+1}) \\ &= x_i(y_{n+2-i} + \ldots + y_{n+1}) \\ &= x_i(1 - z_{n+1-i}) \qquad \text{โดยที่ } z_k = y_1 + \ldots + y_k \end{aligned}$$

จึงแสดงให้เห็นว่าค่าคาดหวังของเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนมีรูปแบบคล้ายกันกับการประมาณเงินสำรองด้วยวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method) ซึ่งก็คือ

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i \cdot (1 - \hat{z}_{n+1-i})$$

และเมื่อการเพิ่มขึ้นทั้งหมดนี้เป็นอิสระ

$$
\begin{aligned}
Var(R_i) &= Var\left(S_{i,n+2-i} + \ldots + S_{i,n+1}\right) \\
&= Var\left(S_{i,n+2-i}\right) + \ldots + Var\left(S_{i,n+1}\right) \\
&= x_i\left(s_{n+2-i}^2 + \ldots + s_{n+1}^2\right)
\end{aligned}
$$

นอกจากนี้เมื่อทราบค่า $x_1, \ldots, x_n$ จะได้

$$\hat{y}_k = \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} x_i$$

ซึ่งเป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำที่สุด (linear minimum variance unbiased estimate) ของ y_k , $1 \le k \le n$ และ

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \left(S_{i,k} - x_i \hat{y}_k\right)^2 \Big/ x_i$$

ที่เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ s_k^2 , $1 \le k \le n-1$

การจะประมาณค่าเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนและหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ด้วยเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง จะต้องมีการประมาณค่าเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (prior ultimate claims) และประมาณพารามิเตอร์อื่นๆ ของตัวแบบบอร์นฮูตเทอร์เฟอร์กูซัน ซึ่งการประมาณค่าเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (prior ultimate claims) มีขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าการเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนความเสียหาย (Incremental Loss Ratio : ILR) ที่ปีพัฒนาการที่ k คือ $ILR_k = \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} v_i$ เมื่อ $S_{i,k}$ คือการเพิ่มขึ้นของมูลค่าสะสมจ่ายจากปีอุบัติเหตุที่ i ถึงปีที่ k และ v_i เป็นเบี้ยประกันภัยปีที่ i

2. หาค่าปัจจัยของระดับเบี้ยประกันภัย (on-level premium factor) สำหรับปีอุบัติเหตุที่ i คือ $r_i = C_{i,n+1-i} \Big/ \left(v_i \Big/ \sum\nolimits_{k=1}^{n+1-i} ILR_k\right)$ เมื่อ $C_{i,n+1-i}$ เป็นมูลค่าสะสมจ่ายจากปีอุบัติเหตุที่ i ถึงปีที่ $n+1-i$

3. เลือกปัจจัยของระดับเบี้ยประกันภัย (on-level premium factor) สำหรับปีอุบัติเหตุที่ i คือ $r_i^* = \sqrt{r_i^{paid} * r_i^{incurred}}$ เมื่อ r_i^{paid} คือปัจจัยของระดับเบี้ยประกันภัยจากข้อมูลค่าสินไหมทดแทนจ่าย และ $r_i^{incurred}$ คือปัจจัยของระดับเบี้ยประกันภัยจากข้อมูลค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้น

4. หาค่าเฉลี่ยค่าการเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนความเสียหาย (ILR) ที่ปีพัฒนาการที่ k คือ $ILR_k^{adj} = \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\, r_i^*$

5. หาค่าเบื้องต้นของอัตราส่วนความเสียหายสมบูรณ์ (ultimate loss ratio : ULR) สำหรับปีอุบัติเหตุที่ i คือ $ULR_i = r_i^* * \sum_{k=1}^{n+1} ILR_k^{adj}$

6. ประมาณค่าเบื้องต้นของค่าสมบูรณ์ของความเสียหาย (ultimate losses : UL) สำหรับปีอุบัติเหตุที่ i คือ $UL_i = ULR_i * v_i$

เมื่อได้ค่าประมาณของค่าเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (prior ultimate claims) แล้วจะทำการคำนวณหาค่าประมาณของค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าทั้งสองได้คือ

1. ค่า $\hat{y}_k$ ด้วยข้อจำกัด $\hat{y}_1 + ... + \hat{y}_n + \hat{y}_{n+1} = 1$

2. ค่า $\hat{s}_k^2$ คือ โดยค่า $\hat{s}_n^2$ หาได้จากการการประมาณค่าจาก $\hat{s}_1^2, ..., \hat{s}_{n-1}^2$ และค่า $\hat{s}_{n+1}^2$ หาได้จากการสร้างสมการถดถอยของค่า $\hat{s}_k^2$ กับค่า $|\hat{y}_k|$ ที่ตำแหน่ง $|\hat{y}_{n+1}|$

ที่สุดแล้วจะได้ค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์สำหรับการประมาณเงินสำรองด้วยวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน ซึ่งจะมีทั้งในส่วนของการหาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองในแต่ละปีอุบัติเหตุ $\left(mse.(\hat{R}_i^{BF})\right)$ และค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองรวมทุกปีอุบัติเหตุ $\left(mse.(\hat{R}_i^{BF})\right)$ ซึ่งจะสามารถหาค่าได้

2.1.5 การหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์

ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการพยากรณ์นั้นสามารถหาค่าได้โดยการสร้างช่วงของการพยากรณ์ เงินสำรองค่าสินไหมทดแทนเป็นกระบวนการพยากรณ์ที่ใช้ข้อมูลในปัจจุบัน เพื่อพยากรณ์ค่าสินไหมทดแทนในอนาคต การประมาณค่าย่อมขึ้นอยู่กับข้อมูลที่นำมาใช้และรูปแบบของการแจกแจงที่ใช้พยากรณ์สำหรับค่าสังเกตในอนาคต โดยค่าคาดหวังของการแจกแจงของค่าสินไหมทดแทนในอนาคตเป็นค่าพยากรณ์ เมื่อจะพิจารณาถึงค่าที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ ควรพิจารณาที่ค่ารากที่สองค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของค่าพยากรณ์ (Root Mean Square Error of Prediction : RMSEP) (England และ Verrall , 2002)

เพื่ออธิบายค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองจึงพิจารณาตัวแปรสุ่ม Y และค่าพยากรณ์ $\hat{Y}$ โดยค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของค่าพยากรณ์ (Mean Square Error of Prediction : MSEP) เป็นส่วนต่างยกกำลังสองของค่าจริงและค่าพยากรณ์ $E\left[\left(Y-\hat{Y}\right)^2\right]$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$E\left[\left(Y-\hat{Y}\right)^2\right]=E\left[\left(\left(Y-E[Y]\right)-\left(\hat{Y}-E[Y]\right)\right)^2\right]$$

เพื่อให้ได้ค่าประมาณของค่านี้ในค่าคาดหวังสุดท้ายต้องใช้ $\hat{Y}$ แทนที่ Y จะได้ว่า

$$E\left[\left(Y-\hat{Y}\right)^2\right]\approx E\left[\left(Y-E[Y]\right)^2\right]-2E\left[\left(Y-E[Y]\right)\right]\left(\hat{Y}-E\left[\hat{Y}\right]\right)+E\left[\left(\hat{Y}-E\left[\hat{Y}\right]\right)^2\right]$$

หากค่าสังเกตในอนาคตเป็นอิสระจากข้อมูลในอดีตจะได้ว่า

$$E\left[\left(Y-\hat{Y}\right)^2\right]\approx E\left[\left(Y-E[Y]\right)^2\right]+E\left[\left(\hat{Y}-E\left[\hat{Y}\right]\right)^2\right]$$

2.1.5.1 ค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method)

มีข้อกำหนดของตัวแบบสโตแคสติกสำหรับวิธีบันไดลูกโซ่ สำหรับสูตรที่นำมาใช้กับการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนของแต่ละปีอุบัติเหตุรวมถึงจะได้ค่ารวมของค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนด้วย

ก่อนที่จะกล่าวถึงผลลัพธ์สำคัญที่ต้องการ มีสิ่งที่สำคัญบางสิ่งที่ต้องสังเกต คือเมื่อมีการประมาณค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองเราจะไม่ใช้ค่าความคลาดเคลื่อนแบบมีเงื่อนไข แต่ที่เราจะสนใจในค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองแบบมีเงื่อนไขของการประมาณจำนวนเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนจ่ายรวม $\left(\hat{C}_{iI}\right)$ ที่ขึ้นอยู่กับลักษณะเฉพาะของค่าสังเกต (D) โดยจะใช้เพียงค่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (average deviation) ระหว่าง $\hat{C}_{iI}$ และ C_{iI} เพราะว่าเป็นการสุ่มค่าในอนาคตเท่านั้น ดังนั้นค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองที่ต้องการนั้นสามารถอธิบายได้โดย $mse\left(\hat{C}_{iI}\right)=E\left(\left(\hat{C}_{iI}-C_{iI}\right)^2\middle|D\right)$ เมื่อ $D=\left\{C_{ik}\middle|i+k\ \leq\ I+1\right\}$ เป็นชุดของข้อมูลทั้งหมด

จะได้ว่า

$$mse\left(\hat{R}_i\right)=E\left(\left(\hat{R}_i-R_i\right)^2\middle|D\right)=E\left(\left(\hat{C}_{iI}-C_{iI}\right)^2\middle|D\right)=mse\left(\hat{C}_{iI}\right)$$

จากรูปแบบทั่วไปของ $E(X-a)^2=Var(X)+\left(E(X)-a\right)^2$ จึงได้ว่า

$$mse\left(\hat{C}_{iI}\right)=Var\left(C_{iI}\middle|D\right)+\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองคือ ค่าความคลาดเคลื่อนของสโตแคสติก $\left[Var\left(C_{iI}\middle|D\right)\right]$ รวมกับ ค่าความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณ $\left[\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2\right]$

ภายใต้ข้อสมมติทั้งสามของตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง สามารถประมาณได้โดย

$$\widehat{mse\left(\hat{R}_i\right)}=\hat{C}_{iI}^2\sum_{k=I+1-i}^{I-1}\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^{\,2}}\left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}}+\frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k}C_{jk}}\right)$$

เมื่อ $\hat{C}_{ik}=C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{k-1}$, $k>I+1-i$ เป็นค่าประมาณในอนาคตของ C_{ik} และ $\hat{C}_{i,I+1-i}=C_{i,I+1-i}$

พิสูจน์

พิสูจน์ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการประมาณเงินสำรองแต่ละปีอุบัติเหตุโดยนำตัวย่อต่อไปนี้มาใช้

$$E_i(X)=E\left(X\middle|C_{i,1},\ldots,C_{i,I+1-i}\right)$$
$$Var_i(X)=Var\left(X\middle|C_{i,1},\ldots,C_{i,I+1-i}\right)$$

เริ่มต้นจาก

$$mse\left(\hat{R}_{iI}\right)=Var\left(C_{iI}\middle|D\right)+\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2$$

อาศัยข้อสมมติข้อที่1 และข้อที่3 ของวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) จะได้ว่า $Var_i\left(C_{i,I+1-i}\right)=0$ โดยค่าของ $Var\left(C_{iI}\middle|D\right)$ ที่ได้คือ

$$\begin{aligned}
Var\left(C_{iI}\middle|D\right) &= Var\left(C_{iI}\right)\\
&= E_i\left(Var\left(C_{iI}\middle|C_{i,1},\ldots,C_{i,I+1-i}\right)\right)+Var_i\left(E\left(C_{iI}\middle|C_{i,1},\ldots,C_{i,I+1-i}\right)\right)\\
&= E_i\left(C_{i,I-1}\sigma_{I-1}^2\right)+Var_i\left(C_{i,I-1}f_{I-1}\right)\\
&= E_i\left(C_{i,I-1}\right)\sigma_{I-1}^2+Var_i\left(C_{i,I-1}\right)f_{I-1}^2\\
&= E_i\left(C_{i,I-2}\right)f_{I-2}\sigma_{I-1}^2+E_i\left(C_{i,I-2}\right)f_{I-1}^2\sigma_{I-2}^2+Var_i\left(C_{i,I-2}\right)f_{I-1}^2f_{I-2}^2\\
&= \cdots\\
&= C_{i,I+1-i}\sum_{k=I+1-i}^{I-1} f_{I+1-i}\cdots f_{k-1}\sigma_k^2 f_{k+1}^2\cdots f_{I-1}^2
\end{aligned}$$

สำหรับ $\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2$ หาได้จาก

$$\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2 = C_{i,I+1-i}^2\left(f_{I+1-i}\cdots f_{I-1}-\hat{f}_{I+1-i}\cdots\hat{f}_{I-1}\right)^2$$

เนื่องจาก $\hat{C}_{iI}=C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i}\cdots\hat{f}_{I-1}$ และ

$$\begin{aligned}
E\left(C_{iI}\middle|D\right) &= E_i\left(C_{iI}\right)\\
&= E_i\left(E\left(C_{iI}\middle|C_{i1},\ldots,C_{i,I-1}\right)\right)\\
&= E_i\left(C_{iI-1}f_{I-1}\right)\\
&= E_i\left(C_{iI-1}\right)f_{I-1}\\
&= \cdots\\
&= E_i\left(C_{i,I+1-i}\right)f_{I+1-i}\cdots f_{I-1}
\end{aligned}$$

ต่อมาค่า $Var\left(C_{iI}\middle|D\right)$ และ $\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2$ ที่หาได้นั้น ในเทอมของ $Var\left(C_{iI}\middle|D\right)$ สามารถแทนค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าได้คือ f_k และ σ_k^2 ด้วยค่าของ $\hat{f}_k$ และ $\hat{\sigma}_k^2$ ตามลำดับ และได้ค่าของ $C_{i,I+1-i}\sum\limits_{k=I+1-i}^{I-1}\hat{f}_{I+1-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{k-i}\cdot\hat{\sigma}_k^2\cdot\hat{f}_{k+1}^2\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{I-1}^2$ ดังนี้

$$C_{i,I+1-i}\sum_{k=I+1-i}^{I-1}\hat{f}_{I+1-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{k-i}\cdot\hat{\sigma}_k^2\cdot\hat{f}_{k+1}^2\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{I-1}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{i,I+1-i}\left(\hat{\sigma}^2_{I+1-i}\hat{f}^2_{I+2-i}\cdots\hat{f}^2_{I-2}+\hat{f}_{I+1-i}\hat{\sigma}^2_{I+2-i}\hat{f}^2_{I+3-i}\cdots\hat{f}^2_{I-2}+\cdots+\hat{f}_{I+1-i}\cdots\hat{f}_{I-2}\hat{\sigma}^2_{I-1}\right)\\
&= C^2_{i,I+1-i}\hat{f}^2_{I+1-i}\cdots\hat{f}^2_{I-1}\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I+1-i}}{\hat{f}^2_{I+1-i}}}{\hat{C}_{i,I+1-i}}+\frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I+2-i}}{\hat{f}^2_{I+2-i}}}{\hat{C}_{i,I+1-i}\hat{f}^2_{I+1-i}}+\cdots+\frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-1}}{\hat{f}^2_{I-2}}}{\hat{C}_{i,I+1-i}\hat{f}^2_{I+1-i}\cdots\hat{f}^2_{I-2}}\right)\\
&= \hat{C}^2_{i,I}\sum_{k=I+1-i}^{I-1}\frac{\hat{\sigma}^2_k/\hat{f}^2_k}{\hat{C}_{i,k}}
\end{aligned}
$$

ในกรณีเดียวกัน ไม่สามารถทำได้ใน $\left(E\left(C_{iI}\middle|D\right)-\hat{C}_{iI}\right)^2$) เพราะการแทนที่ด้วยลักษณะนี้จะให้ค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีการที่แตกต่างกันซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F &= f_{I+1-i}\cdots f_{I-1}-\hat{f}_{I+1-i}\cdots\hat{f}_{I-1}\\
&= S_{I+1-i}+\cdots+S_{I-1}
\end{aligned}
$$

โดย $S_k=\hat{f}_{I+1-i}\cdots\hat{f}_{k-1}\left(f_k-\hat{f}_k\right)f_{k+1}\cdots f_{I-1}$ ด้วยเหตุนี้

$$
\begin{aligned}
F^2 &= \left(S_{I+1-i}+\cdots+S_{I-1}\right)^2\\
&= \sum_{k=I+1-i}^{I-1}S_k^2+2\sum_{j<k}S_jS_k
\end{aligned}
$$

เราแทนที่ S_k^2 ด้วย $E\left(S_k^2\middle|B_k\right)$ และ $S_jS_k, j<k$, ด้วย $E\left(S_jS_k\middle|B_k\right)$ เพื่อที่จะประมาณค่าของ S_k^2 และ S_jS_k โดยการเฉลี่ยค่าที่สูงกว่าที่ข้อมูลมีอยู่จริงเล็กน้อยหรือเท่าที่จะเป็นไปได้หรือค่า C_{ik} อื่นๆที่เป็นไปได้จากข้อมูลที่มีเนื่องจาก $E\left(f_k-\hat{f}_k\middle|B_k\right)=0$ จะได้ว่า $E\left(S_jS_k\middle|B_k\right)=0$ สำหรับ $j<k$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
E\left(\left(f_k-\hat{f}_k\right)^2\middle|B_k\right) &= Var\left(\hat{f}_k\middle|B_k\right)\\
&= Var\left(\frac{\sum_{j=1}^{I-k}C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k}C_{jk}}\middle|B_k\right)\\
&= \sum_{j=1}^{I-k}Var\left(C_{j,k+1}\middle|B_k\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{I-k}C_{jk}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sigma_k^2 \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}{\left(\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

จะได้ว่า

$$E\left(S_k^2 \middle| B_k\right) = \left(\hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{k-1}^2 \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \cdots f_{I-1}^2\right) \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้น $F^2 = \left(\sum S_k\right)^2$ และแทนที่ด้วย $\sum_k E\left(S_k^2 \middle| B_k\right)$ และเพราะว่าการรวมเทอมุทั้งหมดเป็นบวก เราจึงสามารถแทนค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดคือค่า f_k และค่า σ_k^2 ด้วยตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (unbiased estimators) คือ $\hat{f}_k$ และ $\hat{\sigma}_k^2$ ทั้งหมดนี้เราจึงประมาณค่า $F^2 = \left(f_{I+1-i} \cdots f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}\right)^2$ โดย

$$\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \left(\left(\hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{k-1}^2 \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \cdots f_{I-1}^2\right) \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

$$= \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots f_{I-1}^2 \left(\frac{\frac{\hat{\sigma}_{I+1-i}^2}{\hat{f}_{I+1-i}^2}}{\sum_{j=1}^{I-(I+1-i)} C_{j,I+1-i}} + \frac{\frac{\hat{\sigma}_{I+2-i}^2}{\hat{f}_{I+2-i}^2}}{\sum_{j=1}^{I-(I+2-i)} C_{j,I+2-i}} + \cdots + \frac{\frac{\hat{\sigma}_{I-1}^2}{\hat{f}_{I-1}^2}}{\sum_{j=1}^{I-(I+1-i)} C_{j,I-1}} \right)$$

$$= \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots f_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

นำค่าของประมาณของ $Var\left(C_{iI} \middle| D\right)$ และ $\left(E\left(C_{iI} \middle| D\right) - \hat{C}_{iI}\right)^2$ มาแทนค่าก็จะได้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของแต่ปีอุบัติเหตุ$\left[mse\left(\hat{R}_i\right)\right]$

$$\widehat{mse\left(\hat{R}_i\right)} = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\hat{C}_{ik}} + \hat{C}_{i,I+1-i}^2 \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} \hat{C}_{jk}}$$

$$= \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) หรือที่เรียกกันว่าค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองก็คือ รากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (mean square error) ดังนี้

$$s.e.\left(\hat{R}_i\right)=\sqrt{\widehat{mse}\left(\hat{R}_i\right)}$$

บ่อยครั้งที่ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณเงินสำรองรวม $\left(\hat{R}=\hat{R}_2+\ldots+\hat{R}_I\right)$ เป็นสิ่งให้ความสนใจด้วยเช่นกัน ในกรณีนี้เราไม่สามารถที่จะเพิ่มค่าของ $\left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2, 2\le i\le I$ ได้โดยตรง เพราะว่าจะมีความสัมพันธ์ผ่านทางตัวประมาณ $\hat{f}_k$ และ $\hat{\sigma}_k$ เพิ่มเติม

จากข้อสมมติและกระบวนการต่างๆ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการประมาณเงินสำรองรวม $\left(\hat{R}=\hat{R}_2+\ldots+\hat{R}_I\right)$ สามารถประมาณได้โดย

$$\widehat{mse\left(\hat{R}\right)}=\sum_{i=2}^{I}\left\{\left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2+\hat{C}_{iI}\left(\sum_{j=i+1}^{I}\hat{C}_{jI}\right)\sum_{k=i+I-1}^{I-1}\frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k}C_{nk}}\right\}$$

พิสูจน์

พิสูจน์ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการประมาณเงินสำรองรวมโดยสามารถเขียนคำจำกัดความได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
mse\left(\sum_{i=2}^{I}\hat{R}_i\right)&=E\left(\left(\sum_{i=2}^{I}\hat{R}_i-\sum_{i=2}^{I}\hat{R}_i\right)^2\middle|D\right)\\
&=E\left(\left(\sum_{i=2}^{I}\hat{C}_{iI}-\sum_{i=2}^{I}\hat{C}_{iI}\right)^2\middle|D\right)\\
&=Var\left(\sum_{i=2}^{I}C_{iI}\middle|D\right)+\left(E\left(\sum_{i=2}^{I}C_{iI}\middle|D\right)-\sum_{i=2}^{I}C_{iI}\right)^2
\end{aligned}$$

จากข้อสมมติที่2 ความเป็นอิสระกันของปีอุบัติเหตุผลคือ

$$Var\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} \middle| D\right) = \sum_{i=2}^{I} Var\left(C_{iI} \middle| D\right)$$

โดยที่ $Var\left(C_{iI} \middle| D\right) = C_{i,I+1-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} f_{I+1-i} \cdots f_{k-1} \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \cdots f_{n-1}^2$ จากข้างต้นนี้จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left(E\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} \middle| D\right) - \sum_{i=2}^{I} \hat{C}_{iI}\right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^{I}\left(E\left(C_{iI} \middle| D\right) - \hat{C}_{iI}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i,j}\left(E\left(C_{iI} \middle| D\right) - \hat{C}_{iI}\right)\left(E\left(C_{jI} \middle| D\right) - \hat{C}_{jI}\right) \\
&= \sum_{i,j} C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j \quad \text{โดย } F_i = f_{I+1-i} \cdots f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1}
\end{aligned}$$

จาก $mse\left(\hat{R}_{iI}\right) = Var\left(C_{iI} \middle| D\right) + \left(E\left(C_{iI} \middle| D\right) - \hat{C}_{iI}\right)^2$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนได้ว่า

$$mse\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i\right) = \sum_{i=2}^{I} mse\left(\hat{R}_i\right) + \sum_{2 \le i < j \le I} 2C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j$$

ในการหาค่า $F_i F_j$ นั้นใช้วิธีการเดียวกันกับการหาค่า F^2 โดยสมมติว่า $i < j$ และ $j - i = diff$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
F_i F_j &= \left(S_{I+1-i} + \cdots + S_{I-1}\right)\left(S_{I+1-j} + \cdots + S_{I-1}\right) \\
&= \left(S_{I+1-i} + \cdots + S_{I-1}\right)\left(S_{I+1-j+diff} + \cdots + S_{I-1}\right) \\
&\quad + \left(S_{I+1-i} + \cdots + S_{I-1}\right)\left(S_{I+1-j} + \cdots + S_{I+1-j+diff-1}\right)
\end{aligned}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า ผลคูณแรกไม่ได้ให้ค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ เพราะ $I + 1 - i = I + 1 - j + diff$ แต่ผลคูณลำดับที่สอง มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ เพราะรูปตัวคูณมีค่าแตกต่างกันเสมอ

$$S_{I+1-i} = \left(f_{I+1-i} - \hat{f}_{I+1-i}\right) f_{I+2-i} \cdots f_{I-1}$$

$$S_{I+1-j+diff} = \hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I+1-j+diff-1}\left(f_{I+1-j+diff} - \hat{f}_{I+1-j+diff}\right) f_{I+2-j+diff} \cdots f_{I-1}$$

ดังนั้น

$$F_iF_j = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I-i} S_k^2$$
$$= \hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} S_k^2$$

โดย $\sum_{k=I+1-i}^{I-1} S_k^2 = \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\sigma_k^2 / f_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$ ได้จากการคำนวณในข้อ1.

โดยเราสามารถจะประมาณค่าของ F_iF_j ได้ด้วย

$$\hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I-1} \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

แทนค่าต่างๆเข้าไปในสูตรของ $mse\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i\right)$ จะได้

$$mse\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i\right) = \sum_{i=2}^{I} mse\left(\hat{R}_i\right) + 2\sum_{i=2}^{I} \sum_{j=i+1}^{I} C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} \hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I-i} \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

$$= \sum_{i=2}^{I} \left\{ mse\left(\hat{R}\right)_i + C_{i,I+1-i} \sum_{j=i+1}^{I} C_{j,I+1-j} \hat{f}_{I+1-j} \cdots \hat{f}_{I-i} \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right\}$$

$$mse\left(\hat{R}\right) = \sum_{i=2}^{I} \left\{ \left(s.e.\left(\hat{R}\right)_i\right)^2 + \hat{C}_{iI} \sum_{j=I+1}^{I} \hat{C}_{jI} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right\}$$

2.1.5.2 ค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method)

มีข้อสมมติของตัวแบบสโตแคสติกสำหรับวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน และวิธีการของการประมาณจากค่าพารามิเตอร์ซึ่งไม่ทราบค่า สำหรับสูตรที่นำมาใช้กับการคำนวณค่าความ

คลาดเคลื่อนพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนของแต่ละปีอุบัติเหตุ รวมถึงค่ารวมของค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนด้วย

อย่างที่ได้กล่าวไว้ก่อนแล้วว่า เราสนใจค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการพยากรณ์ที่ให้ค่าสังเกตได้จนปีสุดท้าย ซึ่งเราสนใจเพียงค่าความแปรปรวนในอนาคต ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการพยากรณ์ใดๆของการประมาณเงินสำรอง $\left(\hat{R}_i\right)$ อธิบายได้โดย

$$mse\left(\hat{R}_i\right) = E\left(\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2 \middle| S_{i,1},\ldots,S_{i,n+1-i}\right)$$

เมื่อ $R_i = S_{i,n+2-i},\ldots,S_{i,n+1}$ เป็นอิสระจาก $S_{i,1},\ldots,S_{i,n+1-i}$ สอดคล้องกับข้อสมมติที่1 ของวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (2.1.4.2) เช่นเดียวกันกับการประมาณเงินสำรองที่สามารถเป็นอิสระจากการเพิ่มขึ้นได้

ดังนั้น

$$\begin{aligned} mse\left(\hat{R}_i^{BF}\right) &= E\left(\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right) \\ &= Var\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right) + \left(E\left(\hat{R}_i^{BF}\right) - E\left(R_i\right)\right)^2 \\ &= Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right) + Var\left(R_i\right) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของค่าพยากรณ์ของการประมาณเงินสำรองด้วย วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน คือ ผลรวมของ ค่าความเคลื่อนของค่าประมาณ $\left[Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right)\right]$ และ ค่าความคลาดเคลื่อนของกระบวนการ $\left[Var\left(R_i\right)\right]$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนของกระบวนการ $\left[Var\left(R_i\right)\right]$ คือ

$$Var\left(R_i\right) = Var\left(S_{i,n+2-i}\right) + \ldots + Var\left(S_{i,n+1}\right) = x_i\left(s_{n+2-i}^2 + \ldots + s_{n+1}^2\right)$$

ซึ่งประมาณค่าได้ด้วย

$$\hat{V}ar\left(R_i\right) = \hat{U}_i\left(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \ldots + \hat{s}_{n+1}^{2*}\right)$$

สำหรับความเคลื่อนของค่าประมาณของ $\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i\left(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*\right)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right) &= Var\left(\hat{U}_i\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right) \\
&= \left(E\left(\hat{U}_i\right)\right)^2 Var\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right) + Var\left(\hat{U}_i\right) Var\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right) + Var\left(\hat{U}_i\right)\left(1-E\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right)^2 \\
&= \left(x_i^2 + Var\left(\hat{U}_i\right)\right) Var\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right) + Var\left(\hat{U}_i\right)\left(1-z_{n+1-i}\right)^2
\end{aligned}
$$

ภายใต้ข้อสมมติทั้งสามของตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (The Bornhuetter- Ferguson Method) ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง $\left[mse\left(\hat{R}_i\right)\right]$ สามารถประมาณได้โดย

$$
\widehat{mse}\left(\hat{R}_i^{BF}\right) = \hat{U}_i\left(\hat{s}^{2*}_{n+2-i} + \ldots + \hat{s}^{2*}_{n+1}\right) + \left(\hat{U}_i^2 + \left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\right)\left(s.e.\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right)^2 + \left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)^2
$$

โดยค่า $\left(s.e.\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right)^2$ หาค่าได้จากค่าประมาณของ $Var\left(\hat{z}^*_k\right)$ ซึ่งคือค่า $\left(s.e.\left(\hat{z}^*_k\right)\right)^2$ โดย

$$
\left(s.e.\left(\hat{z}^*_k\right)\right)^2 = min\left(\left(s.e.\left(\hat{y}^*_1\right)\right)^2 + \ldots + \left(s.e.\left(\hat{y}^*_k\right)\right)^2,\ \left(s.e.\left(\hat{y}^*_{k+1}\right)\right)^2 + \ldots + \left(s.e.\left(\hat{y}^*_{n+1}\right)\right)^2\right)
$$

ซึ่งค่าของ $\left(s.e.\left(\hat{y}^*_k\right)\right)^2$ เป็นค่าประมาณของ $Var\left(\hat{y}^*_k\right)$ โดยมีค่าเท่ากับ

$$
\left(s.e.\left(\hat{y}^*_k\right)\right)^2 = \frac{\hat{s}^{2*}_k}{\sum_{j=1}^{n+1-k}\hat{U}_j}\ , 1 \le k \le n
$$

และ $$\left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2 = \frac{v_i}{n-1}\sum_{j=1}^{n} v_j\left(\frac{\hat{U}_j}{v_j} - \hat{q}\right)^2$$ ด้วย $\hat{q} = \sum_{j=1}^{n}\hat{U}_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} v_j$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณสามารถหาได้โดย

$$
\left(s.e.\left(\hat{R}_i^{BF}\right)\right)^2 = \left(\hat{U}_i^2 + \left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\right)\left(s.e.\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right)^2 + \left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)^2
$$

จากนั้นถ้าหารด้วยค่าเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์โดยจะสังเกตได้ว่า

$$s.e.\left(\hat{R}_i^{BF}\right)/\hat{U}_i \approx s.e.\left(\hat{z}_{n+1-i}^*\right) \quad \text{เมื่อ } \hat{z}_{n+1-i}^* \text{ เข้าใกล้ 1}$$
$$s.e.\left(\hat{R}_i^{BF}\right)/\hat{U}_i \approx s.e.\left(\hat{U}_i\right)/\hat{U}_i \quad \text{เมื่อ } \hat{z}_{n+1-i}^* \text{ เข้าใกล้ 0}$$

ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า สำหรับปีอุบัติเหตุที่ให้พัฒนาการน้อยๆ หรือเป็นปีที่มีการเกิดอุบัติเหตุน้อย ความไม่แน่นอนของการประมาณเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (initial ultimate claim) จะถูกส่งไปยังค่าประมาณเงินสำรองได้โดยตรง

ซึ่งถึงตอนนี้ได้แสดงวิธีการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์สำหรับการประมาณเงินสำรอง ในแต่ละระยะเวลาการเกิดอุบัติเหตุ เช่นเดียวกับวิธีบันไดลูกโซ่ที่สนใจในค่าประมาณเงินสำรองรวมและค่าความแปรปรวน ซึ่งเงินสำรองรวมจากวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน จะเป็นเพียงผลรวมของเงินสำรองที่ได้จากประมาณของแต่ละระยะเวลาการเกิดอุบัติเหตุ $\left(\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + .. + \hat{R}_n^{BF}\right)$ หากต้องการหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ ความแปรปรวนร่วมในจำนวนเงินสำรองที่ประมาณได้นั้นจะต้องถูกนำมาพิจารณาด้วย

จากข้อสมมติและกระบวนการต่างๆ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการประมาณเงินสำรองรวมสามารถประมาณจาก $\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + .. + \hat{R}_n^{BF}$ ดังนี้คือ

$$mse\left(\hat{R}^{BF}\right) = Var\left(\hat{R}^{BF}\right) + Var(R)$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกระบวนการคือ $Var(R) = Var(R_1) + ... + Var(R_n)$ เนื่องจากความเป็นอิสระกันของปีอุบัติเหตุ ตามข้อสมมติที่1 จึงประมาณได้ว่า

$$\hat{V}ar(R) = \sum_{i=i}^{n} \hat{U}_i \left(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + ... + \hat{s}_{n+1}^{2*}\right)$$

และค่าความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณ $\left[Var\left(\hat{R}^{BF}\right)\right]$ จะเข้ามามีส่วนเกี่ยวข้องเพิ่มขึ้นด้วยเพราะว่า $\hat{R}_1^{BF},...,\hat{R}_n^{BF}$ มีความสัมพันธ์กันกับการประมาณค่าของ $\hat{y}_k^*$ จึงได้ว่า

$$Var\left(\hat{R}^{BF}\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right) + 2\sum_{i<j} Cov\left(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}\right)$$

เพราะฉะนั้นค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองของการประมาณเงินสำรองรวมคือ

$$mse\left(\hat{R}^{BF}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{U}_i^2+\left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\right)\left(s.e.\left(\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right)^2+\left(s.e.\left(\hat{U}_i\right)\right)^2\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)^2$$
$$+\ 2\sum_{i<j}Cov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)\ +\ \sum_{i=i}^{n}\hat{U}_i\left(\hat{s}^{2*}_{n+2-i}+\ldots+\hat{s}^{2*}_{n+1}\right)$$

โดยค่า $\sum_{i<j}Cov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)$ สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned}Cov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)&=Cov\left(\hat{U}_i\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right),\hat{U}_j\left(1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)\right)\\&=Cov\left(\hat{U}_i,\hat{U}_j\right)E\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)E\left(1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)\\&\quad+Cov\left(\hat{U}_i,\hat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i},1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)\\&\quad+E\left(\hat{U}\right)E\left(\hat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i},1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)\end{aligned}$$

จากค่าของ $\left\{\hat{U}_i,\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)\right\}$ และ $\left\{\hat{U}_j,\left(1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)\right\}$ ที่เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้นค่าของ $Cov\left(\hat{U}_i,\hat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i},1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)$ สามารถปรับออกได้ จึงได้ว่า

$$Cov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)=Cov\left(\hat{U}_i,\hat{U}_j\right)E\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i}\right)E\left(1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)+E\left(\hat{U}\right)E\left(\hat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*_{n+1-i},1-\hat{z}^*_{n+1-j}\right)$$

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 วิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method)

วิธีการที่ใช้กันทั่วๆไปในการคำนวณเงินสำรองค่าสินไหนทดแทนนั้นก็คือ วิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) ซึ่งวิธีนี้ไม่ต้องใช้โปรแกรมที่ทันสมัยมากนัก ดังนั้นจึงมีความง่ายหากจะเลือกใช้วิธีนี้และจุดเด่นอีกอันหนึ่งของวิธีนี้ คือมีความเป็นไปได้ที่จะมีความสอดคล้องกับรูปแบบสโตแคสติกที่ไม่ระบุรูปแบบของการแจกแจง (distribution-free stochastic) ของตัวแบบแมกด์ (Mack's Model , 1993)

นอกจากการประมาณเงินสำรองค่าสินไหมทดแทนแล้วยังพบว่ามีเรื่องที่สำคัญมากอีกเรื่องหนึ่ง คือความผันแปรของค่าประมาณ จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) มีบทความจำนวนมากได้ทดลองในแนวทางเดียวกัน คือเพื่อให้

สอดคล้องกับ ตัวแบบสโตแคสติก (stochastic) ที่เหมาะกับวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method) ด้วยรูปแบบที่เหมาะสมของตัวแบบสโตแคสติก (stochastic model) สามารถประมาณค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) ของการประมาณได้ โดยที่ผ่านมามีการศึกษาเรื่องในลักษณะนี้ อาทิ Zehnwirth (1989) , Renshaw (1989) , Christofides (1990) ซึ่งที่สุดแล้ววิธีเดียวกันที่ใช้ในการคำนวณ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ที่นำมาใช้เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดของการถดถอย (least squares regression) ซึ่งวิธีนี้ได้ใช้ลอการึทึม (logarithms) ของการเพิ่มขึ้นของค่าสินไหมทดแทนโดยสมมติว่ามีการแจกแจงเป็นแบบลอคนอร์มัล (log Normal distribution) และมีวิธีการหาที่แตกต่างไปเล็กน้อยคือ Wight (1990) นำตัวแบบเชิงเส้นที่วางนัยทั่วไป (generalized linear models) และวิธีสคอร์ (Method of Scoring) มาใช้ ต่อมา Mack (1993) ได้นำเสนอสูตรที่ไม่ได้ระบุการแจกแจง (distribution-free) สำหรับค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ของการประมาณเงินสำรองด้วยวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain-Ladder Method)

งานวิจัยที่นำวิธีบูตสแตรป (bootstrap methodology) มีหลายเรื่องที่ศึกษาเกี่ยวกับการหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) สำหรับวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain Ladder Method) โดยในปี คศ.1999 บทความ “Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving" โดย P. England และ R. Verrall ได้กล่าวถึงความเป็นไปได้ที่จะใช้เทคนิคบูตสแตรป (bootstrap technique) และการเปรียบเทียบกับค่าประมาณของตัวแบบพารามิเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) ซึ่งในการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนเพียรสัน (Pearson residuals) นั้นได้เลือกใช้ค่าความคลาดเคลื่อนเพียรสันที่ปรับแล้ว (adjusting the Pearson residuals) คือ $r_{ij}^{PA} = r_{ij}^{P}\sqrt{n/(n-q)}$

ส่วนวิธีการอื่นที่ได้นำวิธีบูตสแตรป (bootstrap methodology) ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) สำหรับวิธีบันไดลูกโซ่ (Chain Ladder Method) เสนอในบทความชื่อว่า “Bootstrap Methodology in Claims Reserving” เขียนโดย Paulo J.R. Pinheiro João M. Andrade e Silva และ Maria de Lourdes Centeno ผู้เขียนได้เลือกใช้ค่าความคลาดเคลื่อนเพียรสันที่ปรับแล้ว (adjusting the Pearson residuals) คือ $r_{ij}^{PA} = r_{ij}^{P}\cdot\left(1/\sqrt{1-h_{ij}}\right)$ โดยที่ค่า h_{ij} เป็นค่าในเมตริกที่ประมาณได้

จากสองบทความที่อธิบายเกี่ยวกับการนำวิธีบูตสแตรป (bootstrap methodology) มานั้นได้ใช้พื้นฐานจากรูปแบบเชิงเส้นที่วางนัยทั่วไป เช่นเดียวกัน

2.2.2 วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method)

วิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method) มีความคล้ายคลึงบางอย่างกับกระบวนการเบย์เซียน (Bayesian process) เนื่องจากได้มีการประมาณค่าเบื้องต้นของค่าสินไหมทดแทนสมบูรณ์ (prior ultimate claims) ซึ่งได้กำหนดให้มีข้อมูลการแจกแจงไว้ก่อนหน้าที่ผ่านมา โดยในปี คศ.2001 Verrall ได้ใช้วิธีการประมาณค่าแบบเบย์เซียน (Bayesian) ร่วมกับตัวแบบเชิงเส้นที่วางนัยทั่วไปเพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบเบย์เซียน (Bayesian models)

ในบทความ "The Prediction Error of Bornhuetter-Ferguson" ของ Mack (2008) ได้มีการพัฒนาถึงตัวแบบสโตแคสติก (stochastic) ของวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน (Bornhuetter-Ferguson Method) โดยมีการกำหนดรูปแบบของการเพิ่มของค่าสินไหมทดแทน ในแต่ละปีพัฒนาการ $\left(S_{i,k}\right)$ เอาไว้ และจากตัวแบบสโตแคสติก (stochastic) นี้จะหาสูตรสำหรับการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์ (prediction error) ได้

สำหรับการนำวิธีบูตสแตรปมาใช้ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนพยากรณ์สำหรับวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน นั้น ยังไม่มีนักวิจัยใดได้นำเสนอมา งานวิจัยนี้ได้พยายามใช้วิธีการในการหาค่าดังกล่าวและทำการเปรียบเทียบค่าที่ได้ดังกล่าว กับการใช้ตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบันไดลูกโซ่ การใช้ตัวแบบสโตแคสติกของวิธีบอร์นฮูตเทอร์ เฟอร์กูซัน และการใช้วิธีบูตสแตรปของวิธีบันไดลูกโซ่ ด้วย