ผนวก ข

Cost Function ที่มาจาก Cobb-Douglas Production

แสดงที่มา Cost Function ที่มาจาก Cobb-Douglas Production

$$MinC = P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 \quad \text{(ข.1)}$$

เงื่อนไข $$Y = a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}u \quad \text{(ข.2)}$$

โดย P_1, P_2, P_3 = ราคาปัจจัยการผลิตชนิดที่ 1,2 และ 3

X_1, X_2, X_3 = ปริมาณปัจจัยการผลิตชนิดที่ 1,2 และ 3

Y = ปริมาณผลผลิตรวม $(Y_1 + Y_2 + Y_3)$

Y_1, Y_2, Y_3 = ปริมาณผลผลิตชนิดที่ 1,2 และ 3

a_1, a_2, a_3 = ค่าคงที่

u = error term

จะได้ Lagrangian Function ของ Optimization Model

$$Z = P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + \lambda(Y - a_0.X_1^{a_1}.X_2^{a_2}.X_3^{a_3}.u \quad \text{(ข.3)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = P_1 - \lambda a_1a_0X_1^{a_1-1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}u = 0 \quad \text{(ข.4)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = P_2 - \lambda a_2a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2-1}X_3^{a_3}u = 0 \quad \text{(ข.5)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_3} = P_3 - \lambda a_3a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3-1}u = 0 \quad \text{(ข.6)}$$

จาก(ก.4) $$P_1 = \frac{\lambda a_1a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}u}{X_1} = \frac{\lambda a_1Y}{X_1} \quad \text{(ข.7)}$$

จาก(ก.5) $$P_2 = \frac{\lambda a_2a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}u}{X_2} = \frac{\lambda a_2Y}{X_2} \quad \text{(ข.8)}$$

จาก(ก.6) $$P_3 = \frac{\lambda a_3a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}u}{X_3} = \frac{\lambda a_3Y}{X_3} \quad \text{(ข.9)}$$

จาก(ก.7) จะได้ $$\frac{1}{\lambda} = \frac{a_1Y}{P_1X_1} \quad \text{(ข.10)}$$

จาก(ก.8) จะได้ $$\frac{1}{\lambda} = \frac{a_2Y}{P_2X_2} \quad \text{(ข.11)}$$

จาก(ก.9) จะได้ $$\frac{1}{\lambda} = \frac{a_3 Y}{P_3 X_3} \quad (ข.12)$$

ดังนั้นจะได้ $$\frac{a_1 Y}{P_1 X_1} = \frac{a_2 Y}{P_2 X_2} = \frac{a_3 Y}{P_3 X_3} \quad (ข.13)$$

จาก(ก.13) จะได้ $$X_1 = \frac{a_1 Y X_2 P_2}{a_2 Y P_1} = \frac{a_1 X_2 P_2}{a_2 P_1} \quad (ข.14)$$

$$X_3 = \frac{a_3 Y X_2 P_2}{a_2 Y P_3} = \frac{a_3 X_2 P_2}{a_2 P_3} \quad (ข.15)$$

แทน (ก.14), (ก.15) ใน (ก.1)

$$C = \frac{a_1 X_2 P_2}{a_2} + X_2 P_2 + \frac{a_3 X_2 P_2}{a_2} \quad (ข.16)$$

$$C = \frac{P_2 X_2 (a_1 + a_2 + a_3)}{a_2} \quad (ข.17)$$

$$X_2 = \frac{C}{P_2 (a_1 + a_2 + a_3)/a_2} \quad (ข.18)$$

แทนค่า $(a_1 + a_2 + a_3) = s$ จะได้

$$X_1 = \frac{C}{P_1 . s / a_1} \quad (ข.19)$$

$$X_2 = \frac{C}{P_2 . s / a_2} \quad (ข.20)$$

$$X_3 = \frac{C}{P_3 . s / a_3} \quad (ข.21)$$

แทนค่า (ก.19), (ก.20) และ (ก.21) ใน (ก.2) จะได้

$$Y = a_0 \left[\frac{C}{P_1 . s / a_1}\right]^{a_1} \left[\frac{C}{P_2 . s / a_2}\right]^{a_2} \left[\frac{C}{P_3 . s / a_3}\right]^{a_3} u \quad (ข.22)$$

$$Y = a_0 \left[\frac{C a_1}{P_1 s}\right]^{a_1} \left[\frac{C a_2}{P_2 s}\right]^{a_2} \left[\frac{C a_3}{P_3 s}\right]^{a_3} u \quad (ข.23)$$

$$Y = a_0 C^{a_1 + a_2 + a_3} \left[\frac{a_1}{P_1 s}\right]^{a_1} \left[\frac{a_2}{P_2 s}\right]^{a_2} \left[\frac{a_3}{P_3 s}\right]^{a_3} u \quad (ข.24)$$

$$Y = a_0 C^s \left[\frac{a_1}{P_1 s}\right]^{a_1} \left[\frac{a_2}{P_2 s}\right]^{a_2} \left[\frac{a_3}{P_3 s}\right]^{a_3} u \quad (ข.25)$$

ดังนั้นจะได้สมการต้นทุน

$$C^s = \frac{Y}{a_0}\left[\frac{sP_1}{a_1}\right]^{a_1}\left[\frac{sP_2}{a_2}\right]^{a_2}\left[\frac{sP_3}{a_3}\right]^{a_3}\frac{1}{u} \quad \text{(ข.26)}$$

$$C^s = \frac{Y}{a_0}\left[\frac{s}{a_1}\right]^{a_1}\left[\frac{s}{a_2}\right]^{a_2}\left[\frac{s}{a_3}\right]^{a_3}\frac{P_1^{a_1}P_2^{a_2}P_3^{a_3}}{u} \quad \text{(ข.27)}$$

$$C^s = s^{a_1+a_2+a_3}\frac{Y}{a_0}\left[\frac{1}{a_1}\right]^{a_1}\left[\frac{1}{a_2}\right]^{a_2}\left[\frac{1}{a_3}\right]^{a_3}\frac{P_1^{a_1}P_2^{a_2}P_3^{a_3}}{u} \quad \text{(ข.28)}$$

ยกกำลัง $\frac{1}{s}$ ทั้งสองข้างจะได้

$$C = s(a_0 a_1{}^{a_1} a_2{}^{a_2} a_3{}^{a_3})^{-1/s} Y^{1/s}(P_1^{a_1}P_2^{a_2}P_3^{a_3})^{1/s} u^{-1/s} \quad \text{(ข.29)}$$

ให้ $s(a_0 a_1{}^{a_1} a_2{}^{a_2} a_3{}^{a_3})^{-1/s} = k$ และ $u^{-1/s} = v$

$$C = kY^{1/s}P_1^{a_1/s}P_2^{a_2/s}P_3^{a_3/s}v \quad \text{(ข.30)}$$

จาก (ก.30) Take Natural Logarithm จะได้

$$\ln C = \ln k + (1/s)\ln Y + (a_1/s)\ln P_1 + (a_2/s)\ln P_2 + (a_3/s)\ln P_3 + \ln v \quad \text{(ข.31)}$$

โดย $\alpha_0 = \ln k$

$\alpha_1 = 1/s$

$\beta_1 = a_1/s$

$\beta_2 = a_2/s$

$\beta_3 = a_3/s$

$$\ln C = \alpha_0 + \alpha_1 \ln Y + \beta_1 \ln P_1 + \beta_2 \ln P_2 . + \beta_3 \ln P_3 + \ln v \quad \text{(ข.32)}$$