



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

ปริญญา

คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง การศึกษาของอนุพันธ์บนพีชคณิตบูลีน

Study of Derivations on Boolean Algebras

นามผู้วิจัย นายธนากร บุญพันธ์

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์อูษณีย์ ธีระวัฒน์, วท.ค.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์สุริยา ณ หนองคาย, Dr.rer.nat.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา วีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาของอนุพันธ์บนพีชคณิตบูลีน

Study of Derivations on Boolean Algebras

โดย

นายธนากร บุญพันธ์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

พ.ศ. 2556

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ธนกร บุญพันธ์ 2556: การศึกษาของอนุพันธ์บนพีชคณิตบูลีน ปริญาวิทยาสตร
มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรัตน์, วท.ด. 107 หน้า

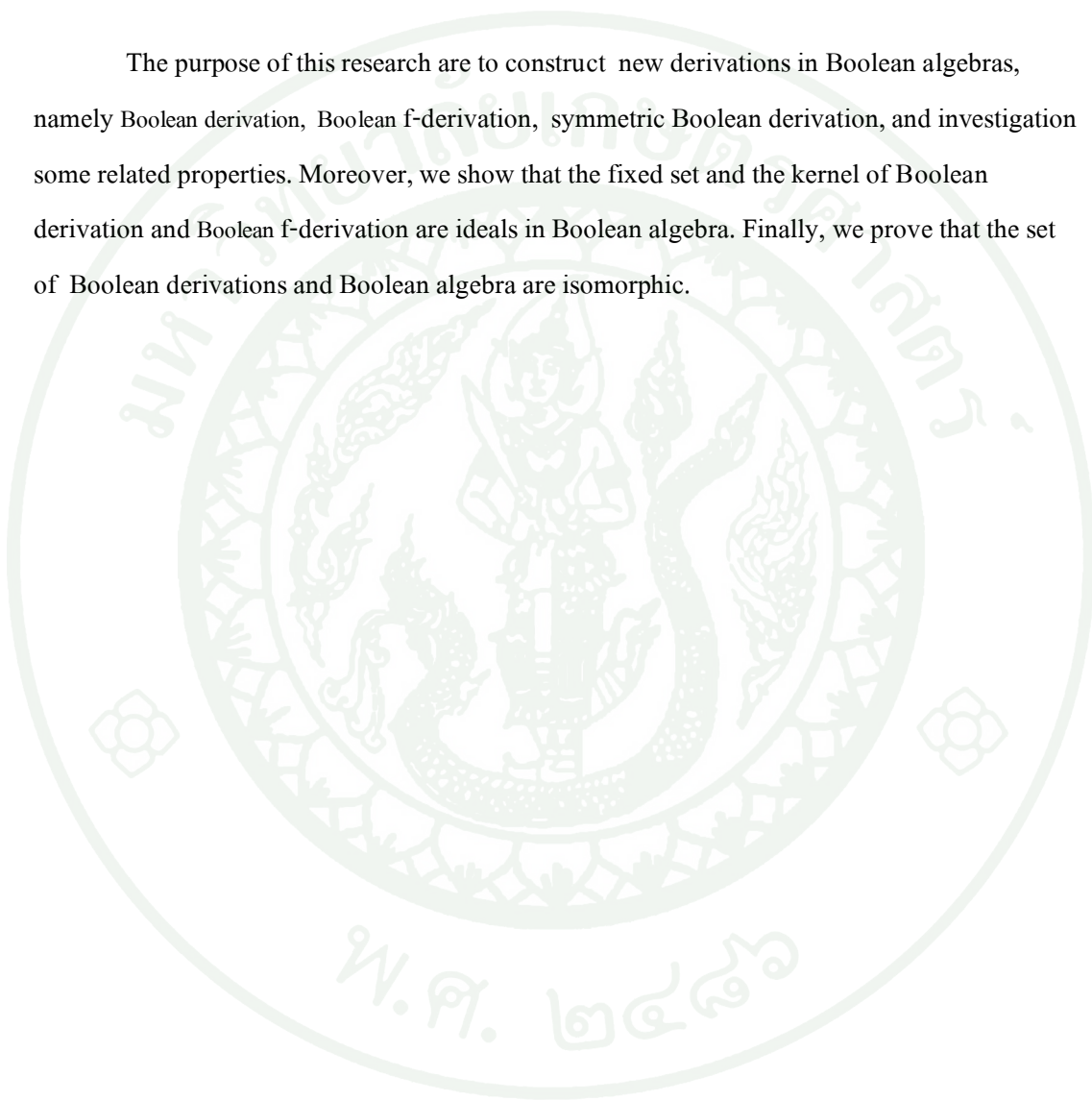
งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายสร้างอนุพันธ์รูปแบบใหม่บนพีชคณิตบูลีน ที่มีชื่อว่า Boolean
derivation, Boolean f-derivation และ symmetric Boolean derivation พร้อมทั้งตรวจสอบสมบัติ
ต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้เราได้แสดงว่า fixed set และ kernel ของ Boolean derivation และ
Boolean f-derivation เป็นไอดีลในพีชคณิตบูลีน ในตอนท้ายได้พิสูจน์ว่าเซตของ Boolean
derivation สมมูลฐานกับพีชคณิตบูลีน

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Thanakorn Bunphan 2013: Study of Derivations on Boolean Algebras. Master of Science (Mathematics), Major Field: Mathematics, Department of Mathematics. Thesis Advisor: Associate Professor Utsanee Leerawat, Ph.D. 107 pages.

The purpose of this research are to construct new derivations in Boolean algebras, namely Boolean derivation, Boolean f-derivation, symmetric Boolean derivation, and investigation some related properties. Moreover, we show that the fixed set and the kernel of Boolean derivation and Boolean f-derivation are ideals in Boolean algebra. Finally, we prove that the set of Boolean derivations and Boolean algebra are isomorphic.



_____ / _____ / _____
Student's signature Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อุษณีย์ ลีรวินทร์ ประธานกรรมการที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้เอาใจใส่ให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด รองศาสตราจารย์กรรณิกา คงสาคร
ประธานกรรมการสอบ และรองศาสตราจารย์วันดา ศรีแสงทอง ผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้กรุณาให้
คำแนะนำ ข้อคิดเห็น ตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งจนกระทั่งผู้วิจัย
สามารถดำเนินการวิจัยได้สำเร็จสมบูรณ์ จึงกราบขอพระคุณอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณบัณฑิตศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ที่สนับสนุน
ทุนการศึกษาในการศึกษาในระดับปริญญาโทนี้

ขอขอบคุณอาจารย์และเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนครอบครัวที่คอยช่วยเหลือ
สนับสนุนและให้กำลังใจตลอดเวลาในการศึกษา

ประโยชน์อันเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะพึงมีเพียงใด ขอมอบแก่คุณพ่อคุณแม่และ
คณาจารย์ทุกท่านที่ได้เมตตาอบรมสั่งสอนให้มีความรู้จนถึงปัจจุบัน

ธนากร บุญพันธ์
มีนาคม 2556

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	5
การตรวจเอกสาร	6
วิธีการ	27
ผลการวิจัย	38
สรุป	98
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	104
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	107

การศึกษาของอนุพันธ์บนพีชคณิตบูลีน

Study of Derivations on Boolean Algebras

คำนำ

แนวคิดของอนุพันธ์ (derivation) ได้รับการพัฒนามาจากทฤษฎีการวิเคราะห์ (analytic theory) ซึ่งถือได้ว่ามีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่างๆ ในระบบพีชคณิต (algebraic system) สำหรับการศึกษาอนุพันธ์ เริ่มแรกได้มีการศึกษาอนุพันธ์ในแคลคูลัส (calculus) เรียกว่า แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (differential calculus) ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน อัตราการเปลี่ยนแปลง ความเร็ว ความเร่ง การเขียนกราฟเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด เป็นต้น ต่อมานักคณิตศาสตร์หลายท่าน (Bell and Kappe, 1989; Kaya, 1988; Bell and Mason, 1987; Posner, 1957) ได้ศึกษาอนุพันธ์บนริง (ring) ถ้า $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $d: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่าอนุพันธ์ ถ้า d สอดคล้องกับเงื่อนไข $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ และ $d(x + y) = d(x) + d(y)$ สำหรับทุก $x, y \in R$ หลังจากนั้นได้มีการพัฒนาแนวคิดการศึกษาอนุพันธ์บนริงไปยังโครงสร้างพีชคณิตอื่นๆ อาทิเช่น BCI-algebra, BCC-algebra, BCK-algebra, MV-algebra, แลตทิซ (lattice) เป็นต้น

ในปี ค.ศ.2004 Jun and Xin ได้ศึกษาอนุพันธ์บน BCI-algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra นิยาม $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $d: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l, r) -derivation) ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก d ว่า right-left-derivation (หรือ (r, l) -derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า d เป็นทั้ง (l, r) -derivation และ (r, l) -derivation เรียก d ว่า derivation ต่อมาในปี ค.ศ. 2005 Zhan and Liu ได้ขยายแนวคิดของอนุพันธ์บน BCI-algebra โดยได้ศึกษาและให้แนวคิดของ left-right (right-left) f -derivation บน BCI algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra และ $d_f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ f เป็น endomorphism ของ X เรียก d_f ว่า left-right f -derivation (หรือ (l, r) - f -derivation) ถ้า $d_f(xy) = (d_f(x)f(y)) \wedge (f(x)d_f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก d_f ว่า right-left f -derivation (หรือ (r, l) - f -derivation) ถ้า $d_f(xy) = (f(x)d_f(y)) \wedge (d_f(x)f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า d_f เป็นทั้ง (l, r) - f -derivation และ (r, l) - f -derivation จะเรียก d_f ว่า f -derivation จากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Hamza and Alshehri ได้นิยามอนุพันธ์ทางซ้าย (left

derivation) บน BCI-algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra และ $D: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เรียก D ว่า left derivation ถ้า $D(xy) = xD(y) \wedge yD(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2009 Nisar ได้ให้แนวคิดของ right F-derivation และ left F-derivation บน BCI algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra และ $D_F: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism ของ X เรียก D_F ว่า right F-derivation ถ้า $D_F(xy) = (F(x)D_F(y)) \wedge (F(y)D_F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก D_F ว่า left F-derivation ถ้า $D_F(xy) = (D_F(x)F(y)) \wedge (D_F(y)F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า D_F เป็นทั้ง right F-derivation และ left F-derivation จะเรียก D_F ว่า F-derivation

ในปี ค.ศ. 2009 Prabprayak and Leerawat ได้ศึกษาอนุพันธ์บน BCC-algebra ถ้า G เป็น BCC-algebra และ $d: G \rightarrow G$ เป็นฟังก์ชัน เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l, r) -derivation) ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ เรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r, l) -derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ และถ้า d เป็นทั้ง (l, r) -derivation และ (r, l) -derivation เรียก d ว่า derivation พร้อมทั้งหาสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 2010 Alshehri ได้ศึกษาอนุพันธ์บน MV-algebra ถ้า M เป็น MV-algebra และ $d: M \rightarrow M$ เป็นฟังก์ชัน นิยาม $x \circ y = (x^* + y^*)^*$ เรียก d ว่า derivation บน M ถ้า $d(x \circ y) = (d(x) \circ y) + (x \circ d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in M$ พร้อมทั้งหาสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 2008 Xin *et al.* ได้ศึกษาและให้แนวคิดของอนุพันธ์บนแลตทิซ ถ้า L เป็นแลตทิซ และ $d: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$ เรียก d ว่า derivation พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2011 Harmaitree and Leerawat ได้ศึกษาและให้แนวคิดเกี่ยวกับอนุพันธ์บนแลตทิซ ที่มีชื่อว่า f -derivation ถ้า L เป็นแลตทิซ และ $f: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน เรียกฟังก์ชัน $d: L \rightarrow L$ ว่า f -derivation ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$ พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

นักคณิตศาสตร์หลายท่าน (Ozturk and Sapancy, 1999; Sapancy *et al.*, 1999; Vukman, 1989; Ozturk and Jun, 2004) ได้ให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บนริง ถ้า $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $D: R \times R \rightarrow R$ เป็น symmetric function เรียก D ว่า symmetric bi-derivation บน R ถ้า $D(xy, z) = (D(x, z)y) + (xD(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in R$ หลังจากนั้นได้มีการพัฒนาแนวคิดของ symmetric bi-derivation บนริงไปยังโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ

ในปี ค.ศ. 2009 Ceven ได้พัฒนาแนวคิดการศึกษา symmetric bi-derivation บนริงไปบนบนแลตทิซ ถ้า L เป็นแลตทิซ และ $D: L \times L \rightarrow L$ เป็น symmetric function เรียก D ว่า symmetric bi-derivation บน L ถ้า $D(x \wedge y, z) = (D(x, z) \wedge y) \vee (x \wedge D(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in L$

ในปี ค.ศ. 2011 Ildira *et al.* ได้ศึกษาและให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บน BCI-algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra และ $D: X \times X \rightarrow X$ เป็น symmetric function เรียก D ว่า (l, r) -symmetric bi-derivation ถ้า $D(xy, z) = (D(x, z)y) \wedge (xD(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และเรียก D ว่า (r, l) -symmetric bi-derivation ถ้า $D(xy, z) = (xD(y, z)) \wedge (D(x, z)y)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และถ้า d เป็นทั้ง (l, r) -symmetric bi-derivation และ (r, l) -symmetric bi-derivation จะเรียก d ว่า symmetric bi-derivation

ในปี ค.ศ. 2011 Ozbal and Firat ได้ให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บน incline algebra ถ้า X เป็น incline algebra และ $D: X \times X \rightarrow X$ เป็น symmetric function จะเรียก D ว่า symmetric bi-derivation บน X ถ้า $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น เป็นการศึกษาอนุพันธ์บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะอาศัยแนวคิดข้างต้นมาประยุกต์ใช้กับโครงสร้างพีชคณิตชนิดหนึ่ง ที่มีชื่อว่า พีชคณิตบูลีน (Boolean algebra (หรือ Boolean))

พีชคณิตบูลีน เป็นโครงสร้างพีชคณิตชนิดหนึ่ง ซึ่งมีนิยามดังนี้ ถ้า B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $B \neq \emptyset$ กำหนดให้ \wedge (อ่านว่า “meet” หรือ “and”) และ \vee (อ่านว่า “join” หรือ “or”) เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน B และ $'$ (อ่านว่า “complement”) เป็นการดำเนินการเอกภาค (unary operation) บน B และ $0, 1$ เป็นสมาชิกของ B เราจะกล่าวว่า $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra (หรือ Boolean) ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in B$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x = x \wedge (x \vee y), \quad x = x \vee (x \wedge y)$
5. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. $x \wedge 1 = x$ และ $x \vee 0 = x$

7. สำหรับแต่ละ $x \in B$ จะมี $x' \in B$ ที่ทำให้ $x \wedge x' = 0$ และ $x \vee x' = 1$

พีชคณิตบูลีนถือได้ว่าเป็นพีชคณิตที่มีประโยชน์ต่อการศึกษาทางตรรกศาสตร์ (logic) ทั้งตรรกะทางด้านความคิดของมนุษย์ และตรรกะทางด้านระบบดิจิทัลของคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้พีชคณิตบูลีนยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการต่อวงจรไฟฟ้าต่างๆ อีกด้วย

จุดประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้ คือ การอาศัยแนวคิดของอนุพันธ์บนโครงสร้างพีชคณิต BCI-algebra, BCC-algebra, MV-algebra และแลตทิซ มาประยุกต์ใช้กับพีชคณิตบูลีน และสร้างอนุพันธ์รูปแบบใหม่บนพีชคณิตบูลีน ที่มีชื่อว่า Boolean derivation และ Boolean f-derivation พร้อมทั้งตรวจสอบความเป็นไปได้ของอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นบนพีชคณิตบูลีน รวมทั้งสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ผู้วิจัยได้นำแนวคิดเกี่ยวกับ symmetric bi-derivation บนโครงสร้างพีชคณิต BCI-algebra, incline algebra และแลตทิซ มาประยุกต์ใช้กับพีชคณิตบูลีน และสร้าง symmetric bi-derivation รูปแบบใหม่ที่มีชื่อว่า symmetric Boolean derivation พร้อมทั้งตรวจสอบความเป็นไปได้ของอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นบนพีชคณิตบูลีน รวมทั้งสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

วัตถุประสงค์

1. ศึกษาอนุพันธ์บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ อาทิเช่น BCI-algebra BCC-algebra BCK-algebra MV-algebra แลตทิซ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. สร้างอนุพันธ์ใหม่บนพีชคณิตบูลีน

3. สร้างตัวอย่างและตรวจสอบความเป็นไปได้ของอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นบนพีชคณิตบูลีนในข้อ 2

4. หาสมบัติต่างๆ ของอนุพันธ์ที่สร้างบนพีชคณิตบูลีน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รวบรวมองค์ความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ

2. ได้อนุพันธ์ใหม่บนพีชคณิตบูลีน

3. ได้ตัวอย่างของอนุพันธ์บนพีชคณิตบูลีนที่สร้างขึ้นในข้อ 2

4. ได้สมบัติต่างๆ ของอนุพันธ์ใหม่บนพีชคณิตบูลีน

การตรวจเอกสาร

การวิจัยครั้งนี้มีบทนิยาม ทฤษฎีบท ความรู้พื้นฐาน และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ Boolean algebras
2. งานวิจัยเกี่ยวกับ derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ
 - 2.1. ผลงานของ Jun and Xin (2004)
 - 2.2. ผลงานของ Hamza and Alshehri (2007)
 - 2.3. ผลงานของ Xin *et al.* (2008)
 - 2.4. ผลงานของ Prabpayak and Leerawat (2009)
 - 2.5. ผลงานของ Alshehri (2010)
3. งานวิจัยเกี่ยวกับ f-derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ
 - 3.1. ผลงานของ Zhan and Liu (2005)
 - 3.2. ผลงานของ Nisar (2009)
 - 3.3. ผลงานของ Harmaitree and Leerawat (2011)
4. งานวิจัยเกี่ยวกับ symmetric bi-derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ
 - 4.1. ผลงานของ Ceven (2009)
 - 4.2. ผลงานของ Ildira *et al.* (2011)
 - 4.3. ผลงานของ Ozbal and Firat (2011)

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ Boolean algebras

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ $*$: $A \times A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน และถ้า $*$ $((a, b)) = c$ จะเขียนแทนด้วย $a * b = c$

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A, B \neq \emptyset$ ความสัมพันธ์ (relation) จาก A ไปยัง B คือ สับเซตของ $A \times B$

ถ้า R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ $(a, b) \in R$ โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ จะเขียนแทนด้วย aRb และจะเรียก aRb ว่า a มีความสัมพันธ์ R กับ b

ข้อสังเกต สำหรับกรณีที่ $A = B$ จะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์บน A

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \neq \emptyset$ กำหนดให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A และสำหรับทุก $a, b, c \in A$ จะกล่าวว่า

1. R มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ก็ต่อเมื่อ aRa
2. R มีสมบัตินสมมาตร (symmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า aRb แล้ว bRa
3. R มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ก็ต่อเมื่อ ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc
4. R มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ aRb และ bRa แล้ว $a = b$

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence) บน A ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัตินสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \neq \emptyset$ และ R เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก R ว่า partial order บน A ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัติปฏิสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \neq \emptyset$ ถ้า R เป็น partial order บน A จะเรียก (A, R) ว่า partially ordered set

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บน A แล้ว R เป็น congruence บน A ก็ต่อเมื่อ R สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A
2. สำหรับทุก $a, b, c, d \in A$ ถ้า aRb และ cRd แล้ว $(ac)R(bd)$

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆ และ \leq เป็นความสัมพันธ์บน A โดยที่ \leq เป็น partial order บน A จะเรียก \leq ว่า total order (หรือ linear order) บน A ถ้า สำหรับทุก $a, b \in A$ แล้ว $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ อย่างใดอย่างหนึ่ง และเรียก (A, \leq) ว่า total ordered set หรือ chain

บทนิยาม ให้ (A, \leq) เป็น partially ordered set

1. จะกล่าวว่า $a \in A$ เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด (greatest element) ของ A ถ้า $x \leq a$ สำหรับทุก $x \in A$

2. จะกล่าวว่า $a \in A$ เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด (smallest element) ของ A ถ้า $a \leq x$ สำหรับทุก $x \in A$

บทนิยาม ให้ (A, \leq) เป็น partially ordered set และ $B \subseteq A$

1. จะกล่าวว่า $a \in A$ เป็นค่าขอบเขตบน (upper bound) ของ B ก็ต่อเมื่อ $b \leq a$ สำหรับทุก $b \in B$
2. จะกล่าวว่า $a \in A$ เป็นค่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของ B ก็ต่อเมื่อ $a \leq b$ สำหรับทุก $b \in B$
3. จะกล่าวว่า $u \in A$ เป็นค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (supremum) ของ B ถ้า
 - 3.1. $b \leq u$ สำหรับทุก $b \in B$ และ
 - 3.2. ให้ v เป็นค่าขอบเขตบนของ B จะได้ว่า $u \leq v$
4. เรียก $w \in A$ ว่า ค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุด (infimum) ของ B ถ้า
 - 4.1. $w \leq b$ สำหรับทุก $b \in B$ และ
 - 4.2. ให้ v เป็นค่าขอบเขตล่างบนของ B จะได้ว่า $v \leq w$

ข้อตกลง ค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของ B เขียนแทนด้วย $\sup B$ และค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุดของ B เขียนแทนด้วย $\inf B$

บทนิยาม ให้ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $B \neq \emptyset$ กำหนดให้ \wedge (อ่านว่า “meet” หรือ “and”) และ \vee (อ่านว่า “join” หรือ “or”) เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน B และ $'$ (อ่านว่า “complement”) เป็นการดำเนินการเอกภาพ (unary operation) และ $0, 1$ เป็นสมาชิกของ B เราจะกล่าวว่า $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra (หรือ Boolean) ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in B$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x = x \wedge (x \vee y), \quad x = x \vee (x \wedge y)$
5. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. $x \wedge 1 = x$ และ $x \vee 0 = x$
7. สำหรับแต่ละ $x \in B$ จะมี $x' \in B$ ที่ทำให้ $x \wedge x' = 0$ และ $x \vee x' = 1$

ข้อตกลง การเขียน B เป็น Boolean algebra จะหมายถึง $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra

บทนิยาม ให้ B เป็น Boolean algebra และกำหนดความสัมพันธ์ \leq บน B โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \wedge y = x$ และ $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

บทนิยาม ให้ A, B เป็น Boolean algebra และ $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x, y \in A$

1. จะกล่าวว่า f เป็น meet-homomorphism ถ้า $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
2. จะกล่าวว่า f เป็น join-homomorphism ถ้า $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
4. จะกล่าวว่า f เป็น order-preserving ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$

บทนิยาม ให้ A, B เป็น Boolean algebra และ $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f เป็น Boolean homomorphism ถ้า

1. f เป็นทั้ง meet-homomorphism และ join-homomorphism
2. $f(x') = (f(x))'$ สำหรับทุก $x \in A$

บทนิยาม ให้ B เป็น Boolean algebra และ $I \subseteq B$ โดยที่ $I \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า I เป็นไอดีล (ideal) ของ B ถ้า สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ถ้า $x \in I$ และ $b \in B$ แล้ว $x \wedge b \in I$
2. $x \vee y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$

2. งานวิจัยเกี่ยวกับ derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ

2.1. ผลงานของ Jun and Xin (2004)

Jun and Xin (2004) ได้ให้แนวคิดของ left-right (right-left) derivation บน BCI algebra และแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ โดยที่ $X \neq \emptyset$ และ $0 \in X$ กำหนดให้ \cdot เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X, \cdot, 0)$ ว่า BCI-algebra ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in X$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(zy) = 0$
2. $(x(xy))y = 0$

3. $xx = 0$
4. ถ้า $xy = yx$ แล้ว $x = y$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดความสัมพันธ์ \leq โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra จะได้ว่า

1. $X_+ = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$
2. $G(X) = \{x \in X \mid 0x = x\}$
3. ถ้า $X_+ = \{0\}$ แล้วจะเรียก X ว่า p-semisimple BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า left-right derivation ((l, r)-derivation) ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกันจะเรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r, l)-derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า d เป็นทั้ง (l, r)-derivation และ (r, l)-derivation จะเรียก d ว่า derivation

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d(x) = 0(0x)$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น (l, r)-derivation บน X และถ้า X เป็น commutative แล้ว d เป็น (r, l)-derivation บน X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็น (l, r)-derivation ของ X แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in X$
 2. ถ้า d เป็น (r, l)-derivation ของ X แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
- ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (l, r) -derivation ของ X แล้วจะได้ว่า

1. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $d(x)y \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $d(xy) = d(x)y \leq d(x)d(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $d^{-1}(0) = \{x \in X \mid d(x) = 0\}$ เป็น subalgebra ของ X และ $d^{-1}(0) \subseteq X_+$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

2.2. ผลงานของ Hamza and Alshehri (2007)

Hamza and Alshehri (2007) ได้ศึกษาแนวคิดของ left-derivation บน BCI-algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $D : X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก D ว่า left derivation ถ้า $D(xy) = xD(y) \wedge yD(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation บน X แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

1. $xD(x) = yD(y)$
2. $D(x) = D(x) \wedge x$
3. $y(yD(x)) = D(x)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Alshehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้วจะได้ว่า

1. $D(x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $D(0) = 0$
2. $D(x) \in G(X)$ สำหรับทุก $x \in G(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Alshehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p -semisimple BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้ว สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. $D(xy) = xD(y)$
2. $D(x)x = D(y)y$
3. $D(x)x = yD(y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Alshehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p -semisimple BCI-algebra แล้ว D เป็น left derivation ของ X ก็ต่อเมื่อ D เป็น derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Alshehri (2007)

2.3. ผลงานของ Xin *et al.* (2008)

Xin *et al.* (2008) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของแลตทิซ พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ยังได้แสดงลักษณะเฉพาะของ modular lattice และ distributive lattice โดยใช้เงื่อนไขการเป็น isotone derivation

บทนิยาม ให้ L เป็นเซตใดๆ โดยที่ $L \neq \emptyset$ กำหนดให้ \wedge และ \vee เป็นการดำเนินการทวิภาคบน L จะกล่าวว่า (L, \wedge, \vee) เป็นแลตทิซ ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in L$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$
3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
4. $(x \wedge y) \vee x = x, \quad (x \vee y) \wedge x = x$

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $x, y, z \in L$

1. จะเรียก L ว่า distributive ถ้า $x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ หรือ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2. จะเรียก L ว่า modular ถ้า $x \leq z$ แล้ว $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $d: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน เรียก d ว่า derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น derivation บน L แล้วจะได้ว่า

1. $dx \leq x$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $dx = dx \vee (x \wedge d(x \vee y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. ถ้า I เป็นไอดีลของ X แล้ว $dI \subseteq I$
5. ถ้า L มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และมี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด แล้ว $d0 = 0$ และ $d1 = 1$
6. ถ้า $y \leq x$ และ $dx = x$ แล้ว $dy = y$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น derivation บน L ถ้า L มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด แล้ว

1. $dx = (x \wedge d1) \vee dx$ สำหรับทุก $x \in L$
2. ถ้า $x \geq d1$ แล้ว $dx \geq d1$
3. ถ้า $x \leq d1$ แล้ว $dx = x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซและ d เป็น derivation บน L กำหนดให้ $d^2x = d(dx)$ สำหรับทุก $x \in L$ แล้วจะได้ว่า $d^2(x) = d(x)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดและ d เป็น derivation บน L แล้วจะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation

2. $dx = x \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $dx \vee dy \leq d(x \wedge y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น derivation บน L แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. ถ้า $dx = x$ แล้ว $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น distributive lattice และ d เป็น derivation บน L แล้วจะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al.* (2008)

2.4. ผลงานของ Prabpayak and Leerawat (2009)

Prabpayak and Leerawat (2009) ได้ศึกษาอนุพันธ์บน BCC-algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ของอนุพันธ์บน BCC-algebra

บทนิยาม ให้ G เป็นเซตใดๆ โดยที่ $G \neq \emptyset$ และ $0 \in G$ กำหนดให้ \cdot เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G จะเรียก $(G, \cdot, 0)$ ว่า BCC-algebra ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in G$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(zy))(xz) = 0$
2. $0x = 0$

3. $x0 = 0$
4. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra กำหนดความสัมพันธ์ \leq บน G โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ $d: G \rightarrow G$ เป็นฟังก์ชัน เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l, r)-derivation) ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ ในทำนองเดียวกันเรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r, l)-derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ และถ้า d เป็นทั้ง (l, r)-derivation และ (r, l)-derivation จะเรียก d ว่า derivation

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ $d: G \rightarrow G$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็น (l, r)-derivation ของ G แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in G$
2. ถ้า d เป็น (r, l)-derivation ของ G แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็น derivation บน G จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in G$

1. $d(x) \leq x$
2. $d(xy) \leq d(x)y$
3. $d(xy) \leq xd(y)$
4. $d(xd(x)) = 0$
5. $d(d(x)) \leq 0$
6. $d^{-1}(0) = \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น derivation บน G กำหนดให้ $x \in G$ จะได้ว่า $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x)))\dots)) \leq x$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

2.5. ผลงานของ Alshehri (2010)

Alshehri (2010) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์บน MV-algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ของอนุพันธ์บน MV-algebra

บทนิยาม ให้ M เป็นเซตใดๆ โดยที่ $M \neq \emptyset$ กำหนดให้ $+$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน M และ $*$ เป็นการดำเนินการเอกภาคบน M และ $0 \in M$ จะเรียก $(M, +, *, 0)$ เรียกว่า MV-algebra ถ้าสำหรับทุก $x, y \in M$ สอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $(M, +, 0)$ เป็น commutative monoid
2. $(x^*)^* = x$
3. $0^* + x = 0^*$
4. $(x^* + y)^* + y = (y^* + x)^* + x$

บทนิยาม ให้ M เป็น MV-algebra และ $d: M \rightarrow M$ เป็นฟังก์ชัน กำหนดให้ $x \circ y = (x^* + y^*)^*$ เรียก d ว่า derivation บน M ถ้า $d(x \circ y) = (d(x) \circ y) + (x \circ d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in M$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ทฤษฎีบท ให้ M เป็น MV-algebra และ d เป็น derivation บน M แล้วจะได้ว่า

1. $d0 = 0$
2. $dx \leq x$ สำหรับทุก $x \in M$
3. $dx = dx + (x \circ d1)$ สำหรับทุก $x \in M$
4. $dx \circ x^* = x \circ dx^* = dx \circ dx^* = 0$ สำหรับทุก $x \in M$
5. $dx^* = (dx)^*$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น identity บน M
6. ถ้า I เป็นไอดีลของ M แล้ว $d(I) \subseteq I$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ M เป็น MV-algebra และ d เป็น derivation บน M ถ้า $x, y \in M$ โดยที่ $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า

1. $d(x \circ y^*) = 0$
2. $dy^* \leq x^*$
3. $dx \circ dy^* = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

บทนิยาม ให้ M เป็น MV-algebra และ d เป็น derivation บน M เรียก d ว่า isotone derivation ถ้า $x \leq y$ แล้ว $dx \leq dy$ สำหรับทุก $x, y \in M$

ทฤษฎีบท ให้ M เป็น MV-algebra และ d เป็น derivation บน M ถ้า $dx^* = dx$ สำหรับทุก $x \in M$ แล้วจะได้ว่า

1. $d1 = 0$
2. $dx \circ dx = 0$
3. ถ้า d เป็น isotone derivation บน M แล้ว $dx = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

3. งานวิจัยเกี่ยวกับ f-derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ

3.1. ผลงานของ Zhan and Liu (2005)

Zhan and Liu (2005) ได้ให้แนวคิดของ left-right (right-left) f-derivation บน BCI algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน เรียก f ว่า endomorphism ของ X ถ้า $f(xy) = f(x)f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และจะเรียก f ว่า monomorphism ของ X ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d_f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ f เป็น endomorphism ของ X ถ้า $d_f(xy) = (d_f(x)f(y)) \wedge ((f(x)d_f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d_f ว่า left-right f -derivation (หรือ (l, r) - f -derivation) ถ้า $d_f(xy) = (f(x)d_f(y)) \wedge (d_f(x)f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d_f ว่า right-left f -derivation (หรือ (r, l) - f -derivation) และถ้า d_f เป็นทั้ง (l, r) - f -derivation และ (r, l) - f -derivation จะเรียก d_f ว่า f -derivation

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d_f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d_f(x) = f_x$ สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า d_f เป็น (l, r) - f -derivation บน X และ ถ้า X เป็น commutative แล้ว d_f เป็น (r, l) - f -derivation บน X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น (l, r) - f -derivation บน X แล้วจะได้ว่า

1. $d_f(x) = d_f(x) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $d_f(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$
3. $d_f(x)f(y) \leq f(x) d_f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $d_f(xy) = d_f(x)f(y) \leq d_f(x) d_f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น (r, l) - f -derivation บน X แล้วจะได้ว่า

1. $d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $d_f(0) = 0$
2. $d_f(a) \in G(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

3.2. ผลงานของ Nisar (2009)

Nisar (2009) ได้ให้แนวคิดของ right F -derivation และ left F -derivation บน BCI algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $D_F: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism ของ X ถ้า $D_F(xy) = (F(x)D_F(y)) \wedge (F(y)D_F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะเรียก D_F ว่า right F-derivation ถ้า $D_F(xy) = (D_F(x)F(y)) \wedge (D_F(y)F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะเรียก D_F ว่า left F-derivation และ ถ้า D_F เป็นทั้ง right F-derivation และ left F-derivation จะเรียก D_F ว่า F-derivation

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน F_x แทน $0(OF(x))$ สำหรับสมาชิก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น F-derivation ของ X โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism จะได้ว่า

1. $D_F(0) \in I_x$
2. $D_F(x) \in I_x$ สำหรับทุก $x \in I_x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น right F-derivation ของ X โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism จะได้ว่า $D_F(x) \in G(X)$ สำหรับทุก $x \in G(X)$ เมื่อ $G(X) = \{x \in X | x = 0x\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น F-derivation ของ X โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism กำหนดให้ $x_0, y_0 \in X$ ถ้า $F(x) \in A(x_0)$ และ $F(y) = A(y_0)$ สำหรับทุก $x \in A(x_0)$ และ $y \in A(y_0)$ แล้วจะได้ว่า ถ้า $D_F(x) = y_0$ แล้ว $D_F(y) \in A(x_0)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ $D_F: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

1. ถ้า D_F เป็น right F-derivation แล้ว $D_F(x) = D_F(x) \wedge F(x)$
2. ถ้า D_F เป็น left F-derivation แล้ว $D_F(x) = D_F(x) \wedge D_F(0)$
3. ถ้า D_F เป็น right F-derivation แล้ว $F(x)D_F(x) = F(y)D_F(y)$

4. ถ้า D_F เป็น left F-derivation แล้ว $D_F(x)F(x) = D_F(y) \wedge F(x)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น right F-derivation ของ X โดยที่ $F: X \rightarrow X$ เป็น endomorphism แล้วจะได้ว่า

1. $D_F(x) \in I_x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $F(y)(F(y)D_F(x)) = D_F(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $D_F(x)F(y) = 0(F(y)D_F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $D_F(x)F(y) \in I_x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

3.3. ผลงานของ Harmaitree and Leerawat (2011)

Harmaitree and Leerawat (2011) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์บนแลตทิซ ที่ชื่อว่า f-derivation พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ของอนุพันธ์บนแลตทิซ

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $f: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน เรียกฟังก์ชัน $d: L \rightarrow L$ ว่า f-derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. $dx \leq f(x)$
2. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$
3. ถ้า I เป็นไอดีลของ X แล้ว $dI \subseteq I$
4. ถ้า L มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด โดยที่ $f(0) = 0$ แล้ว $d0 = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(1) = 1$ แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

1. $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1)$
2. ถ้า $f(x) \geq d1$ แล้ว $dx \geq d1$
3. ถ้า $f(x) \geq d1$ และ d เป็น order f -derivation แล้ว $dx = d1$
4. ถ้า $f(x) \leq d1$ แล้ว $dx = f(x)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็น homomorphism กำหนดให้ $x, y \in L$ โดยที่ $y \leq x$ ถ้า $dx = f(x)$ แล้ว $dy = f(y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็น homomorphism แล้ว $dx = dx \vee (f(x) \wedge d(x \vee y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็น homomorphism โดยที่ $f(1) = 1$ แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น order f -derivation
2. $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว d เป็น order f -derivation ก็ต่อเมื่อ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ครอบงำละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็น homomorphism ถ้ามีบาง $a \in L$ โดยที่ $da = f(a)$ และ d เป็น order f -derivation แล้ว $d(x \vee a) = dx \vee da$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ ครอบงำละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น distributive lattice และ d เป็น f -derivation บน L เมื่อ $f: L \rightarrow L$ เป็น homomorphism แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น order f -derivation
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ครอบงำละเอียดใน Harmaitree and Leerawat (2011)

4. งานวิจัยเกี่ยวกับ symmetric bi-derivations บนโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ

4.1. ผลงานของ Ceven (2009)

Ceven (2009) ได้ให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บนแลตทิซ พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $D: L \times L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก D ว่า symmetric function ถ้า $D(x, y) = D(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $d: L \rightarrow L$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า trace ของ D ถ้า สำหรับทุก $x \in L$ แล้ว $d(x) = D(x, x)$ เมื่อ D เป็น symmetric function บน B

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ $D: L \times L \rightarrow L$ เป็น symmetric function จะเรียก D ว่า symmetric bi-derivation บน L ถ้า $D(x \wedge y, z) = (D(x, z) \wedge y) \vee (x \wedge D(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in L$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric bi-derivation บน L แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. $D(x, y) \leq x$
2. $D(x, y) \leq x \wedge y$
3. $dx \leq x$
4. $d^2(x) = dx$
5. $d(x \wedge y) = (x \wedge dy) \vee (y \wedge dx) \vee D(x, y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ceven (2009)

บทนิยาม ให้ L เป็นแลตทิซ และ D เป็น symmetric function จะเรียก D ว่า joinitive ถ้า $D(x \vee y, z) = D(x, z) \vee D(y, z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in L$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น joinitive symmetric bi-derivation บน L แล้วจะได้ว่า $d(x \vee y) = dx \vee dy \vee D(x, y)$ และ $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ceven (2009)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็นแลตทิซ ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด สมมติให้ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric bi-derivation บน L แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. ถ้า $x \geq d1$ แล้วจะได้ว่า $dx \geq d1$
2. ถ้า $x \leq d1$ แล้วจะได้ว่า $dx = x$
3. ถ้า $x \leq y$ และ $dy = y$ แล้วจะได้ว่า $dx = x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ceven (2009)

4.2. ผลงานของ Ildira *et al.* (2011)

Ildira *et al.* (2011) ได้ให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บน BCI-algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $D: X \rightarrow X$ เป็น symmetric function ถ้า $D(xy, z) = (D(x, z)y) \wedge (xD(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะเรียก D ว่า left-right symmetric bi-derivation (หรือ (l, r) -symmetric bi-derivation) และถ้า $D(xy, z) = (xD(y, z)) \wedge (D(x, z)y)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะเรียก D ว่า right-left symmetric bi-derivation (หรือ (r, l) -symmetric bi-derivation) และถ้า d เป็นทั้ง (l, r) -symmetric bi-derivation และ (r, l) -symmetric bi-derivation จะเรียก d ว่า symmetric bi-derivation

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ $D: X \rightarrow X$ เป็น symmetric function แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า D เป็น (l, r) -symmetric bi-derivation แล้วจะได้ว่า $D(x, z) = D(x, z) \wedge x$ สำหรับทุก $x, z \in X$
2. ถ้า D เป็น (r, l) -symmetric bi-derivation แล้วจะได้ว่า $D(x, z) = x \wedge D(x, z)$ สำหรับทุก $x, z \in X$ ก็ต่อเมื่อ $D(0, z) = 0$ สำหรับทุก $z \in X$
3. ถ้า D เป็น (r, l) -symmetric bi-derivation บน X แล้วจะได้ว่า $D(a, z) \in G(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$ และสำหรับทุก $z \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ildira *et al.* (2011)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra ถ้า D เป็น symmetric bi-derivation บน X แล้วจะได้ว่า X เป็น BCK-algebra ก็ต่อเมื่อ $D(0, z) = 0$ สำหรับทุก $z \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ildira *et al.* (2011)

4.3. ผลงานของ Ozbal and Firat (2011)

Ozbal and Firat (2011) ได้ให้แนวคิดของ symmetric bi-derivation บน incline algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ โดยที่ $X \neq \emptyset$ และ $+, *$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X, +, *)$ ว่า *incline algebra* ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in X$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $x * (y * z) = (x * y) * z$
4. $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$
5. $(x + y) * z = (x * z) + (y * z)$
6. $x + x = x$
7. $x + (x * y) = x$
8. $y + (x * y) = y$

บทนิยาม ให้ X เป็น *incline algebra* และ $D: X \times X \rightarrow X$ เป็น *symmetric function* จะเรียก D ว่า *symmetric bi-derivation* บน X ถ้า $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น *commutative incline algebra* และ $a \in X$ และ D เป็น *symmetric bi-derivation* บน X แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in X$

1. $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$
2. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $D(x * y, z) \leq y$
3. ถ้า X เป็น *distributive lattice* แล้ว $D(x, y) \leq x$ และ $D(x, y) \leq y$
4. ถ้า $a * D(x, y) = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $D = 0$
5. ถ้า $D(x, y) * a = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $D = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ozbal and Firat (2011)

บทนิยาม ให้ X เป็น *commutative incline algebra* และ D เป็น *symmetric function* จะเรียก D ว่า *jointive* ถ้า $D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น *commutative incline algebra* และ d เป็น *trace* ของ D โดยที่ D เป็น *jointive symmetric bi-derivation* บน X แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

1. $d(x + y) = dx + dy + D(x, y)$ และ $dx + dy \leq d(x + y)$

2. $D(x * y, x) \leq dx$
3. D เป็น isotone symmetric bi-derivation บน X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ozbal and Firat (2011)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น commutative incline algebra และ D_1, D_2 เป็น jointive symmetric bi-derivation บน X สมมติให้ d_1, d_2 เป็น trace ของ D_1, D_2 ตามลำดับ ถ้า $D_1(d_2x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้วจะได้ว่า $d_1 = 0$ หรือ $d_2 = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ozbal and Firat (2011)

วิธีการ

บทนิยาม 1 ให้ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $B \neq \emptyset$ กำหนดให้ \wedge (อ่านว่า “meet” หรือ “and”) และ \vee (อ่านว่า “join” หรือ “or”) เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน B และ $'$ (อ่านว่า “complement”) เป็นการดำเนินการเอกภาพ (unary operation) บน B และ $0, 1$ เป็นสมาชิกของ B เราจะกล่าวว่า $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra (หรือ Boolean) ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in B$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x = x \wedge (x \vee y), \quad x = x \vee (x \wedge y)$
5. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. $x \wedge 1 = x$ และ $x \vee 0 = x$
7. สำหรับแต่ละ $x \in B$ จะมี $x' \in B$ ที่ทำให้ $x \wedge x' = 0$ และ $x \vee x' = 1$

ข้อตกลง การเขียน B เป็น Boolean algebra จะหมายถึง $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra

หลัก Duality ให้ $(B, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ เป็น Boolean algebra สำหรับสูตรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับ การดำเนินการ \wedge และ \vee ถ้าแทนที่ \wedge ด้วย \vee และแทนที่ \vee ด้วย \wedge ในทุกๆ ที่ของสูตร ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นจริงเสมอ

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $B = \{0, 1\}$, \wedge และ \vee เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B และ $'$ เป็นการดำเนินการเอกภาพ ที่นิยามดังนี้

\wedge		0	1
0		0	0
1		0	1

\vee		0	1
0		0	1
1		1	1

x		x'
0		1
1		0

ตรวจสอบได้ว่า B เป็น Boolean algebra

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $B = \{0, a, 1\}$, \wedge และ \vee เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B และ $'$ เป็นการดำเนินการเอกภาค ที่นิยามดังนี้

\wedge	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

\vee	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

x	x'
0	1
a	a
1	0

ตรวจสอบได้ว่า $a \vee 0 = a$ แต่ $a \wedge 0 = 0$

$$a \vee 1 = 1 \text{ แต่ } a \wedge 1 = a$$

$$a \vee a = a \text{ แต่ } a \wedge a = a$$

นั่นคือ ไม่มี $x \in B$ ที่ทำให้ $a \wedge x = 0$ และ $a \vee x = 1$

ดังนั้น B ไม่เป็น Boolean algebra

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $B = \{0, a, b, 1\}$, \wedge และ \vee เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B ที่นิยามดังนี้

\wedge	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

\vee	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

x	x'
0	1
a	b
b	a
1	0

ตรวจสอบได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

$$1. x \wedge x = x \text{ และ } x \vee x = x$$

$$2. x \wedge y = y \wedge x \text{ และ } x \vee y = y \vee x$$

$$3. x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \text{ และ } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$4. x = x \wedge (x \vee y) \text{ และ } x = x \vee (x \wedge y)$$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$0 \wedge (0 \vee 0) = 0 \wedge 0 = 0, (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$

$$0 \wedge (0 \vee a) = 0 \wedge a = 0, (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

$$0 \wedge (0 \vee b) = 0 \wedge b = 0, (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge b) = 0 \vee 0 = 0$$

$$0 \wedge (0 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0, (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
0 \wedge (a \vee a) &= 0 \wedge a = 0, & (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) &= 0 \vee 0 = 0 \\
0 \wedge (a \vee b) &= 0 \wedge 1 = 0, & (0 \wedge a) \vee (0 \wedge b) &= 0 \vee 0 = 0 \\
0 \wedge (a \vee 1) &= 0 \wedge 1 = 0, & (0 \wedge a) \vee (0 \wedge 1) &= 0 \vee 0 = 0 \\
0 \wedge (b \vee b) &= 0 \wedge b = 0, & (0 \wedge b) \vee (0 \wedge b) &= 0 \vee 0 = 0 \\
0 \wedge (b \vee 1) &= 0 \wedge 1 = 0, & (0 \wedge b) \vee (0 \wedge 1) &= 0 \vee 0 = 0 \\
0 \wedge (1 \vee 1) &= 0 \wedge 1 = 0, & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) &= 0 \vee 0 = 0 \\
a \wedge (0 \vee 0) &= a \wedge 0 = 0, & (a \wedge 0) \vee (a \wedge 0) &= 0 \vee 0 = 0 \\
a \wedge (0 \vee a) &= a \wedge a = a, & (a \wedge 0) \vee (a \wedge a) &= 0 \vee a = a \\
a \wedge (0 \vee b) &= a \wedge b = 0, & (a \wedge 0) \vee (a \wedge b) &= 0 \vee 0 = 0 \\
a \wedge (0 \vee 1) &= a \wedge 1 = a, & (a \wedge 0) \vee (a \wedge 1) &= 0 \vee a = a \\
a \wedge (a \vee a) &= a \wedge a = a, & (a \wedge a) \vee (a \wedge a) &= a \vee a = a \\
a \wedge (a \vee b) &= a \wedge 1 = a, & (a \wedge a) \vee (a \wedge b) &= a \vee 0 = a \\
a \wedge (a \vee 1) &= a \wedge 1 = a, & (a \wedge a) \vee (a \wedge 1) &= a \vee a = a \\
a \wedge (b \vee b) &= a \wedge b = 0, & (a \wedge b) \vee (a \wedge b) &= 0 \vee 0 = 0 \\
a \wedge (b \vee 1) &= a \wedge 1 = a, & (a \wedge b) \vee (a \wedge 1) &= 0 \vee a = a \\
a \wedge (1 \vee 1) &= a \wedge 1 = a, & (a \wedge 1) \vee (a \wedge 1) &= a \vee a = a \\
b \wedge (0 \vee 0) &= b \wedge 0 = 0, & (b \wedge 0) \vee (b \wedge 0) &= 0 \vee 0 = 0 \\
b \wedge (0 \vee a) &= b \wedge a = 0, & (b \wedge 0) \vee (b \wedge a) &= 0 \vee 0 = 0 \\
b \wedge (0 \vee b) &= b \wedge b = b, & (b \wedge 0) \vee (b \wedge b) &= 0 \vee b = b \\
b \wedge (0 \vee 1) &= b \wedge 1 = b, & (b \wedge 0) \vee (b \wedge 1) &= 0 \vee b = b \\
b \wedge (a \vee a) &= b \wedge a = 0, & (b \wedge a) \vee (b \wedge a) &= 0 \vee 0 = 0 \\
b \wedge (a \vee b) &= b \wedge 1 = b, & (b \wedge a) \vee (b \wedge b) &= 0 \vee b = b \\
b \wedge (a \vee 1) &= b \wedge 1 = b, & (b \wedge a) \vee (b \wedge 1) &= 0 \vee b = b \\
b \wedge (b \vee b) &= b \wedge b = b, & (b \wedge b) \vee (b \wedge b) &= b \vee b = b \\
b \wedge (b \vee 1) &= b \wedge 1 = b, & (b \wedge b) \vee (b \wedge 1) &= b \vee 0 = b \\
b \wedge (1 \vee 1) &= b \wedge 1 = b, & (b \wedge 1) \vee (b \wedge 1) &= b \vee 0 = b \\
1 \wedge (0 \vee 0) &= 1 \wedge 0 = 0, & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) &= 0 \vee 0 = 0 \\
1 \wedge (0 \vee a) &= 1 \wedge a = a, & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge a) &= 0 \vee a = a \\
1 \wedge (0 \vee b) &= 1 \wedge b = b, & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge b) &= 0 \vee b = b \\
1 \wedge (0 \vee 1) &= 1 \wedge 1 = 1, & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) &= 0 \vee 1 = 1 \\
1 \wedge (a \vee a) &= 1 \wedge a = a, & (1 \wedge a) \vee (1 \wedge a) &= a \vee a = a \\
1 \wedge (a \vee b) &= 1 \wedge 1 = 1, & (1 \wedge a) \vee (1 \wedge b) &= a \vee b = 1 \\
1 \wedge (a \vee 1) &= 1 \wedge 1 = 1, & (1 \wedge a) \vee (1 \wedge 1) &= a \vee 1 = 1 \\
1 \wedge (b \vee b) &= 1 \wedge b = b, & (1 \wedge b) \vee (1 \wedge b) &= b \vee b = b \\
1 \wedge (b \vee 1) &= 1 \wedge 1 = 1, & (1 \wedge b) \vee (1 \wedge 1) &= b \vee 1 = 1 \\
1 \wedge (1 \vee 1) &= 1 \wedge 1 = 1, & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) &= 1 \vee 1 = 1
\end{aligned}$$

นั่นคือ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

และโดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

จากการนิยามข้างต้น จะได้ว่า $x \wedge 1 = x$ และ $x \vee 0 = x$

และสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\text{ถ้า } x = 0 \text{ จะมี } 1 \in B \text{ ซึ่ง } 1 \wedge 0 = 0 \text{ และ } 1 \vee 0 = 1$$

$$\text{ถ้า } x = a \text{ จะมี } b \in B \text{ ซึ่ง } b \wedge a = 0 \text{ และ } b \vee a = 1$$

$$\text{ถ้า } x = b \text{ จะมี } a \in B \text{ ซึ่ง } a \wedge b = 0 \text{ และ } a \vee b = 1$$

ถ้า $x = 1$ จะมี $0 \in B$ ซึ่ง $0 \wedge 1 = 0$ และ $0 \vee 1 = 1$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x \in B$ จะมี $x' \in B$ ที่ทำให้ $x \wedge x' = 0$ และ $x \vee x' = 1$

ดังนั้น B เป็น Boolean algebra

ทฤษฎีบท 5 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยาม $B \times B = \{ (x, y) \mid x, y \in B \}$ กำหนดให้ \wedge และ \vee เป็นการดำเนินการทวิภาค นิยามโดย

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \text{ สำหรับทุก } x_1, y_1, x_2, y_2 \in B$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \text{ สำหรับทุก } x_1, y_1, x_2, y_2 \in B$$

แล้วจะได้ว่า $(B \times B, \wedge, \vee, (0, 0), (1, 1), ')$ เป็น Boolean algebra

พิสูจน์ จาก B เป็น Boolean algebra จะได้ว่า $B \neq \emptyset$ ดังนั้น $B \times B \neq \emptyset$

ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in B$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in B$

$$(1) (x_1, y_1) \vee (x_1, y_1) = (x_1 \vee x_1, y_1 \vee y_1) = (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_1, y_1) = (x_1 \wedge x_1, y_1 \wedge y_1) = (x_1, y_1)$$

$$(2) (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) = (x_2, y_2) \vee (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) = (x_2, y_2) \wedge (x_1, y_1)$$

$$(3) ((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) \vee (x_3, y_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3, y_1 \vee y_2 \vee y_3)$$

$$= (x_1, y_1) \vee ((x_2, y_2) \vee (x_3, y_3))$$

$$((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) \wedge (x_3, y_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, y_1 \wedge y_2 \wedge y_3)$$

$$= (x_1, y_1) \wedge ((x_2, y_2) \wedge (x_3, y_3))$$

$$(4) (x_1, y_1) \wedge ((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) = (x_1 \wedge (x_1 \vee x_2), y_1 \wedge (y_1 \vee y_2))$$

$$= (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \vee ((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) = (x_1 \vee (x_1 \wedge x_2), y_1 \vee (y_1 \wedge y_2))$$

$$= (x_1, y_1)$$

$$(5) (x_1, y_1) \wedge ((x_2, y_2) \vee (x_3, y_3)) = (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3), y_1 \wedge (y_2 \vee y_3))$$

$$= ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3), (y_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_3))$$

$y_3))$

$$= (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \vee (x_1 \wedge x_3, y_1 \wedge y_3)$$

$$= ((x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)) \vee ((x_1, y_1) \wedge (x_3, y_3))$$

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1) \vee ((x_2, y_2) \wedge (x_3, y_3)) &= (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3), y_1 \vee (y_2 \wedge y_3)) \\
 &= ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3), (y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_3)) \\
 &= (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee x_3, y_1 \vee y_3) \\
 &= ((x_1, y_1) \vee (x_2, y_2)) \wedge ((x_1, y_1) \vee (x_3, y_3))
 \end{aligned}$$

(6) เราทราบว่า $0, 1 \in B$ ดังนั้น $(0,0), (1,1) \in B$

แล้วจะได้ว่า $(x_1, y_1) \vee (0,0) = (x_1 \vee 0, y_1 \vee 0) = (x_1, y_1)$

และ $(x_1, y_1) \wedge (1,1) = (x_1 \wedge 1, y_1 \wedge 1) = (x_1, y_1)$

(7) จาก $x_1, y_1 \in B$ ดังนั้นจะมี $x'_1, y'_1 \in B$

แล้วจะได้ว่า $(x_1, y_1) \vee (x'_1, y'_1) = (x_1 \vee x'_1, y_1 \vee y'_1) = (1,1)$

และ $(x_1, y_1) \wedge (x'_1, y'_1) = (x_1 \wedge x'_1, y_1 \wedge y'_1) = (0,0)$

จากการพิสูจน์ (1) - (7) สรุปได้ว่า $(B, \wedge, \vee, ', (0,0), (1,1))$ เป็น Boolean algebra

บทนิยาม 6 ให้ B เป็น Boolean algebra และกำหนดความสัมพันธ์ \leq บน B โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \wedge y = x$ และ $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ข้อตกลง

1. การเขียนความสัมพันธ์ “ \geq ” จะสอดคล้องกับการเขียนความสัมพันธ์ “ \leq ” ดังนั้นการเขียน $x \geq y$ จะหมายถึง $y \leq x$
2. การเขียนความสัมพันธ์ “ $<$ ” จะสอดคล้องกับการเขียนความสัมพันธ์ “ \leq ” ดังนั้นการเขียน $x < y$ จะหมายถึง $x \leq y$ และ $x \neq y$

ทฤษฎีบท 7 ให้ B เป็น Boolean algebra จะได้ว่า $x \wedge y = x$ ก็ต่อเมื่อ $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in B$

(\Rightarrow) สมมติให้ $x \wedge y = x$

จะได้ว่า $x \vee y = (x \wedge y) \vee y$

$= y$

(โดยบทนิยาม 1(4))

ดังนั้น $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

(\Leftarrow) สมมติให้ $x \vee y = y$

จะได้ว่า $x \wedge y = x \wedge (x \vee y)$

$$= x$$

(โดยบทนิยาม 1(4))

ดังนั้น $x \wedge y = x$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ข้อสังเกต 8

1. จากบทนิยาม 1(6) และบทนิยาม 6 จะได้ว่า $x \leq 1$ และ $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$
2. จากบทนิยาม 6 และบทตั้ง 7 จะได้ว่าสำหรับการจะพิสูจน์ว่า $x \leq y$ นั้น เพียงพอที่จะแสดงว่า $x \vee y = y$ หรือ $x \wedge y = x$ เพียงอย่างเดียวอย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบท 9 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$

1. ถ้า $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = x_1$ แล้วจะได้ว่า $x_1 \leq x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$
2. ถ้า $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = x_1$ แล้วจะได้ว่า $x_i \leq x_1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

พิสูจน์ ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$

(1) สมมติให้ $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = x_1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x_1 \wedge x_i &= (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \wedge x_i \quad (\text{จาก } x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = x_1) \\ &= x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \\ &= x_1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x_1 \wedge x_i = x_1$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 6 จะได้ว่า $x_1 \leq x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

(2) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ (1)

ทฤษฎีบท 10 ให้ B เป็น Boolean algebra และกำหนดความสัมพันธ์ \leq บน B ดังบทนิยาม 6 จะได้ว่า (B, \leq) เป็น partially ordered set

พิสูจน์ ให้ $x, y \in B$

(1) โดยบทนิยาม 1(1) จะได้ว่า $x \wedge x = x$

ดังนั้น $x \leq x$

นั่นคือ \leq มีสมบัติสะท้อน

(2) กำหนดให้ $x \leq y$ และ $y \leq x$

จะได้ว่า $x \wedge y = x$ และ $y \wedge x = y$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น } x &= x \wedge y \\ &= y \wedge x && \text{(โดยบทนิยาม 1(2))} \\ &= y \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = y$

นั่นคือ \leq มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) กำหนดให้ $x \leq y$ และ $y \leq z$

จะได้ว่า $x \wedge y = x$ และ $y \wedge z = y$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น } x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z \\ &= x \wedge (y \wedge z) && \text{(โดยบทนิยาม 1(3))} \\ &= x \wedge y && \text{(จาก } y \wedge z = y \text{)} \\ &= x && \text{(จาก } x \wedge y = x \text{)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \leq z$

นั่นคือ \leq มีสมบัติถ่ายทอด

จากการพิสูจน์ (1) - (3) สรุปได้ว่า (B, \leq) เป็น partially ordered set

ทฤษฎีบท 11 ให้ B เป็น Boolean algebra และกำหนดความสัมพันธ์ \leq บน B ดังบทนิยาม 6 จะได้ว่า $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ และ $x \vee y = \sup \{x, y\}$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in B$

โดยบทนิยาม 1(4) จะได้ว่า $x \wedge (x \vee y) = x$ และ $y \wedge (x \vee y) = y$

ดังนั้น $x \leq x \vee y$ และ $y \leq x \vee y$

นั่นคือ $x \vee y$ เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ x และ y

ให้ $z \in B$ โดยที่ $x \leq z$ และ $y \leq z$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z) \\ &= x \vee z && \text{(จาก } y \leq z \text{)} \\ &= z && \text{(จาก } x \leq z \text{)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \vee y \leq z$

นั่นคือ $x \vee y = \sup \{x, y\}$

โดยการพิสูจน์ในการทำงานเดียวกันจะได้ว่า $x \wedge y = \inf \{x, y\}$

บทนิยาม 12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B$ กำหนดความสัมพันธ์ \leq บน $B \times B$ โดย $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 \vee x_2 = x_2$ และ $y_1 \vee y_2 = y_2$

ทฤษฎีบท 13 ให้ B เป็น Boolean algebra และกำหนดความสัมพันธ์ \leq บน $B \times B$ ดังบทนิยาม 12 จะได้ว่า $(B \times B, \leq)$ เป็น partially ordered set

พิสูจน์ ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in B \times B$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in B$

(1) โดยบทนิยาม 1(1) จะได้ว่า $x_1 \vee x_1 = x_1$ และ $y_1 \vee y_1 = y_1$

ดังนั้น $(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$

นั่นคือ \leq มีสมบัติสะท้อน

(2) กำหนดให้ $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$

โดยบทนิยาม 12 จะได้ว่า $x_1 \vee x_2 = x_2$ และ $x_2 \vee x_1 = x_1$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x_1 &= x_2 \vee x_1 \\ &= x_1 \vee x_2 && \text{(โดยบทนิยาม 1(2))} \\ &= x_2 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x_1 = x_2$

ในการทำงานเดียวกันจะได้ว่า $y_1 = y_2$

ดังนั้น $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

นั่นคือ \leq มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) กำหนดให้ $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$

โดยบทนิยาม 12 จะได้ว่า $x_1 \vee x_2 = x_2$ และ $x_2 \vee x_3 = x_3$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x_1 \vee x_3 &= x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \\ &= (x_1 \vee x_2) \vee x_3 && \text{(โดยบทนิยาม 1(3))} \\ &= x_2 \vee x_3 && \text{(จาก } x_1 \vee x_2 = x_2\text{)} \\ &= x_3 && \text{(จาก } x_2 \vee x_3 = x_3\text{)} \end{aligned}$$

แสดงว่า $x_1 \vee x_3 = x_3$

ในการทำงานเดียวกันจะได้ว่า $y_1 \vee y_3 = y_3$

ดังนั้น $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$

นั่นคือ \leq มีสมบัติถ่ายทอด

จากการพิสูจน์ (1) - (3) สรุปได้ว่า $(B \times B, \leq)$ เป็น partially ordered set

ทฤษฎีบท 14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $x, y \in B$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ และ $y \leq x$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x &= x \wedge y && \text{(จาก } x \leq y) \\ &= y \wedge x && \text{(โดยบทนิยาม 1(2))} \\ &= y && \text{(จาก } y \leq x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = y$

บทนิยาม 15 ให้ B เป็น Boolean algebra จะเรียก B ว่า modular ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in B$ โดยที่ $x \leq z$ แล้ว $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

ทฤษฎีบท 16 ทุกๆ Boolean algebra เป็น modular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

ทฤษฎีบท 17 ให้ B เป็น Boolean algebra แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

1. ถ้า $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า $x \wedge z \leq y \wedge z$ และ $x \vee z \leq y \vee z$
2. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ และ $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
3. $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $y' \leq x'$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

ทฤษฎีบท 18 ให้ B เป็น Boolean algebra แล้วจะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $x \leq y$
2. $x \wedge y' = 0$
3. $x' \vee y = 1$
4. $x \wedge y = x$

$$5. x \vee y = y$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

ทฤษฎีบท 19 ให้ B เป็น Boolean algebra แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $x \vee y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$
2. $x \wedge y = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$
3. $x = 0$ ก็ต่อเมื่อ $y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$
4. $x = y$ ก็ต่อเมื่อ $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$
5. ถ้า $x \vee y = x \vee z$ และ $x' \vee y = x' \vee z$ แล้วจะได้ว่า $y = z$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Mendelson (1970)

บทนิยาม 20 ให้ B_1, B_2 เป็น Boolean algebra และ $f: B_1 \rightarrow B_2$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x, y \in B_1$

1. จะกล่าวว่า f เป็น meet-homomorphism ถ้า $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
2. จะกล่าวว่า f เป็น join-homomorphism ถ้า $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
3. จะกล่าวว่า f เป็น order-preserving ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$

บทนิยาม 21 ให้ B_1, B_2 เป็น Boolean algebra และ $f: B_1 \rightarrow B_2$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f เป็น Boolean homomorphism ถ้า

1. f เป็นทั้ง meet-homomorphism และ join-homomorphism
2. $f(x') = (f(x))'$ สำหรับทุก $x \in B_1$

บทนิยาม 22 ให้ B_1, B_2 เป็น Boolean algebra และ $f: B_1 \rightarrow B_2$ เป็น Boolean homomorphism แล้ว

1. จะกล่าวว่า f เป็น injective Boolean homomorphism ถ้า f เป็น injective function
2. จะกล่าวว่า f เป็น surjective Boolean homomorphism ถ้า f เป็น surjective function
3. จะกล่าวว่า f เป็น isomorphism ถ้า f เป็น bijective function

ทฤษฎีบท 23 ให้ B_1, B_2 เป็น Boolean algebra และ $f: B_1 \rightarrow B_2$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า

1. $f(0) = 0$ และ $f(1) = 1$
2. สำหรับทุก $x, y \in B$ ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

ข้อสังเกต 24 จากทฤษฎีบท 21(2) จะได้ว่า ถ้า $f: B_1 \rightarrow B_2$ เป็น Boolean homomorphism แล้ว f เป็น order-preserving

บทนิยาม 25 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $I \subseteq B$ โดยที่ $I \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า I เป็นไอดีล (ideal) ของ B ถ้า I สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ถ้า $x \in I$ และ $b \in B$ แล้ว $x \wedge b \in I$
2. $x \vee y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$

ข้อสังเกต 26 ถ้า I_1 และ I_2 เป็นไอดีลของ B แล้วจะได้ว่า $I_1 \cap I_2$ เป็นไอดีลของ B

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแบ่งออกเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 Boolean derivations ใน Boolean algebra

ตอนที่ 2 Boolean f-derivations ใน Boolean algebra

ตอนที่ 3 symmetric Boolean derivations ใน Boolean algebra

ตอนที่ 1 Boolean derivations ใน Boolean algebra

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม Boolean derivation ใน Boolean algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 1.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า Boolean derivation บน B ถ้า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$
2. $d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ตัวอย่าง 1.2 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 2 ในส่วนวิธีการ และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 1 \\ (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(0 \wedge 0) \neq (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0)$

ฉะนั้น d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.3 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 2 ในส่วนวิธีการ และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 0, & (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge 1) &= d0 = 0, & (d0 \wedge 1) \vee (0 \wedge d1) &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

$$d(1 \wedge 1) = d1 = 1, (d1 \wedge 1) \vee (1 \wedge d1) = 1 \vee 1 = 1$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \vee 0) = d0 = 0, d0 \vee d0 = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \vee 1) = d1 = 1, d0 \vee d1 = 0 \vee 1 = 1$$

$$d(1 \vee 1) = d1 = 1, d1 \vee d1 = 1 \vee 1 = 1$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

จากการตรวจสอบข้างต้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.4 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ และ $d: B \rightarrow B$ เป็น

ฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ b, & x = b, 1 \end{cases}$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \wedge 0) = d0 = 0, (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \wedge a) = d0 = 0, (d0 \wedge a) \vee (0 \wedge da) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \wedge b) = d0 = 0, (d0 \wedge b) \vee (0 \wedge db) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \wedge 1) = d0 = 0, (d0 \wedge 1) \vee (0 \wedge d1) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(a \wedge a) = da = 0, (da \wedge a) \vee (a \wedge da) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(a \wedge b) = d0 = 0, (da \wedge b) \vee (a \wedge db) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(a \wedge 1) = da = 0, (da \wedge 1) \vee (a \wedge d1) = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(b \wedge b) = db = b, (db \wedge b) \vee (b \wedge db) = b \vee b = b$$

$$d(b \wedge 1) = db = b, (db \wedge 1) \vee (b \wedge d1) = b \vee b = b$$

$$d(1 \wedge 1) = d1 = b, (d1 \wedge 1) \vee (1 \wedge d1) = b \vee b = b$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \vee 0) = d0 = 0, d0 \vee d0 = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \vee a) = da = 0, d0 \vee da = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(0 \vee b) = db = b, d0 \vee db = 0 \vee b = b$$

$$d(0 \vee 1) = d1 = b, d0 \vee d1 = 0 \vee b = b$$

$$d(a \vee a) = da = 0, da \vee da = 0 \vee 0 = 0$$

$$d(a \vee b) = d1 = b, da \vee db = 0 \vee b = b$$

$$d(a \vee 1) = d1 = b, da \vee d1 = 0 \vee b = b$$

$$d(b \vee b) = db = b, db \vee db = b \vee b = b$$

$$d(b \vee 1) = d1 = b, db \vee d1 = b \vee b = b$$

$$d(1 \vee 1) = d1 = b, d1 \vee d1 = b \vee b = b$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

จากการตรวจสอบข้างต้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.5 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ และ $d: B \rightarrow B$ เป็น

$$\text{ฟังก์ชัน นิยามโดย } dx = \begin{cases} 0, & x = 0, 1, b \\ a, & x = a \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(a \vee b) &= d1 = 0 \\ da \vee db &= a \vee 0 = a \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(a \vee b) \neq da \vee db$

ฉะนั้น d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$ จะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B และจะเรียก d นี้ว่า identity Boolean derivation

ตัวอย่าง 1.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = 0$ สำหรับทุก $x \in B$ จะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B และจะเรียก d นี้ว่า zero Boolean derivation

ทฤษฎีบท 1.8 ให้ B เป็น Boolean algebra, $a \in B$ และ $d_a: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d_a(x) = x \wedge a$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้วจะได้ว่า d_a เป็น Boolean derivation บน B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } (d_a(x) \wedge y) \vee (x \wedge d_a(y)) &= ((x \wedge a) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge a)) \\ &= ((x \wedge y) \wedge a) \vee ((x \wedge y) \wedge a) \\ &= (x \wedge y) \wedge a \\ &= d_a(x \wedge y) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d_a(x \wedge y) = (d_a(x) \wedge y) \vee (x \wedge d_a(y))$$

$$\begin{aligned} \text{และ } d_a(x) \vee d_a(y) &= (x \wedge a) \vee (y \wedge a) \\ &= (x \vee y) \wedge a \\ &= d_a(x \vee y) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d_a(x \vee y) = d_a(x) \vee d_a(y)$$

โดยบทนิยาม 1.1 สรุปได้ว่า d_a เป็น Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 1.9 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก $x, y \in B$

1. $dx \leq x$
2. $d0 = 0$ และ $d1 \leq 1$
3. $dx \wedge x' = x \wedge dx' = 0$
4. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y)$
5. ถ้า I เป็นไอดีลของ B แล้ว $dI \subseteq I$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$\begin{aligned} (1) \quad dx &= d(x \wedge x) && \text{(จาก } x = x \wedge x \text{)} \\ &= (dx \wedge x) \vee (x \wedge dx) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= dx \wedge x \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx \leq x$

$$(2) \quad \text{จาก (1) จะได้ว่า } d0 \leq 0 \text{ และ } d1 \leq 1$$

เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq d0$

โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $d0 = 0$

ดังนั้น $d0 = 0$

$$\begin{aligned} (3) \quad 0 &= d0 && \text{(จาก (1))} \\ &= d(x \wedge x') && \text{(จาก } x \wedge x' = 0 \text{)} \\ &= (dx \wedge x') \vee (x \wedge dx') && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \end{aligned}$$

ฉะนั้น $(dx \wedge x') \vee (x \wedge dx') = 0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 19(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \wedge x' = x \wedge dx' = 0$

$$(4) \quad \text{จาก (1) จะได้ว่า } dx \leq x$$

ดังนั้น $dx \wedge dy \leq x \wedge dy$ (โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ)

$$\leq (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$$

$$= d(x \wedge y) \quad \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)}$$

และเนื่องจาก $dx \wedge y \leq dx$ และ $x \wedge dy \leq dy$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $(dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) \leq dx \vee (x \wedge dy)$

และ $dx \vee (x \wedge dy) \leq dx \vee dy$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } d(x \wedge y) &= (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\
 &\leq dx \vee (x \wedge dy) \\
 &\leq dx \vee dy \\
 &= d(x \vee y) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)}
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y)$

(5) ให้ I เป็นไอดีลของ B และ $y \in dI$

ดังนั้น $y = dx$ สำหรับบาง $x \in I$

จาก (1) จะได้ว่า $dx \leq x$

ฉะนั้น $y \leq x$

เนื่องจาก I เป็นไอดีลของ B และ $x \in I$

จะได้ว่า $y = y \wedge x \in I$

ดังนั้น $dI \subseteq I$

โดยทฤษฎีบท 1.9(2) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 1.10 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $d0 \neq 0$ แล้ว d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$ โดยที่ $b \neq 0$ กำหนดให้ $d_b: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d_b(x) = x \vee b$ สำหรับทุก $x \in B$

จากนิยามข้างต้นเราสังเกตได้ว่า $d_b(0) = 0 \vee b = b \neq 0$

ดังนั้นโดยบทแทรก 1.10 จะได้ว่า d_b ไม่เป็น Boolean derivation บน B

บทนิยาม 1.12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า regular ถ้า $d0 = 0$

ข้อสังเกต 1.13 ทุก Boolean derivation ของ Boolean algebra เป็น regular

ทฤษฎีบท 1.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า

1. $d(x \wedge y') = 0$
2. $dy' \leq x'$

$$3. dx \wedge dy' = 0$$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$

(1) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \wedge y' = 0$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y') = d0$$

$$= 0$$

(โดยทฤษฎีบท 1.9(2))

$$\text{นั่นคือ } d(x \wedge y') = 0$$

(2) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 17(3) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $y' \leq x'$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $dy' \leq y'$

$$\text{ดังนั้น } dy' \leq x'$$

(3) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $dx \leq x$ และ $dy' \leq y'$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า

$$dx \wedge dy' \leq y \wedge dy' \quad (\text{จาก } dx \leq x \leq y)$$

$$\leq y \wedge y' \quad (\text{จาก } dy' \leq y')$$

$$= 0$$

$$\text{นั่นคือ } dx \wedge dy' \leq 0$$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

$$\text{ฉะนั้น } 0 \leq dx \wedge dy'$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า } dx \wedge dy' = 0$$

ทฤษฎีบท 1.15 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

$$1. dx \wedge dx' = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2. dx' = (dx)' \text{ สำหรับทุก } x \in B \text{ ก็ต่อเมื่อ } d \text{ เป็น identity Boolean derivation บน } B$$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

$$(1) \text{ โดยทฤษฎีบท 1.14(3) แทน } y' = x' \text{ จะได้ว่า } dx \wedge dx' = 0$$

$$(2) (\Rightarrow) \text{ สมมติให้ } dx' = (dx)' \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 1.9(3) เราทราบว่า } x \wedge dx' = 0$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x \wedge (dx)' &= x \wedge dx' && (\text{จาก } dx' = (dx)') \\ &= 0 && (\text{จาก } x \wedge dx' = 0) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x \wedge (dx)' = 0$$

โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $x \leq dx$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) เราทราบว่า $dx \leq x$

ฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = x$

นั่นคือ d เป็น identity Boolean derivation บน B

(\Leftarrow) สมมติให้ d เป็น identity Boolean derivation บน B และ $x \in B$
จะได้ว่า $dx' = x' = (dx)'$ (จาก d เป็น identity Boolean
derivation) ดังนั้น $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$

บทนิยาม 1.16 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B

1. จะกล่าวว่า d เป็น order-preserving ถ้า $x \leq y$ แล้ว $dx \leq dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$
2. จะกล่าวว่า d เป็น injective derivation ถ้า d เป็น injective function
3. จะกล่าวว่า d เป็น surjective derivation ถ้า d เป็น surjective function

ทฤษฎีบท 1.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า d เป็น order-preserving

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$

$$\text{จาก } x \leq y \text{ จะได้ว่า } y = x \vee y$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dy &= d(x \vee y) && (\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= dx \vee dy \end{aligned}$$

$$\text{แสดงว่า } dy = dx \vee dy$$

$$\text{นั่นคือ } dx \leq dy$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 1.6(1) จะได้ว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 1.18 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B ถ้า $dx' = dx$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้ว d เป็น zero Boolean derivation

พิสูจน์ สมมติให้ $dx' = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } d1 &= d1' && (\text{จาก } dx' = dx) \\ &= d0 && (\text{จาก } 1' = 0) \\ &= 0 && (\text{จาก } d0 = 0) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d1 = 0$

ให้ $x \in B$ จะได้ว่า $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 1.17 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ฉะนั้น $dx \leq d1 = 0$

ดังนั้น $dx \leq 0$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq dx$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = 0$

นั่นคือ d เป็น zero Boolean derivation

ทฤษฎีบท 1.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $dx = x \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$ และเราทราบว่า $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) เราทราบว่า $dx \leq x$

โดยทฤษฎีบท 1.17 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

จาก $x \leq 1$ และ d เป็น order-preserving จะได้ว่า $dx \leq d1$

จาก $dx \leq x$ และ $dx \leq d1$ จะได้ว่า $dx \leq x \wedge d1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dx &= d(x \wedge 1) && (\text{จาก } x = x \wedge 1) \\ &= (dx \wedge 1) \vee (x \wedge d1) && (\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= dx \vee (x \wedge d1) && (\text{จาก } dx \leq 1) \\ &= x \wedge d1 && (\text{จาก } dx \leq x \wedge d1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx = x \wedge d1$

โดยทฤษฎีบท 1.19 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 1.20 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $d1 \leq x$ แล้ว $dx = d1$ สำหรับทุก $x \in B$

2. ถ้า $x \leq d1$ แล้ว $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ทฤษฎีบท 1.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = x$ แล้ว $dy = y$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = x$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } dy &= d(x \wedge y) && \text{(จาก } y \leq x) \\ &= (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge dy) && \text{(จาก } dx = x) \\ &= y \vee dy && \text{(จาก } dy \leq y \leq x) \\ &= y \end{aligned}$$

ดังนั้น $dy = y$

ทฤษฎีบท 1.22 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

สำหรับ $n = 2$ ถ้า $x_1, x_2 \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2$ และ $dx_2 = x_2$

โดยทฤษฎีบท 1.21 จะได้ว่า $dx_1 = x_1$

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

ให้ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1}$ โดยที่ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in B$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$

จาก $x_n \leq x_{n+1}$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$ โดยทฤษฎีบท 1.21 จะได้ว่า $dx_n = x_n$

จาก $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n + 1$

นั่นคือ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1}$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n + 1$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

จากทฤษฎีบท 1.21 แสดงให้เห็นว่าในการกำหนดฟังก์ชัน d ที่จะสอดคล้องกับการเงื่อนไขที่จะทำให้ d เป็น Boolean derivation บน Boolean algebra ใดๆ นั้น มีเงื่อนไขที่สำคัญอย่างหนึ่งว่า สำหรับแต่ละสมาชิก x, y ใดๆ ใน Boolean algebra โดยที่ $y \leq x$ ซึ่งถ้าเรากำหนดให้ $dx = x$ แล้วเราจะต้องกำหนดให้ $dy = y$ และในตรงกันข้าม ถ้าเรามีสมาชิก x, y ใดๆ เพียงคู่เดียวที่ $y \leq x$ และ $dx = x$ แต่ $dy \neq y$ แล้ว d จะไม่เป็น Boolean derivation ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1.23 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้ามี $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = x$ แต่ $dy \neq y$ แล้ว d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

พิสูจน์ ให้มี $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = x$ แต่ $dy \neq y$

สมมติให้ d เป็น Boolean derivation บน B

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $dy \leq y \leq x$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dy &= d(x \wedge y) && \text{(จาก } y \leq x) \\ &= (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= (x \wedge y) \vee dy && \text{(จาก } dx = x \text{ และ } dy \leq x) \\ &= y \vee dy && \text{(จาก } y \leq x) \\ &= y && \text{(จาก } dy \leq y) \end{aligned}$$

นั่นคือ $dy = y$ ซึ่งขัดแย้งกับ $dy \neq y$

ดังนั้น d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 1.24 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ และ $d: B \rightarrow B$ เป็น

$$\text{ฟังก์ชัน นิยามโดย } dx = \begin{cases} 1, & x = 1, a \\ a, & x = b \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

จากนิยามข้างต้นเราสังเกตได้ว่า $b \leq 1$ และ $d1 = 1$ แต่ $db = a \neq b$

ดังนั้น โดยบทแทรก 1.23 จะได้ว่า d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 1.25 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

$$dx = x \wedge d(x \vee y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $dx \leq x \leq x \vee y$

โดยทฤษฎีบท 1.17 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ดังนั้น $dx \leq d(x \vee y)$

จาก $dx \leq x$ และ $dx \leq d(x \vee y)$ จะได้ว่า $dx \leq x \wedge d(x \vee y)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dx &= d((x \vee y) \wedge x) && \text{(จาก } x = (x \vee y) \wedge x \text{)} \\ &= (d(x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge dx) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= (d(x \vee y) \wedge x) \vee dx && \text{(จาก } dx \leq x \leq x \vee y \text{)} \end{aligned}$$

แสดงว่า $dx = dx \vee (x \wedge d(x \vee y))$

ฉะนั้น $x \wedge d(x \vee y) \leq dx$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $dx = x \wedge d(x \vee y)$

ทฤษฎีบท 1.26 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

1. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น identity Boolean derivation
2. $d1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น zero Boolean derivation

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

(1) (\Rightarrow) สมมติให้ $d1 = 1$ และเราทราบว่า $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 1.21 จะได้ว่า $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น d เป็น identity Boolean derivation

(\Leftarrow) ชัดเจน

(2) (\Rightarrow) สมมติให้ $d1 = 0$

โดยทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $dx = x \wedge d1 = x \wedge 0 = 0$

นั่นคือ $dx = 0$

ดังนั้น d เป็น zero Boolean derivation

(\Leftarrow) ชัดเจน

ทฤษฎีบท 1.27 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

$$d(x \wedge y) = dx \wedge dy \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

โดยทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $dx = x \wedge d1$ และ $dy = y \wedge d1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dx \wedge dy &= (x \wedge d1) \wedge (y \wedge d1) \\ &= (x \wedge y) \wedge d1 \\ &= d(x \wedge y) \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.19}) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ตัวอย่าง 1.28 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$ โดยที่ $b \neq 0$ กำหนดให้ $d_b: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d_b(x) = x \vee b$ สำหรับทุก $x \in B$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยามข้างต้นเราพบว่า } d_b(x \wedge y) &= (x \wedge y) \vee b \\ &= (x \vee b) \wedge (y \vee b) \\ &= d_b(x) \wedge d_b(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d_b(x \wedge y) = d_b(x) \wedge d_b(y)$

แต่จากตัวอย่าง 1.11 เราพบว่า d_b ไม่เป็น Boolean derivation บน B

ข้อสังเกต 1.29 ตัวอย่าง 1.28 แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบท 1.27 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.30 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ โดยที่ $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\text{สมมติให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ } d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

สำหรับทุก $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$

สำหรับ $n = 2$ โดยทฤษฎีบท 1.27 จะได้ว่า $d(x_1 \wedge x_2) = dx_1 \wedge dx_2$

สำหรับทุก $x_1, x_2 \in B$

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ สำหรับทุก $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in B$ และ $a = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \in B$

$$\text{ดังนั้น } da = d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n+1}) &= d(a \wedge x_{n+1}) \\
&= da \wedge dx_{n+1} \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.27}) \\
&= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1} \\
\text{นั่นคือ } d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge x_{n+1}) &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1} \\
\text{ดังนั้น สรุปได้ว่า } d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{โดยที่} \\
x_1, x_2, \dots, x_n \in B \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n \geq 2
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.31 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า
ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $d(x \wedge y) = dx \wedge y$ สำหรับทุก $x, y \in B$
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in B$

$$(1) \Rightarrow (2) \text{ สมมติให้ } d(x \wedge y) = dx \wedge y$$

$$\text{จะได้ว่า } d(x \wedge y) = d(y \wedge x) = dy \wedge x$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } dx \wedge y \leq dx \text{ และ } dy \wedge x \leq dy$$

$$\text{ฉะนั้น } d(x \wedge y) \leq dx \text{ และ } d(x \wedge y) \leq dy$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 1.9(4) เราทราบว่า } dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = dx \wedge dy$$

$$(2) \Rightarrow (1) \text{ สมมติให้ } d(x \wedge y) = dx \wedge dy$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } dx \wedge dy \leq dx \text{ และ } dy \wedge dx \leq dy$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 1.9(1) เราทราบว่า } dy \leq y$$

$$\text{ฉะนั้น } dy \wedge dx \leq y$$

$$\text{จาก } dx \wedge dy \leq dx \text{ และ } dy \wedge dx \leq y \text{ จะได้ว่า } dx \wedge dy \leq dx \wedge y$$

$$\text{นั่นคือ } d(x \wedge y) \leq dx \wedge y$$

$$\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation บน } B \text{ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$$

$$\text{ฉะนั้น } dx \wedge y \leq d(x \wedge y)$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = dx \wedge y$$

โดยทฤษฎีบท 1.27 และ ทฤษฎีบท 1.31 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นทฤษฎีบท ดังนี้
ทฤษฎีบท 1.32 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า
 $d(x \wedge y) = dx \wedge y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ทฤษฎีบท 1.33 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_1, d_2 เป็น Boolean derivations บน B กำหนดให้
 $d_1 \circ d_2: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $(d_1 \circ d_2)(x) = d_1(d_2x)$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้วจะได้
 ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean derivation บน B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (d_1 \circ d_2)(x \wedge y) &= d_1(d_2(x \wedge y)) \\ &= d_1((d_2x \wedge y) \vee (x \wedge d_2y)) \quad (\text{จาก } d_2 \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= d_1(d_2x \wedge y) \vee d_1(x \wedge d_2y) \quad (\text{จาก } d_1 \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= (d_1(d_2x) \wedge y) \vee (x \wedge d_1(d_2y)) \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.32}) \\ &= ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge y) \vee (x \wedge (d_1 \circ d_2)(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (d_1 \circ d_2)(x \vee y) &= d_1(d_2(x \vee y)) \\ &= d_1(d_2x \vee d_2y) \quad (\text{จาก } d_2 \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= d_1(d_2x) \vee d_1(d_2y) \quad (\text{จาก } d_1 \text{ เป็น Boolean derivation}) \\ &= (d_1 \circ d_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 1.34 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivations บน B จะ
 ได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean derivation บน B สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$
 (เมื่อ $(d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)(x) = d_1(d_2 \dots (d_nx))$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean derivation บน B
 สำหรับ $n = 2$ โดยทฤษฎีบท 1.33 จะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean derivation บน B
 ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง
 นั่นคือ $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean derivation บน B

กำหนดให้ $D_n = d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$

ฉะนั้น D_n เป็น Boolean derivation บน B

จาก d_{n+1} เป็น Boolean derivation บน B

โดยทฤษฎีบท 1.33 จะได้ว่า $D_n \circ d_{n+1}$ เป็น Boolean derivation บน B

นั่นคือ $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n \circ d_{n+1} = D_n \circ d_{n+1}$ เป็น Boolean derivation

ดังนั้น สรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean derivation บน B สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 1.35 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B จะได้ว่า $d^2 = d$ (เมื่อ $d^2x = d(dx)$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $d^2x = d(dx) \leq dx \leq x$

ดังนั้น $d^2x = d(dx)$

$$= d(x \wedge dx) \quad (\text{จาก } dx \leq x)$$

$$= (dx \wedge dx) \vee (x \wedge d(dx)) \quad (\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation})$$

$$= dx \vee (x \wedge d^2x) \quad (\text{จาก } d^2x = d(dx))$$

$$= dx \vee d^2x \quad (\text{จาก } d^2x \leq dx \leq x)$$

$$= dx$$

นั่นคือ $d^2x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $d^2 = d$

ทฤษฎีบท 1.36 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B จะได้ว่า $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ (เมื่อ $d^n x = \underbrace{d(d \dots d(dx))}_n$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ $d^n = d$

สำหรับ $n = 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ โดยทฤษฎีบท 1.35 จะได้ว่า $d^2 = d$

ให้ $n \geq 2$ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $d^n = d$ จะได้ว่า $d^n x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

ให้ $x \in B$

จะได้ว่า $d^{n+1}x = d(d^n x)$

$$= d(dx) \quad (\text{จาก } d^n x = dx)$$

$$= d^2x \quad (\text{จาก } d^2x = d(dx))$$

$$= dx \quad (\text{จาก } d^2x = dx)$$

นั่นคือ $d^{n+1}x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

สรุปได้ว่า $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ข้อสังเกต 1.37 ถ้า d เป็น Boolean derivation บน B โดยทฤษฎีบท 1.36 จะได้ว่า $d^n = d$ ดังนั้น d^n เป็น Boolean derivation บน B สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 1.38 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น identity Boolean derivation
2. d เป็น injective derivation
3. d เป็น surjective derivation

พิสูจน์ (1) \Rightarrow (2) ชัดเจน

(2) \Rightarrow (1) ให้ d เป็น injective derivation

สมมติให้ d ไม่เป็น identity Boolean derivation

นั่นคือ จะมีสมาชิก $a \in B$ ซึ่ง $da \neq a$

เนื่องจากเราทราบว่า $da \leq a$

ดังนั้น $da < a$

กำหนดให้ $da = b$ จะได้ว่า $b < a$ และ $b \neq a$

ดังนั้น $db = d(b \wedge a)$ (จาก $b < a$)

$$= (db \wedge a) \vee (b \wedge da) \quad (\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation})$$

$$= db \vee da \quad (\text{จาก } db \leq b = da < a)$$

$$= da$$

นั่นคือ $db = da$

จาก d เป็น injective derivation จะได้ว่า $b = a$ ซึ่งขัดแย้งกับ $b \neq a$

ดังนั้น d เป็น identity Boolean derivation

(1) \Rightarrow (3) ชัดเจน

(3) \Rightarrow (1) สมมติให้ d เป็น surjective derivation และ $x \in B$

จาก d เป็น surjective derivation จะได้ว่า มีสมาชิก $y \in B$ ซึ่ง $dy = x$

ดังนั้น $dx = d(dy)$

$$= d^2y \quad (\text{จาก } d^2y = d(dy))$$

$$= dy \quad (\text{จาก } d^2y = dy)$$

$$= x \quad (\text{จาก } dy = x)$$

นั่นคือ $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น d เป็น identity Boolean derivation

ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B

นิยาม $\text{Fix}(B, d) = \{x \in B \mid dx = x\}$

ข้อสังเกต 1.39

1. จากทฤษฎีบท 1.9(2) จะได้ว่า $d0 = 0$ นั่นคือ $0 \in \text{Fix}(B, d)$
2. จากทฤษฎีบท 1.21 จะได้ว่า ถ้า $y \leq x$ และ $x \in \text{Fix}(B, d)$ แล้ว $y \in \text{Fix}(B, d)$
3. จากทฤษฎีบท 1.35 จะได้ว่า $d(dx) = d^2x = dx$ ดังนั้น $dx \in \text{Fix}(B, d)$
4. จากทฤษฎีบท 1.36 จะได้ว่า $\text{Fix}(B, d) = \text{Fix}(B, d^n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$n \geq 2$

ทฤษฎีบท 1.40 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivation บน B แล้ว $d_i = d_j$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Fix}(B, d_i) = \text{Fix}(B, d_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

พิสูจน์ ให้ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivation บน B และ $x \in B$

(\Rightarrow) สมมติให้ $d_i = d_j$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

ดังนั้น $\text{Fix}(B, d_i) = \text{Fix}(B, d_j)$

(\Leftarrow) สมมติให้ $\text{Fix}(B, d_i) = \text{Fix}(B, d_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

จากข้อสังเกต 1.39(3) จะได้ว่า $d_i x \in \text{Fix}(B, d_i) = \text{Fix}(B, d_j)$

และ $d_j x \in \text{Fix}(B, d_j) = \text{Fix}(B, d_i)$

ดังนั้น $d_j(d_i x) = d_i x$ และ $d_i(d_j x) = d_j x$

โดยทฤษฎีบท 1.17 เราทราบว่า d_i, d_j เป็น order-preserving

จาก d_i เป็น order-preserving และ $d_j x \leq x$ จะได้ว่า $d_i(d_j x) \leq d_i x = d_j(d_i x)$

จาก d_j เป็น order-preserving และ $d_i x \leq x$ จะได้ว่า $d_j(d_i x) \leq d_j x = d_i(d_j x)$

นั่นคือ $d_i(d_j x) \leq d_j(d_i x)$ และ $d_j(d_i x) \leq d_i(d_j x)$

ฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d_i(d_j x) = d_j(d_i x)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_i x &= d_j(d_i x) \\ &= d_i(d_j x) \\ &= d_j x \end{aligned}$$

นั่นคือ $d_i = d_j$

ทฤษฎีบท 1.41 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $\text{Fix}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \text{Fix}(B, d)$ และ $b \in B$

จาก $x, y \in \text{Fix}(B, d)$ จะได้ว่า $dx = x$ และ $dy = y$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) เราทราบว่า $db \leq b$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \wedge db \leq x \wedge b$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(x \wedge b) &= (dx \wedge b) \vee (x \wedge db) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= (x \wedge b) \vee (x \wedge db) && \text{(จาก } dx = x) \\ &= x \wedge b && \text{(จาก } x \wedge db \leq x \wedge b) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x \wedge b) = x \wedge b$

แสดงว่า $x \wedge b \in \text{Fix}(B, d)$

$$\begin{aligned} \text{และ } d(x \vee y) &= dx \vee dy && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation)} \\ &= x \vee y && \text{(จาก } dx = x \text{ และ } dy = y) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x \vee y) = x \vee y$

แสดงว่า $x \vee y \in \text{Fix}(B, d)$

นั่นคือ $\text{Fix}(B, d)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และ 2 ของบทนิยาม 25 ในส่วนวิธีการ

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\text{Fix}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

โดยทฤษฎีบท 1.34 ทฤษฎีบท 1.36 และ ทฤษฎีบท 1.41 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 1.42 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivations บน B แล้ว $\text{Fix}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอดีลของ B

2. ถ้า d เป็น Boolean derivation บน B แล้ว $\text{Fix}(B, d^n)$ เป็นไอดีลของ B

ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B นิยาม kernel ของ d แทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Ker}(B, d)$ นิยามโดย $\text{Ker}(B, d) = \{x \in B \mid dx = 0\}$

ข้อสังเกต 1.43

1. จากทฤษฎีบท 1.9(2) จะได้ว่า $d0 = 0$ นั่นคือ $0 \in \text{Ker}(B, d)$
2. จากทฤษฎีบท 1.36 จะได้ว่า ถ้า $\text{Ker}(B, d) = \text{Ker}(B, d^n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 1.44 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $\text{Ker}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \text{Ker}(B, d)$ และ $b \in B$

จาก $x, y \in \text{Ker}(B, d)$ จะได้ว่า $dx = 0$ และ $dy = 0$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge b) = dx \wedge db \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.27})$$

$$= 0 \wedge db \quad (\text{จาก } dx = 0)$$

$$= 0$$

$$\text{นั่นคือ } d(x \wedge b) = 0$$

แสดงว่า $x \wedge b \in \text{Ker}(B, d)$

$$\text{ดังนั้น } d(x \vee y) = dx \vee dy \quad (\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean derivation})$$

$$= 0 \quad (\text{จาก } dx = 0 \text{ และ } dy = 0)$$

$$\text{นั่นคือ } d(x \vee y) = 0$$

แสดงว่า $x \vee y \in \text{Ker}(B, d)$

นั่นคือ $\text{Ker}(B, d)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และ 2 ของบทนิยาม 25 ในส่วนวิธีการ

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\text{Ker}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

โดยทฤษฎีบท 1.34 ทฤษฎีบท 1.36 และ ทฤษฎีบท 1.44 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 1.45 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivations บน B แล้ว $\text{Ker}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอดิลของ B

2. ถ้า d เป็น Boolean derivation บน B แล้ว $\text{Ker}(B, d^n)$ เป็นไอดิลของ B

ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ กำหนดให้ $d_a: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $d_a(x) = x \wedge a$ สำหรับทุก $x \in B$ โดยทฤษฎีบท 1.8 จะได้ว่า d_a เป็น Boolean derivation บน B และนิยาม $D(B) = \{d_a | a \in B\}$

ต่อไปจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Boolean algebra B และ $D(B)$ ดังนี้
บทตั้ง 1.46 ให้ $D(B) = \{d_a | a \in B\}$ และนิยาม $\circ, +$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $D(B)$ โดย $(d_a \circ d_b)(x) = d_a x \wedge d_b x$ และ $(d_a + d_b)(x) = d_a x \vee d_b x$ สำหรับทุก $d_a, d_b \in D(B)$ และ $x \in B$ แล้วจะได้ว่า $\circ, +$ เป็นการดำเนินการแจ่มชัด (well defined)

พิสูจน์ สมมติให้ $d_a, d_b \in D(B)$ โดยที่ $a, b \in B$ และ $x \in B$

จาก $a, b \in B$ จะได้ว่า $a \wedge b \in B$ และ $a \vee b \in B$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (d_a \circ d_b)(x) &= d_a(x) \wedge d_b(x) \\ &= (x \wedge a) \wedge (x \wedge b) \\ &= x \wedge (a \wedge b) \\ &= d_{a \wedge b}(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d_a \circ d_b = d_{a \wedge b} \in D(B)$

$$\begin{aligned} \text{และ } (d_a + d_b)(x) &= d_a(x) \vee d_b(x) \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \\ &= x \wedge (a \vee b) \\ &= d_{a \vee b}(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d_a + d_b = d_{a \vee b} \in D(B)$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\circ, +$ เป็นการดำเนินการแจ่มชัด

ทฤษฎีบท 1.47 ให้ $D(B) = \{d_a | a \in B\}$ และนิยาม $+, \circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $D(B)$ เช่นเดียวกับบทตั้ง 1.46 แล้วจะได้ว่า $(D(B), +, \circ, d_0, d_1, ')$ เป็น Boolean algebra

พิสูจน์ จาก B เป็น Boolean algebra จะได้ว่า $B \neq \emptyset$ ดังนั้น $D(B) \neq \emptyset$

สมมติให้ $d_a, d_b, d_c \in D(B)$ โดยที่ $a, b, c \in B$

$$(1) d_a + d_a = d_{ava} = d_a \text{ และ } d_a \circ d_a = d_{a\wedge a} = d_a$$

$$(2) d_a + d_b = d_{avb} = d_{bva} = d_b + d_a \text{ และ } d_a \circ d_b = d_{a\wedge b} = d_{b\wedge a} = d_b \circ d_a$$

$$(3) d_a + (d_b + d_c) = d_{aV(bVc)} = d_{(aVb)Vc} = (d_a + d_b) + d_c$$

$$d_a \circ (d_b \circ d_c) = d_{a\wedge(b\wedge c)} = d_{(a\wedge b)\wedge c} = (d_a \circ d_b) \circ d_c$$

$$(4) d_a + (d_b \circ d_a) = d_{aV(b\wedge a)} = d_a \text{ และ } d_a \circ (d_b + d_a) = d_{a\wedge(bva)} = d_a$$

$$(5) d_a + (d_b \circ d_c) = d_{aV(b\wedge c)} = d_{(aVb)\wedge(a\wedge c)} = (d_a + d_b) \circ (d_a + d_c)$$

$$d_a \circ (d_b + d_a) = d_{a\wedge(bVc)} = d_{(a\wedge b)V(a\wedge c)} = (d_a \circ d_b) + (d_a \circ d_c)$$

(6) เราทราบว่า $0, 1 \in B$ ดังนั้น $d_0, d_1 \in D(B)$

$$\text{แล้วจะได้ว่า } d_a + d_0 = d_{av0} = d_a \text{ และ } d_a \circ d_1 = d_{a\wedge 1} = d_a$$

(7) จาก $a, b \in B$ จะได้ว่า $a', b' \in B$

ดังนั้น $d_{a'}, d_{b'} \in D(B)$

$$\text{แล้วจะได้ว่า } d_a + d_{a'} = d_{ava'} = d_1 \text{ และ } d_a \circ d_{a'} = d_{a\wedge a'} = d_0$$

จากการพิสูจน์ (1) - (7) สรุปได้ว่า $(D(B), +, \circ, d_0, d_1, ')$ เป็น Boolean algebra

ทฤษฎีบท 1.48 ให้ B เป็น Boolean algebra แล้ว B สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $D(B)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $g : B \rightarrow D(B)$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $g(a) = d_a$ สำหรับทุก $a \in B$

จะต้องแสดงว่า (1) g เป็น Boolean homomorphism

(2) g เป็น injective function

(3) g เป็น surjective function

(1) ให้ $x, y \in B$

$$\text{จะได้ว่า } g(x \wedge y) = d_{x\wedge y} = d_x \circ d_y = g(x) \circ g(y)$$

$$g(x \vee y) = d_{x\vee y} = d_x + d_y = g(x) + g(y)$$

$$\text{และ } g(x) \circ g(x') = d_x \circ d_{x'} = d_{x\wedge x'} = d_0$$

$$g(x) + g(x') = d_x + d_{x'} = d_{x\vee x'} = d_1$$

ฉะนั้น $(g(x))' = g(x')$

ดังนั้น g เป็น Boolean homomorphism

(2) ให้ $x, y \in B$ และ $g(x) = g(y)$

จาก $g(x) = g(y)$ จะได้ว่า $d_x = d_y$

นั่นคือ $d_x(k) = d_y(k)$ สำหรับทุก $k \in B$

ดังนั้น $x = x \wedge x$

$$= d_x(x)$$

$$= d_y(x)$$

$$(จาก d_x(x) = d_y(x))$$

$$= x \wedge y$$

นั่นคือ $x = x \wedge y$

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $y = y \wedge x$

ดังนั้น $x = y$

นั่นคือ g เป็น injective function

(3) สำหรับแต่ละ $d_x \in D(B)$ จะมี $x \in B$ ซึ่ง $g(x) = d_x$

ดังนั้น g เป็น surjective function

จากการพิสูจน์ (1) - (3) สรุปได้ว่า B สมมูลฐานกับ $D(B)$

ตอนที่ 2 Boolean f-derivations ใน Boolean algebra

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม Boolean f-derivation ใน Boolean algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน

$d: B \rightarrow B$ เป็น Boolean f-derivation บน B ถ้า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge d(y))$
2. $d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ข้อสังเกต 2.2

1. ถ้า $f = d$ แล้วจะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ แล้วจะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 2.3 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ b, & x = b, 1 \end{cases} \quad f(x) = x \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge a) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge b) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge 1) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge a) &= da = 0, & (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge b) &= d0 = 0, & (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge 1) &= da = 0, & (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(b \wedge b) &= db = b, & (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) &= b \vee b = b \\ d(b \wedge 1) &= db = b, & (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) &= b \vee b = b \\ d(1 \wedge 1) &= d1 = b, & (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) &= b \vee b = b \end{aligned}$$

ดังนั้น d เป็น Boolean f-derivation บน B

นั่นคือ d เป็นทั้ง Boolean derivation และ Boolean f-derivation บน B

ตัวอย่าง 2.4 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ b, & x = b, 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x = 1, a \\ b, & x = 0, b \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

นอกจากนี้ยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge b) &= d0 = 0 \\ (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) &= (0 \wedge b) \vee (b \wedge b) = 0 \vee b = b \end{aligned}$$

และพบว่า $d(0 \wedge b) \neq (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db)$

ดังนั้น d ไม่เป็น Boolean f -derivation บน B

นั่นคือ d เป็น Boolean derivation แต่ไม่เป็น Boolean f -derivation บน B

ตัวอย่าง 2.5 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = 1$ สำหรับทุก $x \in B$ และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $f(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 1, & (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \wedge a) &= d0 = 1, & (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \wedge b) &= d0 = 1, & (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \wedge 1) &= d0 = 1, & (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \wedge a) &= da = 1, & (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \wedge b) &= da = 1, & (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \wedge 1) &= da = 1, & (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(b \wedge b) &= db = 1, & (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(b \wedge 1) &= db = 1, & (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(1 \wedge 1) &= d1 = 1, & (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) &= 1 \vee 1 = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \vee 0) &= d0 = 1, & d0 \vee d0 &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \vee a) &= da = 1, & d0 \vee da &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \vee b) &= db = 1, & d0 \vee db &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(0 \vee 1) &= d1 = 1, & d0 \vee d1 &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \vee a) &= da = 1, & da \vee da &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \vee b) &= d1 = 1, & da \vee db &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(a \vee 1) &= d1 = 1, & da \vee d1 &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(b \vee b) &= db = 1, & db \vee db &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(b \vee 1) &= d1 = 1, & db \vee d1 &= 1 \vee 1 = 1 \\ d(1 \vee 1) &= d1 = 1, & d1 \vee d1 &= 1 \vee 1 = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

จากการตรวจสอบข้างต้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean f-derivation บน B
นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned}d(0 \wedge a) &= d0 = 1 \\(d0 \wedge a) \vee (0 \wedge da) &= (1 \wedge a) \vee (0 \wedge 1) = a \vee 0 = a\end{aligned}$$

และพบว่า $d(0 \wedge b) \neq (d0 \wedge b) \vee (0 \wedge db)$

ดังนั้น d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

นั่นคือ d ไม่เป็น Boolean derivation แต่เป็น Boolean f-derivation บน B

ตัวอย่าง 2.6 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = 1 \text{ สำหรับทุก } x \in B \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = a, b \\ b, & x = 0, 1 \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 2.5 จะได้ว่า d ไม่เป็น Boolean derivation บน B

นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned}d(0 \wedge 0) &= d0 = 1 \\(d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) &= d0 \wedge f(0) = 1 \wedge b = b\end{aligned}$$

และพบว่า $d(0 \wedge b) \neq (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0)$

ดังนั้น d ไม่เป็น Boolean f-derivation บน B

นั่นคือ d ไม่เป็นทั้ง Boolean derivation และ Boolean f-derivation บน B

ตัวอย่าง 2.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = 0$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้วจะได้ว่า d เป็น Boolean f-derivation บน B และเรียก d นี้ว่า zero Boolean f-derivation

ตัวอย่าง 2.8 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ ถ้า $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $dx = f(x \wedge a)$ สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า d เป็น Boolean f-derivation บน B

ตรวจสอบได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

$$\begin{aligned}(dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) &= (f(x \wedge a) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge f(y \wedge a)) \\&= f(x \wedge y \wedge a) \vee f(x \wedge y \wedge a) \\&= f(x \wedge y \wedge a) \\&= d(x \wedge y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } dx \vee dy &= f(x \wedge a) \vee f(y \wedge a) \\
 &= f((x \wedge a) \vee (y \wedge a)) \\
 &= f((x \vee y) \wedge a) \\
 &= d(x \vee y)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \vee y) = dx \vee dy$$

จากการแสดงข้างต้น สรุปได้ว่า d เป็น Boolean f -derivation บน B

ตัวอย่าง 2.9 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ ถ้า $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$dx = f(x) \wedge a$ สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า d เป็น Boolean f -derivation บน B

ตรวจสอบได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

$$\begin{aligned}
 (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) &= (f(x) \wedge a \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge f(y) \wedge a) \\
 &= (f(x \wedge y) \wedge a) \vee (f(x \wedge y) \wedge a) \\
 &= f(x \wedge y) \wedge a \\
 &= d(x \wedge y)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } dx \vee dy &= (f(x) \wedge a) \vee (f(y) \wedge a) \\
 &= (f(x) \vee f(y)) \wedge a \\
 &= f(x \vee y) \wedge a \\
 &= d(x \vee y)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \vee y) = dx \vee dy$$

จากการแสดงข้างต้น สรุปได้ว่า d เป็น Boolean f -derivation บน B

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $dx \leq f(x)$
2. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y)$
3. ถ้า $d1 = 1$ แล้ว $f(1) = 1$
4. ถ้า $f(1) = 0$ แล้ว $d1 = 0$
5. ถ้า $d0 = 1$ แล้ว $f(0) = 1$
6. ถ้า $d0 = 0$ แล้ว $dx \wedge f(0) = 0$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad dx &= d(x \wedge x) && \text{(จาก } x = x \wedge x \text{)} \\
 &= (dx \wedge f(x)) \vee (f(x) \wedge dx) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean } f\text{-derivation)} \\
 &= dx \wedge f(x)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx \leq f(x)$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\text{จาก (1) จะได้ว่า } dx \leq f(x) \\
 \text{ดังนั้น } &dx \wedge dy \leq f(x) \wedge dy && \text{(โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ)} \\
 &\leq (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) \\
 &= d(x \wedge y) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean } f\text{-derivation)}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(x) \wedge dy \leq dy$ และ $dx \wedge f(y) \leq dx$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \vee (f(x) \wedge dy) \leq dx \vee dy$

และ $(dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) \leq dx \vee (f(x) \wedge dy)$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } d(x \wedge y) &= (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) \text{ (จาก } d \text{ เป็น Boolean } f\text{-derivation)} \\
 &\leq dx \vee (f(x) \wedge dy) \\
 &\leq dx \vee dy \\
 &= d(x \vee y) && \text{(จาก } d \text{ เป็น Boolean } f\text{-derivation)}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y)$

(3) สมมติให้ $d1 = 1$

จาก (1) จะได้ว่า $d1 \leq f(1)$

ฉะนั้น $1 \leq f(1)$

แต่เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $f(1) \leq 1$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(1) = 1$

(4) สมมติให้ $f(1) = 0$

จาก (1) จะได้ว่า $d1 \leq f(1)$

ฉะนั้น $d1 \leq 0$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq d1$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d1 = 0$

(5) สมมติให้ $d0 = 1$

จาก (1) จะได้ว่า $d0 \leq f(0)$

ฉะนั้น $1 \leq f(0)$

แต่เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $f(0) \leq 1$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(0) = 1$

(6) สมมติให้ $d0 = 0$

จะได้ว่า $dx \wedge f(0) = (dx \wedge f(0)) \vee 0$

$$= (dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge 0)$$

$$= (dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge d0) \quad (\text{จาก } d0 = 0)$$

$$= d(x \wedge 0) \quad (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)})$$

$$= d0$$

$$= 0$$

ดังนั้น $dx \wedge f(0) = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.10(6) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาดังบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $d0 = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. $dx \leq f(0)$ สำหรับทุก $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น zero Boolean f -derivation
2. $f(0) \leq dx$ สำหรับทุก $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ $f(0) = 0$

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(0) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. $d0 = 0$
2. $dx \wedge f(x') = f(x) \wedge dx' = 0$ สำหรับทุก $x \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(0) = 0$

(1) โดยทฤษฎีบท 2.10(1) จะได้ว่า $d0 \leq f(0) = 0$

ดังนั้น $d0 \leq 0$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq d0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d0 = 0$

(2) โดยบทนิยาม 1(7) ในส่วนวิธีการ เราทราบว่า $x \wedge x' = 0$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ว่า $d(x \wedge x') = d0 = 0$

แต่เราทราบว่า $d(x \wedge x') = (dx \wedge f(x')) \vee (f(x) \wedge dx')$

ฉะนั้น $(dx \wedge f(x')) \vee (f(x) \wedge dx') = 0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 19(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \wedge f(x') = f(x) \wedge dx' = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.12(1) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาดังบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.13 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว d เป็น regular Boolean f -derivation

ตัวอย่าง 2.14 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ a, & x = a, 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x = 1, a \\ b, & x = 0, b \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge a) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge b) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge 1) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge a) &= da = a, & (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) &= a \vee a = a \\ d(a \wedge b) &= d0 = 0, & (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge 1) &= da = a, & (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) &= a \vee a = a \\ d(b \wedge b) &= db = 0, & (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(b \wedge 1) &= db = 0, & (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(1 \wedge 1) &= d1 = a, & (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) &= a \vee 0 = a \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \vee 0) &= d0 = 0, & d0 \vee d0 &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \vee a) &= da = a, & d0 \vee da &= 0 \vee a = a \\ d(0 \vee b) &= db = 0, & d0 \vee db &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \vee 1) &= d1 = a, & d0 \vee d1 &= 0 \vee a = a \\ d(a \vee a) &= da = a, & da \vee da &= a \vee a = a \\ d(a \vee b) &= d1 = a, & da \vee db &= a \vee 0 = a \\ d(a \vee 1) &= d1 = a, & da \vee d1 &= a \vee a = a \\ d(b \vee b) &= db = 0, & db \vee db &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(b \vee 1) &= d1 = a, & db \vee d1 &= 0 \vee a = a \\ d(1 \vee 1) &= d1 = a, & d1 \vee d1 &= a \vee a = a \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

จากการตรวจสอบข้างต้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean f -derivation บน B

ข้อสังเกต 2.15 ตัวอย่าง 2.14 แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบท 2.10(3) และ 2.12(1) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 2.16 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า

$$1. d(x \wedge y') = 0$$

$$2. dy' \leq f(x')$$

$$3. dx \wedge dy' = 0$$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ และ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism

โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า f เป็น order-preserving และ $f(0) = 0$

จาก f เป็น order-preserving และ $x \leq y$ จะได้ว่า $f(x) \leq f(y)$

จาก $f(0) = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.12(1) จะได้ว่า $d0 = 0$

(1) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \wedge y' = 0$

ดังนั้น $d(x \wedge y') = d0 = 0$ (จาก $d0 = 0$)

นั่นคือ $d(x \wedge y') = 0$

(2) จาก $f(x) \leq f(y)$ โดยทฤษฎีบท 17(3) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $(f(y))' \leq (f(x))'$

จาก f เป็น Boolean homomorphism โดยบทนิยาม 21 ในส่วนวิธีการ

จะได้ว่า $f(x') = (f(x))'$ และ $f(y') = (f(y))'$

ดังนั้น $dy' \leq f(y')$ (โดยทฤษฎีบท 2.10(1))

$$= (f(y))' \quad (\text{จาก } f(y') = (f(y))')$$

$$\leq (f(x))' \quad (\text{จาก } (f(y))' \leq (f(x))')$$

$$= f(x') \quad (\text{จาก } f(x') = (f(x))')$$

นั่นคือ $dy' \leq f(x')$

(3) จาก $f(x) \leq f(y)$ โดยทฤษฎีบท 2.10(1) จะได้ว่า $dx \leq f(x) \leq f(y)$

โดยทฤษฎีบท 2.10(1) จะได้ว่า $dy' \leq f(y')$

จาก $dx \leq f(y)$ และ $dy' \leq f(y')$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \wedge dy' \leq f(y) \wedge dy$

และ $f(y) \wedge dy' \leq f(y) \wedge f(y')$

ดังนั้น $dx \wedge dy' \leq f(y) \wedge f(y')$

$$= f(y \wedge y') \quad (\text{จาก } f \text{ เป็น Boolean homomorphism})$$

$$= f(0) \quad (\text{จาก } y \wedge y' = 0)$$

$$= 0 \quad (\text{จาก } f(0) = 0)$$

นั่นคือ $dx \wedge dy' \leq 0$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq dx \wedge dy'$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \wedge dy' = 0$

ทฤษฎีบท 2.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in B$

- $dx \wedge dx' = 0$

- $dx' = (dx)'$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$

พิสูจน์ ให้ $x \in B$

- โดยทฤษฎีบท 2.16(3) แทน $y' = x'$ จะได้ว่า $dx \wedge dx' = 0$

- (\Rightarrow) สมมติให้ $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$

จาก f เป็น Boolean homomorphism โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(0) = 0$

จาก $f(0) = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.12(2) จะได้ว่า $f(x) \wedge dx' = 0$

$$\text{ดังนั้น } f(x) \wedge (dx)' = f(x) \wedge dx' \quad (\text{จาก } dx' = (dx)')$$

$$= 0 \quad (\text{จาก } f(x) \wedge dx' = 0)$$

นั่นคือ $f(x) \wedge (dx)' = 0$

โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $f(x) \leq dx$

แต่จากทฤษฎีบท 2.10(1) เราทราบว่า $dx \leq f(x)$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = f(x)$

- (\Leftarrow) สมมติให้ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in B$

จาก f เป็น Boolean homomorphism โดยบทนิยาม 21 ในส่วนวิธีการ

$$\text{จะได้ว่า } f(x') = (f(x))'$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dx' &= f(x') && \text{(จาก } dx = f(x)) \\ &= (f(x))' && \text{(จาก } f(x') = (f(x))') \\ &= (dx)' \end{aligned}$$

นั่นคือ $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$

ทฤษฎีบท 2.18 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า d เป็น order-preserving

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$

$$\text{จาก } x \leq y \text{ จะได้ว่า } y = x \vee y$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dy &= d(x \vee y) && \text{(จาก } y = x \vee y) \\ &= dx \vee dy && \text{(โดยบทนิยาม 2.1(2))} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } dy = dx \vee dy$$

$$\text{ฉะนั้น } dx \leq dy$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 20(3) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 2.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism ถ้า $dx' = dx$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้ว d เป็น zero Boolean f -derivation

พิสูจน์ สมมติให้ $dx' = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

จาก f เป็น Boolean homomorphism โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(0) = 0$

จาก $f(0) = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.12(1) จะได้ว่า $d0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d1 &= d1' && \text{(จาก } dx' = dx) \\ &= d0 && \text{(จาก } 1' = 0) \\ &= 0 && \text{(จาก } d0 = 0) \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } d1 = 0$$

ให้ $x \in B$ เราทราบว่า $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 2.18 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

จาก $x \leq 1$ และ d เป็น order-preserving จะได้ว่า $dx \leq d1 = 0$

ดังนั้น $dx \leq 0$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $0 \leq dx$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = 0$

นั่นคือ d เป็น zero Boolean f -derivation

ทฤษฎีบท 2.20 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = f(x)$ แล้ว $dy = f(y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = f(x)$

จาก f เป็น Boolean homomorphism

โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า f เป็น order-preserving

จาก f เป็น order-preserving และ $y \leq x$ จะได้ว่า $f(y) \leq f(x)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dy &= d(x \wedge y) && (\text{จาก } y \leq x) \\ &= (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) && (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)}) \\ &= f(y) \vee dy && (\text{จาก } dy \leq f(y) \leq f(x) = dx) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

นั่นคือ $dy = f(y)$

ทฤษฎีบท 2.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = f(x_n)$ แล้วจะได้ว่า $dx_i = f(x_i)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.22

โดยทฤษฎีบท 2.20 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาดังบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.22 ให้ B เป็น Boolean algebra กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism ถ้ามีบาง $x, y \in B$ โดยที่ $y \leq x$ และ $dx = f(x)$ แต่ $dy \neq f(y)$ แล้วจะได้ว่า d ไม่เป็น Boolean f -derivation บน B

พิสูจน์ สมมติให้ d เป็น Boolean f -derivation บน B

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } dy &= d(x \wedge y) && (\text{จาก } y \leq x) \\
&= (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) && (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)}) \\
&= f(y) \vee dy && (\text{จาก } dy \leq f(y) \leq f(x) = dx) \\
&= f(y)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $dy = f(y)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $dy \neq f(y)$

ดังนั้น d ไม่เป็น Boolean f -derivation บน B

ตัวอย่าง 2.23 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ 1, & x = a, 1 \end{cases} \quad f(x) = x \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

จากการนิยามข้างต้น ชัดเจนว่า f เป็น Boolean homomorphism

จากนิยามข้างต้นเราสังเกตได้ว่า $b \leq 1$ และ $d1 = 1 = f(1)$ แต่ $db = 0 \neq b = f(b)$

ฉะนั้น โดยบทแทรก 2.22 จะได้ว่า d ไม่เป็น Boolean f -derivation บน B

ทฤษฎีบท 2.24 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } dx &= d((x \wedge y) \vee x) && (\text{จาก } x = (x \wedge y) \vee x) \\
&= d(x \wedge y) \vee dx && (\text{โดยบทนิยาม 2.1(2)}) \\
&= ((dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)) \vee dx && (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)}) \\
&= (dx \wedge f(y) \vee (f(x) \wedge dy)) \vee dx \\
&= ((dx \wedge f(y)) \vee dx) \vee (f(x) \wedge dy) \\
&= dx \vee (f(x) \wedge dy) && (\text{จาก } dx = (dx \wedge f(y)) \vee dx)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ทฤษฎีบท 2.25 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$ และเราทราบว่า $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 2.18 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ดังนั้น $dx \leq d1$

โดยทฤษฎีบท 2.10(1) เราทราบว่า $dx \leq f(x)$

ดังนั้น $dx \leq f(x) \wedge d1$

โดยทฤษฎีบท 2.24 จะได้ว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1) = f(x) \wedge d1$

ดังนั้น $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 2.25 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาดังบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.26 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in B$

1. $d1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $dx = d1$
2. $f(x) \leq d1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$

ทฤษฎีบท 2.27 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 1$ และ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in B$

พิสูจน์ (\Rightarrow) สมมติให้ $d1 = 1$ และ $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 2.10(3) จะได้ว่า $f(1) = 1$

โดยทฤษฎีบท 2.25 จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d1 = f(x)$

ดังนั้น $f(1) = 1$ และ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in B$

(\Leftarrow) ชัดเจน

ทฤษฎีบท 2.28 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น order-preserving แล้วจะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ และเราทราบว่า $x \leq x \vee y$

จาก f เป็น order-preserving จะได้ว่า $f(x) \leq f(x \vee y)$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.10(1) จะได้ว่า $dx \leq f(x) \leq f(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 2.18 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ดังนั้น $dx \leq d(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \wedge f(x) \leq d(x \vee y) \wedge f(x)$

โดยทฤษฎีบท 2.10(1) จะได้ว่า $dx \leq f(x)$

ดังนั้น $dx = dx \wedge f(x) \leq d(x \vee y) \wedge f(x)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } dx &= d((x \vee y) \wedge x) && (\text{จาก } x = (x \vee y) \wedge x) \\ &= (d(x \vee y) \wedge f(x)) \vee (f(x \vee y) \wedge dx) && (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)}) \\ &= (d(x \vee y) \wedge f(x)) \vee dx && (\text{จาก } dx \leq f(x \vee y)) \\ &= d(x \vee y) \wedge f(x) && (\text{จาก } dx \leq d(x \vee y) \wedge f(x)) \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ทฤษฎีบท 2.29 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

โดยทฤษฎีบท 2.10(2) จะได้ว่า $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$

เราทราบว่า $x \wedge y \leq x$ และ $x \wedge y \leq y$

โดยทฤษฎีบท 2.18 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ดังนั้น $d(x \wedge y) \leq dx$ และ $d(x \wedge y) \leq dy$

ฉะนั้น $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

โดยทฤษฎีบท 2.29 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาดังบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.30 ให้ B เป็น Boolean algebra กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันและ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $dx \wedge dy = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ทฤษฎีบท 2.31 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ โดยที่

$x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.30

ทฤษฎีบท 2.32 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $d(x \wedge y) = dx \wedge f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$(1) \Rightarrow (2) \text{ สมมติให้ } d(x \wedge y) = dx \wedge f(y)$$

$$\text{จะได้ว่า } d(x \wedge y) = d(y \wedge x) = dy \wedge f(x)$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } dx \wedge f(y) \leq dx \text{ และ } dy \wedge f(x) \leq dy$$

$$\text{ฉะนั้น } d(x \wedge y) \leq dx \text{ และ } d(x \wedge y) \leq dy$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 2.10(2) เราทราบว่า } dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = dx \wedge dy$$

$$(2) \Rightarrow (1) \text{ สมมติให้ } d(x \wedge y) = dx \wedge dy$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } dx \wedge dy \leq dx \text{ และ } dx \wedge dy \leq dy$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 2.10(1) เราทราบว่า } dy \leq f(y)$$

$$\text{ฉะนั้น } dx \wedge dy \leq f(y)$$

$$\text{จาก } dx \wedge dy \leq dx \text{ และ } dx \wedge dy \leq f(y) \text{ จะได้ว่า } dx \wedge dy \leq dx \wedge f(y)$$

$$\text{นั่นคือ } d(x \wedge y) = dx \wedge dy \leq dx \wedge f(y)$$

$$\text{จาก } d \text{ เป็น Boolean } f\text{-derivation \text{ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)}$$

$$\text{ฉะนั้น } dx \wedge f(y) \leq d(x \wedge y)$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า } d(x \wedge y) = dx \wedge f(y)$$

โดยทฤษฎีบท 2.29 และ ทฤษฎีบท 2.32 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 2.33 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ทฤษฎีบท 2.34 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_i เป็น Boolean f_i -derivation บน B เมื่อ $f_i: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2$ กำหนดให้ $d_1 \circ d_2: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $(d_1 \circ d_2)(x) = d_1(d_2x)$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้วจะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2)$ -derivation บน B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยทฤษฎีบท 2.33 และบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (d_1 \circ d_2)(x \wedge y) &= d_1(d_2(x \wedge y)) \\ &= d_1((d_2x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2y)) \\ &= d_1(d_2x \wedge f_2(y)) \vee d_1(f_2(x) \wedge d_2y) \\ &= (d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\ &= ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (d_1 \circ d_2)(x \vee y) &= d_1(d_2(x \vee y)) \\ &= d_1(d_2x \vee d_2y) \\ &= d_1(d_2x) \vee d_1(d_2y) \\ &= (d_1 \circ d_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2)$ -derivation บน B

ทฤษฎีบท 2.35 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_i เป็น Boolean f_i -derivation บน B เมื่อ $f_i: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้วจะได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)$ -derivation บน B สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ (เมื่อ $(d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)(x) = d_1(d_2 \dots (d_n x))$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)$ -derivation บน B

สำหรับ $n = 2$ โดยทฤษฎีบท 2.34 จะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2)$ -derivation บน B

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)$ -derivation บน B

กำหนดให้ $D_n = d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ และ $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$

ฉะนั้น D_n เป็น Boolean F_n -derivation บน B

จาก d_{n+1} เป็น Boolean f_{n+1} -derivation บน B

โดยทฤษฎีบท 2.34 จะได้ว่า $D_n \circ d_{n+1}$ เป็น Boolean $(F_n \circ f_{n+1})$ -derivation บน B

นั่นคือ $d_1 \circ \dots \circ d_n \circ d_{n+1}$ เป็น Boolean $(f_1 \circ \dots \circ f_n \circ f_{n+1})$ -derivation บน B

ดังนั้นสรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)$ -derivation บน B

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f-derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยาม $\text{Fix}_f(B, d) = \{x \in B \mid dx = f(x)\}$

ตัวอย่าง 2.36 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ a, & x = a, 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x = 1, a \\ b, & x = 0, b \end{cases}$$

จากตัวอย่างที่ 2.14 จะได้ว่า d เป็น Boolean f-derivation บน B

จากการนิยามข้างต้นเราพบว่า $\text{Fix}_f(B, d) = \{a\}$

ดังนั้น $\text{Fix}_f(B, d) \neq \phi$

ตัวอย่าง 2.37 ให้ B เป็น Boolean algebra นิยามดังตัวอย่าง 4 ในส่วนวิธีการ กำหนดให้ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน และ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ a, & x = a, 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, a \\ b, & x = 0, b \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \wedge 0) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge a) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge b) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \wedge 1) &= d0 = 0, & (d0 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d0) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge a) &= da = a, & (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) &= a \vee a = a \\ d(a \wedge b) &= d0 = 0, & (da \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge da) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(a \wedge 1) &= da = a, & (da \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge da) &= a \vee a = a \\ d(b \wedge b) &= db = 0, & (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(b \wedge 1) &= db = 0, & (db \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge db) &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(1 \wedge 1) &= d1 = a, & (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) &= a \vee a = a \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

นอกจากนี้ยังตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0 \vee 0) &= d0 = 0, & d0 \vee d0 &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \vee a) &= da = a, & d0 \vee da &= 0 \vee a = a \\ d(0 \vee b) &= db = 0, & d0 \vee db &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(0 \vee 1) &= d1 = a, & d0 \vee d1 &= 0 \vee a = a \\ d(a \vee a) &= da = a, & da \vee da &= a \vee a = a \\ d(a \vee b) &= d1 = a, & da \vee db &= a \vee 0 = a \\ d(a \vee 1) &= d1 = a, & da \vee d1 &= a \vee a = a \\ d(b \vee b) &= db = 0, & db \vee db &= 0 \vee 0 = 0 \\ d(b \vee 1) &= d1 = a, & db \vee d1 &= 0 \vee a = a \\ d(1 \vee 1) &= d1 = a, & d1 \vee d1 &= a \vee a = a \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

จากการตรวจสอบข้างต้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean f -derivation บน B

จากการนิยามข้างต้นเราพบว่า $\text{Fix}_f(B, d) = \phi$

ข้อสังเกต 2.38

1. โดยทฤษฎีบท 2.20 จะได้ว่า ถ้า $y \leq x$ และ $x \in \text{Fix}_f(B, d)$ แล้ว $y \in \text{Fix}_f(B, d)$
2. ถ้า f เป็น Boolean homomorphism โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(0) = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า $d0 = 0$ นั่นคือ $d0 = 0 = f(0)$ ฉะนั้น $0 \in \text{Fix}_f(B, d)$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นสมมติให้ $\text{Fix}_f(B, d)$ เป็นสับเซตของ B โดยที่ $\text{Fix}_f(B, d) \neq \phi$
ทฤษฎีบท 2.39 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า $\text{Fix}_f(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \text{Fix}_f(B, d)$ และ $b \in B$

จาก $x, y \in \text{Fix}_f(B, d)$ จะได้ว่า $dx = f(x)$ และ $dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 2.10(1) เราทราบว่า $db \leq f(b)$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(x) \wedge db \leq f(x) \wedge f(b)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(x \wedge b) &= (dx \wedge f(b)) \vee (f(x) \wedge db) \quad (\text{โดยบทนิยาม 2.1(1)}) \\ &= (f(x) \wedge f(b)) \vee (f(x) \wedge db) \quad (\text{จาก } dx = f(x)) \\ &= f(x) \wedge f(b) \quad (\text{จาก } f(x) \wedge db \leq f(x) \wedge f(b)) \\ &= f(x \wedge b) \quad (\text{จาก } f \text{ เป็น Boolean homomorphism}) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x \wedge b) = f(x \wedge b)$

แสดงว่า $x \wedge b \in \text{Fix}_f(B, d)$

$$\begin{aligned} \text{และ } d(x \vee y) &= dx \vee dy \quad (\text{โดยบทนิยาม 2.1(2)}) \\ &= f(x) \vee f(y) \quad (\text{จาก } dx = f(x) \text{ และ } dy = f(y)) \\ &= f(x \vee y) \quad (\text{จาก } f \text{ เป็น Boolean homomorphism}) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x \vee y) = f(x \vee y)$

แสดงว่า $x \vee y \in \text{Fix}_f(B, d)$

นั่นคือ $\text{Fix}_f(B, d)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และ 2 ของบทนิยาม 25 ในส่วนวิธีการ

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\text{Fix}_f(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยาม kernel ของ d แทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Ker}(B, d)$ นิยามโดย $\text{Ker}(B, d) = \{x \in B \mid dx = 0\}$

ข้อสังเกต 2.40

1. จากตัวอย่างที่ 2.5 จะได้ว่า $\text{Ker}(B, d) = \phi$
2. ถ้า f เป็น Boolean homomorphism โดยทฤษฎีบท 23 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $f(0) = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า $d0 = 0$ นั่นคือ $0 \in \text{Ker}(B, d)$

ผลลัพธ์ต่อไปนี เราสมมติให้ $\text{Ker}(B, d)$ เป็นสับเซตของ B โดยที่ $\text{Ker}(B, d) \neq \phi$

ทฤษฎีบท 2.41 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น Boolean f -derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วจะได้ว่า $\text{Ker}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \text{Ker}(B, d)$ และ $b \in B$

จาก $x, y \in \text{Ker}(B, d)$ จะได้ว่า $dx = 0$ และ $dy = 0$

ดังนั้น $d(x \wedge b) = dx \wedge db$ (โดยทฤษฎีบท 2.29)

$= 0 \wedge db$ (จาก $dx = 0$)

$= 0$

นั่นคือ $d(x \wedge b) = 0$

แสดงว่า $x \wedge b \in \text{Ker}(B, d)$

และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ (โดยบทนิยาม 2.1(2))

$= 0$ (จาก $dx = 0$ และ $dy = 0$)

นั่นคือ $d(x \vee y) = 0$

แสดงว่า $x \vee y \in \text{Ker}(B, d)$

นั่นคือ $\text{Ker}(B, d)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และ 2 ของบทนิยาม 25 ในส่วนวิธีการ

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\text{Ker}(B, d)$ เป็นไอดีลของ B

โดยทฤษฎีบท 2.35 ทฤษฎีบท 2.39 และ ทฤษฎีบท 2.41 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 2.42 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d_i เป็น Boolean f_i -derivation บน B เมื่อ $f_i: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้วจะได้ว่า

1. $\text{Fix}_{(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอคิสิกของ B
2. $\text{Ker}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอคิสิกของ B



ตอนที่ 3 Symmetric Boolean derivations ใน Boolean algebra

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม Symmetric Boolean derivation ใน Boolean algebra พร้อมทั้งแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 3.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก D ว่า symmetric function ถ้า $D(x, y) = D(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

บทนิยาม 3.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็น symmetric function จะเรียก D ว่า symmetric Boolean derivation บน B ถ้า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

1. $D(x \wedge y, z) = D(x, z) \wedge D(y, z)$
2. $D(x \vee y, z) = (D(x, z) \vee y) \wedge (x \vee D(y, z))$

ข้อสังเกต 3.3 จาก $D: B \times B \rightarrow B$ เป็น symmetric function โดยบทนิยาม 3.2 จะได้ว่า

1. $D(x, y \wedge z) = D(y \wedge z, x) = D(y, x) \wedge D(z, x) = D(x, y) \wedge D(x, z)$
2. $D(x, y \vee z) = D(y \vee z, x) = (D(y, x) \vee z) \wedge (y \vee D(z, x))$
 $= (D(x, y) \vee z) \wedge (y \vee D(x, z))$

บทนิยาม 3.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $d: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า trace ของ D ถ้า $d(x) = D(x, x)$ สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ตัวอย่าง 3.5 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $D(x, y) = x \vee y$ สำหรับทุก $x, y \in B$ แล้วจะได้ว่า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ตรวจสอบได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= x \vee y \\ &= y \vee x \\ &= D(y, x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $D(x, y) = D(y, x)$

$$\begin{aligned} D(x \wedge y, z) &= (x \wedge y) \vee z \\ &= (x \vee z) \wedge (y \wedge z) \\ &= D(x, z) \wedge D(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(x \wedge y, z) = D(x, z) \wedge D(y, z)$$

$$\begin{aligned} D(x \vee y, z) &= x \vee y \vee z \\ &= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \\ &= ((x \vee y) \vee z) \wedge (x \vee (y \vee z)) \\ &= (D(x, y) \vee z) \wedge (x \vee D(y, z)) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(x \vee y, z) = (D(x, z) \vee y) \wedge (x \vee D(y, z))$$

จากการแสดงข้างต้น สรุปได้ว่า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 3.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ กำหนดให้ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน

นิยามโดย $D(x, y) = (x \vee y) \vee a$ สำหรับทุก $x, y \in B$ แล้วจะได้ว่า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตรวจสอบได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (x \vee y) \vee a \\ &= (y \vee x) \vee a \\ &= D(y, x) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(x, y) = D(y, x)$$

$$\begin{aligned} D(x \wedge y, z) &= ((x \wedge y) \vee z) \vee a \\ &= ((x \vee z) \wedge (y \wedge z)) \vee a \\ &= ((x \vee z) \vee a) \wedge ((y \wedge z) \vee a) \\ &= D(x, z) \wedge D(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(x \wedge y, z) = D(x, z) \wedge D(y, z)$$

$$\begin{aligned} D(x \vee y, z) &= x \vee y \vee z \vee a \\ &= (x \vee y \vee z \vee a) \wedge (x \vee y \vee z \vee a) \\ &= ((x \vee y \vee a) \vee z) \wedge (x \vee (y \vee z \vee a)) \\ &= (D(x, y) \vee z) \wedge (x \vee D(y, z)) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(x \vee y, z) = (D(x, z) \vee y) \wedge (x \vee D(y, z))$$

จากการแสดงข้างต้น สรุปได้ว่า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 3.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $D(x, y) =$

$x \wedge y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ตรวจสอบได้ว่า

$$\begin{aligned} D(1 \vee 1, 0) &= D(1, 0) = 1 \wedge 0 = 0 \\ D(1, 0) \vee 1 &= (1 \wedge 0) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } D(1 \vee 1, 0) \neq (D(1, 0) \vee 1) \wedge (1 \vee D(1, 0))$$

ฉะนั้น D ไม่เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 3.8 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ โดยที่ $a \neq 1$ กำหนดให้ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $D(x, y) = (x \vee y) \wedge a$ สำหรับทุก $x, y \in B$

ตรวจสอบได้ว่า

$$D(1 \vee 1, 1) = D(1, 1) = (1 \vee 1) \wedge a = a$$

$$D(1, 1) \vee 1 = ((1 \vee 1) \wedge a) \vee 1 = (1 \wedge a) \vee 1 = a \vee 1 = 1$$

ดังนั้น $D(1 \vee 1, 1) \neq (D(1, 1) \vee 1) \wedge (1 \vee D(1, 1))$

ฉะนั้น D ไม่เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 3.9 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $D(x, y) = 1$ สำหรับทุก $x, y \in B$ แล้วจะได้ว่า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ B เป็น Boolean algebra และ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in B$

1. $D(x, z) \wedge D(y, z) \leq D(x \vee y, z)$
2. $x \leq D(x, y)$ และ $y \leq D(x, y)$
3. $D(1, x) = 1$ และ $x \leq D(0, x)$
4. $D(x, y) \vee x' = D(x, y) \vee y' = 1$
5. $x \vee y \leq D(x, y) \leq x \vee D(0, y)$
6. D เป็น order-preserving

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y, z, t \in B$

$$(1) \text{ เราทราบว่า } D(x, z) \leq D(x, z) \vee y \text{ และ } D(y, z) \leq D(y, z) \vee x$$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า

$$D(x, z) \wedge D(y, z) \leq (D(x, z) \vee y) \wedge D(y, z)$$

$$\text{และ } (D(x, z) \vee y) \wedge D(y, z) \leq (D(x, z) \vee y) \wedge (D(y, z) \vee x)$$

$$\text{ดังนั้น } D(x, z) \wedge D(y, z) \leq (D(x, z) \vee y) \wedge (D(y, z) \vee x)$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } D(x \vee y, z) = (D(x, z) \vee y) \wedge (D(y, z) \vee x)$$

$$\text{ฉะนั้น } D(x, z) \wedge D(y, z) \leq D(x \vee y, z)$$

$$(2) D(x, y) = D(x \vee x, y) \quad (\text{จาก } x = x \vee x)$$

$$= (D(x, y) \vee x) \wedge (x \vee D(x, y)) \quad (\text{โดยบทนิยาม 3.2(2)})$$

$$= D(x, y) \vee x$$

นั่นคือ $x \leq D(x, y)$

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $y \leq D(x, y)$

ดังนั้น $x \leq D(x, y)$ และ $y \leq D(x, y)$

(3) จาก (2) จะได้ว่า $x \leq D(0, x)$ และ $1 \leq D(1, x)$

เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $D(1, x) \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $D(1, x) = 1$

ดังนั้น $D(1, x) = 1$

(4) จาก (2) เราทราบว่า $x \leq D(x, y)$ และ $y \leq D(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $D(x, y) \vee x' = 1$

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $D(x, y) \vee y' = 1$

ดังนั้น $D(x, y) \vee x' = D(x, y) \vee y' = 1$

(5) จาก (2) เราทราบว่า $x \leq D(x, y)$ และ $y \leq D(x, y)$

ดังนั้น $x \vee y \leq D(x, y)$

พิจารณา $D(x, y) = D(x \vee 0, y)$

(จาก $x = x \vee 0$)

$$= (D(x, y) \vee 0) \wedge (x \vee D(0, y))$$

(โดยบทนิยาม 3.2(2))

$$= D(x, y) \wedge (x \vee D(0, y))$$

นั่นคือ $D(x, y) \leq x \vee D(0, y)$

ดังนั้น $x \vee y \leq D(x, y) \leq x \vee D(0, y)$

(6) ให้ $(x, y), (z, t) \in B \times B$ โดยที่ $(x, y) \leq (z, t)$

โดยบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \vee z = z$ และ $y \vee t = t$

โดยทฤษฎีบท 7 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \wedge z = x$ และ $y \wedge t = y$

ดังนั้น $D(x, y) = D(x \wedge z, y \wedge t)$

$$= D(x, y \wedge t) \wedge D(z, y \wedge t)$$

$$= D(x, y) \wedge D(y, t) \wedge D(z, y) \wedge D(z, t)$$

นั่นคือ $D(x, y) = D(x, y) \wedge D(y, t) \wedge D(z, y) \wedge D(z, t)$

โดยทฤษฎีบท 9 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $D(x, y) \leq D(z, t)$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 20 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า D เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 3.10(3) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 3.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $D(1, x) \neq 1$ สำหรับบาง $x \in B$ แล้ว D ไม่เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ตัวอย่าง 3.12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$D(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) = (0, 1), (1, 0) \\ x \vee y & , (x, y) \neq (0, 1), (1, 0) \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$D(1, 0) = D(0, 1) = 0 \neq 1$$

ดังนั้น โดยบทแทรก 3.11 จะได้ว่า D ไม่เป็น symmetric Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 3.13 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $x \leq dx$
2. $d1 = 1$ และ $0 \leq d0$
3. $dx \leq D(x \vee y, x)$
4. $d0 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $D(x, 0) = x$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$\begin{aligned} (1) \quad dx &= D(x, x) && \text{(โดยบทนิยาม 3.4)} \\ &= D(x \vee x, x) && \text{(จาก } x = x \vee x) \\ &= (D(x, x) \vee x) \wedge (x \vee D(x, x)) && \text{(โดยบทนิยาม 3.2(2))} \\ &= D(x, x) \vee x \\ &= dx \vee x \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \leq dx$

(2) จาก (1) จะได้ว่า $0 \leq d0$ และ $1 \leq d1$

เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $d1 \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $d1 = 1$

ดังนั้น $d1 = 1$

$$\begin{aligned}
(3) \quad dx &= D(x, x) && \text{(โดยบทนิยาม 3.4)} \\
&= D(x \wedge (x \vee y), x) && \text{(จาก } x = x \wedge (x \vee y)\text{)} \\
&= D(x, x) \wedge D(x \vee y, x) && \text{(โดยบทนิยาม 3.2(1))} \\
&= dx \wedge D(x \vee y, x) && \text{(โดยบทนิยาม 3.4)}
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } dx \leq D(x \vee y, x)$$

$$(4) \quad (\Rightarrow) \text{ สมมติให้ } d0 = 0$$

$$\text{โดยบทนิยาม 3.4 จะได้ว่า } D(0,0) = d0 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x \vee D(0,0) = x \vee d0 = x \vee 0 = x$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 3.10(5) จะได้ว่า } D(x, 0) \leq x \vee D(0,0)$$

$$\text{นั่นคือ } D(x, 0) \leq x$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 3.10(3) เราทราบว่า } x \leq D(x, 0)$$

$$\text{ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า } D(x, 0) = x$$

$$(\Leftarrow) \text{ สมมติให้ } D(x, 0) = x \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$\text{ดังนั้น } d0 = D(0,0) = 0$$

ทฤษฎีบท 3.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy \wedge D(x, y)$
2. $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (y \vee dx) \wedge D(x, y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

$$\begin{aligned}
(1) \quad d(x \wedge y) &= D(x \wedge y, x \wedge y) && \text{(โดยบทนิยาม 3.4)} \\
&= D(x, x \wedge y) \wedge D(y, x \wedge y) && \text{(โดยบทนิยาม 3.2(1))} \\
&= D(x, x) \wedge D(x, y) \wedge D(y, y) \\
&= dx \wedge dy \wedge D(x, y) && \text{(โดยบทนิยาม 3.4)}
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y) = dx \wedge dy \wedge D(x, y)$$

- (2) โดยทฤษฎีบท 3.10(2) จะได้ว่า $x \wedge y \leq D(x \wedge y, x)$ และ $x \wedge y \leq D(x \wedge y, y)$
เราทราบว่า $y \leq x \wedge y$ และ $x \leq x \wedge y$

ดังนั้น $y \leq D(x \wedge y, x)$ และ $x \leq D(x \wedge y, y)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } d(x \vee y) &= D(x \vee y, x \vee y) && (\text{โดยบทนิยาม 3.4}) \\
 &= (D(x, x \vee y) \vee y) \wedge (x \vee D(y, x \vee y)) && (\text{โดยบทนิยาม 3.2(2)}) \\
 &= D(x, x \vee y) \wedge (x \vee D(y, x \vee y)) && (\text{จาก } y \leq D(x \wedge y, x)) \\
 &= D(x, x \vee y) \wedge D(y, x \vee y) && (\text{จาก } x \leq D(x \wedge y, y)) \\
 &= (D(x, x) \vee y) \wedge (x \vee D(x, y)) \\
 &\quad \wedge (D(x, y) \vee y) \wedge (x \vee D(y, y)) \\
 &= (dx \vee y) \wedge D(x, y) \wedge (x \vee dy) && (\text{โดยทฤษฎีบท 3.10(2)})
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (y \vee dx) \wedge D(x, y)$

ทฤษฎีบท 3.15 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า d เป็น order-preserving

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$

จาก $x \leq y$ จะได้ว่า $x = x \wedge y$

โดยทฤษฎีบท 3.14(1) จะได้ว่า $dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy \wedge D(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 9 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \leq dy$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 20 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 3.16 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in B$

1. $d(x \wedge y) \leq D(x, y)$ และ $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$
2. $d(x \vee y) \leq D(x, y)$ และ $d(x \vee y) \leq x \vee dy$
3. $d(x \vee y) \leq dx \vee dy$
4. $dx \leq D(x, 1)$ และ $dx \leq D(x, 0)$
5. $dx \leq x \vee d0$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$

(1) โดยทฤษฎีบท 3.14(1) จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy \wedge D(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 9 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d(x \wedge y) \leq D(x, y)$ และ $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

(2) โดยทฤษฎีบท 3.14(1) จะได้ว่า $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (y \vee dx) \wedge D(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 9 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d(x \vee y) \leq D(x, y)$ และ $d(x \vee y) \leq x \vee dy$

(3) จาก (2) จะได้ว่า $d(x \vee y) \leq x \vee dy$

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) เราทราบว่า $x \leq dx$

โดยทฤษฎีบท 17(1) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x \vee dy \leq dx \vee dy$

ดังนั้น $d(x \vee y) \leq x \vee dy \leq dx \vee dy$

(4) จาก (1) จะได้ว่า $dx = d(x \wedge 1) \leq D(x, 1)$

จาก (2) จะได้ว่า $dx = d(x \vee 0) \leq D(x, 0)$

ดังนั้น $dx \leq D(x, 1)$ และ $dx \leq D(x, 0)$

(5) จาก (2) จะได้ว่า $dx = d(x \vee 0) \leq x \vee d0$

ดังนั้น $dx \leq x \vee d0$

โดยทฤษฎีบท 3.16(5) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 3.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in B$

1. ถ้า $x \leq d0$ แล้วจะได้ว่า $dx \leq d0$
2. ถ้า $d0 \leq x$ แล้วจะได้ว่า $dx = x$

ทฤษฎีบท 3.18 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า

1. $y' \leq dx'$
2. $d(x' \vee y) = 1$
3. $D(x', y) = y \vee dx' = x' \vee dy = 1$
4. $dx' \vee dy = 1$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$

(1) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 17(3) ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $y' \leq x'$

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) จะได้ว่า $x' \leq dx'$

ดังนั้น $y' \leq dx'$

(2) จาก $x \leq y$ โดยทฤษฎีบท 18 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $x' \vee y = 1$

$$\text{ฉะนั้น } d(x' \vee y) = d1$$

โดยทฤษฎีบท 3.13(2) เราทราบว่า $d1 = 1$

$$\text{ดังนั้น } d(x \vee y') = 1$$

(3) โดยทฤษฎีบท 3.14(2) จะได้ว่า $d(x' \vee y) = (x' \vee dy) \wedge (y \vee dx') \wedge D(x', y)$

จาก (2) เราทราบว่า $d(x' \vee y) = 1$

$$\text{ฉะนั้น } (x' \vee dy) \wedge (y \vee dx') \wedge D(x', y) = 1$$

โดยทฤษฎีบท 19(2) ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $x' \vee dy = y \vee dx' = D(x', y) = 1$

$$\text{ดังนั้น } x' \vee dy = y \vee dx' = D(x', y) = 1$$

(4) โดยทฤษฎีบท 3.16(3) จะได้ว่า $d(x' \vee y) \leq dx' \vee dy$

จาก (2) เราทราบว่า $d(x' \vee y) = 1$

$$\text{ดังนั้น } 1 \leq dx' \vee dy$$

แต่เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

$$\text{ฉะนั้น } dx' \vee dy \leq 1$$

โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx' \vee dy = 1$

$$\text{ดังนั้น } dx' \vee dy = 1$$

โดยทฤษฎีบท 3.18(3) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 3.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้ว $D(x', x) = x \vee dx' = x' \vee dx = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ทฤษฎีบท 3.20 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

1. $dx' \vee dx = 1$ สำหรับทุก $x \in B$
2. $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ $D(x, x) = x$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

(1) โดยทฤษฎีบท 3.18(4) แทน $y = x$ จะได้ว่า $dx' \vee dx = 1$

(2) (\Rightarrow) สมมติให้ $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น $x \vee (dx)' = x \vee dx'$

โดยบทแทรก 3.19 เราทราบว่า $x \vee dx' = 1$

นั่นคือ $x \vee (dx)' = 1$

โดยทฤษฎีบท 17 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $dx \leq x$

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) เราทราบว่า $x \leq dx$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = x$

นั่นคือ $D(x, x) = dx = x$

(\Leftarrow) สมมติให้ $D(x, x) = x$ สำหรับทุก $x \in B$

จะได้ว่า $dx' = D(x', x')$

$$= x'$$

(จาก $D(x, x) = x$)

$$= (D(x, x))'$$

$$= (dx)'$$

(โดยบทนิยาม 3.4)

ดังนั้น $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$

ทฤษฎีบท 3.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า $dx = dx'$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้ว $D(x, x) = 1$

พิสูจน์ สมมติให้ $dx = dx'$ สำหรับทุก $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 3.15 เราทราบว่า d เป็น order-preserving และ $0 \leq x$

จาก d เป็น order-preserving และเราทราบว่า $0 \leq x$

ฉะนั้น $d0 \leq dx$

จาก $dx = dx'$ จะได้ว่า $d0 = 1$

(จาก $0' = 1$ และ $d1 = 1$)

ดังนั้น $1 \leq dx$

แต่เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $dx \leq 1$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = 1$

นั่นคือ $D(x, x) = dx = 1$

ทฤษฎีบท 3.22 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ และ $dx = x$ แล้ว $dy = y$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ และ $dx = x$

โดยทฤษฎีบท 3.10(2) จะได้ว่า $y \leq D(x, y)$

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) จะได้ว่า $x \leq y \leq dy$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dy &= d(x \vee y) && \text{(จาก } x \leq y) \\ &= (x \vee dy) \wedge (y \vee dx) \wedge D(x, y) && \text{(โดยทฤษฎีบท 3.14(2))} \\ &= (x \vee dy) \wedge (y \vee x) \wedge D(x, y) && \text{(จาก } dx = x) \\ &= dy \wedge y \wedge D(x, y) && \text{(จาก } x \leq y \leq dy) \\ &= y && \text{(จาก } y \leq dy \text{ และ } y \leq D(x, y)) \\ \text{นั่นคือ } dy &= y \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.23 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

พิสูจน์ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

สำหรับ $n = 2$ ถ้า $x_1, x_2 \in B$ โดยที่ $x_2 \leq x_1$ และ $dx_2 = x_2$

โดยทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $dx_1 = x_1$

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

ให้ $x_{n+1} \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ โดยที่ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in B$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$

จาก $x_{n+1} \leq x_n$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$ โดยทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $dx_n = x_n$

จาก $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n + 1$

นั่นคือ $x_{n+1} \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ และ $dx_{n+1} = x_{n+1}$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n + 1$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ โดยที่ $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

ทฤษฎีบท 3.24 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $d^2 = d$ (เมื่อ $d^2x = d(dx)$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 3.10(2) จะได้ว่า $dx \leq D(x, dx)$

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) จะได้ว่า $x \leq dx \leq d(dx) = d^2x$

ดังนั้น $d^2x = d(dx)$

$$= d(x \vee dx) \quad (\text{จาก } x \leq dx)$$

$$= (x \vee d(dx)) \wedge (dx \vee dx) \wedge D(x, dx) \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 3.14(2)})$$

$$= (x \vee d^2x) \wedge dx \wedge D(x, dx)$$

$$= d^2x \wedge dx \wedge D(x, dx) \quad (\text{จาก } x \leq dx \leq d^2x)$$

$$= dx \quad (\text{จาก } dx \leq D(x, dx))$$

นั่นคือ $d^2x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $d^2 = d$

ทฤษฎีบท 3.25 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ (เมื่อ $d^n x = d(d \dots d(dx))$ สำหรับทุก $x \in B$)

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

สำหรับ $n = 2$ โดยทฤษฎีบท 3.24 จะได้ว่า $d^2 = d$

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และสมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $d^n = d$ แสดงว่า $d^n x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

ให้ $x \in B$

จะได้ว่า $d^{n+1}x = d(d^n x)$

$$= d(dx) \quad (\text{จาก } d^n x = dx)$$

$$= d^2x$$

$$= dx$$

นั่นคือ $d^{n+1}x = dx$ สำหรับทุก $x \in B$

สรุปได้ว่า $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ข้อสังเกต 3.26 ถ้า d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B โดยทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า d^n เป็น trace ของ D สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ทฤษฎีบท 3.27 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B แล้วจะได้ว่า

1. $d0 = 0$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น identity function
2. $d0 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in B$

(1) (\Rightarrow) สมมติให้ $d0 = 0$ และเราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น d เป็น identity function

(\Leftarrow) ชัดเจน

(2) (\Rightarrow) สมมติให้ $d0 = 1$ และเราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 3.15(5) เราทราบว่า d เป็น order-preserving

ดังนั้น $d0 \leq dx$

นั่นคือ $1 \leq dx$

แต่เราทราบว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in B$

ฉะนั้น $dx \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = 1$

ดังนั้น $D(x, x) = dx = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

(\Leftarrow) ชัดเจน

ทฤษฎีบท 3.28 ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า d เป็น surjective function แล้ว d เป็น identity function

พิสูจน์ สมมติให้ d เป็น surjective function และ $x \in B$

จาก d เป็น surjective function จะได้ว่า มีสมาชิก $y \in B$ ซึ่ง $dy = x$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } dx &= d(dy) && (\text{จาก } dy = x) \\ &= d^2y \\ &= dy && (\text{โดยทฤษฎีบท 3.24}) \\ &= x \end{aligned}$$

นั่นคือ $dx = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ดังนั้น d เป็น identity function

ทฤษฎีบท 3.29 ให้ B เป็น Boolean algebra และ D_1, D_2 เป็น symmetric Boolean derivation บน B สมมติให้ d_1, d_2 เป็น trace ของ D_1, D_2 ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in B$

1. ถ้า $D_1(d_1x, d_2x) = 0$ แล้ว $d_1x \wedge d_2x = 0$
2. ถ้า $D_1(d_1x, d_2x) = 1$ แล้ว $d_1(d_2x) \vee d_1x = 1$ และ $d_1x \vee d_2x = 1$

พิสูจน์ ให้ $x \in B$

(1) สมมติให้ $D_1(d_1x, d_2x) = 0$

จะได้ว่า $D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) = D_1(d_1x, d_2x) \wedge D_1(d_2x, d_2x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_1x \wedge d_2x &= (d_1x \wedge d_2x) \wedge d_1x \\ &= (0 \vee (d_1x \wedge d_2x)) \wedge (0 \vee d_1x) \\ &= (D_1(d_1x, d_2x) \vee (d_1x \wedge d_2x)) \\ &\quad \wedge (D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) \vee d_1x) \\ &= D_1(d_1x \vee (d_1x \wedge d_2x), d_2x) \\ &= D_1(d_1x, d_2x) && (\text{จาก } d_1x = d_1x \vee (d_1x \wedge d_2x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $d_1x \wedge d_2x = 0$ สำหรับทุก $x \in B$

(2) สมมติให้ $D_1(d_1x, d_2x) = 1$

จะได้ว่า $D_1(d_1x, d_2x) \vee (d_1x \wedge d_2x) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_1(d_2x) \vee d_1x &= D_1(d_2x, d_2x) \vee d_1x && (\text{จาก } d_1(d_2x) = D_1(d_2x, d_2x)) \\ &= (1 \wedge D_1(d_2x, d_2x)) \vee d_1x \\ &= (D_1(d_1x, d_2x) \wedge D_1(d_2x, d_2x)) \vee d_1x \\ &= D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) \vee d_1x \\ &= 1 \wedge (D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) \vee d_1x) \\ &= (D_1(d_1x, d_2x) \vee (d_1x \wedge d_2x)) \\ &\quad \wedge (D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) \vee d_1x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1(d_2x) \vee d_1x &= (D_1(d_1x, d_2x) \vee (d_1x \wedge d_2x)) \\
&\quad \wedge (D_1(d_1x \wedge d_2x, d_2x) \vee d_1x) \\
&= D_1(d_1x \vee (d_1x \wedge d_2x), d_2x) \\
&= D_1(d_1x, d_2x) \quad (\text{จาก } d_1x = d_1x \vee (d_1x \wedge d_2x)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

นั่นคือ $d_1(d_2x) \vee d_2x = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

$$\begin{aligned}
\text{และ } d_1x \vee d_2x &= d_1^2x \vee d_2x \quad (\text{จาก } d_1^2x = d_1x) \\
&= d_1(d_1x) \vee d_2x \\
&= D_1(d_1x, d_1x) \vee d_2x \quad (\text{จาก } d_1(d_1x) = D_1(d_1x, d_1x)) \\
&= (1 \wedge D_1(d_1x, d_1x)) \vee d_2x \\
&= (D_1(d_1x, d_2x) \wedge D_1(d_1x, d_1x)) \vee d_2x \\
&= D_1(d_1x, d_2x \wedge d_1x) \vee d_2x \\
&= 1 \wedge (D_1(d_1x, d_2x \wedge d_1x) \vee d_2x) \\
&= (D_1(d_1x, d_2x) \vee (d_2x \wedge d_1x)) \wedge (D_1(d_1x, d_2x \wedge d_1x) \vee d_2x) \\
&= D_1(d_1x, d_2x \vee (d_2x \wedge d_1x)) \\
&= D_1(d_1x, d_2x) \quad (\text{จาก } d_2x = d_2x \vee (d_2x \wedge d_1x)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $d_1x \vee d_2x = 1$ สำหรับทุก $x \in B$

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.29 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 3.30 ให้ B เป็น Boolean algebra และ D_1, D_2 เป็น symmetric Boolean derivation บน B สมมติให้ d_1, d_2 เป็น trace ของ D_1, D_2 ตามลำดับ และ $x \in B$ จะได้ว่า ถ้า $D_1(x, d_2x) = 1$ แล้ว $d_1(d_2x) = 1$ และ $d_1x \vee d_2x = 1$

ทฤษฎีบท 3.31 ให้ B เป็น Boolean algebra สมมติให้ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B นิยามโดย $D(x, y) = x \vee y$ สำหรับทุก $x, y \in B$ ถ้า d เป็น trace ของ D แล้ว d เป็น Boolean derivation บน B

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in B$ และ $D(x, y) = x \vee y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

$$\text{ดังนั้น } dx = D(x, x) = x \text{ และ } dy = D(y, y) = y$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } dx \vee dy &= x \vee y \quad (\text{จาก } dx = x \text{ และ } dy = y) \\
&= d(x \vee y)
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \vee y) = dx \vee dy$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge y) \quad (\text{จาก } dx = x \text{ และ } dy = y) \\ &= x \wedge y \\ &= d(x \wedge y) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dx)$$

นั่นคือ d สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และ 2 ของบทนิยาม 1.1

ดังนั้นสรุปได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

ทฤษฎีบท 3.32 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B นิยามโดย $D(x, y) = (x \vee y) \vee a$ สำหรับทุก $x, y \in B$ แล้วจะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

พิสูจน์ ให้ $a \in B$ และ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B นิยามโดย

$$D(x, y) = (x \vee y) \vee a \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

(\Rightarrow) สมมติให้ d เป็น Boolean derivation บน B และ $x \in B$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) จะได้ว่า $dx \leq x$

จาก d เป็น trace ของ symmetric Boolean derivation D บน B

โดยทฤษฎีบท 3.13(1) จะได้ว่า $x \leq dx$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = x$

$$\text{ฉะนั้น } x = dx$$

$$= D(x, x) \quad (\text{จาก } dx = D(x, x))$$

$$= (x \vee x) \vee a \quad (\text{จาก } D(x, y) = (x \vee y) \vee a)$$

$$= x \vee a$$

แสดงว่า $a \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

แต่เราทราบว่า $0 \in B$

$$\text{ดังนั้น } a \leq 0$$

แต่เราทราบว่า $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$ และ $a \in B$

$$\text{นั่นคือ } 0 \leq a$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $a = 0$

(\Leftarrow) สมมติให้ $a = 0$

$$\text{ดังนั้น } D(x, y) = (x \vee y) \vee a = x \vee y \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

โดยทฤษฎีบท 3.31 จะได้ว่า d เป็น Boolean derivation บน B

ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น trace ของ D โดยที่ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B นิยาม $\text{Fix}(B, D) = \{x \in B \mid D(x, x) = x\}$

ข้อสังเกต 3.33

1. จากทฤษฎีบท 3.13(2) จะได้ว่า $D(1, 1) = d1 = 1$ นั่นคือ $1 \in \text{Fix}(B, D)$
2. จากทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า ถ้า $x \leq y$ และ $x \in \text{Fix}(B, D)$ แล้ว $y \in \text{Fix}(B, D)$
3. จากทฤษฎีบท 3.24 จะได้ว่า $D(dx, dx) = d(dx) = d^2x = dx$

ดังนั้น $dx \in \text{Fix}(B, D)$

ทฤษฎีบท 3.34 ให้ B เป็น Boolean algebra และ D_1, D_2, \dots, D_n เป็น symmetric Boolean derivation บน B สมมติให้ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น trace ของ D_1, D_2, \dots, D_n ตามลำดับ แล้ว $d_i = d_j$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Fix}(B, D_i) = \text{Fix}(B, D_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

พิสูจน์ ให้ d_1, d_2, \dots, d_n เป็น trace ของ D_1, D_2, \dots, D_n ตามลำดับ โดยที่ D_1, D_2, \dots, D_n เป็น symmetric Boolean derivation บน B และ $x \in B$

(\Rightarrow) สมมติให้ $d_i = d_j$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

โดยบทนิยาม 3.4 จะได้ว่า $D_i(x, x) = d_i x = d_j x = D_j(x, x)$

ดังนั้น $\text{Fix}(B, D_i) = \text{Fix}(B, D_j)$

(\Leftarrow) สมมติให้ $\text{Fix}(B, D_i) = \text{Fix}(B, D_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$

จากข้อสังเกต 3.33(3) จะได้ว่า $d_i x \in \text{Fix}(B, D_i) = \text{Fix}(B, D_j)$

และ $d_j x \in \text{Fix}(B, D_j) = \text{Fix}(B, D_i)$

ดังนั้น $D_j(d_i x, d_i x) = d_i x$ และ $D_i(d_j x, d_j x) = d_j x$

โดยบทนิยาม 3.4 จะได้ว่า $d_j(d_i x) = D_j(d_i x, d_i x)$ และ $d_i(d_j x) = D_i(d_j x, d_j x)$

ดังนั้น $d_j(d_i x) = d_i x$ และ $d_i(d_j x) = d_j x$

โดยทฤษฎีบท 3.15 เราทราบว่า d_i, d_j เป็น order-preserving

เนื่องจาก d_i เป็น order-preserving และ $x \leq d_j x$ จะได้ว่า $d_j(d_i x) = d_i x \leq d_i(d_j x)$

เนื่องจาก d_j เป็น order-preserving และ $x \leq d_i x$ จะได้ว่า $d_i(d_j x) = d_j x \leq d_j(d_i x)$

นั่นคือ $d_j(d_i x) \leq d_i(d_j x)$ และ $d_i(d_j x) \leq d_j(d_i x)$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 14 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $d_i(d_j x) = d_j(d_i x)$

$$\begin{aligned}\text{ฉะนั้น } d_i x &= d_j (d_i x) \\ &= d_i (d_j x) \\ &= d_j x\end{aligned}$$

นั่นคือ $d_i = d_j$



สรุป

จากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

ให้ B เป็น Boolean algebra, $d_i: B \rightarrow B$, $f: B \rightarrow B$ และ $D: B \times B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

กำหนดให้ $(d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)(x) = d_1(d_2 \dots (d_n x))$ สำหรับทุก $x \in B$ และการเขียน $d_i^k x$ จะหมายถึง $\underbrace{(d_i \circ d_i \circ \dots \circ d_i)}_k(x) = \underbrace{d(d \dots (d x))}_k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

กำหนดให้ $\text{Fix}(B, d) = \{x \in B \mid dx = x\}$, $\text{Fix}_f(B, d) = \{x \in B \mid dx = f(x)\}$, $\text{Fix}(B, D) = \{x \in B \mid D(x, x) = x\}$ และ $\text{Ker}(B, d) = \{x \in B \mid dx = 0\}$ เป็นสับเซตไม่ว่างของ B และนิยาม $D(B) = \{d_a \mid a \in B\}$ โดยที่ $d_a: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามโดย $d_a(x) = x \wedge a$ สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ $a \in B$

1. Boolean derivations ใน Boolean algebra

เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $d: B \rightarrow B$ เป็น Boolean derivation บน B ถ้า $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

1.1. ถ้า d เป็น Boolean derivation บน B แล้วสมบัติของ d มีดังนี้

1.1.1. $dx \leq x$ สำหรับทุก $x \in B$

1.1.2. $d0 = 0$ และ $d1 \leq 1$

1.1.3. $dx \wedge x' = x \wedge dx' = dx \wedge dx' = 0$ สำหรับทุก $x \in B$

1.1.4. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

1.1.5. ถ้า I เป็นไอดีลของ B แล้ว $dI \subseteq I$

1.1.6. ถ้า $x, y \in B$ โดยที่ $x \leq y$ แล้วจะได้ว่า

1) $d(x \wedge y') = 0$

2) $dy' \leq x'$

3) $dx \wedge dy' = 0$

4) ถ้า $dx = x$ แล้ว $dy = y$

1.1.7. $dx' = (dx)'$ สำหรับทุก $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น identity Boolean derivation

1.1.8. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น identity Boolean derivation

1.1.9. $d1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น zero Boolean derivation

1.1.10. d เป็น order-preserving

1.1.11. ถ้า $dx' = dx$ สำหรับทุก $x \in B$ แล้ว d เป็น zero Boolean derivation

1.1.12. $dx = x \wedge d1 = x \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

1.1.13. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy = dx \wedge y$ สำหรับทุก $x, y \in B$

1.1.14. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วจะได้ว่า

1) $d^n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

2) $d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ สำหรับทุก $n \geq 2$

3) ถ้า $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ และ $dx_n = x_n$ แล้ว $dx_i = x_i$ สำหรับทุก

จำนวนเต็มบวก $i \leq n$

1.1.15. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) d เป็น identity Boolean derivation

2) d เป็น injective derivation

3) d เป็น surjective derivation

1.1.16. $\text{Fix}(B, d)$ และ $\text{Fix}(B, d^n)$ เป็นไอดิลของ B

1.1.17. $\text{Ker}(B, d)$ และ $\text{Ker}(B, d^n)$ เป็นไอดิลของ B

1.2. ถ้า d_1, d_2, \dots, d_n เป็น Boolean derivations บน B เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า

1.2.1. $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean derivation บน B สำหรับทุก $n \geq 2$

1.2.2. $d_i = d_j$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Fix}(B, d_i) = \text{Fix}(B, d_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก

$i, j \leq n$

1.2.3. $\text{Fix}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ และ $\text{Ker}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอดิลของ B

1.3. ให้ $D(B) = \{d_a | a \in B\}$ และนิยาม $\circ, +$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $D(B)$ โดย $(d_a \circ d_b)(x) = d_a x \wedge d_b x$ และ $(d_a + d_b)(x) = d_a x \vee d_b x$ สำหรับทุก $d_a, d_b \in D(B)$ และ $x \in B$ จะได้ว่า

1.3.1. $D(B)$ เป็น Boolean algebra

1.3.2. B สมสัณฐาน กับ $D(B)$

2. Boolean f-derivations ใน Boolean algebra

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d: B \rightarrow B$ เป็น Boolean f-derivation บน B โดยที่ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in B$

2.1. ถ้า d เป็น Boolean f-derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้วสมบัติของ d มีดังนี้

$$2.1.1. dx \leq f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2.1.2. dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq d(x \vee y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$2.1.3. \text{ ถ้า } d1 = 1 \text{ แล้ว } f(1) = 1$$

$$2.1.4. \text{ ถ้า } f(1) = 0 \text{ แล้ว } d1 = 0$$

$$2.1.5. \text{ ถ้า } d0 = 1 \text{ แล้ว } f(0) = 1$$

$$2.1.6. \text{ ถ้า } d0 = 0 \text{ จะได้ว่า } dx \wedge f(0) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2.1.7. \text{ ถ้า } f(0) = 0 \text{ แล้วจะได้ว่า}$$

$$1) d0 = 0$$

$$2) dx \wedge f(x') = f(x) \wedge dx' = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2.1.8. d \text{ เป็น order-preserving}$$

$$2.1.9. dx = dx \vee (f(x) \wedge dy) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$2.1.10. dx = f(x) \wedge d1 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2.1.11. d1 = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(1) = 1 \text{ และ } dx = f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$2.1.12. d(x \wedge y) = dx \wedge dy = dx \wedge f(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$2.1.13. d(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \text{ สำหรับทุก}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ และ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก

2.2. ให้ d เป็น Boolean f-derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

2.3. ถ้า d เป็น Boolean f-derivation บน B เมื่อ $f: B \rightarrow B$ เป็น Boolean homomorphism แล้วสมบัติของ d มีดังนี้

$$2.1.1. \text{ ถ้า } x, y \in B \text{ โดยที่ } x \leq y \text{ แล้วจะได้ว่า}$$

$$1) d(x \wedge y') = 0$$

$$2) dy' \leq f(x')$$

$$3) dx \wedge dy' = 0$$

$$4) \text{ ถ้า } dx = f(x) \text{ แล้ว } dy = f(y)$$

$$2.3.2. dx \wedge dx' = 0$$

$$2.3.3. dx' = (dx)' \text{ ก็ต่อเมื่อ } dx = f(x)$$

$$2.3.4. \text{ ถ้า } dx' = dx \text{ สำหรับทุก } x \in B \text{ แล้ว } d \text{ เป็น zero Boolean } f\text{-derivation}$$

$$2.3.5. \text{ ถ้า } x_1, x_2, \dots, x_n \in B \text{ โดยที่ } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ และ } dx_n = f(x_n) \text{ จะ}$$

ได้ว่า $dx_i = f(x_i)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $i \leq n$

$$2.3.6. \text{Fix}_f(B, d) \text{ และ } \text{Ker}(B, d) \text{ เป็นไอดีลของ } B$$

2.4. ถ้า d_i เป็น Boolean f_i -derivation บน B เมื่อ $f_i: B \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า

$$2.4.1. d_1 \circ d_2 \text{ เป็น Boolean } (f_1 \circ f_2)\text{-derivation บน } B$$

2.4.2. $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$ เป็น Boolean $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)$ -derivation บน B สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

2.4.3. $\text{Fix}_{(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ และ $\text{Ker}(B, d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n)$ เป็นไอดีลของ B

3. symmetric Boolean derivations ใน Boolean algebra

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $D: B \times B \rightarrow B$ เป็น symmetric function ถ้า $D(x, y) = D(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in B$

เราจะกล่าวว่า symmetric function D เป็น symmetric Boolean derivation บน B ถ้า $D(x \wedge y, z) = D(x, z) \wedge D(y, z)$ และ $D(x \vee y, z) = (D(x, z) \vee y) \wedge (x \vee D(y, z))$ สำหรับทุก $x, y, z \in B$

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d: B \rightarrow B$ เป็น trace ของ D ถ้า $d(x) = D(x, x)$ สำหรับทุก $x \in B$ เมื่อ D เป็น symmetric Boolean derivation บน B

3.1. ถ้า D เป็น symmetric Boolean derivation บน B และ d เป็น trace ของ D แล้วจะได้ว่า

$$3.1.1. D(x, z) \wedge D(y, z) \leq D(x \vee y, z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in B$$

$$3.1.2. x \leq D(x, y) \text{ และ } y \leq D(x, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.3. D(1, x) = 1 \text{ และ } x \leq D(0, x) \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.4. D(x, y) \vee x' = D(x, y) \vee y' = 1 \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.5. x \vee y \leq D(x, y) \leq x \vee D(0, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.6. x \leq dx \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.7. d1 = 1 \text{ และ } 0 \leq d0$$

$$3.1.8. dx \leq D(x \vee y, x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.9. d0 = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } D(x, 0) = x \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.10. d(x \wedge y) = dx \wedge dy \wedge D(x, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.11. d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (y \vee dx) \wedge D(x, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.12. D \text{ เป็น order-preserving และ } d \text{ เป็น order-preserving}$$

$$3.1.13. d(x \wedge y) \leq D(x, y) \text{ และ } d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.14. d(x \vee y) \leq D(x, y) \text{ และ } d(x \vee y) \leq x \vee dy \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.15. d(x \vee y) \leq dx \vee dy \text{ สำหรับทุก } x, y \in B$$

$$3.1.16. dx \leq D(x, 1) \text{ และ } dx \leq D(x, 0) \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.17. dx \leq x \vee d0 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.18. \text{ ถ้า } x, y \in B \text{ โดยที่ } x \leq y \text{ แล้วจะได้ว่า}$$

$$1) y' \leq dx'$$

$$2) d(x' \vee y) = 1$$

$$3) D(x', y) = y \vee dx' = x' \vee dy = 1$$

$$4) dx' \vee dy = 1$$

$$5) \text{ ถ้า } dx = x \text{ แล้ว } dy = y$$

$$3.1.19. dx' \vee dx = 1 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.20. dx' = (dx)' \text{ สำหรับทุก } x \in B \text{ ก็ต่อเมื่อ } D(x, x) = x$$

$$3.1.21. \text{ ถ้า } dx = dx' \text{ สำหรับทุก } x \in B \text{ แล้ว } D(x, x) = 1$$

$$3.1.22. d^n = d \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n \geq 2$$

$$3.1.23. d0 = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } d \text{ เป็น identity function}$$

$$3.1.24. d0 = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } dx = 1 \text{ สำหรับทุก } x \in B$$

$$3.1.25. \text{ ถ้า } d \text{ เป็น surjective function แล้ว } d \text{ เป็น identity function}$$

$$3.1.26. \text{ ถ้า } x_1, x_2, \dots, x_n \in B \text{ โดยที่ } x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \text{ และ } dx_n = x_n \text{ แล้ว}$$

$$dx_i = x_i \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } i \leq n$$

$$3.1.27. \text{ ถ้า } D(x, y) = x \vee y \text{ สำหรับทุก } x, y \in B \text{ แล้ว } d \text{ เป็น Boolean derivation}$$

$$3.1.28. \text{ ถ้า } D(x, y) = (x \vee y) \vee a \text{ สำหรับทุก } x, y \in B \text{ โดยที่ } a \in B \text{ แล้ว } d \text{ เป็น}$$

$$\text{Boolean derivation บน } B \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 0$$

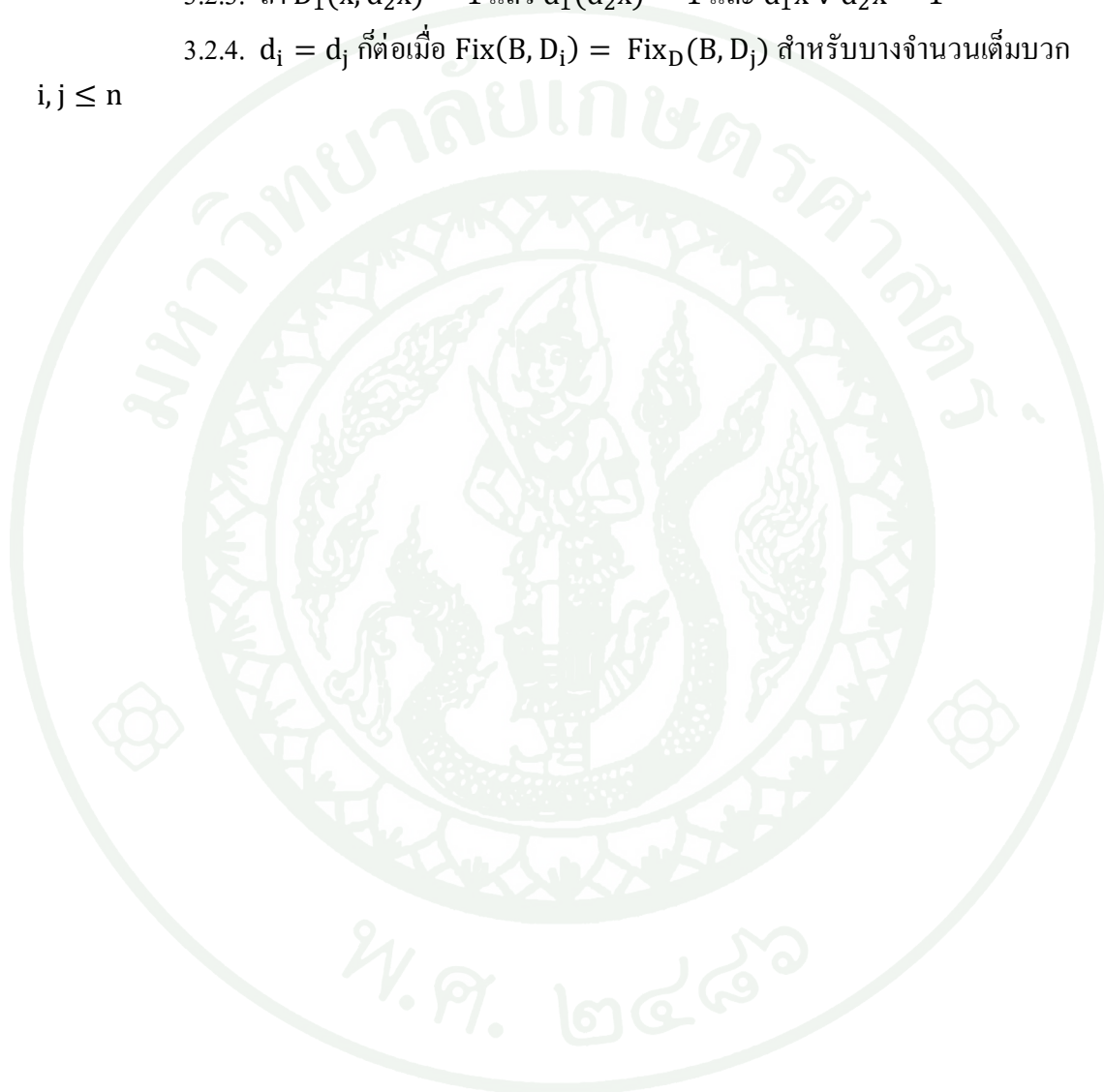
3.2. ให้ D_i เป็น symmetric Boolean derivation บน B และ d_i เป็น trace ของ D_i ตามลำดับ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in B$

3.2.1. ถ้า $D_1(d_1x, d_2x) = 0$ แล้ว $d_1x \wedge d_2x = 0$

3.2.2. ถ้า $D_1(d_1x, d_2x) = 1$ แล้ว $d_1(d_2x) \vee d_1x = 1$ และ $d_1x \vee d_2x = 1$

3.2.3. ถ้า $D_1(x, d_2x) = 1$ แล้ว $d_1(d_2x) = 1$ และ $d_1x \vee d_2x = 1$

3.2.4. $d_i = d_j$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Fix}(B, D_i) = \text{Fix}_D(B, D_j)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $i, j \leq n$



เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- Alshehri, N.O. 2010. Derivations of MV-algebras. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences** 13: 1-7.
- Bell, H. E. and L. C. Kappe. 1989. Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions. **Acta Mathematica Hungarica** 53(3-4): 339–346.
- Bell, H. E. and G.N. Mason. 1987. On derivations in near-rings and near-fields. **North-Holland Mathematical Studies** 137: 31–35.
- Ceven, Y. 2009. Symmetric bi-derivations of lattices. **Quaestiones Mathematicae** 32: 241-245.
- Hamza, A.S.A. and N.O. Alshehri. 2007. On left derivations of BCI-algebras. **Soochow Journal of Mathematics** 33(3): 435-444.
- Harmaitree, S. and U. Leerawat. 2011. On f-derivations in lattice. **Far East Journal of Mathematical Sciences** 51(1): 27-40.
- Ilbira, S., A. Firat and Y.B. Jue. 2011. On Symmetric Bi-Derivations of BCI-Algebras. **Applied Mathematical Sciences** 5(60): 2957-2966.
- Jun, Y.B. and X.L. Xin. 2004. On derivations of BCI-algebras. **Information Sciences** 159: 167-176.
- Kaya, K. 1988. Prime rings with α -derivations. **Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering** 16-17: 63–71.
- Lidl, R. and G. Pilz. 1984. **Applied Abstract Algebra**. 7 ed. Springer-Verlag New York Inc,

U.S.A.

- Mendelson, E. 1970. **Schaum's outline of theory and problems of Boolean algebra and switching circuits**. McGraw-Hill Inc, U.S.A.
- Nisar, F. 2009. On F-Derivation of BCI-Algebra. **Journal of Prime Research in Mathematics** 5: 176-191.
- Ozbal, S. and A. Firat. 2011. On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras. **International Mathematical Forum** 6(41): 2031-2036.
- Ozturk, M.A. and M. Sapancy. 1999. On generalized symmetric bi-derivations in prime rings. **East Asian Mathematical Journal** 15(2): 165-176.
- Ozturk, M.A. and Y.B. Jun. 2004. On trace of symmetric bi-derivations in near-rings. **International Journal of Pure and Applied Mathematics** 17(1): 95-102.
- Posner, E. C. 1957. Derivations in prime rings. **Proceedings of the American Mathematical Society** 8:1093–1100.
- Prabprayak, C. and U. Leerawat. 2009. On derivations of BCC-algebras. **Kasetsart Journal** 43: 398-401.
- Sapancy, M., M.A. Ozturk and Y.B. Jun. 1999. Symmetric bi-derivations on prime rings. **East Asian Mathematical Journal** 15(1): 105-109.
- Vukman, J. 1989. Symmetric Bi-Derivations on Prime and Semi-Prime Rings. **Aequationes Mathematicae** 38: 245-254.
- Xin, L.X., T.Y. Li and J.H. Lu. 2008. On derivations of lattice. **Information Sciences** 178: 307-316.

Zhan, J. and Y.L. Liut. 2005. On f-derivations of BCI-algebras. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences** 11: 1675-1684.



ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ	นายชนากร บุญพันธ์
เกิดวันที่	20 มีนาคม 2528
สถานที่เกิด	จังหวัดพัทลุง
ประวัติการศึกษา	วท.บ. เกียรตินิยมอันดับ 1 (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ประกาศนียบัตรบัณฑิต (วิชาชีพครู) มหาวิทยาลัยศิลปากร
ตำแหน่งปัจจุบัน	ครู คศ.1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนกะทู้วิทยา ต.กะทู้ อ.กะทู้ จ.ภูเก็ต 83120
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ได้รับทุนบัณฑิตศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (พ.ศ. 2554-2555)