

## บรรณานุกรม

- [1] Pinto, A., & Fiolhais, M.(2001). Rolling cylinder on a horizontal plane. *Physics Education*, 36, 250-254.
- [2] Carnero, C., Aguiar, J., & Hierrezuelo, J. (1993). The work of the frictional force in rolling motion. *Physics Education*, 28, 225-227.
- [3] Basta, M., Gennaro, M.Di. , & Picciarelli, V. (1999). A desktop apparatus for studying rolling motion. *Physics Education*, 34, 371-375.
- [4] Lorenzo, G. R. , & Chandralekha, S. (2005). Student understanding of rotational and rolling motion concepts. *Physical Review Special Topic-Physics Education Research* , 1, 1 - 9.
- [5] Heck, A., & Uylings, P. (2010). In a Hurry To Work with High-Speed Video at School?. *The Physics Teacher* , 48, 176-181
- [6] Bryan, J.A. (2010). Investigating the conservation of mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*, 50-57.
- [7] Lewin, W. (1999). Teaching Rolling Motion.  
<http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-24/>
- [8] ปรีดา ตะเหลบ. “การพัฒนาการสอนบรรยายแบบสาธิตเชิงปฏิสัมพันธ์ของกระบวนการทางเทอร์โมไดนามิกส์”. วิทยานิพนธ์ ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต(การสอนฟิสิกส์), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เชียงใหม่, 2553.
- [9] Marx, J. D., & Cummings, K. (2007). Normalized change. *American Journal Physics*, 75(1), 87-91.

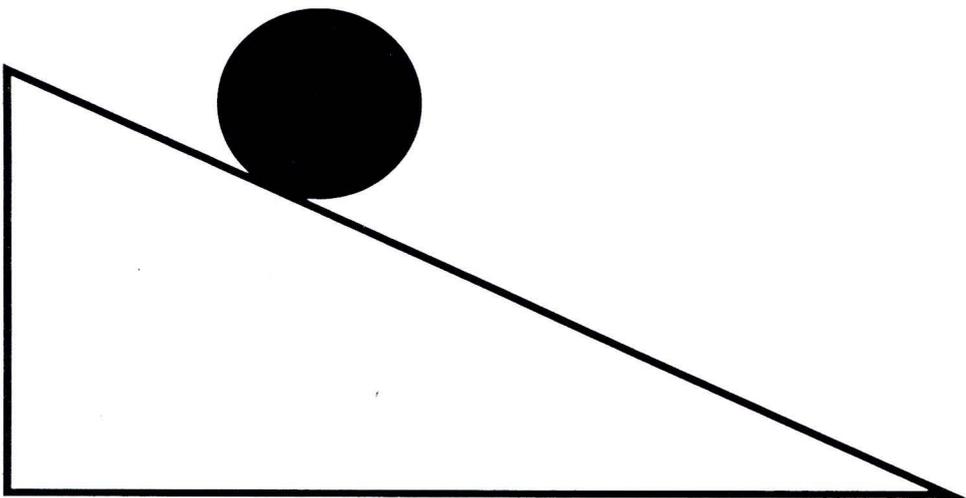
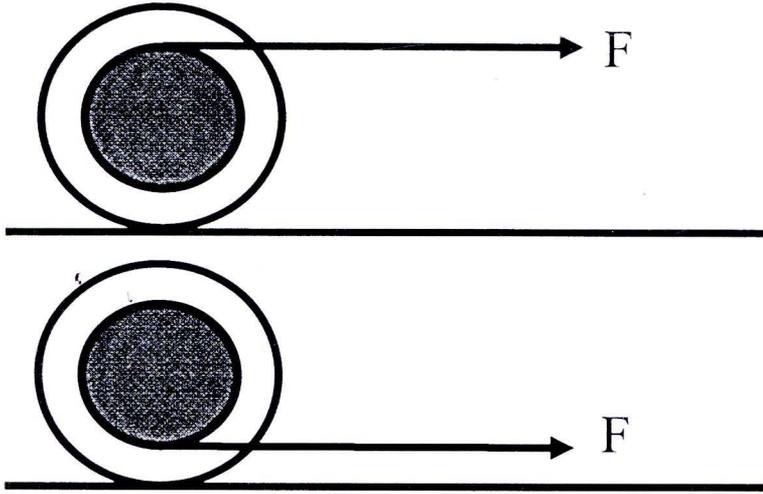
- [10] ปิยพงษ์ สิทธิคง. (2547). การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง. *ฟิสิกส์ระดับอุดมศึกษา I กลศาสตร์* (หน้า 301-306), กรุงเทพฯ : เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า จำกัด.



ภาคผนวก

ภาคผนวก ก  
เอกสารประกอบการสัมมนา

เอกสารประกอบการสัมมนาเรื่อง การกลิ้งโดยไม่ไถล



ภาคผนวก ข  
แบบประเมินความรู้ก่อนและหลังเรียน



กศคช: ดร. พงษ์ภักดิ์ วัฒนภักดิ์วัชรชัย ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรชาญ จังหวัดสกลนคร คณ:  
ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรชาญ  
239 ถนนพหลโยธิน ต. ทุ่งนาเกลือ อ. เมือง หนองหาน 50200 โทรศัพท์: 053-941921 โทร 443 โทรสาร: 053-  
943345 อีเมล: pwattanakasivich@gmail.com

### แบบประเมินความเข้าใจการกลิ้งโดยไม่ไถล

คำชี้แจง

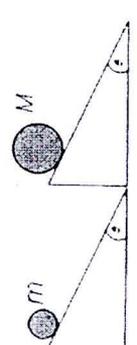
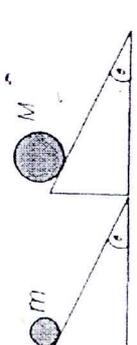
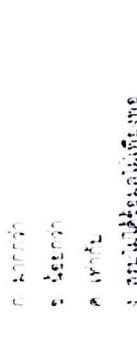
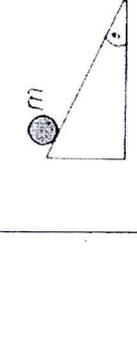
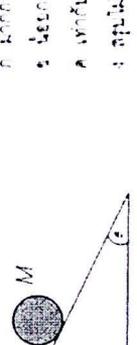
1. แบบประเมินความเข้าใจเป็นส่วนหนึ่งในการทำวิจัย เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนในหัวข้อกลศาสตร์ของแนววิจัยฟิสิกส์ศึกษา ภาควิชาฟิสิกส์และวัสดุศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2. ขอความกรุณาท่านตอบคำถามทุกข้อ ข้อมูลที่ได้จากการตอบแบบประเมินความเข้าใจของท่าน จะถูกนำเสนอในภาพรวมและไม่มีผลต่อคะแนนการเรียนการสอนของผู้ตอบแบบสอบถาม
3. แบบประเมินความเข้าใจมีทั้งหมด 6 ข้อ ใช้เวลาในการตอบ 5 นาที

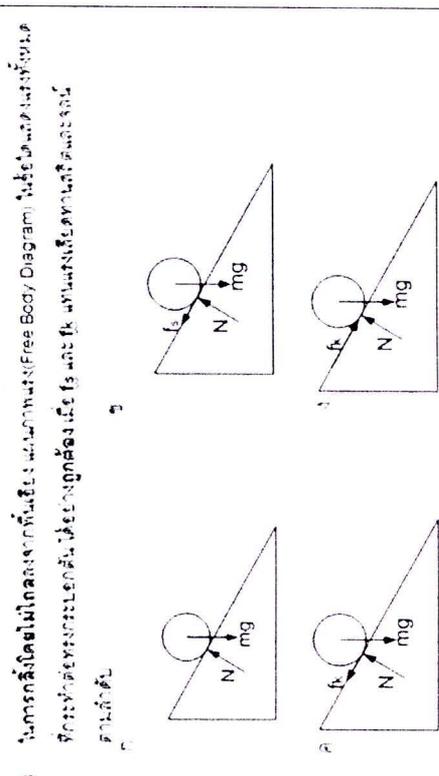
□ ข้าพเจ้ายินดีให้ความร่วมมือในการตอบแบบประเมินความเข้าใจนี้โดยไม่มีเงื่อนไข

ชื่อ-นามสกุล.....

รหัสประจำตัว.....

คำชี้แจง: กรุณาเลือกคำตอบที่ถูกต้องกว่าถูกต้องที่สุดโดยกากบาท (X) บนตัวเลือกรับ

<p>1. พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นศูนย์และเป็นของแข็งกลมตันมวล <math>M</math> มี <math>m &lt; M</math></p> <p>เลือกเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math> (ให้ <math>m &lt; M</math>)</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div> <p>2. พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นศูนย์และเป็นของแข็งกลมตันมวล <math>M</math> มี <math>m &lt; M</math></p> <p>เลือกเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div>	<p>4. พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีค่าความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล (<math>a_{CM}</math>) เป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math> (ให้ <math>m &lt; M</math>)</p> <p>เลือกเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div> <p>5. พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีค่าความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล (<math>a_{CM}</math>) เป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div>
<p>3. ในการกลิ้งโดยไม่มีลื่นของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นศูนย์และเป็นของแข็งกลมตันมวล <math>M</math> มี <math>m &lt; M</math></p> <p>พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มี <math>m &lt; M</math></p> <p>เลือกเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div>	<p>6. พิจารณาภาพดังต่อไปนี้โดยมีมวลของวัตถุที่เขียนไว้มีค่าเท่ากับมวลของระนาบเอียงมวล <math>M</math> มีค่าความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล (<math>a_{CM}</math>) เป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math> (ให้ <math>m &lt; M</math>)</p> <p>เลือกเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับมวล <math>M</math></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>ก. มากกว่า</p> <p>ข. น้อยกว่า</p> <p>ค. เท่ากัน</p> <p>ง. สรุปไม่ได้ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข</p> </div> </div>



ภาคผนวก ค  
แบบทำนายผล

### Activity 1: Prediction Sheet

ชื่อ.....รหัส.....คณะ.....

ให้เขียนคำทำนายผลการกลิ้งของทรงกระบอกในแต่ละสถานการณ์ โดยใช้ปากกาเท่านั้น

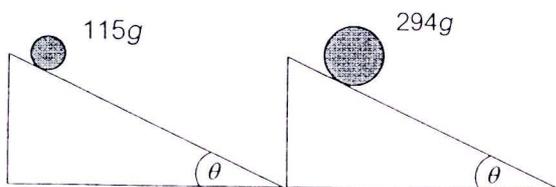
1. ถ้าปล่อยให้ทรงกระบอกตันมวล 115 และ 294 กรัม กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียง ให้นักศึกษาทำนายว่าทรงกระบอกใดถึงปลายล่างก่อน

ก. ทรงกระบอกตันมวล 115 กรัม

ข. ทรงกระบอกตันมวล 294 กรัม

ค. ถึงพร้อมกัน

พร้อมอธิบายเหตุผล



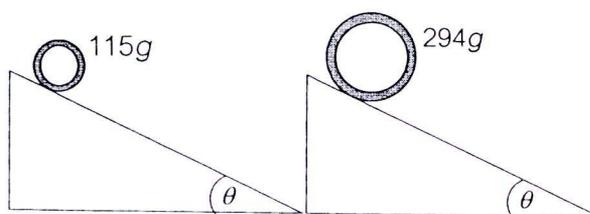
2. ถ้าปล่อยให้ทรงกระบอกกลวงมวล 115 และ 294 กรัม กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียง ให้นักศึกษาทำนายว่าทรงกระบอกใดถึงปลายล่างก่อน

ก. ทรงกระบอกกลวงมวล 115 กรัม

ข. ทรงกระบอกกลวงมวล 294 กรัม

ค. ถึงพร้อมกัน

พร้อมอธิบายเหตุผล



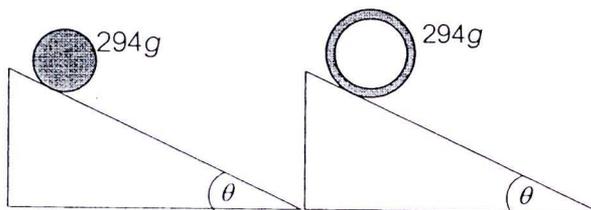
3. ถ้าปล่อยให้ทรงกระบอกกลวงและตันมวล 294 กรัมเท่ากัน กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียง ให้นักศึกษาทำนายว่าทรงกระบอกใดถึงปลายทางก่อน

ก. ทรงกระบอกตันมวล 294 กรัม

ข. ทรงกระบอกกลวงมวล 294 กรัม

ค. ถึงพร้อมกัน

พร้อมอธิบายเหตุผล



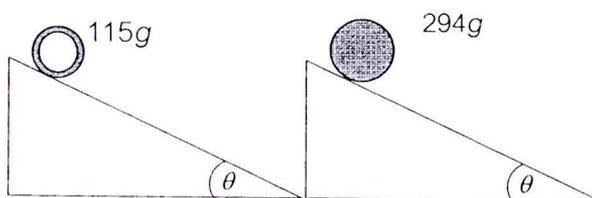
4. ถ้าปล่อยให้ทรงกระบอกกลวงและตันมวล 115 และ 294 กรัมตามลำดับกลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียง ให้นักศึกษาทำนายว่าทรงกระบอกใดถึงปลายทางก่อน

ก. ทรงกระบอกกลวงมวล 115 กรัม

ข. ทรงกระบอกตันมวล 294 กรัม

ค. ถึงพร้อมกัน

พร้อมอธิบายเหตุผล



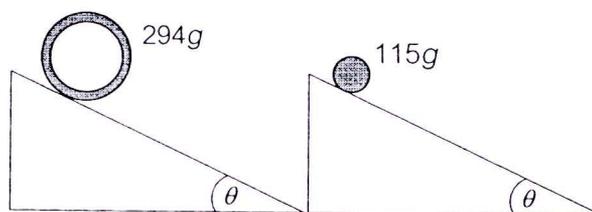
5. ถ้าปล่อยให้ทรงกระบอกกลวงและตันมวล 294 และ 115 กรัมตามลำดับกลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียง ให้นักศึกษาทำนายว่าทรงกระบอกใดถึงปลายทางก่อน

ง. ทรงกระบอกกลวงมวล 294 กรัม

จ. ทรงกระบอกตันมวล 115 กรัม

ฉ. ถึงพร้อมกัน

พร้อมอธิบายเหตุผล



ภาคผนวก ง  
โปสเตอร์นำเสนอผลงานวิจัย

# Video Analysis of Rolling Cylinders

S. Phommarach<sup>1</sup> and P. Wattanakasivich<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics and Materials Science, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand

<sup>2</sup>Thailand Center of Excellence in Physics (ThEP), Commission Higher on Education, Bangkok 10400, Thailand

\*Corresponding Author's E-mail address: p.wattanakasivich@gmail.com



Physics Education Research Unit

Department of Physics and Materials Science, Faculty of Science, Chiang Mai University, Thailand

## ABSTRACT

In this work, we studied rolling motion of solid and hollow cylinders down an inclined plane. The motions were captured as 300 frames per second video by Casio EX-F1 and the videos were analyzed frame by frame using video analysis software called Tracker. Data from the real motion were compared with the theory of rolling without slipping. In theory, for objects rolling down an incline plane without slipping, center of mass accelerations are  $\frac{2}{3}g\sin\theta$  for a solid cylinder and  $\frac{2}{3}g\sin\theta \frac{1}{(1+R_2^2/R_1^2)}$  for a hollow cylinder. The center of mass acceleration from the experiment differed from the theory about 1.2% for a solid cylinder and about 1.6% for a hollow one. Also, the acceleration does not depend on the mass as indicated from the theory. For the wood-steel surface we found that a coefficient of static friction was equal to 0.14 and when the angle was bigger than 23°, both types of cylinder started to roll and slide. Finally we found that the mechanical energy was conserved during the rolling without slipping. This confirms that work of the friction force is zero in theory. We will use these results to design an interactive lecture demonstration on rolling without slipping.

## OBJECTIVE

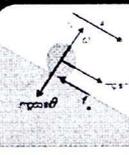
To study high-speed videos of solid and hollow cylinders rolling down an inclined plane at different angles.

Leading to

## INTERVENTION

Results from this study will be used to develop interactive video demonstrations for teaching rolling motion.

## THEORY



Linear motion:  $\sum F = mg\sin\theta - f_s = ma$  (1)

$\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0$  (2)

Rotational motion:  $\sum \tau = f_s R = I\alpha$  (3)

Use the condition for rolling without slipping:  $a = R\alpha$

Solid cylinder:  $a_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

Hollow cylinder:  $a_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta \frac{1}{(1+R_2^2/R_1^2)}$

FBD for a solid cylinder rolling without slipping down an incline

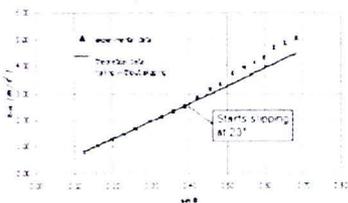
## MATERIALS & METHOD

Materials are as follows

- Solid and hollow steel cylinders with different masses
- Wooden inclined plane
- Casio EX-F1 camera
- Tracker 3.10

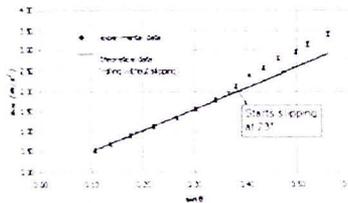


## RESULTS



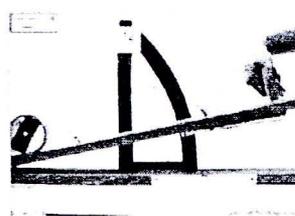
Solid cylinder: with mass 294.5 gm and radius of 2 cm

- The center of mass acceleration ( $a_{cm}$ ) for both solid and hollow cylinders do not depend of mass and radius
- The theoretical  $a_{cm}$  agrees with the experimental one when the angle is smaller than 23°
- For the wood-steel surface, we found a maximum coefficient of static friction was equal to 0.14. In theory, the critical angle for solid cylinder to roll without slipping is  $\theta_c = \arctan \mu$ . This agrees with our experimental result

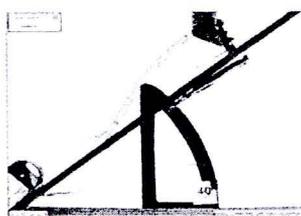


Hollow cylinder: with mass 294.13 gm, inner radius of 2.5 cm and outer radius of 4cm

## Comparison rolling tracks without and with slipping



Hollow cylinder rolling w/o slipping at 12°



Hollow cylinder rolling with slipping at 40°

## Conservation of Mechanical Energy

The mechanical energy is conserved for rolling without slipping because the work from static friction is zero.

Solid cylinder rolling w/o slipping at 10° (with mass 294.5 gm and radius of 2 cm)

h (m)	Potential Energy (J)	Kinetic Energy (J)	Total Energy (J)
0.11±0.01	0.30±0.01	0.04±0.01	0.35±0.01
0.10±0.01	0.29±0.01	0.06±0.01	0.35±0.01
0.09±0.01	0.26±0.01	0.09±0.01	0.35±0.01
0.08±0.01	0.24±0.01	0.11±0.01	0.35±0.01
0.07±0.01	0.20±0.01	0.15±0.01	0.35±0.01
0.06±0.01	0.17±0.01	0.19±0.01	0.35±0.01

## CONCLUSION

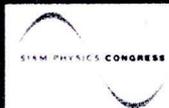
In this study, we explored the rolling motion of cylinder by using video analysis. The experimental results were in agreement with the theoretical prediction. Currently, we are developing interactive video demonstrations for teaching rolling motion at an introductory physics level.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work is supported by Graduate school of Chiang Mai University and Thailand Center of Excellence in Physics (ThEP) for financial support.

## REFERENCES

- [1] Lorenzo, G. R. & Chandralatha, S. (2005). Student understanding of rotational and rolling motion concepts. *The American Physical Society*, Vol. 1, No. 1, 1-9.
- [2] Alonso, P. & Manuel, F. (2001). Rolling cylinder on a horizontal plane. *Physics Education*, Vol. 36, No. 3, 250-254.
- [3] Carneiro, C., Aquilar, J., Hietrezielo, J. (1993). The work of the frictional force in rolling motion. *Physics Education*, 225-227.
- [4] Basta, M., Di Genaro, M., Picciarelli, V. (1999). A desktop apparatus for studying rolling motion. *Physics Education*, Vol. 34, No. 6, 371-375.





Siam Physics Congress SPC2011  
*Physics for all, all for physics* 23-26 March 2011

ที่ สท. 1.001 2554

14 กุมภาพันธ์ 2554

เรื่อง ขอเชิญเสนอผลงานวิชาการ Siam Physics Congress 2011 (SPC2011)  
 เรียน Mr. Sarayuth Phommarach  
 คนที่สมาคมฟิสิกส์ไทย ร่วมกับมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
 ธนบุรี สถาบันวิจัยแสงซินโครตรอน (องค์การมหาชน) ศูนย์ความเป็นเลิศด้าน  
 ฟิสิกส์ สถาบันวิจัยดาราศาสตร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน) และ สถาบัน  
 ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ดำเนินการประชุมเชิง  
 วิชาการระดับชาติ Siam Physics Congress 2011 (SPC2011) ภายใต้แนวคิด  
 Physics for all, all for physics ในช่วงระหว่างวันที่ 23-26 มีนาคม 2554 ณ  
 โรงแรม Ambassador City Jomtien Hotel จังหวัดชลบุรี โดยท่านได้ลงทะเบียน  
 เพื่อเข้าร่วมเสนอผลงานในการประชุมนั้น ในการนี้ทางคณะกรรมการจัดการ  
 ประชุมขอตอบรับการนำเสนอผลงานของท่านในหัวข้อ Video Analysis of  
 Rolling Cylinders ในรูปแบบ Poster โดยท่านสามารถดูรายละเอียดของการ  
 ประชุมได้ที่ <http://www.kmutt.ac.th/spe2011/spe> ทั้งนี้ ในการชำระ  
 ค่าลงทะเบียน สามารถดำเนินการได้ด้วยตนเองไปรษณีย์ โดยท่านสามารถ  
 ตรวจสอบสถานะการชำระเงินค่าลงทะเบียนได้ที่เว็บไซต์การประชุม  
 จิมเรียนมาเพื่อทราบ

ขอแสดงความนับถือ

(ดร.วารรงค์ รั้งเรืองเดช)  
 เลขานุการการประชุม SPC2011



สำนักงานเลขานุการ

สมาคมฟิสิกส์ไทย

ที่ตั้ง:

อาคารสุวภรณ์ 3

ถนนมหาวิทยาลัย ตำบลสุรนารี

อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา

ที่อยู่ไปรษณีย์:

ตู้ ป.ช. 93

ป.ช. นครราชสีมา 30000

โทรศัพท์ 0-4421-7040

โทรสาร 0-4421-7047

Secretariat Office

Thai Physics Society

Visiting Address:

Suraphat 3 Building,

University Ave.,

Suranaree Subdistrict,

Muang Nakhonratchasima

Postal Address:

P.O. Box 93

Nakhonratchasima 30000

Thailand

ภาคผนวก จ  
หนังสือตอบรับการตีพิมพ์

9 September 2011

Dear Dr Wattanakasiwich

TITLE Video analysis of rolling cylinders  
AUTHORS Dr S Phommarach et al

We are happy to tell you that we have accepted your article for publication in Physics Education as a paper

In a few weeks' time, we will send you proofs to check, correct and return to us. We will give you a date by which you must return your proofs, and if you do not do so we may publish the article without your corrections.

We will write to you again as soon as your proofs are ready for correction. You can manage your proofs on your personal author homepage located at <http://authors.iop.org/>

Your username is: pornratw

You will also be asked to enter your password, to ensure security of your personal data. If you have forgotten your password, we can send you a new one.

Your article will appear online as well as in print, on our IOPscience platform. This gives full online access to Physics Education to all readers at subscribing institutions, worldwide, and gives your article even greater visibility.

You can also order offprints on your author homepage. You should do this by the time you return your proofs. No late orders can be accepted. Reprints may be ordered but there is a significant extra charge.

Thank you for your interest in Physics Education. We look forward to publishing your article.

Yours sincerely

Jonathan Turner  
Publishing Editor  
Physics Education

Publishing Team  
Jonathan Turner - Publishing Editor  
Susannah Bruce - Production Editor

Contact Details  
E-mail [ped@iop.org](mailto:ped@iop.org)  
Fax +44 (0) 117 9200676

PS Keep up to date with the latest articles published in IOP journals at <http://iopscience.org>

ภาคผนวก จ  
บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์

## Video analysis of rolling cylinders

S Phommarach<sup>1</sup>, P Wattanakasiwich<sup>1,2</sup> and I Johnston<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics and Materials Science, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

<sup>2</sup>Thailand Center of Excellence in Physics (ThEP), Commission on Higher Education, Bangkok 10400, Thailand

<sup>3</sup>School of Physics, University of Sydney, Sydney, Australia

E-mail: pwattanakasiwich@gmail.com

### Abstract

In this work, we studied rolling motion of solid and hollow cylinders down an inclined plane at different angles. The motions were captured on video at 300 frames per second, and the videos were analyzed frame by frame using video analysis software. Data from the real motion were compared with the theory of rolling down an incline plane without slipping. From the experiment, the acceleration does not depend on the cylinder mass as indicated from the theory. For the wooden-steel surface, we found that a coefficient of static friction was equal to 0.131 and the critical angle for the solid cylinder is  $21.45^\circ$ . The critical angle for the hollow cylinder depends on the inner and outer radius of the cylinder. Motion paths of a point on the hollow cylinder at small and big angles were shown to elucidate the pure rolling condition. Finally, we demonstrated that total mechanical energy was conserved during the pure rolling motion. This confirms that work done by the friction force is zero. We will use these results to design an interactive lecture demonstration on rolling without slipping.

### Introduction

Apparatus suitable for studying rolling experimentally (with or without slipping) has been known at least since the time of Galileo [1]. It consists of smooth solid spheres released from rest and rolling down an inclined plane. However, Galileo did not realize that spheres start to slip for a large inclined angle. The difference between his predictions and the outcomes of his experiments proved a source of confusion at that time. So if even Galileo was puzzled with rolling motion, we can expect to see students having difficulties understanding this topic. Rolling motion is a complicated phenomenon involving many basic physics principles such as frictional forces, conservation of energy and relative velocity etc. Therefore it needs to be carefully addressed both in classroom lessons and in laboratory activities [2].

Many previous papers have investigated rolling motion from different perspectives both theoretically and experimentally, all with a similar aim—to improve instructions on this topic [2-9]. Rolling motion of cylinders on a horizontal plane has been studied theoretically without slipping [3-5] and with slipping [4, 5]. The focus of these studies was largely on the direction and magnitude of frictional forces and the work done by friction.

A few studies have presented a new approach to explain core concepts and have indicated persistent misconceptions on this topic [6-8]. Salazer *et al* [6] studied theoretically frictional forces in two examples of horizontal forces exerted on, firstly, two blocks, one on top of the other and, secondly, a sphere that rolls without slipping. They also called attention to misconceptions that could arise from these common-textbook examples. Lopez [7] demonstrated methods that could help students to overcome these misconceptions.

Hierrezuelo *et al* [8] recommended that teachers should not explain that the work done by the frictional force on a rolling object is zero because there is no displacement of its point of application. This explanation can cause misconceptions. Instead, they should show that frictional force produces two quantities of work of the same magnitude and opposite signs, which gives a net work equal to zero. Rimoldini and Singh [9] investigated common difficulties that students had with concepts related to rotational and rolling motion covered in introductory physics courses. They found that students could not differentiate speeds of different points on a rolling rigid wheel with respect to the center of the wheel or to the ground [9]. When being tested with rolling motion questions, most students believed that friction must slow down the motion. Furthermore they also thought that rolling without slipping is controlled by kinetic friction. Rimoldini and Singh [9] suggested that instructional strategies should focus on applying the principle of conservation of energy, the role of friction and relative velocity concepts in order to help students construct correct understanding.

Various articles have presented or proposed experimental apparatus that could be used to teach rolling motion of spheres [2, 3, 10-13]. Basta *et al* [2] created a desktop apparatus connected with a personal computer for use in a college-level physics laboratory. The apparatus used a sphere rolling down a grooved track while photocells detected positions of the sphere. Information was sent to the PC so that students could analyze the data on an electronic spreadsheet. Note, the rolling has to be on a grooved track because only then can the motion be controlled to be a straight line. Asavapibhop and Suwonjandee studied similar motion of steel spheres rolling down a grooved track using high-speed video [12]. Bryan also employed high-speed video analysis in studying energy conservation for objects in freefall, simple pendulums, spheres rolling down inclines, and masses oscillating on springs [13].

Currently, there is a wide range of ways to record and display the results of this kind of experiment for either introductory physics laboratories or classroom demonstrations. The use of high speed cameras has increased considerably, because the technology has become affordable at the consumer level. This gives teachers and students opportunities to record and study the physics of a real motion [14-16]. A high-speed video is also an extremely helpful tool for developing lecture demonstrations.

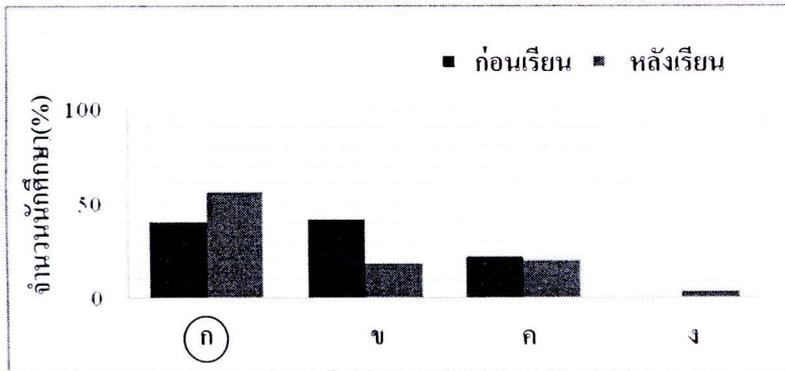
The objectives of this study are (1) to conduct and analyze high-speed videos of cylinders rolling down an inclined plane with different angles and compare with theory; (2) to give graphical proof of conservation of energy during the pure rolling; (3) to visualize the conditions of pure rolling. We are interested in rolling motion because it is very important in the curriculum of future engineers [3, 4] and most students have difficulties understanding it [1-11]. We also expect to use the high-speed video and the analysis to construct interactive video demonstrations [17] on rolling motion.

### **Theoretical background**

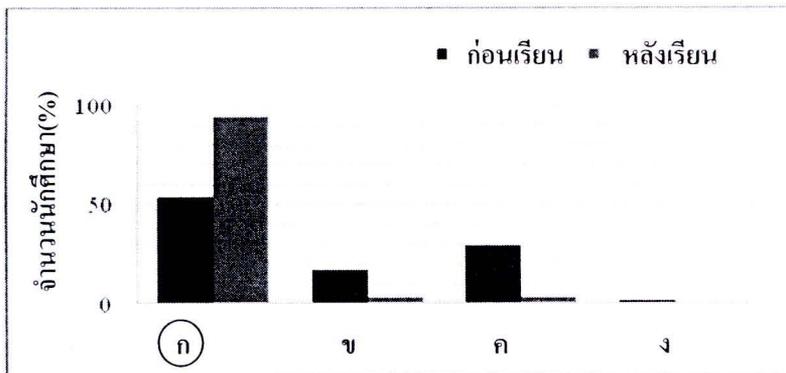
Consider a cylinder of mass  $m$  and radius  $R$  rolling down an inclined plane of angle  $\theta$ . The coefficient of static friction between the sphere and the incline is denoted by  $\mu_s$ . We consider two cases of rolling without slipping and rolling with slipping for solid and hollow cylinders.

เรียนนักศึกษา 56 % มีความเข้าใจว่าทรงกระบอกตันมีความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ( $a_{CM}$ ) มากกว่าทรงกระบอกกลวงแสดงว่านักศึกษาคอบถูกเพิ่มขึ้น 16%

ในกรณีที่ใช้สื่อสาธิตประกอบการสอน พบว่าก่อนเรียนนักศึกษา 54% มีความเข้าใจว่าทรงกระบอกตันมีความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ( $a_{CM}$ ) มากกว่าทรงกระบอกกลวงและพบว่าหลังเรียนนักศึกษา 94 % มีความเข้าใจว่าทรงกระบอกตันมีความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ( $a_{CM}$ ) มากกว่าทรงกระบอกกลวงแสดงว่านักศึกษาคอบถูกเพิ่มขึ้น 40%

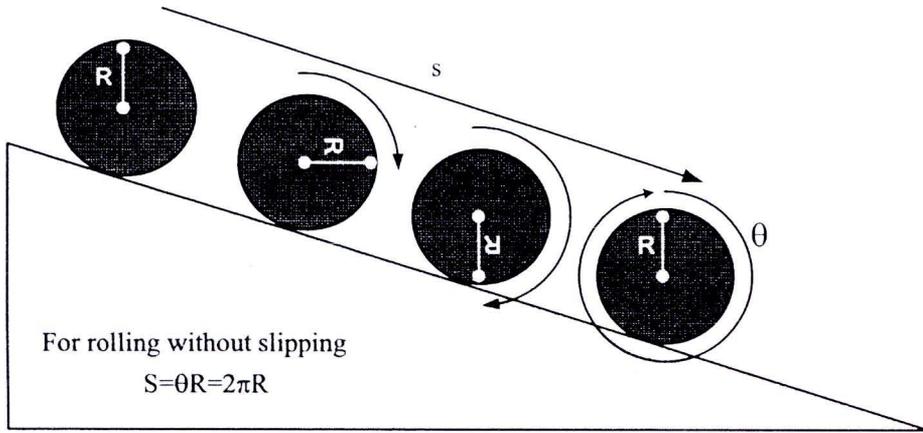


ภาพ 4.25 แสดงคำตอบของกลุ่มควบคุมทั้งก่อนและหลังเรียนในแบบประเมินข้อ 5



ภาพ 4.26 แสดงคำตอบของกลุ่มทดลองทั้งก่อนและหลังเรียนในแบบประเมินข้อ 5

Case 1: Rolling without slipping



**Figure 1.** The conditions for pure rolling

For the rigid object to roll without slipping, it has to satisfy the condition that its center of mass displacement ( $s$ ) is proportional to its angular displacement ( $\theta$ ) as follows:

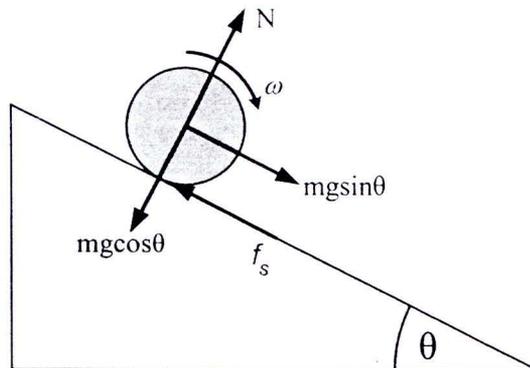
$$s = R\theta \quad (1)$$

When a point on the cylinder returns to the same position, the magnitude of displacement equals to  $2\pi R$ , as shown in Figure 1. The velocity of any point on circumference is the same as the center of mass velocity ( $v$ ). Therefore, the velocity and acceleration ( $a$ ) for the center of mass are related to the corresponding angular velocity ( $\omega$ ) and angular acceleration ( $\alpha$ ) by these relations:

$$v = R\omega \quad \text{and} \quad a = R\alpha \quad (2)$$

Students need to understand these conditions then at the beginning of the lesson on this topic.

*Solid Cylinder.* To study the role played by the shape of the cylinder, we start with an equation of motion for a cylinder obtained by drawing a free body diagram (FBD) as shown in Figure 2, where  $mg \sin \theta$  and  $mg \cos \theta$  are components of the cylinder weight ( $mg$ ).



**Figure 2.** FBD for a solid cylinder rolling without slipping down an incline

According to Newton's 2<sup>nd</sup> law, the equations of linear motion along axes parallel and perpendicular to an incline plane are given in eqn. (3) and (4), respectively.

$$mg \sin \theta - f_s = ma \quad (3)$$

$$N - mg \cos \theta = 0 \quad (4)$$

Also, the rotational component of the motion can be applied to this situation as follows:

$$f_s R = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad (5)$$

Combining eqn. (3) and (4) and using the condition for rolling without slipping from eqn. (2), for the solid cylinder, we determine the acceleration to be:

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad (6)$$

These equations are valid only so long as the frictional forces are sufficiently strong to prevent the cylinder from slipping as well as rolling. This means that the angle of incline must be less than some critical value. This critical angle can be determined from a condition of the maximum static friction. So we have

$$f_s \leq \mu_s N \quad \text{and} \quad f_s = \frac{1}{3}mg \sin \theta \quad (7)$$

The relation between the critical angle and the coefficient of (static) friction is, from eqns. (4) and (7),

$$\mu_s \geq \frac{1}{3} \tan \theta \quad (8)$$

*Hollow Cylinder.* For the hollow cylinder, the equation of linear motion is similar to that of the solid one, eqn. (3) and (4). The only difference is the moment of inertia. Let the hollow cylinder have a mass  $m$  and outer radius of  $R_2$  and inner radius of  $R_1$ , we obtain the acceleration of rolling without slipping as:

$$a = \frac{2g \sin \theta}{3 + (R_1/R_2)^2} \quad (9)$$

Similarly, the critical angle and the coefficient of friction relation are for a hollow cylinder.

$$\mu_s \geq \left( \frac{1 + (R_1/R_2)^2}{3 + (R_1/R_2)^2} \right) \tan \theta \quad (10)$$

### Case 2: Rolling and slipping

Rolling and slipping happens when the coefficient of static friction does not satisfy eqn. (8) or eqn. (10) for a solid and a hollow cylinder, respectively. In this case, there is rotational as well as translational motion. Therefore kinetic friction comes into play. Equation (5) is no longer relevant because extra terms will enter the analysis which we do not want to go into in this paper.

### Work done by the friction force in rolling without slipping

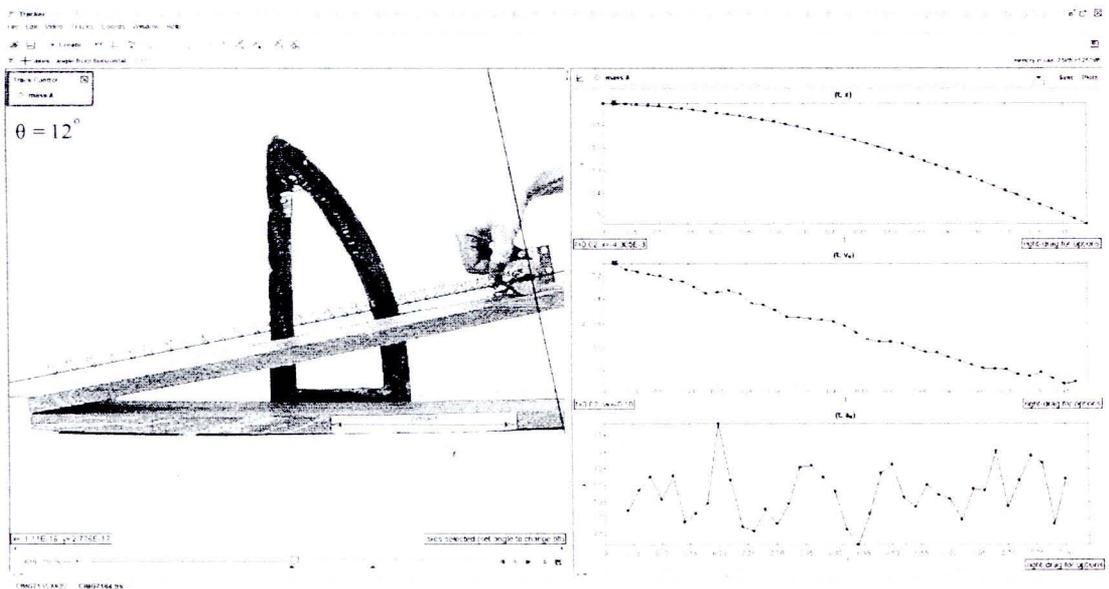
Carnero, Aguiar and Hierrezuelo [8] presented a new approach in explaining why the frictional force does no work during rolling without slipping. They compared explanations from different textbooks. Most authors explained that the point in contact with the surface is instantaneously at rest so the change of displacement of that point is considered to be zero.

This explanation highlights some possible difficulties with typical textbook problems, for example rope is wrapped around a wheel and the rope unwinds without slipping by a constant force  $F$ . If we use the similar explanation as the case of rolling without slipping, there will be no work done by the force  $F$ . Therefore, Carnero et. Al. [8] suggested a new explanation that there is no mechanical energy dissipation because the friction is static. They showed that the frictional force produces two quantities of work with the same magnitude but opposite signs, so this gives a zero net work done by the friction.

### Experiment and Video Analysis

#### Desktop Apparatus

The apparatus, which is shown in Figure 3, consisted of a wooden incline plane with adjustable angle, solid and hollow steel cylinders of various sizes. The incline plane of width  $w = 15.0$  cm and length  $l = 80.0$  cm could be adjusted to different angles. 20-cm white tape is attached to the bottom of the plane, as a reference length for conducting video analysis. The left hand half of the figure shows how the tracked positions of the cylinder at successive times are displayed on one composite picture as a series of numbered circles. The right hand half of the figure shows how the successive measured positions (along an axis parallel to the incline) of the center of the cylinder are plotted graphically, from which velocities and accelerations are calculated.



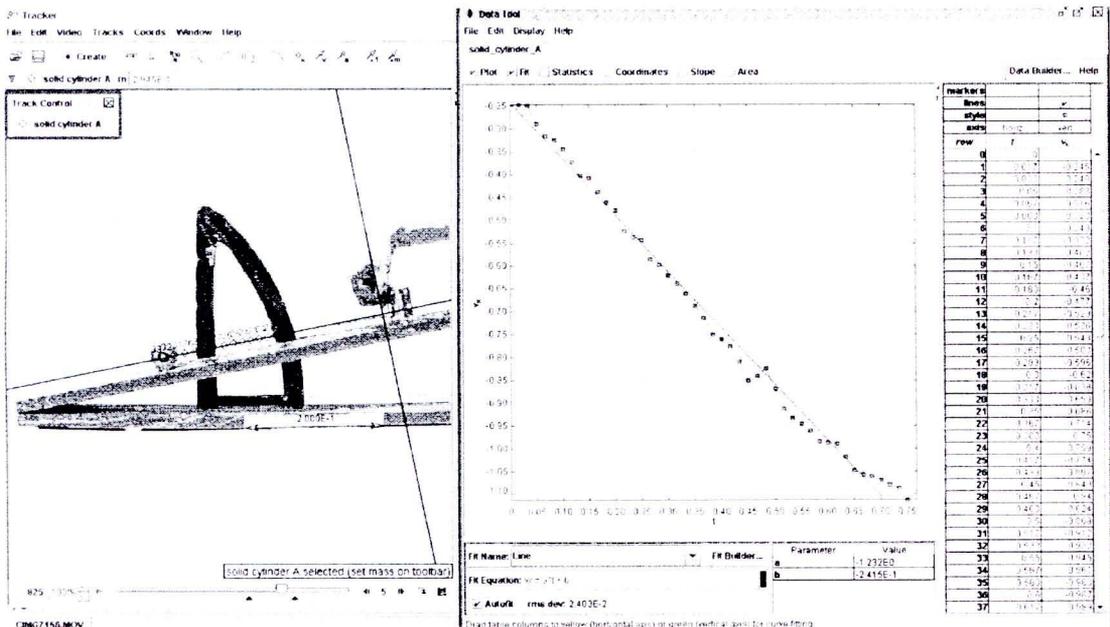
**Figure 3.** Using Tracker to analyze the motion of a solid cylinder which starts from rest and rolls down an incline at angle of  $12^\circ$

## Video Analysis

In order to analyze the motion of cylinders rolling down the plane, we captured rolling motion of each cylinder with a high speed camera (Casio EX-F1) at a rate of 300 frames per second. More details of this camera and high speed technology can be found in reference [15]. There the videos were analyzed using video analysis software, called Tracker 3.10 [16]. The software superimposes on each video frame of the equipment a series of small circles accompanied by the frame numbers.

Prior to tracking the object's position, the origin was assigned to the cylinder's center of mass when it was at rest before rolling down the incline, as shown in Figure 3. Tracker calibrated the video scale, using the 20-cm white tape at the bottom of the apparatus. Then, we traced the position of the center of mass of the cylinder, as shown in Figure 3. When tracking an object, the user has to use the mouse to locate the object's position.

The error in this measurement is relatively large (estimated to be around  $\pm 5\%$ ). The process of measuring positions essentially by hand, is necessarily prone to error, unless extreme care is taken in the use of Tracker. In this study, we used the Data Tool application to linearly fit the velocity versus time graph, as shown in Figure 4. The Data Tool application calculated the values  $a$  and  $b$ , which are parameters in the line equation:  $v = a * t + b$ , as shown in Figure 4. The value of acceleration can be obtained from the value of parameter  $a$ . An example of the data is presented in Figure 4, the experimental value of acceleration  $a = 1.36 \text{ m/s}$  with the standard error of the mean of about  $0.02 \text{ m/s}$  from the linear best fit.



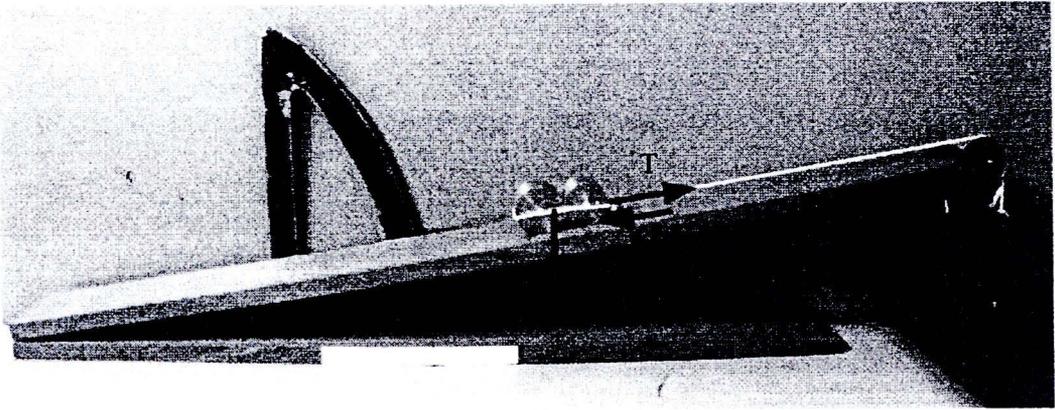
**Figure 4.** Using “Data Tool” in Tracker to obtain the experimental value of acceleration.

Note that the velocity-time points are linearly fitted to a line where a slope gives the acceleration.

### Measurement of Maximum Coefficient of Static Friction

Before the main experiment began, it was necessary to obtain the maximum value of coefficient of static friction ( $\mu_s$ ) between steel and wood surfaces. We set up apparatus to measure  $\mu_s$ , as shown in Figure 5. From the free body diagram in the figure, we can determine  $\mu_s$  as follows:

$$\mu_s = \frac{m - M \sin \theta}{M \cos \theta} \quad (11)$$



**Figure 5.** Apparatus for measuring the maximum coefficient of static friction

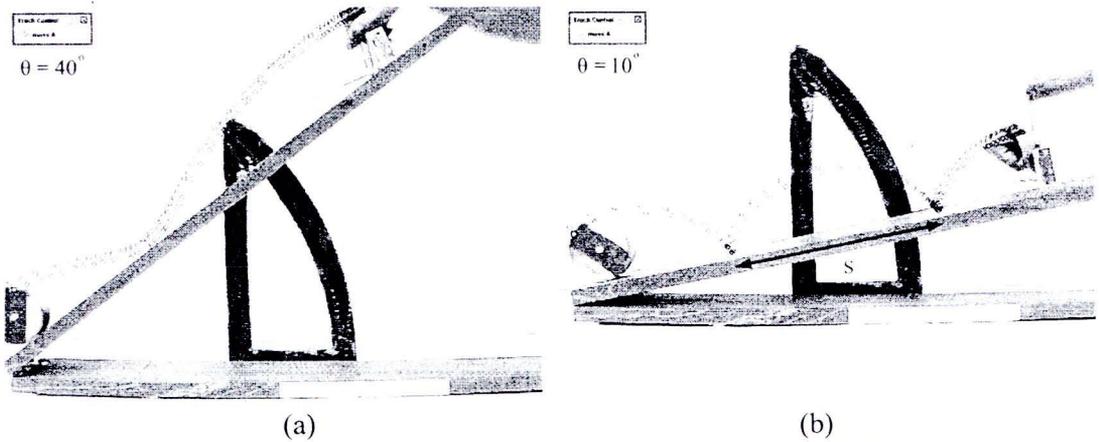
At an angle of 10 degrees, two solid cylinders ( $M$ ) were attached together so that there was no rolling. The masses ( $m$ ) required for the cylinders to just start moving up were measured. The masses of cylinders were varied to be 519.7 g and 837.1 g. Then we calculated  $\mu_s$  using eqn. (11) for each measurement and found an effective of the maximum coefficient of static friction to be  $0.131 \pm 0.029$ . Note that the uncertainty is quite large which is difficult to avoid in this kind of measurement.

## Results and Discussion

### Condition for rolling without slipping

First, we investigated the condition for pure rolling motion of a hollow cylinder, as presented by eqn. (1). In the experiment, the motion path of one point on the hollow cylinder edge was tracked at different angles. The hollow cylinder has an inner radius ( $R_1$ ) of 3.5 cm and an outer radius ( $R_2$ ) of 4.0 cm. Using the value of  $\mu_s = 0.131$  and eqn. (10), the critical angle for this hollow cylinder to roll without slipping was calculated to be  $15.6^\circ$ .

We took videos of rolling motion at two different angles— $12^\circ$  and  $40^\circ$  (one less and the other greater than critical). In Figure 6 (a), the path of the point shows that the hollow cylinder rolls without slipping, as there are sharp cusps on the displacement curves. Using eqn. (1) with  $\theta = 2\pi$ , the expected displacement between cusps ( $s$ ), as shown in Figure 6(a), should be 25.13 cm. The measured displacement from using Tracker is equal to 24.32 cm. This agreement is satisfactory ( $\pm 3\%$ ) and confirms that within the limits of accuracy of the experiment the cylinder was indeed rolling without slipping. In Figure 6 (b), the angle is bigger than the critical angle, so the cylinder now rolls and slips as clearly shown in the figure.



**Figure 6.** Path of the hollow cylinder (mass 294.13 gm, inner radius of 3.5 cm and outer radius of 4.0 cm) rolling down an inclined plane at—(a)  $10^\circ$  (rolling without slipping) (b)  $40^\circ$  (rolling with slipping)

### Critical angle

As the angle of the inclined plane increased, the cylinder starts to roll without slipping, up to a critical angle ( $\theta_c$ ). Then equations (8) and (10) can be written to show that this critical angle is:

$$\text{solid cylinder:} \quad \theta_c = \tan^{-1}(3\mu_s) \quad (12)$$

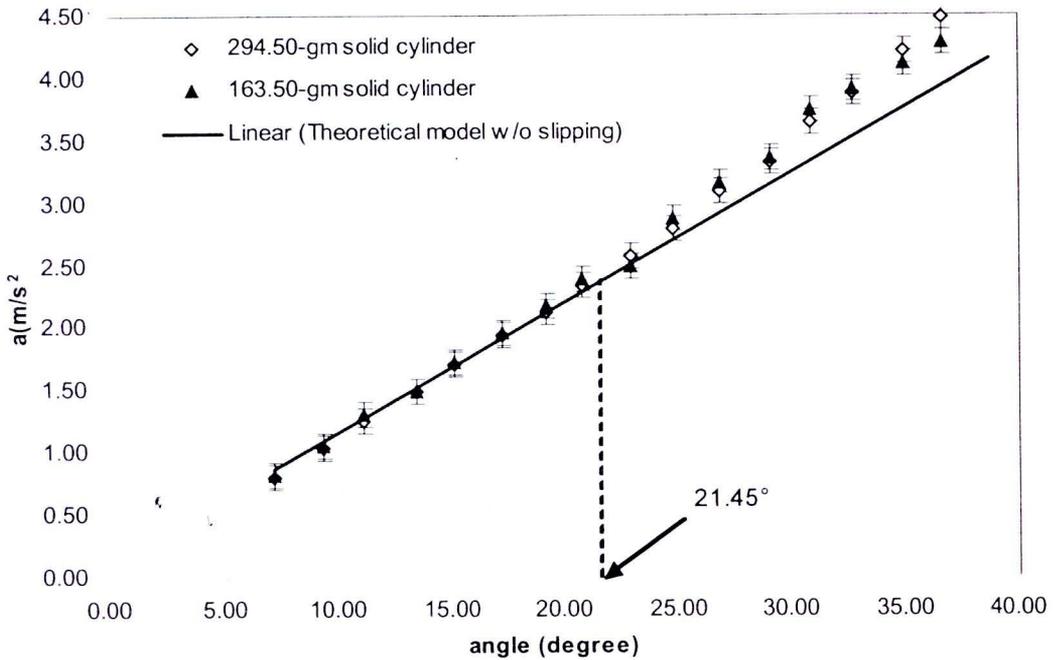
$$\text{hollow cylinder:} \quad \theta_c = \tan^{-1}\left[\left(\frac{3 + (R_1/R_2)^2}{1 + (R_1/R_2)^2}\right)\mu_s\right] \quad (13)$$

In order to measure the critical angle, the previous observations were repeated for several cylinders, a range of angles, not just two arbitrarily chosen values. For each run the average acceleration ( $a$ ) was measured and plotted against incline angle ( $\theta$ ), as shown in Figure 7.

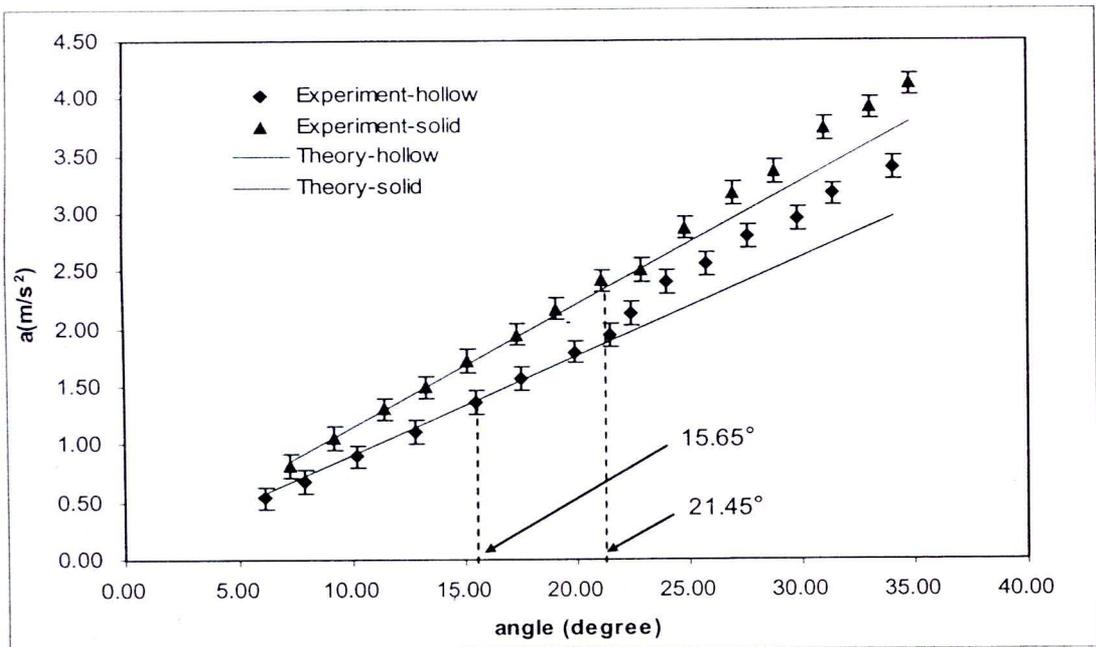
Note from equations (6) or (9) the relationship between  $a$  and  $\theta$  should be independent of mass. In Figure 7, experimental values of accelerations for two solid cylinders with different masses ( $\diamond$  and  $\blacktriangle$  markers) are plotted. This resultant graph clearly shows the independence of  $a$  on  $\theta$ .

In Figure 7, the  $(a, \theta)$  relationship for pure rolling (eqn. (9)) is plotted as a solid line. Comparison of this line with the experimental data clearly shows that for small angles there is agreement, but the onset of slipping occurs at a specific angle and these two no longer agree. The angle at which this divergence occurs can be estimated from the data points to be close to the theoretically calculated critical angle of  $21.45^\circ$ .

In Figure 8, experimental results for hollow and solid cylinders are compared. These results, as well as eqns. (12) and (13), indicate that the critical angle depends on moment of inertia or how the mass is distributed. Both solid and hollow cylinders have the same mass, but the critical angle of the solid cylinder is larger than one of the hollow cylinder. Also, the acceleration of the solid cylinder is larger than the hollow one because the moment of inertia for solid cylinder is smaller than the hollow one. The smaller moment of inertia results in a lower resistance to rolling, so the object moves faster.



**Figure 7.** Comparing theoretical (solid line) and experimental data versus angle for solid cylinder with mass 294.50 grams and 163.50 grams. Note for these values, theoretical critical angle is  $21.45^\circ$



**Figure 8.** Comparing theoretical (solid line) and experimental data versus angle for solid and hollow cylinders with the same mass ( $m = 294.50$  gm). Note the calculated critical angles are  $15.45^\circ$  and  $21.45^\circ$ , respectively.

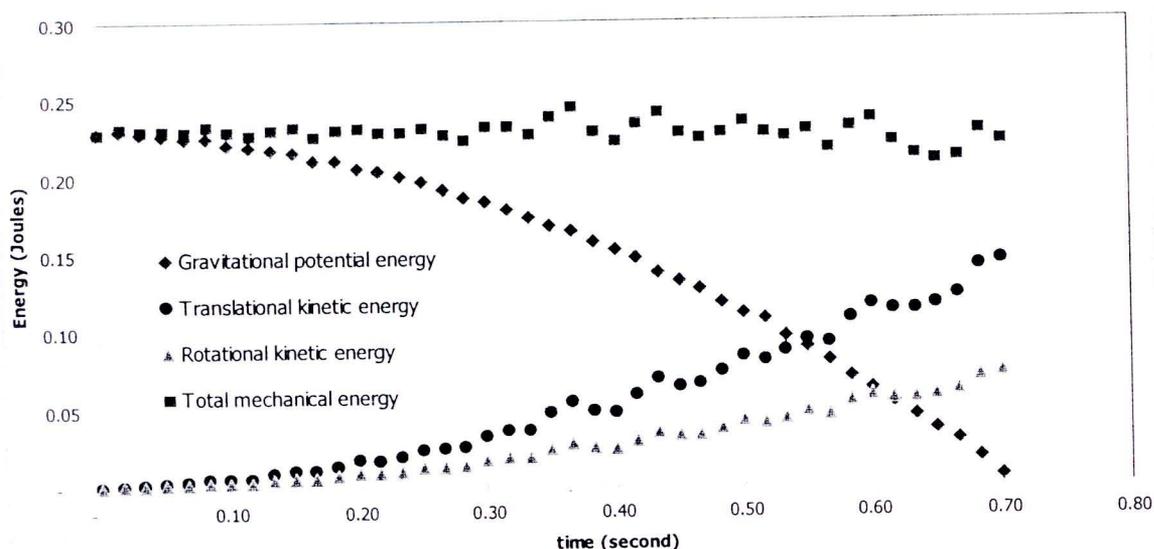
### Rolling with slipping

From both Figure 7 and 8, when the angle of the incline plane is bigger than the critical angle, it is clear that the cylinder starts to slip as well as roll. Therefore, the experiment data diverges from the theoretical, rolling only, line. This may require a more sophisticated model that is not appropriate to discuss in this paper.

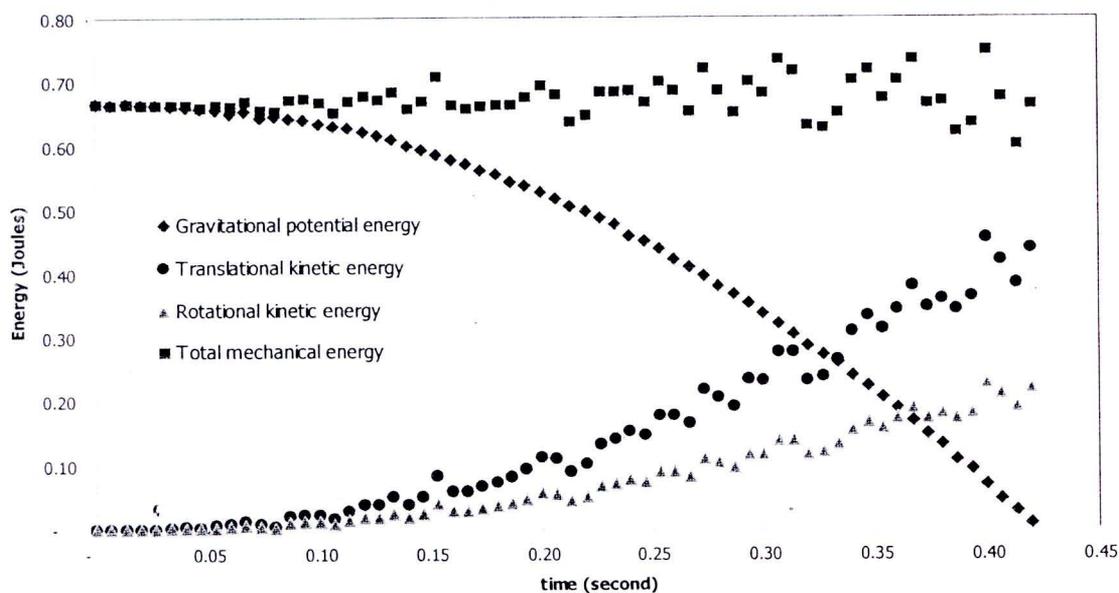
### Conservation of Energy

As a final exercise, positions of the cylinder at each time frame were obtained with Tracker and imported to a standard spreadsheet. They were used to calculate gravitational potential, translational kinetic, rotational kinetic and total mechanical energies of a solid cylinder at angle  $12^\circ$  and  $42^\circ$ . These were plotted in Figure 9 and 10, respectively. Figure 9 shows the case of rolling without slipping, low angle. The fluctuations of the total mechanical energy at later times are most probably attributable to an increased uncertainty due to the large values of velocity toward the end of incline. Using a standard line fitting program, the average total mechanical energy is  $0.233 \pm 0.019$  J. The uncertainty is quite small for pure rolling, so the total mechanical energy can be considered to be conserved.

Figure 10 displays the case of rolling and slipping (high angle) and the average total mechanical energy is  $0.666 \pm 0.077$  J. The fluctuations are larger and the graph in Figure 10 displays a large uncertainty in the data range for the total mechanical energy. This indicates that the total energy is not conserved for rolling and slipping. This result is in agreement with the explanation that friction causes translational work and rotational work in pure rolling, so these works have opposite sign because the direction of displacement are opposite. In particular it showed that the total work done by friction is zero and the total mechanical energy is still conserved [8, 13].



**Figure 9.** Comparison of energies of a solid cylinder with  $m = 294.50$  g and  $R = 4.00$  cm at an incline angle of  $12^\circ$ .



**Figure 10.** Comparison of energies of a solid cylinder with  $m = 294.50 \text{ g}$  and  $R = 4.00 \text{ cm}$  at an incline angle of  $42^\circ$ .

## Conclusion

We have described an introductory level physics experiment to investigate the dynamics of cylinder rolling down an inclined plane. We used a high speed camera and easily available video analysis software to collect and analyze the data. We have shown that it is not difficult to obtain results which

- (1) are in excellent agreement with the standard theoretical formulas described in this topic;
- (2) can contribute to the elucidation of questions recently raised concerns the work done when rolling with slipping is being taught in the classroom; and
- (3) provide an extremely visual way of exhibiting the data and its analysis, which should help students understand the role played by friction and moment of inertia in this process.

From this study, the video and its analysis can be modified and used in teaching rolling motion in a classroom. This will help students relate the theory with the real motion, and they will better construct a correct understanding in this topic.

## Acknowledgement

The authors would like to thank Thailand Center of Excellence in Physics (ThEP), Graduate school and Faculty of Science, Chiang Mai University, Thailand. Also, the author would like to thank A/Prof. Manjula Sharma, University of Sydney for providing helpful feedback.

## References

- [1] Crawford F S 1996 Rolling and slipping down Galileo's inclined plane: Rhythms of the spheres *Am. J. Phys.* **64** 541-546
- [2] Basta M, Di Gennaro M and Picciarelli V 1999 A desktop apparatus for studying rolling motion *Phys. Educ.* **34** 371-375
- [3] Shaw D E 1979 Frictional force on rolling objects *Am. J. Phys.* **47** 887-888
- [4] Pinto A and Fiolhais M 2001 Rolling cylinder on a horizontal plane *Phys. Educ.* **36** 250-254
- [5] Oliveira V 2011 Angular and linear accelerations of rolling cylinder acted by an external force *Eur. J. Phys.* **32** 381-388
- [6] Salazar A, Sánchez-Lavega A and Arriandiaga M A 1990 Is the frictional force always opposed to the motion ? *Phys. Educ.* **25** 82-85
- [7] Lopez M 2003 Angular and linear acceleration in a rigid rolling body: students' misconceptions *Eur. J. Phys.* **24** 553-562
- [8] Carnero C, Aguiar J and Hierrezuelo J 1993 The work of the frictional force in rolling motion *Phys. Educ.* **28** 225-227
- [9] Rimoldini L G and Singh C 2005 Student understanding of rotational and rolling motion concepts *Phys. Rev. St Phys. Educ. Res.* **1** 1 - 9
- [10] Chaplin R L and Miller M G 1984 Study of the slipping of a rolling sphere *Am. J. Phys.* **52** 997-1000
- [11] Domenech A, Domenech T and Cebrión T 1987 Introduction to the study of rolling friction. *Am. J. Phys.* **55** 231-235
- [12] Asavapibhop B and Suwonjandee S 2010 Loop-the-loop: An easy experiment, A challenging explanation. *Proc. International Conference on Physics Education: ICPE 2009 (Bangkok, Thailand 18-24 October 2009)(AIP Conference Proceedings vol 1263)* ed B Paosawatyanong and P. Wattanakasiwich (Melville:New York) pp 249-251
- [13] Bryan J A 2010 Investigating the conservation of mechanical energy using video analysis: four cases *Phys. Educ.* **45** 50-57
- [14] Heck A and Uylings P 2009 In a hurry to work with high-speed video at school? *Phys. Educ.* **48** 176-81
- [15] Vollmer M and Möllmann K 2011 High speed and slow motion: the technology of modern high speed cameras *Phys. Educ.* **46** 191-202
- [16] Brown D and Cox A J 2009 Innovative Uses of Video Analysis *Phys. Teach.* **47** 145-150
- [17] Sokoloff D R and Thornton R K 2004 *Interactive Lecture Demonstrations* (New Jersey:Wiley)

## ประวัติผู้เขียน



- ชื่อ-สกุล** นาย สราวุธ พรหมราช
- วัน เดือน ปี เกิด** 10 มกราคม 2527
- ประวัติการศึกษา** พ.ศ. 2545 สำเร็จการศึกษามัธยมศึกษาตอนปลาย  
โรงเรียนธรรมราชศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่  
พ.ศ. 2549 สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต เกียรตินิยม อันดับ 2  
สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่
- ทุนการศึกษา** ได้รับทุนช่วยสอนสำหรับนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา จากคณะ  
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ประจำปีการศึกษา 2552-2553
- ประสบการณ์** พ.ศ. 2549 – ปัจจุบัน ผู้รับใบอนุญาตและผู้จัดการ  
โรงเรียนกวดวิชาอาจารย์เม็ค อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่  
พ.ศ. 2552 – ปัจจุบัน อาจารย์พิเศษโรงเรียนธรรมราชศึกษาอำเภอเมือง  
จังหวัดเชียงใหม่
- ผลงานวิจัย** นำเสนอแบบโปสเตอร์ในหัวข้อ “Video Analysis of Rolling  
Cylinders ” ในการประชุมวิชาการ Siam Physics Congress 2010:  
Physics for all , all for physics ระหว่างวันที่ 23- 26 มีนาคม 2554 ณ  
โรงแรม Ambassador City Jomtien Hotel จังหวัดชลบุรี  
งานวิจัยได้รับการตอบรับเพื่อตีพิมพ์ในหัวข้อ “Video Analysis of  
Rolling Cylinders” ในวารสาร Physics Education.

