

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



E46281

CONVERGENCE THEOREMS FOR FAMILIES
OF NONEXPANSIVE MAPPINGS AND
NONSPREADING MAPPINGS AND
EQUILIBRIUM PROBLEMS

URAILUK SINGTHONG

DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
OCTOBER 2011

600256119

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



**CONVERGENCE THEOREMS FOR FAMILIES
OF NONEXPANSIVE MAPPINGS AND
NONSPREADING MAPPINGS AND
EQUILIBRIUM PROBLEMS**

URAILUK SINGTHONG

**A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
OCTOBER 2011**

**CONVERGENCE THEOREMS FOR FAMILIES
OF NONEXPANSIVE MAPPINGS AND
NONSPREADING MAPPINGS AND
EQUILIBRIUM PROBLEMS**

URAILUK SINGTHONG

THIS THESIS HAS BEEN APPROVED
TO BE A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

EXAMINING COMMITTEE

Somyot Plubtieng CHAIRPERSON
Prof. Dr. Somyot Plubtieng

Suthep Suantai MEMBER
Prof. Dr. Suthep Suantai

S. Dhompongsa MEMBER
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa

Narin Petrot MEMBER
Asst. Prof. Dr. Narin Petrot

Bancha Panyanak MEMBER
Asst. Prof. Dr. Bancha Panyanak

THESIS ADVISORY COMMITTEE

Suthep Suantai ADVISOR
Prof. Dr. Suthep Suantai

S. Dhompongsa CO-ADVISOR
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa

Bancha Panyanak CO-ADVISOR
Asst. Prof. Dr. Bancha Panyanak

25 October 2011

© Copyright by Chiang Mai University

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to thank all people who supported me in many ways until I finish my Ph.D.

First I would like to thank my advisor Professor Dr. Suthep Suanntai who advised me along my study route. He is an very kind person who always gave good academic suggestions. Beside academic advice, he also gave personal advice when I need encouragement. I feel that I am very lucky for getting a chance to work with him. I also would like to thank my co-advisors Professor Dr. Sompong Dhompongsa and Assistant Professor Dr. Bancha Panyanak, for their useful suggestions during my thesis writing. Moreover, I would like to thank the external thesis examiners Professor Dr. Somyot Plubtieng and Assistant Professor Dr. Narin Petrot.

I would like to thank all teachers who has taught me since I was a child. Special thank goes to Associated Professor Wiwat Wanicharpichat who always gives me good encouragement and useful advice and Professor Dr. Sujin Jinahyon who suggested me useful things including both work and studying. Professor Dr. Sujin is my idol and his suggestions make my life is more meaningful.

Finally, thank you for love from my family, especially my parents, who always give me encouragement in all ways they can do. Because of all people I have mentioned, I can finished my thesis completely. Thank again for all of their help and encouragement.

Urailuk Singthong

ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์	ทฤษฎีบทการลู่เข้าสำหรับวงรีของการส่งแบบ ไม่ขยายและวงรีของการส่งแบบไม่กระจาย และปัญหาสมมูล
ผู้เขียน	นางสาวอุไรลักษณ์ สິงห์ทอง
ปริญญา	วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ศ.ดร.สุเทพ สนวนใต้ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ศ.ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผศ.ดร.ปัญญา ปัญญานาค อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

บทคัดย่อ

E46281

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้ อันดับแรกเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของวิธีทำซ้ำทั่วไปแบบใหม่ โดยการใช้การส่ง K สำหรับการหาจุดตรึงร่วมของวงรีจำกัดของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลแบร์ต เรายังได้แนะนำวิธีทำซ้ำสำหรับการหาจุดตรึงร่วมของวงรีนับได้ของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค และเราได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของวิธีที่นำเสนอทั้งในปริภูมิบานาคเรียบแบบเอกรูปและปริภูมิบานาคคอนเวกซ์โดยแท้ที่สะท้อนโดยที่นอร์มเป็นเชิงอนุพันธ์ที่อู่ก่เอกรูป เรายังได้แนะนำและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของวิธีทำซ้ำสำหรับการหาจุดตรึงของสองการส่งแบบไม่กระจายในปริภูมิฮิลแบร์ต ท้ายสุดเรายังพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของสองวิธีทำซ้ำสำหรับการหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่กระจายและปัญหาสมมูลในปริภูมิฮิลแบร์ต

Thesis Title Convergence Theorems for Families of
Nonexpansive Mappings and Nonspreading Mappings
and Equilibrium Problems

Author Miss Urailuk Singthong

Degree Doctor of Philosophy (Mathematics)

Thesis Advisory Committee

Prof. Dr. Suthep Suantai	Advisor
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa	Co-advisor
Asst. Prof. Dr. Bancha Panyanak	Co-advisor

ABSTRACT

E46281

The purpose of this thesis first is to prove a strong convergence theorem of a new general iterative method by using the K - mapping for finding a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. We then introduce an iterative method for finding a common fixed point of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space and we prove a strong convergence theorem of the proposed method in both uniformly smooth Banach space and reflexive strictly convex Banach space with a uniformly Gâteaux differential norm. We also introduce and prove a strong convergence theorem of an iterative method for finding a common fixed point of two nonspreading-type mappings in Hilbert spaces. Finally, we prove strong convergence theorems of two iterative methods for finding a common element of a nonspreading-type mapping and equilibrium problem in Hilbert spaces.

TABLE OF CONTENTS

	Page
Acknowledgements	iii
Abstract in Thai	iv
Abstract in English	v
Chapter 1 Introduction	1
1.1 The Background of Fixed Point Theory	1
Chapter 2 Basic Concepts and Preliminaries	9
2.1 Metric Spaces and Basic Concept	9
2.2 Banach Spaces and Hilbert spaces	13
2.3 Fixed Point of Nonexpansive Mappings	19
2.4 Fixed Point Theory of Nonspreading Mappings	20
2.5 Equilibrium Problems in Hilbert Spaces	23
2.6 The Concept of W-Mappings and K-Mappings	25
2.7 Some Useful Lemmas and Theorems	28
Chapter 3 Approximation Method for Finite and Infinite Family of Nonexpansive Mappings	32
3.1 A New General Iterative Method for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces	32
3.2 Strong Convergence Theorems for a Countable Family of Nonexpansive Mappings in Banach Spaces	38
Chapter 4 Equilibrium Problems and Fixed Point Problem for Nonspreading Mappings in Hilbert Spaces	45
4.1 Strong Convergence Theorem for Nonspreading-type Mappings and Equilibrium Problem in Hilbert Spaces	45
4.2 Equilibrium Problems and Fixed Point Problems for Nonspreading-type Mappings in Hilbert Spaces	51
4.3 Common Fixed Points for Two Nonspreading-type Mappings in Hilbert Spaces	58
Chapter 5 Conclusion	62
5.1 Approximation Method for Finite and Infinite Family of Nonexpansive Mappings	62

5.2 Equilibrium Problems and Fixed Point for Nonspreading Mappings in Hilbert Spaces	63
5.2.1 Strong Convergence Theorem of Two Iterative Methods of Nonspreading-type Mapping and Equilibrium Problems	63
5.2.2 Common Fixed Points for Two Nonspreading-type Mappings	64
Bibliography	65
Vita	70