บทที่ 4
ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข

4.1 <u>เทคนิคการแก้ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้น</u>

ในปัจจุบันการแก้ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีหลากหลายวิธี ดังแสดงในเอกสารอ้างอิง [7,8,16,17] ซึ่งแต่ละวิธีมีทั้งข้อดีข้อเสียและรูปแบบสมการแตกต่างกันไป เช่น วิธีเพิ่มทีละขั้น (Incremental method) วิธีนี้แบ่งช่วงน้ำหนักบรรทุกภายนอก (Load increment) ออกเป็นช่วงเล็กๆ และใช้สมการแบบเชิงเส้นแก้สมการหาคำตอบในแต่ละช่วง ซึ่งเป็นวิธีที่สะดวกรวดเร็ว แต่มีข้อเสียคือการแบ่งน้ำหนักบรรทุกนั้นต้องแบ่งช่วงให้เล็กพอเพื่อไม่ให้คำตอบออกนอกเส้นทางสมดุล (Equilibrium path) จึงทำให้เสียเวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีอื่น อีกวิธีหนึ่งคือวิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน วิธีนี้ใช้น้ำหนักบรรทุกเป็นตัวควบคุม ซึ่งแบ่งย่อยเป็น วิธีนิวตัน-ราฟสันทั่วไป คือใช้สติฟเนสสัมผัสกระทำซ้ำในแต่ละช่วงเพื่อลู่เข้าสู่เส้นทางสมดุล ส่วนวิธีนิวตัน-ราฟสันแบบดัดแปลง จะใช้ค่าสติฟสัมผัสเริ่มต้นตลอดการกระทำซ้ำการลู่เข้าสู่เส้นทางสมดุล โดยวิธีนี้ใช้จำนวนรอบกระทำซ้ำมากกว่ากรณีแรก เป็นต้น

4.2 <u>วิธีการกระทำซ้ำ</u>

ในที่นี้กำหนดให้ i = จำนวนนับจำนวนช่วง j = จำนวนนับการกระทำซ้ำจนถึงแต่ละช่วง i และ k = ระบุหมายเลขชิ้นส่วนโครงสร้าง ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้ [18]

1. คำนวณหาค่าน้ำหนักไม่สมดุล (Unbalance Load) จากสมการ

$$\{P'_j\}_i = \{P_i\} - [N_j]_i^T \{F_j\}$$

2. คำนวณหาค่าเวกเตอร์การกระจัดที่จุดต่อของโครงสร้าง

$$[K_{Ej}+K_{Gj}]_i \{\Delta\delta_j\}_i = \{P'_j\}_i$$

3. เปลี่ยนพิกัดของโครงสร้างใหม่จากค่าการเคลื่อนที่ δ ที่ได้จากขั้นที่ 2 โดยที่

$$\{R_j\}_i = \{R_{j-1}\}_i + \{\Delta\delta_j\}_i$$

4. คำนวณหาเวกเตอร์การกระจัดทั้งหมด

$$\{\delta_j\}_i = \{\delta_{j-1}\}_i + \{\Delta\delta_{j-1}\}_i$$

5. คำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน ซึ่งหาได้จากการเปลี่ยนแปลงความยาวที่แท้จริงจากพิกัดใหม่ ของโครงสร้าง

$$\{F_j\}_k = EA_k \frac{\Delta L_k}{L_k}$$

6. คำนวณตั้งแต่ข้อ 1 ใหม่ จนกระทั่งค่าลู่เข้าสู่คำตอบ นั่นคือ ค่าเวกเตอร์น้ำหนักไม่สมดุล (Unbalance force)จะลดลงเรื่อยๆ จนกระทั่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ ซึ่งจะทำให้สมการ

$$\{P\} = [N]^T \{F\}$$

เป็นจริง สำหรับกระบวนการกระทำซ้ำหยุดเมื่อใดนั้นจะพิจารณาจากการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ ดังแสดงในหัวข้อถัดไป แต่ถ้าพบว่าคำตอบนั้นไม่สามารถลู่เข้าสู่เส้นทางสมดุลได้ เช่น มีสาเหตุมาจากการแบ่งน้ำหนักบรรทุกที่หยาบเกินไป หรือ คำตอบอยู่ใกล้กับจุดวิบัติ เป็นต้น จะใช้วิธีตัวคูณเปลี่ยนแปลงการแบ่งน้ำหนักบรรทุกอัตโนมัติ (Auto time stepping) เพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว

4.3 <u>การตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบของการแก้ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้น</u>

วิธีการลู่เข้าของคำตอบไว้หลากหลายวิธี ได้แก่ วิธียูคลีเดียนนอร์มของเวกเตอร์ของแรงคงค้าง วิธียูคลีเดียนนอร์มของการกระจัดส่วนที่เปลี่ยน เป็นต้น โดยงานวิจัยนี้จะใช้วิธียูคลีเดียนนอร์มของเวกเตอร์ของแรงคงค้างในการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ

วิธีที่1 วิธียูคลีเดียนนอร์มของเวกเตอร์ของแรงคงค้าง (Euclidian residual norm)

$$\frac{\| \mathbf{P}' \|_2}{\| \mathbf{P} \|_2} * 100\% \le \varepsilon_R$$

วิธีที่2 วิธียูคลีเดียนนอร์มของการกระจัดส่วนที่เปลี่ยน

$$\frac{\| \Delta\delta \|_2}{\| \delta \|_2} * 100\% \le \varepsilon_U$$

งานวิจัยนี้กำหนดค่า ε_R เท่ากับ 0.01% หากอยากให้คำตอบถูกต้องมากขึ้น สามารถกำหนดค่าให้น้อยกว่านี้ได้ แต่อาจเกิดความสิ้นเปลืองได้

4.4 ตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักบรรทุกอัตโนมัติ (Automatic Time Stepping)

กรณีการแบ่งช่วงน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่กำหนดไม่สามารถหาการลู่เข้าคำตอบได้ โปรแกรมไม่จำเป็นต้องหยุดการทำงานทันที แต่จะใช้วิธีดังกล่าวเพื่อปรับลดการแบ่งช่วงน้ำหนักบรรทุกภายนอก แล้วลองทำซ้ำใหม่ หากยังไม่สามารถลู่เข้าคำตอบได้อีก จะทำการลดตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักต่อ และทำซ้ำอย่างนี้ไปเรื่อย กระทั่งถึงตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักอัตโนมัติสูงสุดที่ตั้งไว้จึงหยุดทำงาน [19] โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ตั้งค่าตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักอัตโนมัติ เท่ากับ 0.5 และกำหนดค่าสูงสุดการใช้ตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักอัตโนมัติเท่ากับ 6 รอบ

ตัวอย่างเช่น หากการกระทำซ้ำรอบที่ i ไม่สามารถลู่เข้าคำตอบได้ ตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักอัตโนมัติ (=0.5) จะถูกนำมาคูณกับน้ำหนักบรรทุก แล้วลองทำซ้ำใหม่ หากยังไม่สามารถลู่เข้าสู่คำตอบได้ ก็จะลดตัวคูณลงอีก (=0.25) ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ โดยจะทำการหยุดโปรแกรมเมื่อถึงจำนวนสูงสุดการใช้ตัวคูณแล้วยังไม่สามารถลู่เข้าคำตอบได้

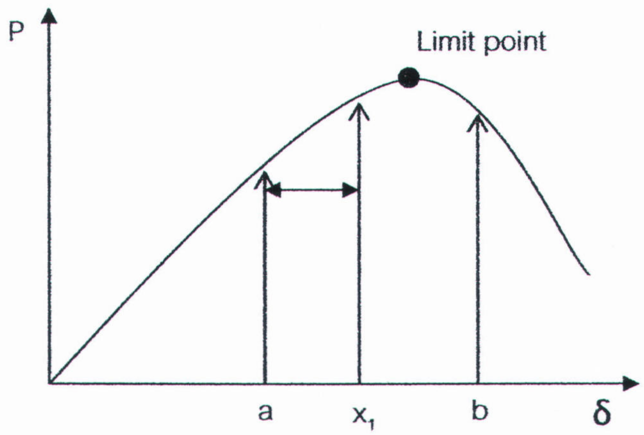
4.5 เทคนิคการแก้ปัญหาการวิเคราะห์เสถียรภาพแบบไร้เชิงเส้น

ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตสามารถหาได้จากการเพิ่มขั้นน้ำหนักบรรทุกภายนอกพร้อมใช้วิธีการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้น ทำไปเรื่อยจนถึงจุดขีดจำกัด (Limit point) ซึ่งในบางครั้งการวิเคราะห์ดังกล่าวไม่สามารถหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตได้ถูกต้อง ทั้งนี้เพราะการแบ่งค่าน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่หยาบเกินไป เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว จึงแนะนำให้ใช้วิธีตัวคูณการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักบรรทุกอัตโนมัติ (Automatic Time Stepping) ร่วมกับ วิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) สามารถอ่านจากหัวข้อ 4.4. และ 4.6. ตามลำดับ

4.6 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ดังรูปที่ 4.1 ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตเนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย และลู่เข้าหาคำตอบแน่นอน โดยอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

กำหนด f คือ ฟังก์ชันระหว่างน้ำหนักบรรทุกภายนอกกับการกระจัดที่ต่อเนื่องในช่วง [a, b] a คือ ขอบเขตต่ำสุด และ b คือ ขอบเขตสูงสุด จะสามารถหาค่าขีดจำกัดได้ตามขั้นตอนดังนี้ [18]



รูปที่ 4.1 วิธีแบ่งครึ่งช่วง [18]

1. พิจารณาช่วง [a,b] บนฟังก์ชันความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับการกระจัดที่ต่อเนื่อง โดยที่ f (a).f(b) < 0 แสดงว่าค่าคำตอบอยู่ในช่วงดังกล่าว
2. แบ่งครึ่งช่วง [a,b] ได้ค่า x_1 โดย x_1 = (a+b)/2 จากนั้นใช้เงื่อนไขดังกล่าวข้างล่างในการตรวจสอบการหาค่าคำตอบดังนี้

   -กรณี f (a).f(x_1) < 0 หมายความว่าค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตนั้นอยู่ในช่วง a และ x_1 ซึ่งจะแทน ค่า b เดิมด้วย x_1 แล้วทำซ้ำหาค่าใหม่ จาก (a+ x_1)/2 แล้วตรวจสอบว่าเข้าเงื่อนไขกรณีใด

   -กรณี f (b).f(x_1) < 0 หมายความว่าค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตนั้นอยู่ในช่วง b และ x_1 ซึ่งจะแทนค่า a เดิมด้วย x_1 แล้วทำซ้ำหาค่าใหม่ จาก (b+ x_1)/2 แล้วตรวจสอบว่าเข้าเงื่อนไขกรณีใด
3. หยุดการคำนวณเมื่อ $|x_r - x_{r+1}| < \varepsilon$

จากขั้นตอนการคำนวณพบว่าช่วงคลอบคลุมการหาค่าขีดจำกัดจะแคบลง จนสุดท้ายได้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

4.7 เทคนิคการแก้ปัญหาการหาค่าไอเก้นเจาะจงวิกฤต

ปัญหาค่าไอเก้น ถูกนำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมอย่างมากมาย เช่น การหาโหมดการสั่นตัว (modes of vibration) ของโครงสร้าง การหาโหมดการโก่งเดาะ (Buckling) ของโครงสร้าง

เป็นต้น โดยการแก้ปัญหาค่าไอเก้นนั้นมีหลากหลายวิธี เช่น วิธีการหาโดยตรง (Direct Method) วิธีกำลัง (Power method) วิธีส่วนกลับกำลัง (Inverse Power Method) เป็นต้น ซึ่งงานวิจัยนี้ใช้วิธีส่วนกลับกำลัง (Inverse Power Method) ในการแก้ปัญหา รายละเอียดเพิ่มเติมอ่านได้จากเอกสารอ้างอิง [18]

วิธีกำลังเป็นวิธีการกระทำซ้ำเพื่อหาค่าไอเก้นแวลูที่มากสุด จากสมการ $(-K_G^{-1}K_E)\,x = \lambda x$ ซึ่งสามารถสรุปเป็นขั้นตอนการคำนวณได้ดังนี้

1. สมมุติค่าไอเก้นเวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)}$ ให้มีค่าหนึ่งหน่วย
2. สร้างเมตริกซ์การคูณ $(-K_G^{-1}K_E)\,x^{(0)}=y^{(1)}$
3. ดึงค่าขนาดสูงสุด $y^{(1)}$ ทำไอเก้นเวกเตอร์ให้มีค่าสูงสุดเท่ากับหนึ่งหน่วย $y^{(1)} = \lambda^{(1)}x^{(1)}$
4. ทำการคำนวณซ้ำตั้งแต่ขั้นตอนที่ 2 ใหม่ จนลู่เข้าสู่คำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้คือค่าไอเก้นแวลูสูงสุด และค่าไอเก้นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเก้นแวลูนั้นๆ

แต่วิธีส่วนกลับกำลัง เป็นวิธีการหาค่าไอเก้นแวลูต่ำสุด ซึ่งขั้นตอนการคำนวณเหมือนกับวิธีกำลัง แต่ต่างกันที่ค่า $(-K_G^{-1}K_E)$ ต้องเป็น $(-K_G^{-1}K_E)^{-1}$ และค่าไอเก้นแวลูที่หาได้ต้องนำมาหาส่วนกลับ ดูได้จากบทพิสูจน์

<u>บทพิสูจน์</u>

พิจารณาปัญหาค่าไอเก้นแบบทั่วไป ให้ $Ax = \lambda x$

คูณค่า A^{-1} ทั้งสมการ จะได้ว่า $A^{-1}Ax\ (= Ix=x) = \lambda\ A^{-1}x$

จัดรูปแบบสมการใหม่ ให้อยู่ในรูปแบบปัญหาไอเก้น $A^{-1}x = \lambda^{-1}x\left(=\frac{1}{\lambda}x\right)$