

### บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง



#### 3.1 การวิเคราะห์โครงถัก 3 มิติแบบเชิงเส้น (Linear analysis)

การวิเคราะห์โครงถัก 3 มิติแบบเชิงเส้น จะอาศัยวิธีการรวมสตีเฟเนสโดยตรง เนื่องจากสามารถใช้แก้ปัญหาโครงสร้างทั้งชนิดดีเทอร์มิเนตและอินดีเทอร์มิเนตได้อย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนที่แน่นอนจึงเป็นวิธีที่เหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างขนาดใหญ่โดยอาศัยคอมพิวเตอร์ [10]

##### 3.1.1 การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีเมตริกซ์ (Matrix analysis)

1) สมการสมดุลของจุดต่อ (Node equilibrium equation) เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอก กับแรงภายในชิ้นส่วนในโครงสร้าง

$$\{P\} = [N]^T \{F\} \quad (3.1)$$

เมื่อ

$[N]^T$  คือ เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่ง

$\{F\}$  คือ เวกเตอร์แรงภายในของชิ้นส่วน

2) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเคลื่อนที่ของแต่ละชิ้นส่วน (Constitutive Equation)

$$\{F\} = [K] \{\Delta\} \quad (3.2)$$

เมื่อ

$[K]$  คือ เมตริกซ์อีลาสติคสตีเฟเนส (Elastic Stiffness Matrix)

$\{\Delta\}$  คือ เวกเตอร์การกระจัดของชิ้นส่วน

3) ลักษณะความสัมพันธ์ของโครงสร้าง (Compatibility Equation)

$$\{\Delta\} = [N] \{\delta\} \quad (3.3)$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถนำมาเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1j} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i1} & n_{i1} & \cdots & n_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$[N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1j} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i1} & n_{i1} & \cdots & n_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

โดยที่  $\Delta_i$  คือ การกระจัดที่จุดต่อ

$\delta_i$  คือ การยืดหดตัวในแนวแกนของชิ้นส่วน

$[N]$  คือ เมตริกซ์การแปลงพิกัด (Transformation matrix) ดูในหัวข้อ 3.1.2

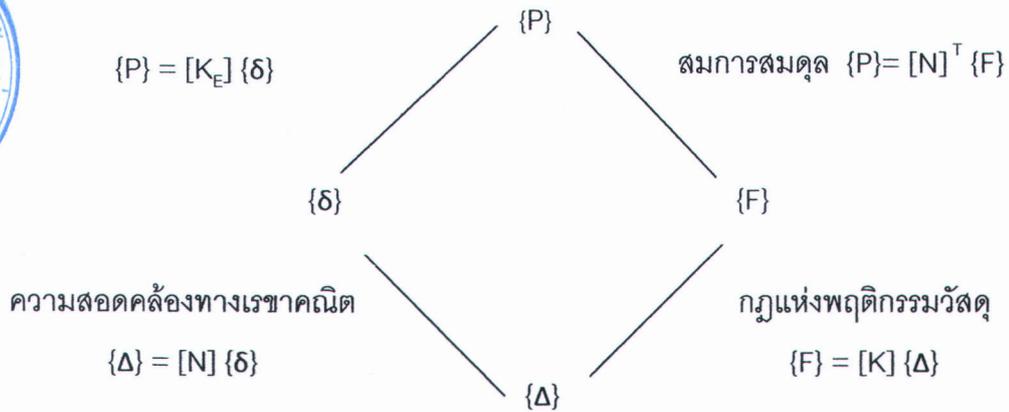
สมการที่ (3.3) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการยืดหดในแนวแกนของชิ้นส่วน กับการกระจัดที่จุดต่อของโครงสร้าง ซึ่งจะให้ค่าที่ถูกต้องเมื่อโครงสร้างเกิดการเสียรูปน้อย และหากนำสมการนี้แทนในสมการ (3.2) จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ของน้ำหนักบรรทุกภายนอก  $\{P\}$  กับเวกเตอร์การกระจัดที่จุดต่อ  $\{\delta\}$  ได้ดังนี้

$$\{P\} = [N]^T [K] [N] \{\delta\} \quad (3.6)$$

หรือ

$$\{P\} = [K_E] \{\delta\} \quad (3.7)$$

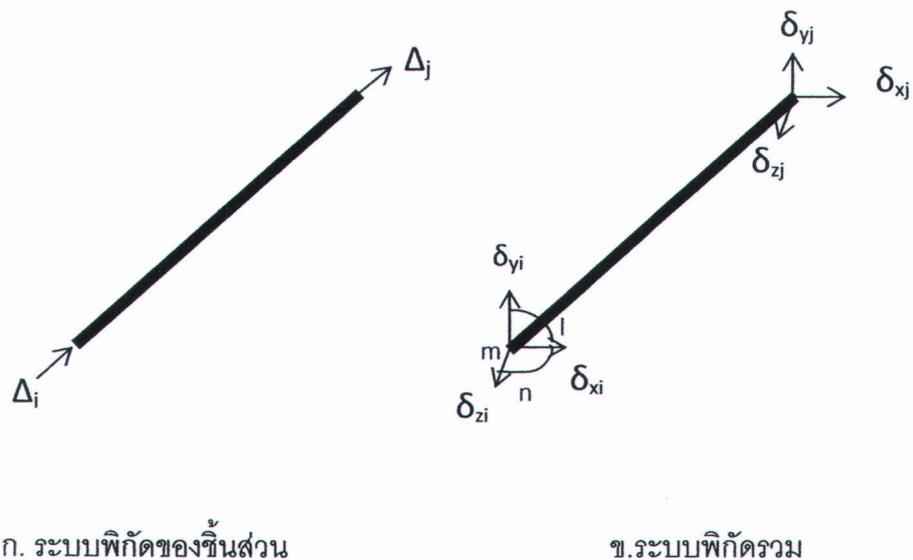
ความสัมพันธ์ของสมการต่างๆ ระหว่างน้ำหนักบรรทุกภายนอก การกระจัดที่จุดต่อ แรงภายในชิ้นส่วนของโครงสร้าง และการยืดหดตามแนวแกนของชิ้นส่วนโครงสร้าง สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แผนภาพวิธีการสติเฟเนสโดยตรง [11]

3.1.2 การหาเมตริกซ์การแปลงพิกัด (Transformation matrix)

เนื่องจากระบบพิกัดชิ้นส่วนของโครงสร้างอยู่ในทิศทางต่างๆกัน จึงไม่สามารถทำการรวมเวกเตอร์ของแรงที่ปลายชิ้นส่วนแต่ละอัน(แรงตามแนวแกนของระบบพิกัดชิ้นส่วน)ได้โดยตรง ฉะนั้นเพื่อให้สามารถรวมแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนได้โดยตรงแล้ว จึงต้องมีการเปลี่ยนระบบพิกัดชิ้นส่วน(Local coordinate system) ให้เป็นระบบพิกัดรวมก่อน ซึ่งความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทั้งสองแสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การแปลงพิกัดชิ้นส่วนเป็นระบบพิกัดรวม

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ  
 ห้องสมุดวิจัย  
 วันที่ 17 ก.ค. 2555  
 เลขทะเบียน 247847  
 เลขเรียกหนังสือ

จากรูปจะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta_{xi} \cos\theta_x + \delta_{yi} \cos\theta_y + \delta_{zi} \cos\theta_z \\ \Delta &= \delta_{xj} \cos\theta_x + \delta_{yj} \cos\theta_y + \delta_{zj} \cos\theta_z\end{aligned}\quad (3.8)$$

ดังนั้น เมตริกซ์แปลงพิกัด จากระบบพิกัดรวมเป็นระบบพิกัดเฉพาะ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$[N] = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}\quad (3.9)$$

เมื่อ

$l = \cos\theta_x = (x_j - x_i)/L_{ij}$ ,  $m = \cos\theta_y = (y_j - y_i)/L_{ij}$ ,  $n = \cos\theta_z = (z_j - z_i)/L_{ij}$  คือโคไซน์ทิศทางของมุมระหว่างระบบพิกัดหลักกับระบบพิกัดชิ้นส่วน และ  $L_{ij} = ((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{0.5}$  คือความยาวชิ้นส่วนของโครงสร้าง

### 3.1.3 การหาอิลาสติคสติเฟนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนสามมิติ

สติเฟนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนที่วางตัวในระบบสามมิติและต่อดัวยจุดยึดหมุน

$$[K_E] = [N]^T [K] [N]\quad (3.10)$$

สามารถเขียนในรูปของ

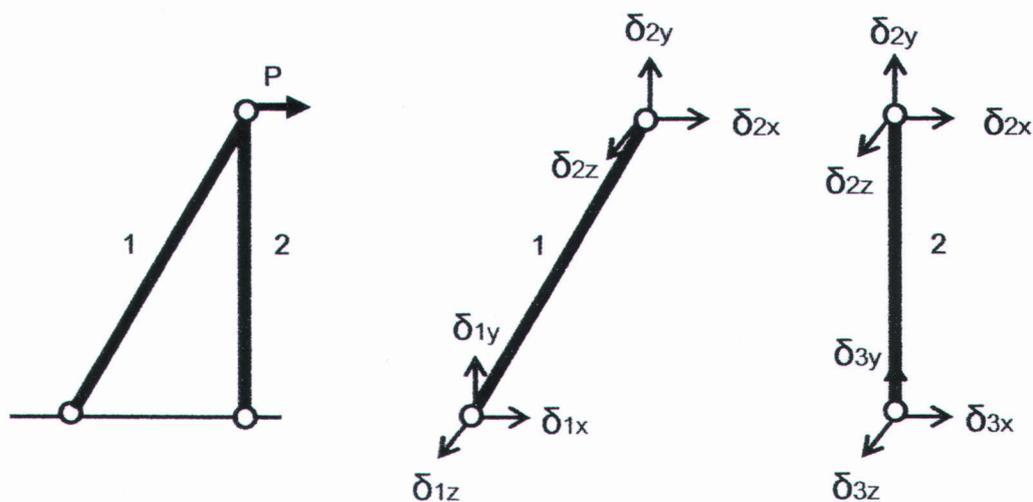
$$[K_E] = \begin{bmatrix} [K_E]^{AA} & -[K_E]^{AA} \\ -[K_E]^{AA} & [K_E]^{AA} \end{bmatrix}\quad (3.11)$$

เมื่อ

$$[K_E]^{AA} = \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln \\ lm & m^2 & mn \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าอีลาสติคสตีเฟนสเมตริกซ์ของหนึ่งชิ้นส่วน มีขนาด  $6 \times 6$  ซึ่งเท่ากับจำนวนระดับอิสระ (Degree of freedom) ของชิ้นส่วนนั้น

### 3.1.4 การรวมอีลาสติคสตีเฟนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเป็นอีลาสติคสตีเฟนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง



รูปที่ 3.3. โครงสร้างตัวอย่างเพื่อแสดงการรวมอีลาสติคสตีเฟนสของโครงสร้าง

จากรูปที่ 3.3. สามารถเขียนการรวมอีลาสติคสตีเฟนสของโครงสร้าง ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} & -\begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} & 0 \\ -\begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} & \begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} + \begin{bmatrix} K_E^2 \end{bmatrix}^{AA} & -\begin{bmatrix} K_E^2 \end{bmatrix}^{AA} \\ 0 & -\begin{bmatrix} K_E^2 \end{bmatrix}^{AA} & \begin{bmatrix} K_E^2 \end{bmatrix}^{AA} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

เงื่อนไขขอบเขต : จุดต่อ 1 และ 3 ไม่มีการเคลื่อน สามารถลดรูปสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} P_2(x) \\ P_2(y) \\ P_2(z) \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} + \begin{bmatrix} K_E^1 \end{bmatrix}^{AA} \right] \begin{bmatrix} \delta_2(x) \\ \delta_2(y) \\ \delta_2(z) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.2 การวิเคราะห์โครงสร้าง 3 มิติแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear analysis)

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีแบบเชิงเส้นนั้นถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง ทั้งนี้เนื่องจากสามารถหาคำตอบได้ง่ายและค่าความถูกต้องอยู่ในระดับที่ยอมรับได้ ภายใต้สมมุติฐานว่า

- 1) พิจารณาสมการสมดุลก่อนการเปลี่ยนรูปของโครงสร้าง
- 2) พฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น
- 3) ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนรูปและการกระจัดที่จุดต่อเป็นเชิงเส้น แต่ภายใต้ข้อจำกัดเหล่านี้ ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพของโครงสร้าง ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างขนาดใหญ่ ปัญหาโครงข้อหมุนที่มีลักษณะใกล้จุดกลไกวิบติ หรือ ปัญหาโครงข้อหมุนแบบตื้นได้ ดังนั้นการใช้วิธีการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นจึงมีนัยสำคัญ

ในทางปฏิบัติ การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) นั้นแทบเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่จะเกี่ยวข้องกับสมการทางคณิตศาสตร์ที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมาก จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Method) เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์ ซึ่งวิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมใช้มากคือ วิธีของนิวตัน-ราฟสัน (ดูหัวข้อ 4.1)

การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้น จะใช้วิธีระเบียบสตีเฟนสทางตรงซึ่งอาศัยความสอดคล้องสถานะสมดุลแลค่าสตีเฟนสสัมพัทธ์ของแต่ละชิ้นส่วนเพื่อสร้างระบบสมการสตีเฟนสสัมพัทธ์ของทั้งโครงสร้างดังสมการที่ (3.14) [12]

$$\{dP\} = [K_r] \{d\delta\} \quad (3.14)$$

เมื่อ	$\{dP\}$	คือ	เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงน้ำบรรทุกที่จุดต่อ
	$[K_r]$	คือ	เมตริกซ์สตีเฟนสสัมพัทธ์ของโครงสร้างในระบบพิกัดรวม
	$\{d\delta\}$	คือ	เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงการกระจัดที่จุดต่อ

#### 3.2.1 การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต (Geometric nonlinear analysis)

ในการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีแบบไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิตนั้น พบว่าเมื่อโครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ จะทำให้พิกัดของโครงสร้างเปลี่ยนไป ส่งผลให้  $N$  ใหม่  $\neq N$  เดิม (เมตริกซ์  $[N]$  เป็น

ฟังก์ชันพิกัดของโครงสร้าง) ดังนั้นสมมติฐานของการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นที่ว่า  $N_{ใหม่} \approx N_{เดิม}$  ในสมการ  $\{P\} = [N]^T \{F\}$  และสมการ  $\{\Delta\} = [N] \{\delta\}$  จะเกิดความคลาดเคลื่อนมาก [13]

สำหรับการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต จะเขียนสมการที่ (3.14) ใหม่ให้อยู่ในรูป

$$\{P_0\} - [N_j^T] \{F_j\} = [K_{Ej} + K_{Gj}] \{\Delta\delta_j\} \quad (3.15)$$

เมื่อ	$\{P_0\}$	คือ	เวกเตอร์น้ำหนักบรรทุกภายนอก
	$[N_j^T]$	คือ	เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งที่สภาวะอ้างอิง $j$ ใดๆ
	$\{F_j\}$	คือ	เวกเตอร์แรงภายในชิ้นส่วนที่สภาวะอ้างอิง $j$ ใดๆ มีค่าเท่ากับ $EA (L_j - L_0)/L_0$
	$\{\Delta\delta_j\}$	คือ	เวกเตอร์การกระจัดที่สภาวะอ้างอิง $j$ ใดๆ
	$[K_{Gj}]$	คือ	จีโอเมตริกซ์สติเฟเนสของชิ้นส่วนโครงสร้างระบบพิกัดหลัก

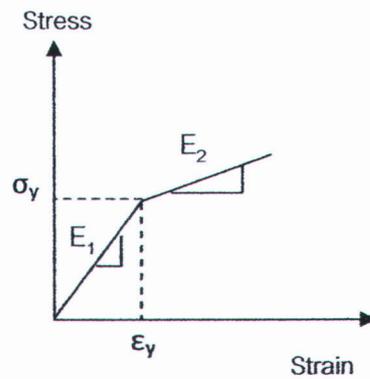
มีค่าเท่ากับ

$$\begin{bmatrix} [K_G]^{AA} & -[K_G]^{AA} \\ -[K_G]^{AA} & [K_G]^{AA} \end{bmatrix}$$

เมื่อ  $[K_G]^{AA} = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 1-(n)_x^2 & -(n)_x (n)_y & -(n)_x (n)_z \\ -(n)_y (n)_x & 1-(n)_y^2 & -(n)_y (n)_z \\ -(n)_z (n)_x & -(n)_z (n)_y & 1-(n)_z^2 \end{bmatrix}$  (รายละเอียดแสดงภาคผนวก ก.)

### 3.2.2 การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นทางวัสดุ (Material nonlinear analysis)

ความไร้เชิงเส้นทางวัสดุเกิดเนื่องจากวัสดุที่ประกอบขึ้นเป็นส่วนโครงสร้างแต่ละชิ้นส่วนนั้น มีขีดจำกัดในการรับแรงที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้นเพียงช่วงหนึ่งเท่านั้น ซึ่งเรียกว่าช่วงอีลาสติก หลังจากนั้นหากโครงสร้างยังรับแรงเพิ่มต่อ วัสดุดังกล่าวจะเกิดคราก ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเรียกว่าช่วงอินอีลาสติก โดยในงานวิจัยชิ้นนี้ใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear material) ดังแสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นกับความเครียดแบบ bi-linear

จากสมการที่ (3.14) สามารถเขียนสมมูลที่จุดต่อของการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นทางวัสดุ ได้ดังสมการที่ (3.16) [14]

$$\{P_0\} - [N_0^T] \{F_j\} = [K^T(\epsilon)]_j \{\Delta\delta_j\} \quad (3.16)$$

เมื่อ

$[N_0^T]$  คือ เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งที่สภาวะตั้งต้น

$\{F_j\}$  คือ เวกเตอร์ของแรงภายในที่สภาวะอ้างอิง  $j$  ใดๆ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$= AE_1 \epsilon \quad \text{ถ้า } \epsilon \leq \epsilon_y$$

$$= A[E_1 \epsilon_y + E_2(\epsilon - \epsilon_y)] \quad \text{ถ้า } \epsilon > \epsilon_y$$

$[K^T(\epsilon)]_j$  คือ สติฟเนสสัมพัทธ์โครงสร้างที่เป็นฟังก์ชันของค่าความเครียด ณ สภาวะอ้างอิง  $j$  ใดๆ

$$= \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} N_0^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ถ้า } \epsilon \leq \epsilon_y$$

$$= \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} N_0^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ถ้า } \epsilon > \epsilon_y$$

### 3.2.3 การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นผสม (Geometric and material nonlinear analysis)

การไร้เชิงเส้นแบบผสม เกิดจากความไร้เชิงเส้นทั้งสองชนิด คือ ความไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต กับความไร้เชิงเส้นทางวัสดุ ที่พิจารณาทั้งผลการเปลี่ยนรูปมากของโครงสร้างและ

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถเขียนสมการ (3.14) ใหม่ให้อยู่รูปสมการ [15]

$$\{P_0\} - [N_j^T] \{F_j\} = [K_{Ej}(\varepsilon) + K_{Gj}] \{\Delta\delta_j\} \quad (3.17)$$

ขั้นตอนการคำนวณการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นทั้งสามชนิด จะกล่าวในบทที่ 5

### 3.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพของโครงสร้าง (Structural stability)

การคำนวณเสถียรภาพของโครงสร้าง สามารถแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ชนิดคือ การวิเคราะห์เสถียรภาพแบบเชิงเส้น และการวิเคราะห์เสถียรภาพแบบไร้เชิงเส้น

#### 3.3.1 การวิเคราะห์เสถียรภาพแบบเชิงเส้น (Eigen Buckling)

การวิเคราะห์เสถียรภาพแบบเชิงเส้น ใช้วิธีการหาค่าเจาะจง (Eigenvalue problem) ซึ่งค่าไอเกนแวลูดังกล่าวเป็นสัมประสิทธิ์ที่บ่งชี้สัดส่วนค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตต่อค่าน้ำหนักบรรทุกที่กระทำจริงบนโครงสร้าง

สมการสมดุลที่ใช้ในการวิเคราะห์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\lambda \{P\} = [K_E + \lambda K_G] \psi \quad (3.18)$$

ซึ่งสามารถหาจุดที่ทำให้โครงสร้างไร้เสถียรภาพ หรือโครงสร้างไม่มีสตีเฟเนส จากดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของ  $[K_E + \lambda K_G]$  มีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการที่ 3.19

$$\det [K_E + \lambda K_G] = 0 \quad (3.19)$$

เมื่อ  $\lambda$  คือ ตัวคูณน้ำหนักบรรทุกวิกฤต คือค่าไอเกนแวลู (Critical elastic load factor)

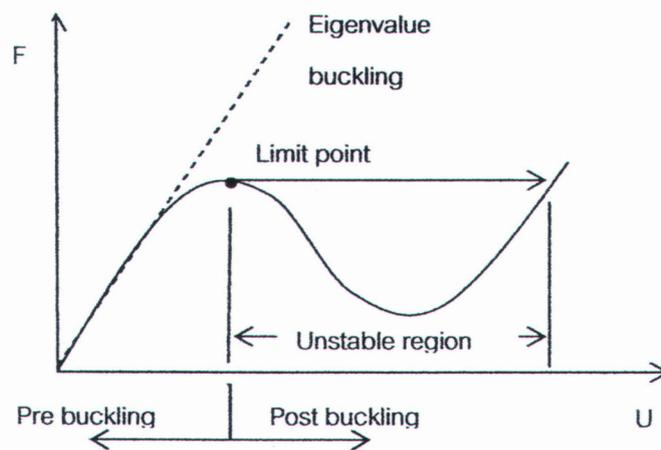
$\psi$  คือ โหมดการโก่งเดาะ (Mode shape) ซึ่งคือค่าเวกเตอร์เจาะจง

ดังนั้นค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตแบบยืดหยุ่น (Critical elastic load) คือ

$$\{P_{cr}\} = \lambda \{P_0\}$$

### 3.3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear buckling analysis)

การวิเคราะห์เสถียรภาพแบบไร้เชิงเส้น นั้นจะใช้วิธีการเพิ่มขึ้นน้ำหนักบรรทุกภายนอกจนกระทั่งโครงสร้างถึงจุดขีดจำกัด (Limit point) ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นที่โครงสร้างสูญเสียเสถียรภาพสามารถสังเกตได้จากค่าแนวทแยงของเมตริกซ์สติฟเนสสัมผัส (Tangent stiffness) อย่างน้อยหนึ่งตัวมีค่าเป็นลบหรือศูนย์ แสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การเปรียบเทียบพฤติกรรมไร้เสถียรภาพแบบเชิงเส้นและไร้เชิงเส้น