ภาคผนวก ง

ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรของระบบเศรษฐกิจแบบรวมศูนย์

การแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรอย่างเหมาะสมในระบบเศรษฐกิจแบบรวมศูนย์สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\underset{\{c_{it},d_{it},b_{it}\}}{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{t}W_{it}$$

$$st.F(K_t,L_t)=K_{t+1}-K_t+\sum_{i=1}^{n}c_{it}+\sum_{i=1}^{n}d_{it}+\sum_{i=1}^{n}b_{it} \qquad (ง.1)$$

ใช้วิธีแบบ Lagragian ในการแก้ปัญหาได้คือ

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{t}W_{it}+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[F(K_t,L_t)-K_{t+1}+K_t-\sum_{i=1}^{n}c_{it}-\sum_{i=1}^{n}d_{it}-\sum_{i=1}^{n}b_{it}]$$

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{t}\left\{\alpha\ln c_{it}+(1-\alpha)[\beta\ln d_{it+1}+(1-\beta)\ln b_{it+1}]\right\} \qquad (ง.2)$$
$$+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[AK_t^{\gamma}n^{1-\gamma}-K_{t+1}+K_t-\sum_{i=1}^{n}c_{it}-\sum_{i=1}^{n}d_{it}-\sum_{i=1}^{n}b_{it}]$$

จะได้เงื่อนไขจำเป็นลำดับที่ 1 ดังนี้

$$c_{it}:\frac{\rho^{t}\alpha}{c_{it}}-\lambda_t=0\Rightarrow c_{it}=\frac{\rho^{t}\alpha}{\lambda_t} \qquad (ง.3)$$

$$d_{it}:\frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)\beta}{d_{it}}-\lambda_t=0\Rightarrow d_{it}=\frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)\beta}{\lambda_t} \qquad (ง.4)$$

$$b_{it}:\frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)(1-\beta)}{d_{it}}-\lambda_t=0\Rightarrow b_{it}=\frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)(1-\beta)}{\lambda_t} \qquad (ง.5)$$

$$K_{t+1} : -\lambda_t + \lambda_{t+1}[1+\gamma AK_{t+1}^{\gamma-1}n^{1-\gamma}] \Rightarrow \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{[1+\gamma AK_{t+1}^{\gamma-1}n^{1-\gamma}]} \quad \text{(ง.6)}$$

$$\lambda_t : AK_t^{\gamma}n^{1-\gamma} - K_{t+1} + K_t - \sum_{i=1}^{n} c_{it} - \sum_{i=1}^{n} d_{it} - \sum_{i=1}^{n} b_{it} = 0 \quad \text{(ง.7)}$$

แทนค่า (ง.3) – (ง.5) ลงใน (ง.7) โดยกำหนดให้การสะสมทุนอยู่ในสภาวะคงตัวซึ่งจะได้ว่า $K_{t+1} = K_t$ จะได้ตัวคูณลากรานจ์ (λ_t) เป็น

$$AK_t^{\gamma}n^{1-\gamma} = \frac{\rho^{t-1}\sum_{i=1}^{n}[\rho\alpha + (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)]}{\lambda_t}$$
$$\lambda_t = \frac{\rho^{t-1}[\rho\alpha + 1 - \alpha]}{Ak_t^{\gamma}} \quad \text{(ง.8)}$$

แทนค่า $\lambda_t = \frac{\rho^{t-1}[\rho\alpha + 1 - \alpha]}{Ak_t^{\gamma}}$ จาก (ง.8) ลงใน (ง.3) – (ง.5) จะได้การจัดสรรทรัพยากรที่เหมาะสม (Pareto optimal path) ต่อหัวคือ

$$c_{it} = \frac{\rho^t\alpha}{\lambda_t} = \frac{(Ak_t^{\gamma})\rho\alpha}{[\rho\alpha + 1 - \alpha]}$$
$$d_{it} = \frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)\beta}{\lambda_t} = \frac{(Ak_t^{\gamma})(1-\alpha)\beta}{[\rho\alpha + 1 - \alpha]} \quad \text{(ง.9)}$$
$$b_{it} = \frac{\rho^{t-1}(1-\alpha)(1-\beta)}{\lambda_t} = \frac{(Ak_t^{\gamma})(1-\alpha)(1-\beta)}{[\rho\alpha + 1 - \alpha]}$$

และจาก (ง.6) $\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{[1+r_{t+1}]}$ จะสามารถแสดงการจัดสรรทรัพยากรที่เวลา t+1 ได้เป็น

$$d_{it+1} = \frac{\rho^t(1-\alpha)\beta}{\lambda_{t+1}} = \frac{\rho(Ak_t^{\gamma})(1-\alpha)\beta(1+r_{t+1})}{[\rho\alpha + 1 - \alpha]}$$
$$b_{it+1} = \frac{\rho^t(1-\alpha)(1-\beta)}{\lambda_{t+1}} = \frac{\rho(Ak_t^{\gamma})(1-\alpha)(1-\beta)(1+r_{t+1})}{[\rho\alpha + 1 - \alpha]} \quad \text{(ง.10)}$$