

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



E46229

CHARACTERIZATION FOR NON-SINGULARITY
OF SOME GRAPHS

SUPOT SOOKYANG

DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
FEBRUARY 2012

600256353

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ



E46229

**CHARACTERIZATION FOR NON-SINGULARITY
OF SOME GRAPHS**



SUPOT SOOKYANG

**A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

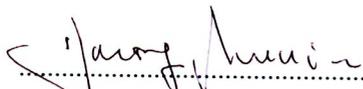
**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
FEBRUARY 2012**

**CHARACTERIZATION FOR NON-SINGULARITY
OF SOME GRAPHS**

SUPOT SOOKYANG

THIS THESIS HAS BEEN APPROVED
TO BE A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

EXAMINING COMMITTEE

..... CHAIRPERSON
Prof. Dr. Narong Punnim

..... MEMBER
Assist. Prof. Dr. Srichan Arworn

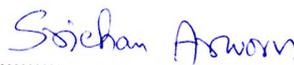
..... MEMBER
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee

..... MEMBER
Dr. Thanasak Mouktonglang

..... MEMBER
Dr. Sayan Panma

THESIS ADVISORY COMMITTEE

..... ADVISOR
Dr. Sayan Panma

..... CO-ADVISOR
Assist. Prof. Dr. Srichan Arworn

..... CO-ADVISOR
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee

15 February 2012

© Copyright by Chiang Mai University

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to express my deepest thank to my supervisor, Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn, for his initial idea, guidance and encouragement which enable me to carry out my study successfully.

This work contains a number of improvement based on comments and suggestions provided by Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn, Asst. Prof. Dr. Boyko Gyurov, Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee, Dr. Thanasak Mouktonglang, Dr. Sayan Panma and Lect. Prof. Dr. Narong Punnim. It is my pleasure to express my sincere thanks to them for their generous assistance.

Thanks are also due to all other lecturer staffs of the Department of Mathematics, Chiang Mai University for their patience, encouragement and impressive teaching.

I gratefully appreciate my beloved mother and my family for their love, sacrifices and encouragement. Moreover, I would like to thanks my friends in my school. I can not forget my best friends at Chiang Mai University for their help, friendship, and moral support.

Supot Sookyang

Thesis Title Characterization for Non-singularity of Some Graphs

Author Mr. Supot Sookyang

Degree Doctor of Philosophy (Mathematics)

Thesis Advisory Committee

Dr. Sayan Panma	Advisor
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee	Co-advisor
Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn	Co-advisor

ABSTRACT

EA6229

The objectives of this research are the development of methods and the implementation of existing methods to obtain closed formulas for determinants of graphs. As usual, under the determinant of a graph, we understand the determinant of the adjacency matrix of the graph. If the determinant of the adjacency matrix is non-zero, we say that the graph is non-singular and singular otherwise.

Our studies cover four basic types of graphs: paths, cycles, wheel and complete graphs, and the variety of graphs obtained from those four basic types by using graph operations. For the different families of graphs we obtain closed formulas for the computation of their determinants and we use the obtained formulas to distinguish the singular from non-singular members of the family, that is, we obtain characterization for non-singularity for those types of graphs.

The work starts with an exposition of some basic definitions and results of graph theory and linear algebra, with focus from the latter on eigenvalue properties and

characteristic equations. From graph theory we specifically list those graph operations that are used in the work (see also [2], [3], [4], [5]).

The main results of the dissertation are formally divided into four parts and covered in the chapters from three to six.

In the first part (Chapter 3), we apply some results from [5] to find the determinant and to characterize for non-singularity the adjacency matrices of cycles, tree and book graphs.

In the second part of the main results (Chapter 4), we expand theory developed in [2] and define new graph operation with the help of which we construct families of graphs called path of paths (denoted $P_m(P_n)$), paths of cycles ($P_m(C_n)$), cycles of paths ($C_m(P_n)$) and cycles of cycles ($C_m(C_n)$) and computed their determinants. Furthermore, we do complete study of generalized wheel graphs $W_m(n)$ as well.

The third major study (Chapter 5) is the development of a technique that can be used to compute the determinant of graph that is formed by joining two simple graphs by two additional edges. The technique is very easy to implement when the graphs are regular, complete, completely regular and so on, as we demonstrate by applying it to compute the determinant of cycles joined by two edges and complete graphs joined by two edges.

The last part that contained original results is focused on the implementation of the characteristic polynomials of the adjacency matrix to find the determinant of box products of paths and cycles.

ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์	การหาลักษณะเฉพาะสำหรับความไม่เป็นเอกฐาน ของกราฟบางแบบ	
ผู้เขียน	นายสุพจน์ สุขแยง	
ปริญญา	วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)	
คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ดร. สายัญ ปันมา	อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
	รศ. ดร. สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
	ผศ.ดร. ศรีจันทร์ อวรรณ	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

บทคัดย่อ

E16229

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟบางชนิด และหาลักษณะเฉพาะของบางกราฟที่มีเมทริกซ์ประชิดไม่เอกฐาน

สำหรับการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ผู้วิจัยได้เริ่มจากการศึกษาบทนิยาม ทฤษฎีบทพื้นฐานของวิชาทฤษฎีกราฟ จากนั้นผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับสมบัติเบื้องต้นของพีชคณิตเชิงเส้น อาทิเช่น สมบัติของค่าเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ เป็นต้น และสำหรับพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการบนกราฟ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากตำราของ N.Biggs จากนั้นผู้วิจัยได้สร้างการดำเนินการบนกราฟขึ้นมาใหม่ โดยการประยุกต์บทนิยามจากเอกสารงานวิจัยที่ผู้วิจัยได้ศึกษาซึ่งการดำเนินการบนกราฟที่ผู้วิจัยได้สร้างและสนใจศึกษาได้แก่ กราฟ $P_m(P_n)$, $C_m(P_n)$, $W_m(n)$, $C_m(C_n)$, $P_n \square G$ และ $C_n \square C_n$ สำหรับแนวทางในการวิจัยแบ่งออกเป็น 4 แนวทางดังต่อไปนี้

แนวทางที่ 1 ศึกษาผลงานของ Harary [5] แล้วนำไปประยุกต์หาค่าดีเทอร์มิแนนต์และหาลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวัฏจักร กราฟต้นไม้ และกราฟหนังสือ

แนวทางที่ 2 ศึกษาผลงานของ Rara [22] แล้วขยายผลงานโดยใช้เทคนิคของ Harary จากนั้นนำผลที่ได้ไปประยุกต์ใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟ $P_m(P_n)$, $C_m(P_n)$, $W_m(n)$, และ $C_m(C_n)$

แนวทางที่ 3 ศึกษาเทคนิควิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ Laplan [] แล้วนำไปประยุกต์ใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟสองกราฟใด ๆ ที่มีเส้นเชื่อมระหว่างกราฟสองเส้น

แนวทางที่ 4 ศึกษาแนวทางการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์แบบวิธีดำเนินการแถวเบื้องต้นประยุกต์ร่วมกับสมการลักษณะเฉพาะแล้วนำไปหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $P_n \square G$ และ $C_n \square C_n$

จากผลการวิจัยพบว่า ลักษณะเฉพาะของกราฟวัฏจักรที่มีเมทริกซ์ประชิดไม่เอกฐานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดบนกราฟ สำหรับกราฟต้นไม้ที่มีเมทริกซ์ประชิดไม่เอกฐานขึ้นอยู่กับจำนวนจุดหรือจำนวนเซตสมมูลของกราฟย่อย และ เมทริกซ์ประชิดของกราฟหนังสือจะเป็นเมทริกซ์ประชิดไม่เอกฐาน สำหรับกราฟ $P_m(P_n)$, $C_m(P_n)$, $W_m(n)$, $C_m(C_n)$, $P_n \square G$ และ $C_n \square C_n$ สามารถใช้สูตรคำนวณหาได้ตามผลการศึกษาของผู้วิจัย

Table of Contents

	Page
Acknowledgements	iii
Abstract in Thai	iv
Abstract in English	vi
Chapter 1 Introduction	1
Chapter 2 Preliminaries	3
2.1 Basic Concepts on Graphs	3
2.2 Basic Concepts on Linear Algebra	9
2.3 The Adjacency Matrices	11
Chapter 3 Determinant of Cycles and Trees	15
3.1 Nonsingularity Complete Graphs and Cycles	15
3.2 Characterization of Non-singular Trees	22
3.3 Characterization of Non-singular Book Graphs	25
Chapter 4 Determinants of Graphs of Graphs	31
4.1 Union of Graphs with a common vertex	31
4.2 Path of Paths	36
4.3 Cycle of Paths	38
4.4 Path of Cycles	41
4.5 Generalized Wheel Graphs	44
4.6 Cycle of Cycles	47
Chapter 5 Determinant of graphs jointed by two edges	52
5.1 Introduction	52
5.2 Determinant of graphs jointed by two edges	55
5.3 The determinant $C_m \asymp C_n$ and $K_m \asymp K_n$	63

Chapter 6 Determinant of Box Product of Some Graphs	66
6.1 Determinant of $P_m \square G_n$	66
6.2 Determinant of $P_m \square C_n$	70
Chapter 7 Open Problem and Conclusion	72
Bibliography	76
Vita	79