

ภาคผนวก ก

การหาอรรถประโยชน์สูงสุดของปัญหาผู้บริโภค

พิจารณาเงื่อนไขของรายได้ (Budget constraints) ในแต่ละช่วงวัยดังนี้

$$\text{วัยหนุ่ม:} \quad (1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t = c_{it} + s_{it} \quad (\text{ก.1})$$

$$\text{วัยชรา:} \quad s_{it}(1 + r_{t+1}) = d_{it+1} + (1 + \tau_b)b_{it+1} \quad (\text{ก.2})$$

ซึ่งเงื่อนไขทางรายได้ดังกล่าวสามารถนำมารวมกัน เพื่อสร้างเป็นเงื่อนไขของรายได้ตลอดชีวิต (Lifetime budget constraint) โดยการนำ $1 + r_{t+1}$ หารสมการ (ก.2) และนำ s_{it} แทนเข้าไปใน (ก.1) ได้ดังนี้

$$(1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t = c_{it} + \frac{d_{it+1}}{1 + r_{t+1}} + \frac{(1 + \tau_b)b_{it+1}}{1 + r_{t+1}} \quad (\text{ก.3})$$

การหาอรรถประโยชน์สูงสุดของผู้บริโภคภายใต้ตลาดแข่งขัน (Competitive market) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\{c_{it}, d_{it+1}, b_{it+1}\}} \quad & \alpha \ln c_{it} + (1 - \alpha)[\beta \ln d_{it+1} + (1 - \beta) \ln b_{it+1}] \\ & (\text{ก.4}) \end{aligned}$$

$$\text{st.} (1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t = c_{it} + \frac{d_{it+1}}{1 + r_{t+1}} + \frac{(1 + \tau_b)b_{it+1}}{1 + r_{t+1}}$$

ใช้เทคนิค Lagrangian จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L = & \alpha \ln c_{it} + (1 - \alpha)[\beta \ln d_{it+1} + (1 - \beta) \ln b_{it+1}] + \lambda_{it} [(1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t \\ & - c_{it} - \frac{d_{it+1}}{1 + r_{t+1}} - \frac{(1 + \tau_b)b_{it+1}}{1 + r_{t+1}}] \end{aligned} \quad (\text{ก.5})$$

จะได้เงื่อนไขจำเป็นลำดับที่ 1 (First order necessary condition) คือ

$$c_{it} : \frac{\alpha}{c_{it}} - \lambda_{it} = 0 \Rightarrow c_{it} = \frac{\alpha}{\lambda_{it}} \quad (\text{ก.6})$$

$$d_{it+1} : \frac{(1-\alpha)\beta}{d_{it+1}} - \frac{\lambda_{it}}{1+r_{t+1}} = 0 \Rightarrow d_{it+1} = \frac{(1-\alpha)\beta(1+r_{t+1})}{\lambda_{it}} \quad (\text{ก.7})$$

$$b_{it+1} : \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{b_{it+1}} - \frac{\lambda_{it}(1+\tau_b)}{1+r_{t+1}} = 0 \Rightarrow b_{it+1} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1+r_{t+1})}{(1+\tau_b)\lambda_{it}} \quad (\text{ก.8})$$

$$\lambda_{it} : (1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t - c_{it} - \frac{d_{it+1}}{1+r_{t+1}} - \frac{(1+\tau_b)b_{it+1}}{1+r_{t+1}} = 0 \quad (\text{ก.9})$$

แทนค่า (ก.6) – (ก.8) ลงใน (ก.9), จะได้ตัวแปร λ_{it} คือ

$$(1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t = \frac{\alpha}{\lambda_{it}} + \frac{(1-\alpha)\beta}{\lambda_{it}} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\lambda_{it}} \quad (\text{ก.10})$$

$$\lambda_{it} = \frac{1}{(1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t}$$

แทนค่าตัวแปร λ_{it} จาก (ก.10) กลับไปใน (ก.6) – (ก.8) จะได้ว่า

$$c_{it} = \alpha[(1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t]$$

$$d_{it+1} = (1-\alpha)\beta(1+r_{t+1})[(1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t] \quad (\text{ก.11})$$

$$b_{it+1} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1+r_{t+1})}{(1+\tau_b)}[(1-\tau_w)w_t + (1-\tau_e)b_{it} + g_t]$$

ดังนั้นสามารถหาสมการการออม (Saving function) ในวัยหนุ่มได้โดยแทนค่าการบริโภคในวัยหนุ่ม c_{it} จาก (ก.11) กลับไปใน (ก.1) จะได้สมการการออมตาม (ก.12)

$$s_{it} = (1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t - c_{it}$$

$$s_{it} = (1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t - \alpha[(1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t] \quad (\text{ก.12})$$

$$s_{it} = (1 - \alpha)[(1 - \tau_w)w_t + (1 - \tau_e)b_{it} + g_t]$$

นำ (ก.12) ไปแทนค่าใน (ก.11) จะได้การบริโภควัยชรา (d_{it+1}) และมรดก (b_{it+1}) ในรูปแบบของสมการการออมดังแสดงใน (ก.13)

$$d_{it+1} = \beta(1 + r_{t+1})s_{it} \quad (\text{ก.13})$$

$$b_{it+1} = \frac{(1 - \beta)(1 + r_{t+1})}{(1 + \tau_b)} s_{it}$$