

### บทที่ 3

#### การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในคอมพิวเตอร์

ในหัวข้อนี้จะทำการตรวจสอบแบบจำลองที่ได้จากบทที่ 2 ซึ่งเป็นแบบจำลองที่สร้างขึ้นในโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) โดยตรวจสอบการผลตอบสนองเชิงการกระจัดของสะพาน และตรวจสอบการสั่นสะเทือนของรถยนต์ในแบบจำลอง ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้สะพานข้ามทางแยกพระราม 9 บริเวณแยก อ.ส.ม.ท เป็นกรณีศึกษา โดยมีลักษณะเป็นโครงสร้างสะพานเหล็กขนาด 2 ช่องจราจร (ต่อ 1 ทิศทางจราจร) โดยแต่ละช่วงสะพานมีความยาวช่วงประมาณ 25 เมตร สะพานที่ใช้ในการศึกษาการพฤติกรรมการสั่นไหวของสะพานด้วยการจำลองบนคอมพิวเตอร์ จะพิจารณาคานหลักตัวริมนอกสุดของสะพานซึ่งพิจารณาเป็นแบบคานช่วงเดี่ยวความยาว 25 เมตร ดังแสดงในรูปที่ 3.3 เป็นตัวแทนในการศึกษาถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของสะพานและรถยนต์โดยสารที่จอดติดอยู่บนสะพาน

ดังนั้นเพื่อให้ผลการวิเคราะห์แบบจำลองเกิดความถูกต้องจึงต้องใช้ค่าคุณสมบัติของสะพานที่มีค่าตามความเป็นจริงหรือใกล้เคียงกับคุณสมบัติที่แท้จริงของสะพานมากที่สุด โดยค่าคุณสมบัติของสะพานที่ใช้นี้ได้มาจากการวิเคราะห์แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตามแบบก่อสร้างจริงและการทดสอบจริงในสนามซึ่งจะกล่าวถึงขั้นตอนและรายละเอียดของการทดสอบในบทถัดไป

#### 3.1 การหาค่าคุณสมบัติของสะพานจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทางคอมพิวเตอร์

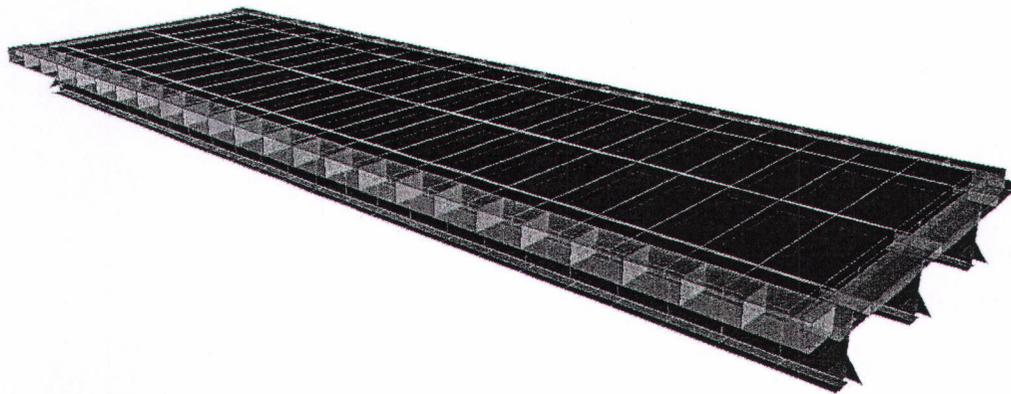
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทางคอมพิวเตอร์ของสะพานถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาค่าคุณสมบัติของสะพานบางประการ โดยเฉพาะค่ามวลต่อหน่วยความยาวของสะพาน (Uniform distribution mass;  $\rho A$ ) ที่มีความยากลำบากอย่างยิ่งในการวิเคราะห์เพื่อหาค่าโดยวิเคราะห์หน้าตัดที่มีอยู่ตามแบบจริงหรือแม้แต่การหาค่าจากการทดสอบจริงในสนาม แต่การหาค่ามวลของสะพานสามารถคำนวณได้จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ตามแบบก่อสร้างจริง และวิธีที่สามารถคำนวณได้ง่ายและรวดเร็วที่สุดคือการวิเคราะห์โดยทางอ้อมจากแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวสะพานเองในแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และนำค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับมาแปลงค่าเป็นมวลต่อหน่วยความยาวได้ในที่สุด ส่วนค่าความแข็งต้านทานการดัดของสะพาน (Flexural rigidity;  $EI$ ) สามารถหาค่าได้ทั้งจากการทดสอบจริงในสนามหรือจากการคำนวณค่าแอนต์ตัวของสะพานสูงสุดอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวสะพานเองในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกระจายบนคานและการแอนต์ตัวดังสมการที่ 3.1

$$\Delta = \frac{5wL^4}{384EI} \quad (3.1)$$

ซึ่งผลการวิเคราะห์ตามสมการที่ 3.1 ในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสะพานสามารถแสดงคุณสมบัติต่างๆไว้ในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติสะพานที่ใช้ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

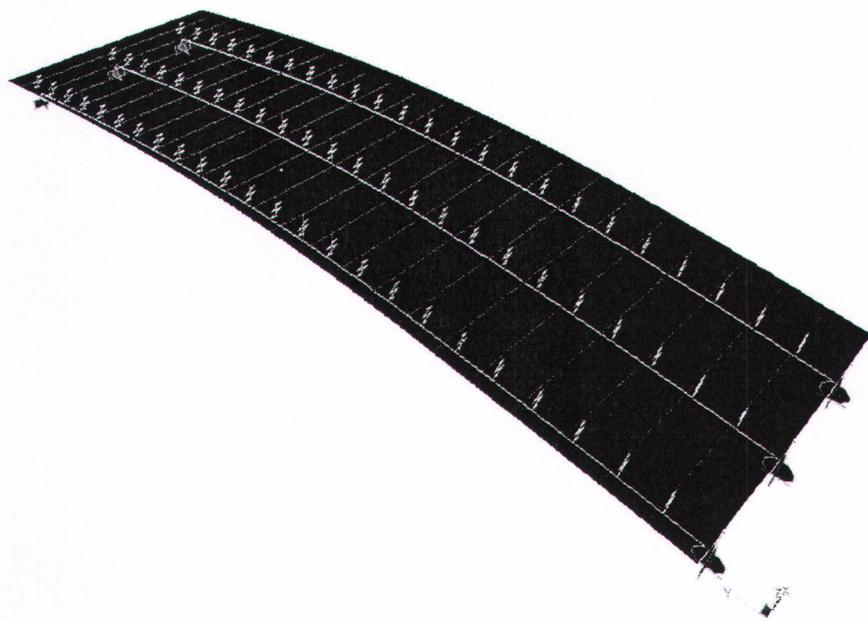
$\Delta_{average}$ (m)	$L$ (m)	$\rho A$ (kg/m)	$EI$ (N-sq.m)	$\xi$
0.025	25	2380.36	$4.83 \times 10^9$	0.02



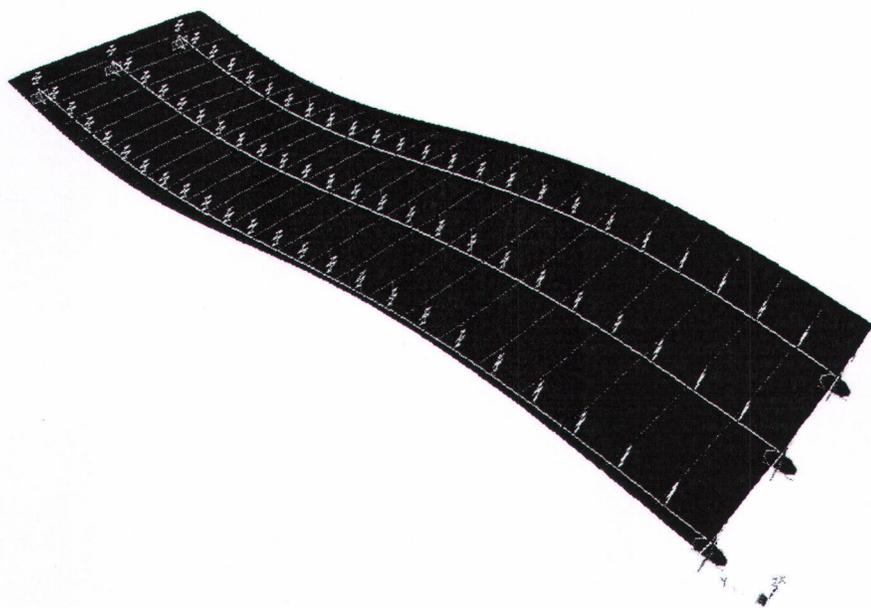
รูปที่ 3.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทางคอมพิวเตอร์ของสะพาน

นอกจากนี้แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของสะพานที่วิเคราะห์ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ยังสามารถให้ค่าคาบธรรมชาติและความถี่ธรรมชาติของสะพานในโหมดต่างๆ ซึ่งในได้นี้เลือกพิจารณาใน 3 โหมดแรก

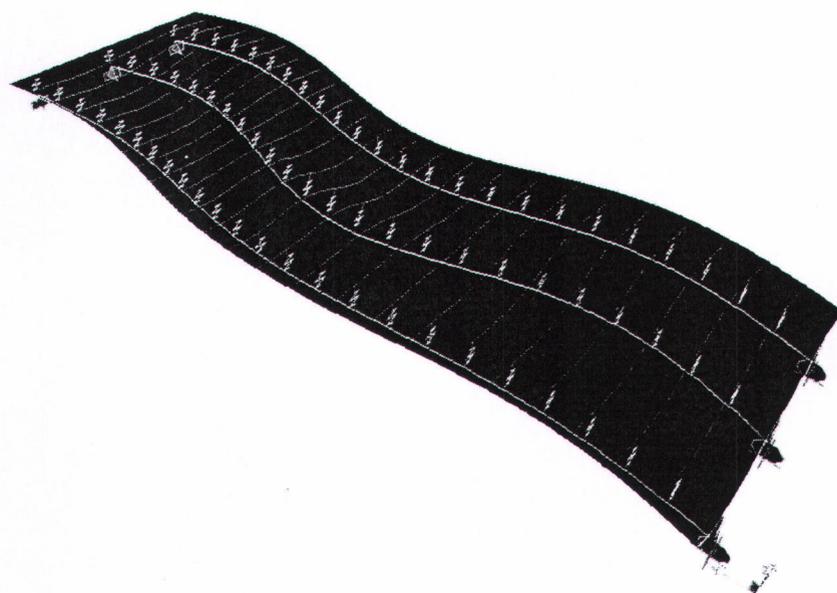




(n)



(n)



(ค)

รูปที่ 3.2 รูปแบบการดัดของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทางคอมพิวเตอร์ของสะพานในโหมดต่างๆ

(ก) รูปแบบการดัดของสะพานในโหมดที่ 1 ( $T = 0.279$  s,  $f = 3.581$  Hz.)

(ข) รูปแบบการดัดของสะพานในโหมดที่ 2 ( $T = 0.0812$  s,  $f = 12.31$  Hz.)

(ค) รูปแบบการดัดของสะพานในโหมดที่ 3 ( $T = 0.0325$  s,  $f = 30.77$  Hz.)

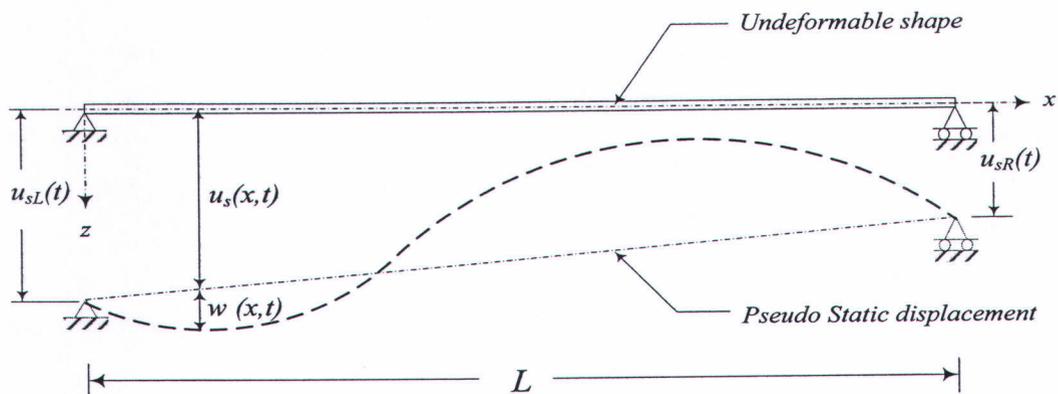
ผลการวิเคราะห์และเปรียบเทียบค่าความถี่ที่คำนวณได้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้งในส่วนของแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของสะพานในโปรแกรม SAP 2000 ซึ่งแสดงผลของค่าคาบธรรมชาติและรูปแบบของโหมดไว้ในรูปที่ 3.2 ก ถึง 3.2 ข เมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นในบทที่ 2 โดยโปรแกรม MATLAB พบว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่บ้างในบางโหมดดังแสดงในตารางที่ 3.2 เนื่องจากการสร้างแบบจำลองทั้งสองแบบมีความแตกต่างกันที่เงื่อนไขโดย แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทางคอมพิวเตอร์ (SAP 2000) ของสะพานถูกจำลองขึ้นในลักษณะสามมิติ แต่แบบจำลองที่สร้างขึ้นโดยการเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) นั้นถูกจำลองขึ้นเป็นแบบจำลองในระนาบ และเมื่อทำการตรวจสอบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีในสมการที่ 3.2 ซึ่งเป็นสมการการวิเคราะห์ค่าความถี่เชิงมุมธรรมชาติของคานช่วงเดี่ยวในระนาบเช่นเดียวกัน ซึ่งทำให้ค่าที่ได้จากการสร้างแบบจำลองโดยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณโดยสมการที่ 3.2 เนื่องจากอยู่บนเงื่อนไขเดียวกัน

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{L^2} \left( \sqrt{\frac{EI_b}{m_b}} \right) \quad (3.2)$$

ตารางที่ 3.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติของสะพานจากแบบจำลองแต่ละโปรแกรมและค่าที่คำนวณได้จากสมการที่ (3.1)

Mode	Natural frequency (Hz)		
	SAP 2000	MATLAB	Equation (3.2)
1	3.58	3.58	3.58
2	12.31	14.32	14.32
3	30.77	32.23	32.23

3.2 การตรวจสอบเชิงเปรียบเทียบระหว่างผลตอบสนองที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขกับการวิเคราะห์ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์



รูปที่ 3.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานช่วงเดียวภายใต้แรงกระทำที่เกิดจากการสั่นไหวในแนวตั้งที่จุดรองรับทั้งสองข้าง

สมการการเคลื่อนที่ของสะพานในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$m_b \frac{\partial^2 u'(x,t)}{\partial t^2} + C_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + EI_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3.3)$$

โดยที่

$u'(x,t)$  คือ การกระจัดรวมของสะพาน มีค่าเท่ากับผลรวมระหว่างการแอ่นตัวของสะพานอันเนื่องจากการตัดและการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ หรือ  $u'(x,t) = w(x,t) + u_s(x,t)$

$w(x,t)$	คือ การแอ่นตัวของสะพาน
$m_b$	คือ มวลของคานต่อหนึ่งหน่วยความยาว
$C_b$	คือ ค่าความหน่วงของคาน
$EI_b$	คือ ค่าความแข็งเกร็งด้านทานการดัด (Flexural rigidity)
$L$	คือ ความยาวช่วงคาน

จากการคำนวณเชิงโหมด ค่าการแอ่นตัวของสะพานสามารถเขียนได้ดังนี้

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t) \quad (3.4)$$

โดยที่	$n$	คือ โหมดที่ใช้ในการคำนวณในที่นี้มีค่าเท่ากับ 3
	$\phi_j(x)$	คือ ฟังก์ชันพื้นฐานของโหมดที่ $j$
	$q_j(t)$	คือ ค่าตำแหน่งเชิงโหมดที่ $j$

ส่วนการเคลื่อนตัวของจุดรองรับที่ตำแหน่งของจุดรองรับ และเวลานั้นสามารถเขียนได้เช่นเดียวกับค่าการแอ่นตัวของสะพานดังนี้

$$u_s(x,t) = \sum_{r=1}^2 \psi_r(x) q_{sr}(t) \quad (3.5)$$

โดยที่	$\psi_r(x)$	คือ ฟังก์ชันพื้นฐานการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติเชิงสถิตย์ (pseudo-static) ที่ตำแหน่งจุดรองรับ $r$
	$q_{sr}(t)$	คือ ค่าการกระจัดที่ตำแหน่งจุดรองรับ $r$

ดังนั้นจะได้สมการเชิงโหมดที่  $j$

$$\frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} + 2\zeta_j \omega_j \frac{dq_j(t)}{dt} + \omega_j^2 q_j(t) = -\frac{m_b}{M_j} \sum_{r=1}^2 \left( \int_0^L (\phi_j^T \psi_r) dx \cdot \frac{d^2 q_{sr}(t)}{dt^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\omega_j = \left( \frac{j\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_b}} \quad \phi_j(x) = \sin\left( \frac{j\pi x}{L} \right)$$

$$M_j = \frac{m_b L}{2} \quad Q_j(t) = -\frac{m_b}{M_j} \sum_{r=1}^2 \left( \int_0^L (\phi_j^T \psi_r) dx \cdot \frac{d^2 q_{sr}(t)}{dt^2} \right) \quad (3.7)$$

โดยที่	$\omega_j$	คือ ความถี่เชิงมุมโหมดที่ $j$
	$\zeta_j$	คือ ค่าอัตราส่วนความหน่วงของโหมดที่ $j$
	$M_j$	คือ ค่ามวลเชิงโหมดของโหมดที่ $j$
	$Q_j(t)$	คือ ค่าแรงเสมือนจากการสั่นไหวของจุดรองรับเชิงโหมดของโหมดที่ $j$

การทดสอบแบบจำลองโดยการเปรียบเทียบค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลข (Numerical solution) กับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ (Analytical solution) โดยจะสมมติให้การสั่นไหวในแนวตั้งของจุดรองรับทั้งสองข้างของสะพานเป็นฟังก์ชันไซน์ (Sine function) ที่มีขนาดการสั่นสูงสุดเท่ากับ 1 ซม. ด้วยความถี่ที่เปลี่ยนแปลงไปจำนวน 3 ความถี่ตามกรณีที่ 3.1.1 ถึง 3.1.3 ดังรายละเอียดต่อไปนี้

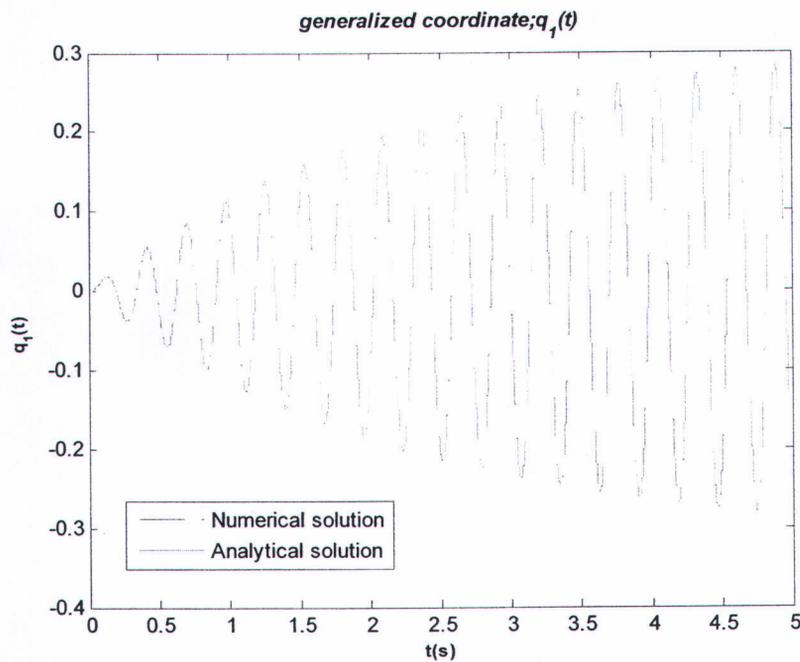
$$q_{sL}(t) = q_{sR}(t) = 0.01 \sin(\Omega t) \quad (3.8)$$

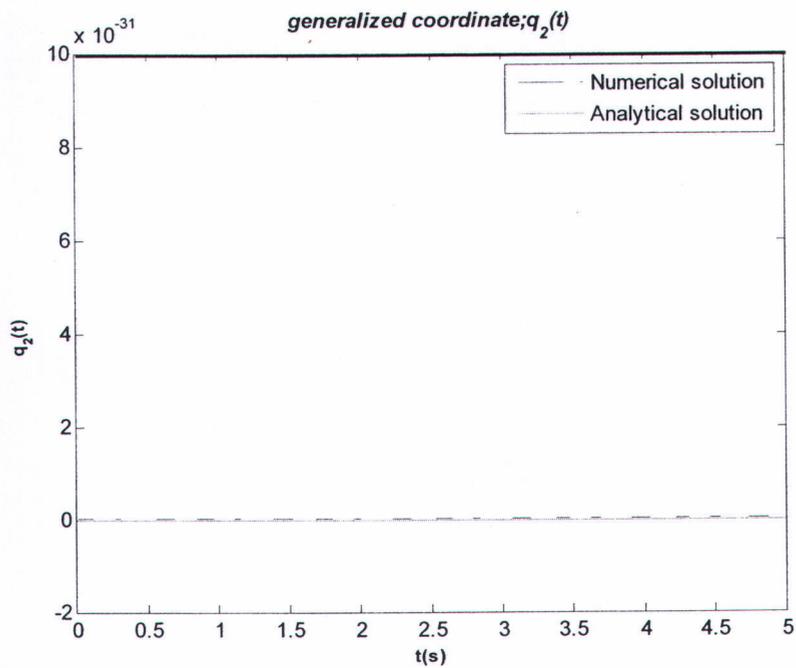
กรณีที่ 3.1.1 ค่า  $\Omega = \omega_1$

กรณีที่ 3.1.2 ค่า  $\Omega = \omega_2$

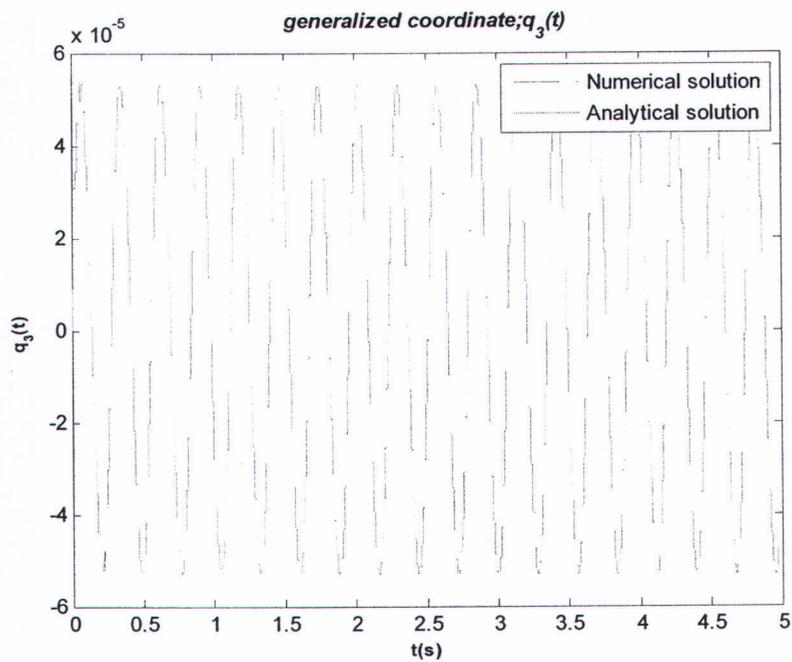
กรณีที่ 3.1.3 ค่า  $\Omega = \omega_3$

โดยที่  $\omega_{j=1,2,3}$  คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมโหมดที่  $j$  มีค่าเท่ากับ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

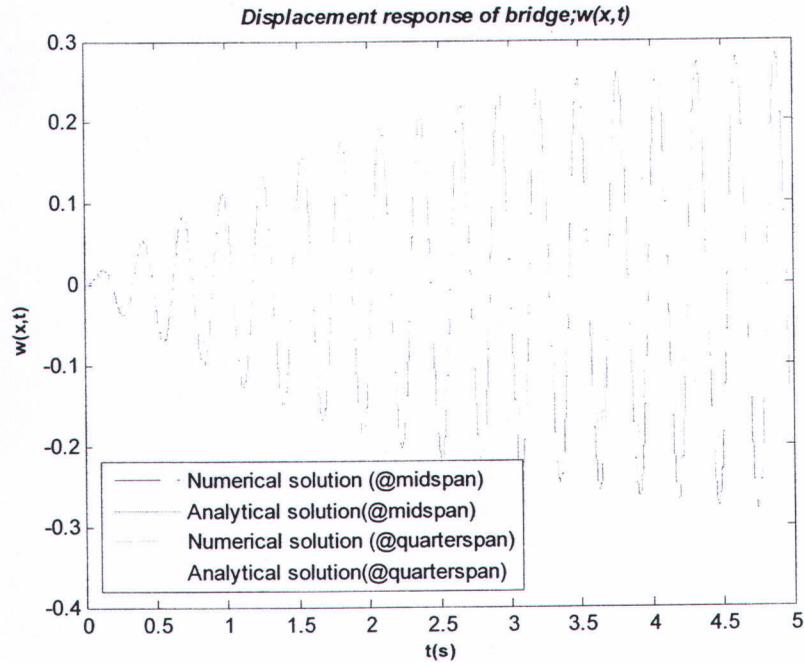




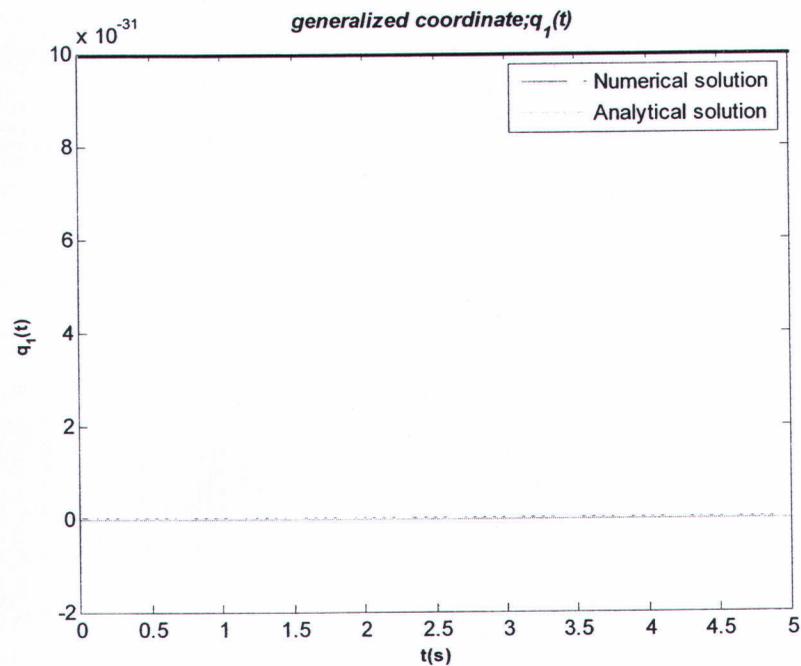
(9)

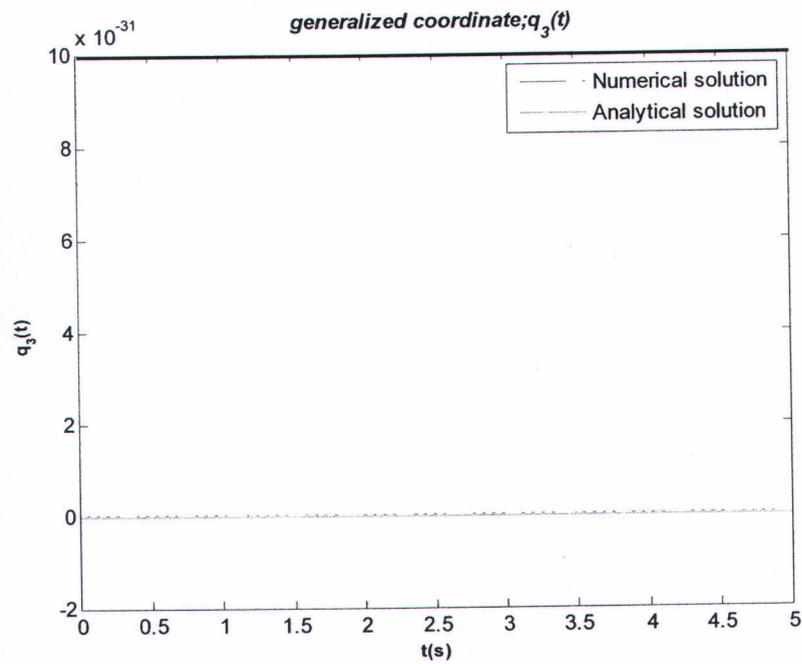
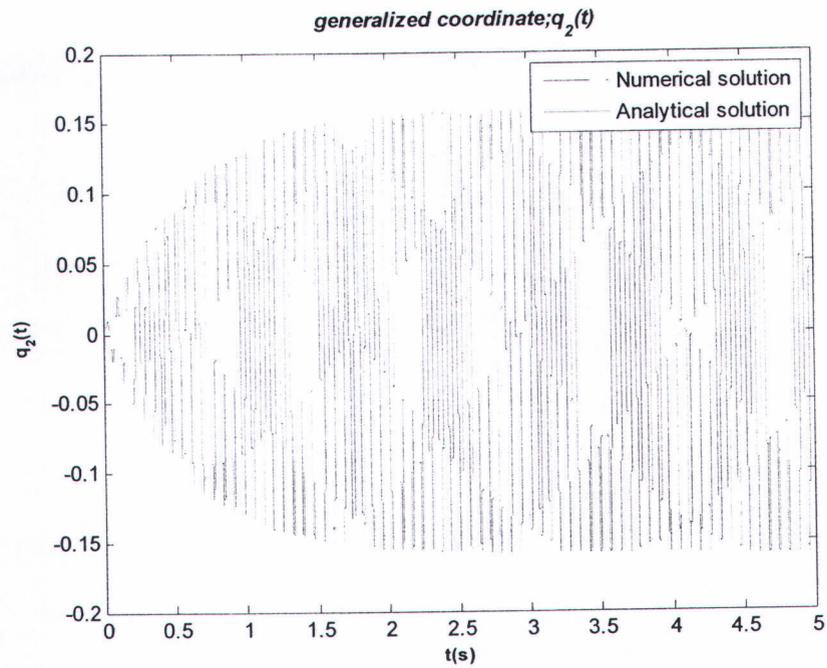


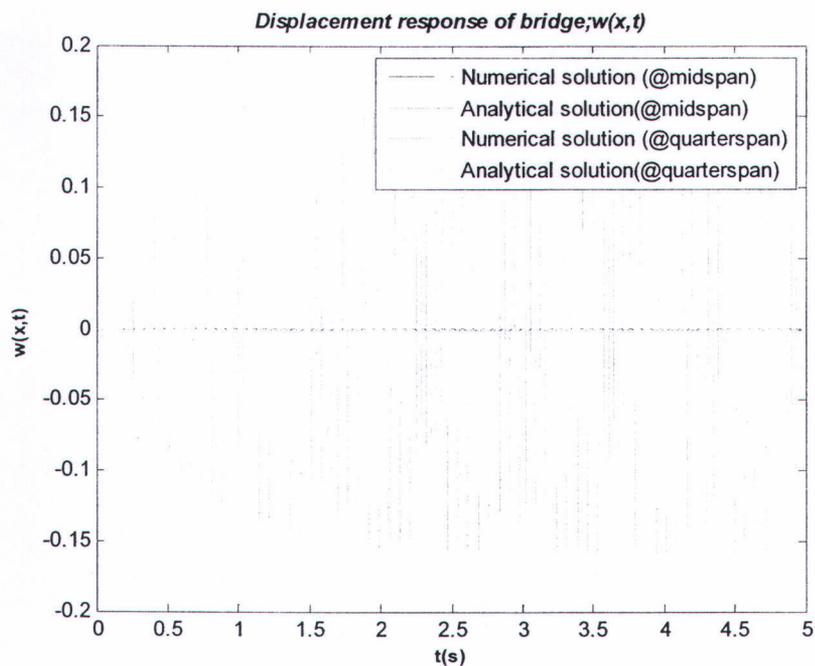
(10)



- รูปที่ 3.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขกับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีที่ 3.1.1 (ค่า  $\Omega = \omega_1$ )
- (ก) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 1 (ข) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 2 (ค) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 3
- (ง) ค่าการกระจัดของสะพาน ณ ตำแหน่งกลางช่วง และที่ระยะหนึ่งในสี่ของความยาวช่วง



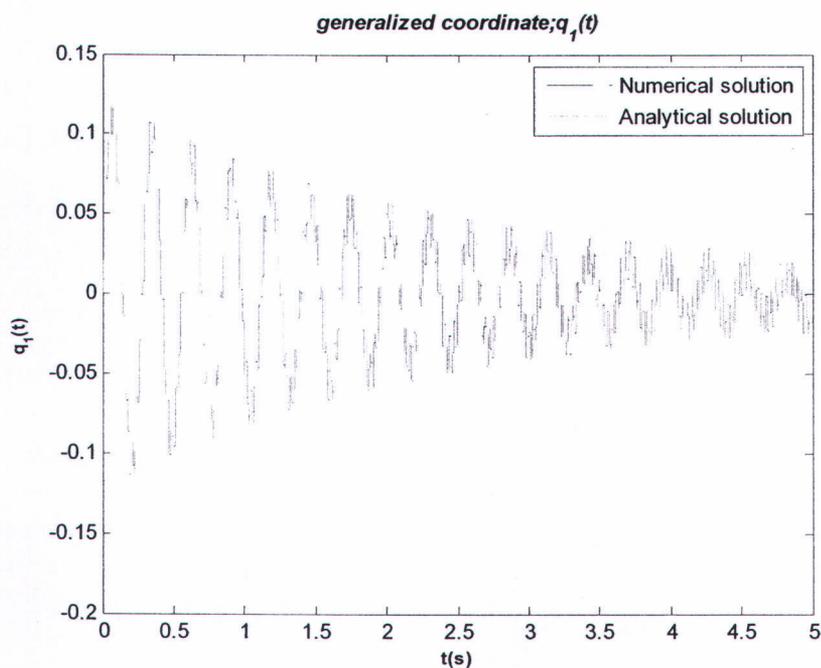


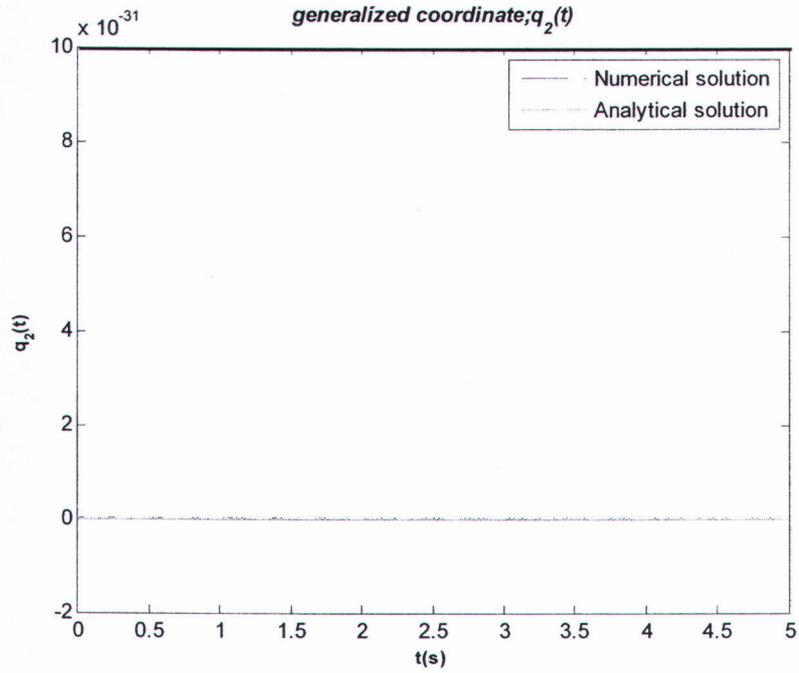


รูปที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขกับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีนี้ที่ 3.1.2 (ค่า  $\Omega = \omega_2$ )

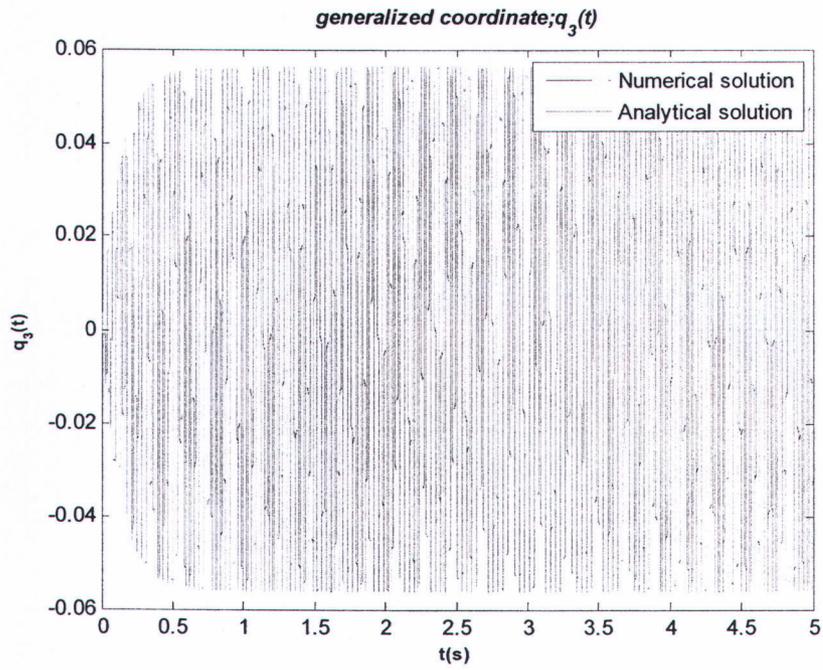
(ก) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 1 (ข) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 2 (ค) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 3

(ง) ค่าการกระจัดของสะพาน ณ ตำแหน่งกลางช่วง และที่ระยะหนึ่งในสี่ของความยาวช่วง



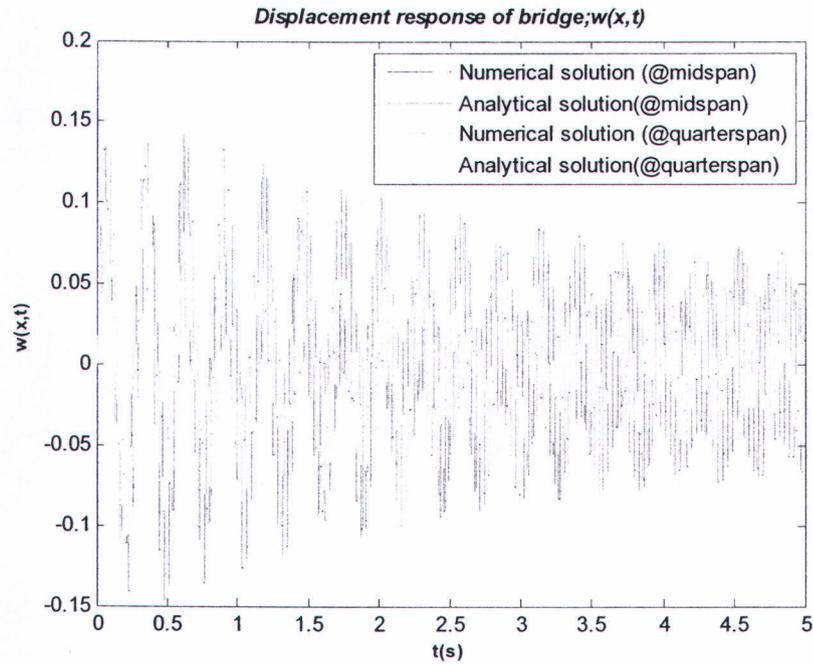


(ก)



(ค)





(ง)

รูปที่ 3.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีนี้ที่ 3.1.3 (ค่า  $\Omega = \omega_3$ )

(ก) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 1 (ข) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 2 (ค) ค่าพิกัดทั่วไปในโหมดที่ 3

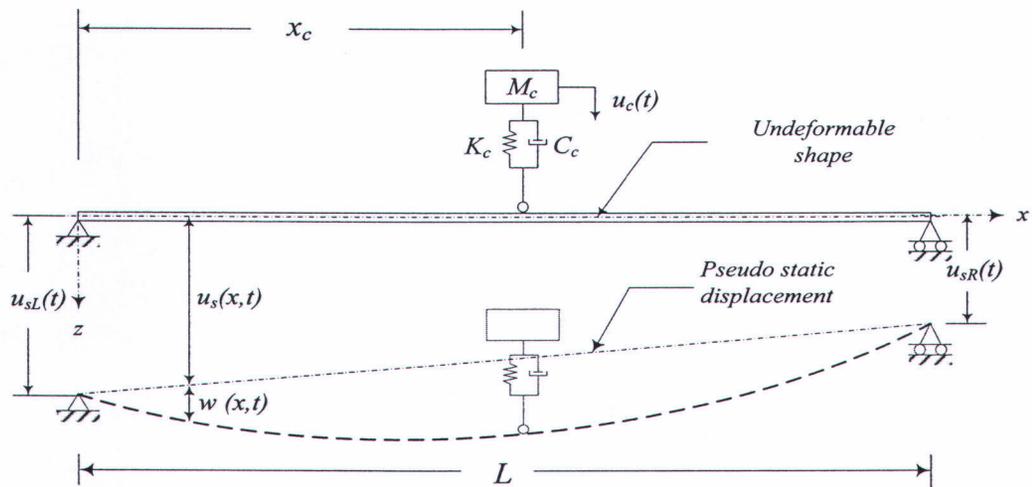
(ง) ค่าการกระจัดของสะพาน ณ ตำแหน่งกลางช่วง และที่ระยะหนึ่งในสี่ของความยาวช่วง

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองสะพานที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ ในกรณีความถี่ของการสั่นไหวพื้นฐานแตกต่างกัน

กรณี	ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุด (%)				
	$q_1(t)$	$q_2(t)$	$q_3(t)$	$w(0.5L,t)$	$w(0.75L,t)$
3.1.1 ( $\Omega = \omega_1$ )	0.11	0	0.20	0.11	0.11
3.1.2 ( $\Omega = \omega_2$ )	0	0.45	0	0.45	0.45
3.1.3 ( $\Omega = \omega_3$ )	0.21	0	2.67	1.08	0.92

3.3 การตรวจสอบเชิงเปรียบเทียบระหว่างผลตอบสนองที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลขและผลที่ได้จากการวิเคราะห์หาผลเฉลยทางคณิตศาสตร์ในกรณีที่มึระบบองศาความอิสระเดียวติดอยู่ที่กลางช่วงของคาน

การคำนวณเพื่อหาผลเฉลยโดยตรงจากสมการคณิตศาสตร์ของแบบจำลองนั้น จะพิจารณาให้สะพานเป็นเสมือนคานช่วงเดียว ทั้งนี้เพื่อให้การแก้สมการการเคลื่อนที่โดยตรงโดยไม่เกิดความซับซ้อน จะสมมติให้จำนวนโหมดเนื่องจากการดัดของสะพานเท่ากับหนึ่ง และมีระบบองศาความอิสระเดียว (Single Degree Of Freedom) ติดอยู่ที่กลางช่วงของคาน



รูปที่ 3.7 คานช่วงเดียวที่มีระบบองศาอิสระเดียวติดอยู่ที่กลางช่วงเกิดการสั่นไหวจากการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง ณ จุดรองรับของคาน

จากสมการที่ (2.16)

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = P(t)$$

ซึ่งสมการข้างต้นสามารถทำการแก้สมการการเคลื่อนที่ได้ด้วยการใช้วิธีวิเคราะห์เชิงโหมด (Modal Analysis) เพื่อแยกสมการแต่ละสมการให้เป็นอิสระจากกันโดยอาศัยเมตริกซ์รูปร่างโหมดสมมติ (Mode shape) โดยการใช้คุณสมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชันฐานที่สมมติขึ้นเพื่อใช้สำหรับการแก้สมการดังนี้

$$\varphi_j^T M \varphi_i = M^* \quad \text{เมื่อ } j \neq i \tag{3.9}$$

และ 
$$\varphi_j^T M \varphi_i = 0 \quad \text{เมื่อ } j = i \tag{3.10}$$

เมื่อสมมติให้ 
$$q(t) = \sum_j \varphi_j x_j(t) \tag{3.11}$$

โดยที่  $x_j(t)$  คือ พิกัดเชิงโหมดสมมติที่ใช้ในการแก้สมการ

$\varphi_j$  คือ ฟังก์ชันพื้นฐานที่สมมติขึ้นเพื่อใช้สำหรับการแก้สมการ  
เมื่อแทนสมการที่ (3.11) ลงในสมการที่ (2.16) จะได้สมการเชิงโหดเทียบเท่าของสะพานและระบบของศาความ  
อิสระเดี่ยวที่แยกอิสระจากกันดังนี้

$$M_b^* \ddot{x}_b + C_b^* \dot{x}_b + K_b^* x_b = Q_b^* \quad (3.12)$$

$$M_c^* \ddot{x}_c + C_c^* \dot{x}_c + K_c^* x_c = Q_c^* \quad (3.13)$$

การแก้สมการที่ (3.12) และ (3.13) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง สามารถทำได้โดยการแยกพิจารณาผล  
เฉลยออกเป็น 2 ส่วน คือผลเฉลยทั่วไป (general solution) และ ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) จากนั้น  
จึงนำผลเฉลยทั้งสองมารวมกันโดยใช้หลักการรวมผล (superposition) ดังนั้นผลเฉลยสมบูรณ์ (complete  
solution) ของสมการที่ (3.12) และ (3.13) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3.14)

$$x_j(t) = x_{hj}(t) + x_{pj}(t) \quad (3.14)$$

การหาผลเฉลยทั่วไปสามารถทำได้โดยการใช้สมการช่วย (Auxiliary equation) เพื่อใช้ในการแก้  
สมการที่ (3.12) และ (3.13) ซึ่งมีสมการ Homogeneous คือ

$$M_j^* \ddot{x}_j + C_j^* \dot{x}_j + K_j^* x_j = 0 \quad (3.15)$$

จะได้สมการช่วยคือ

$$M_j^* r_j^2 + C_j^* r_j + K_j^* = 0 \quad (3.16)$$

ดังนั้น

$$r_j = \lambda_j \pm \nu_j i \quad (3.17)$$

และผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x_{hj}(t) = e^{\lambda_j t} [c_{1j} \cos(\nu_j t) + c_{2j} \sin(\nu_j t)] \quad (3.18)$$

ส่วนการหาผลเฉลยเฉพาะสามารถทำได้โดยการใช้วิธี Undetermined coefficient ในการแก้สมการ  
(3.12) และ (3.13) ซึ่งมีสมการ Non-Homogeneous คือ

$$M_j^* \ddot{x}_j + C_j^* \dot{x}_j + K_j^* x_j = \eta_j \cdot \sin(\Omega t) + \sigma_j \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.19)$$

สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูปที่สอดคล้องกับพจน์  $\eta_j \cdot \sin(\Omega t) + \sigma_j \cdot \cos(\Omega t)$  จะได้ว่า

$$x_{pj} = A_j \cdot \sin(\Omega t) + B_j \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.20)$$

$$\dot{x}_{pj} = A_j \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t) - B_j \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) \quad (3.21)$$

$$\ddot{x}_{pj} = -A_j \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t) - B_j \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.22)$$

นำสมการที่ (3.20) (3.21) และ (3.22) แทนลงในสมการที่ (3.19) จะได้

$$\begin{aligned} M_j^* (-A_j \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t) - B_j \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t)) + C_j^* (A_j \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t) - B_j \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t)) \\ + K_j^* (A_j \cdot \sin(\Omega t) + B_j \cdot \cos(\Omega t)) = \eta_j \cdot \sin(\Omega t) + \sigma_j \cdot \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ในสมการที่ (3.23) สามารถทำการเทียบสัมประสิทธิ์ที่สอดคล้องกับค่า  $\eta_j$  และ  $\sigma_j$  ได้ดังนี้

$$(K_j^* - M_j^* \cdot \Omega^2) \cdot A_j - (C_j^* \cdot \Omega) \cdot B_j = \eta_j \quad (3.24)$$

$$(C_j^* \cdot \Omega) \cdot A_j + (K_j^* - M_j^* \cdot \Omega^2) \cdot B_j = \sigma_j \quad (3.25)$$

เมื่อแก้ระบบสมการที่ (3.24) และ (3.25) จะได้ค่าสัมประสิทธิ์

$$A_j = \left[ \frac{(1 - \beta_j^2) \cdot \eta_j + (2\xi_j \beta_j^2) \cdot \sigma_j}{M_j^* \omega_j^2 (1 + (4\xi_j^2 - 1) \beta_j^2)} \right] \quad (3.26)$$

$$B_j = \left[ \frac{-(2\xi_j \beta_j^2) \cdot \eta_j + (1 - \beta_j^2) \cdot \sigma_j}{M_j^* \omega_j^2 (1 + (4\xi_j^2 - 1) \beta_j^2)} \right] \quad (3.27)$$

เมื่อ  $\omega_i^2 = \frac{K_i^*}{M_i^*}$ ,  $\xi_i = \frac{C_i^*}{2M_i^* \omega_i}$  และ  $\beta_i = \frac{\Omega}{\omega_i}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการคือ

$$x_{pj}(t) = \frac{\left[ (1 - \beta_j^2) \cdot \eta_j + (2\xi_j \beta_j^2) \cdot \sigma_j \right] \cdot \sin(\Omega t) + \left[ -(2\xi_j \beta_j^2) \cdot \eta_j + (1 - \beta_j^2) \cdot \sigma_j \right] \cdot \cos(\Omega t)}{M_j^* \omega_j^2 (1 + (4\xi_j^2 - 1) \beta_j^2)} \quad (3.28)$$

ทำการแทนสมการที่ (3.28) และ (3.18) ลงในสมการที่ (3.14) จะสามารถเขียนผลเฉลยสมบูรณได้ดังต่อไปนี้

$$x_j(t) = e^{\lambda_j t} \left[ c_{1j} \cos(\nu_j t) + c_{2j} \sin(\nu_j t) \right] + \frac{\left[ (1 - \beta_j^2) \cdot \eta_j + (2\xi_j \beta_j^2) \cdot \sigma_j \right] \cdot \sin(\Omega t) + \left[ -(2\xi_j \beta_j^2) \cdot \eta_j + (1 - \beta_j^2) \cdot \sigma_j \right] \cdot \cos(\Omega t)}{M_j^* \omega_j^2 (1 + (4\xi_j^2 - 1) \beta_j^2)} \quad (3.29)$$

ผลเฉลยที่ได้จากสมการ (3.29) เป็นเพียงพิกัดเชิงโหนดสมมติที่ใช้เพื่อการแก้สมการเท่านั้น ดังนั้นเมื่อจะหาพิกัดเชิงโหนดที่แท้จริง  $q_j(t)$  จะต้องทำการคูณกลับด้วยฟังก์ชันฐานที่สมมติขึ้น  $\varphi_j$  ดังสมการที่ (3.11) จะได้ว่า

$$q(t) = \varphi_1 \cdot x_1(t) + \varphi_2 \cdot x_2(t) \quad (3.30)$$

และเมื่อนำเมตริกซ์รูปร่างโหนด  $\phi_j$  คูณเข้ากับพิกัดเชิงโหนด  $q_j(t)$  จะสามารถหาค่าระยะกระจัดที่แท้จริง  $w(x, t)$  ได้ตามสมการที่ (2.3) ในบทที่ 2

การแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial condition)  $w(x, 0)$  และ  $\dot{w}(x, 0)$  จะต้องทำการแทนลงในสมการการกระจัด  $w(x, t)$  แต่การหาสมการการกระจัดนั้นอาจทำให้เกิดความยุ่งยาก เนื่องจากพิกัดเชิงโหนด  $q_j(t)$  มีค่าคงที่ที่ยังไม่ทราบค่าคือ  $c_{1j}$  และ  $c_{2j}$  ทั้งนี้การแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นลงในพิกัดเชิงโหนด  $q_j(t)$  นั้นไม่สามารถดำเนินการได้โดยตรง เพราะเงื่อนไขค่าเริ่มต้นประกอบไปด้วยตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งค่าคือ  $x$  และ  $t$  ทั้งนี้เพื่อให้สามารถแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นลงในพิกัดเชิงโหนด  $q_j(t)$  นั้นจะต้องทำการแปลงเงื่อนไขค่าเริ่มต้นจากสมการการกระจัด  $w(x, t)$  ไปสู่พิกัดเชิงโหนด  $q_j(t)$  โดยเริ่มจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองตามที่สมมติขึ้นในสมการที่ (2.3) ในบทที่ผ่านมา

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \cdot q_{bj}(t) = \Phi \mathbf{q}_b$$

หรือ

$$w(x,t) = q_1(t) \cdot \phi_1(x) + q_2(t) \cdot \phi_2(x) + q_3(t) \cdot \phi_3(x) + \dots + q_n(t) \cdot \phi_n(x) \quad (3.31)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา  $t = 0$

$$w(x,0) = q_1(0) \cdot \phi_1(x) + q_2(0) \cdot \phi_2(x) + q_3(0) \cdot \phi_3(x) + \dots + q_n(0) \cdot \phi_n(x) \quad (3.32)$$

และ

$$\dot{w}(x,0) = \dot{q}_1(0) \cdot \phi_1(x) + \dot{q}_2(0) \cdot \phi_2(x) + \dot{q}_3(0) \cdot \phi_3(x) + \dots + \dot{q}_n(0) \cdot \phi_n(x) \quad (3.33)$$

นำ  $\phi_j^T(x)M$  คูณทั้งสองข้างของสมการ พร้อมทั้งใช้คุณสมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชันพื้นฐานในการทำงานเดียวกันกับสมการที่ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$\phi_j^T(x) \cdot M \cdot w(x,0) = 0 + 0 + 0 + \phi_j^T(x) \cdot M \cdot \phi_j(x) \cdot q_j(0) + \dots + 0 + 0 + \dots \quad (3.34)$$

หรือ

$$q_j(0) = \frac{\phi_j^T(x) \cdot M \cdot w(x,0)}{\phi_j^T(x) \cdot M \cdot \phi_j(x)} \quad (3.35)$$

และในการทำงานเดียวกัน

$$\dot{q}_j(0) = \frac{\phi_j^T(x) \cdot M \cdot \dot{w}(x,0)}{\phi_j^T(x) \cdot M \cdot \phi_j(x)} \quad (3.36)$$

ในปัญหาที่กำลังทำการวิเคราะห์นี้มีเงื่อนไขที่พิจารณาคือ ทั้งคานช่วงเดียวและระบบของเสาความอิสระเดี่ยวติดที่กลางช่วง อยู่ในสภาวะสมดุลทางสถิตยและอยู่นิ่งกับที่ ดังนั้นเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของปัญหาจึงเป็นดังนี้

$$w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0 \quad (3.30)$$

ดังนั้นสามารถแปลงเงื่อนไขค่าเริ่มต้นจากการกระจัดไปสู่ฟังก์ชันใหม่ได้โดยใช้สมการที่ (3.35) และ (3.36)

ดังนี้

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0 \quad (3.31)$$

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นลงในสมการที่ (3.29) จะสามารถหาค่าคงที่ใดๆ  $c_{1j}$  และ  $c_{2j}$  ได้

การตรวจสอบในกรณีนี้จะเป็นการตรวจสอบแบบจำลองในกรณีที่มีรถจอดอยู่บนสะพาน โดยจะสมมติให้การสั่นไหวในแนวตั้งของจุดรองรับทั้งสองข้างของสะพานเป็นฟังก์ชันไซน์ (Sine function) ที่มีขนาดการสั่นสูงสุดเท่ากับ 1 ซม. ด้วยความถี่ที่เปลี่ยนแปลงไปใน 3 ความถี่ในการทำงานเดียวกันกับหัวข้อที่ 3.1 แต่มีการเปลี่ยนความถี่ไปตามกรณีที่แตกต่างกันไปจากกรณีที่แล้ว ดังต่อไปนี้

$$q_{sL}(t) = q_{sR}(t) = 0.01 \sin(\Omega t) \quad (3.32)$$

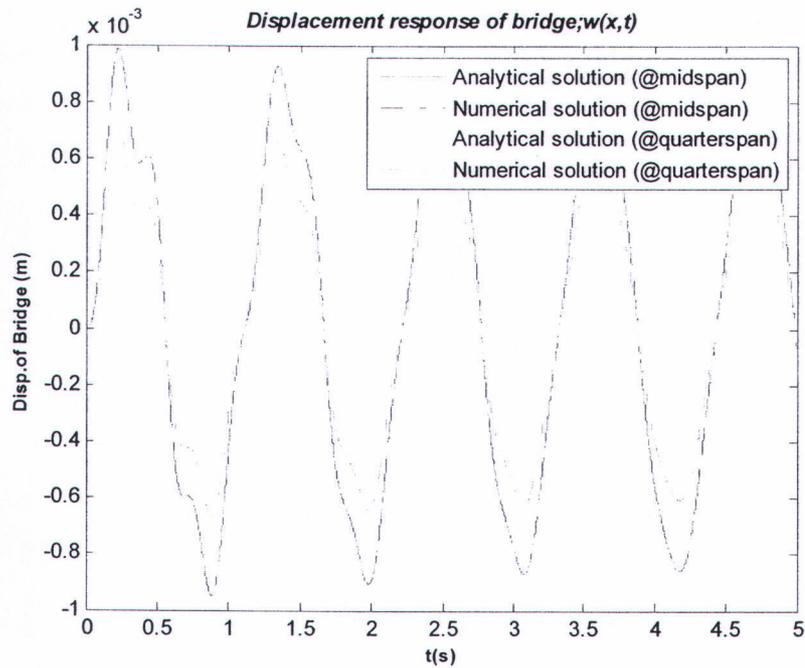
กรณีที่ 3.2.1 ค่า  $\Omega = 0.25\omega_1$

กรณีที่ 3.2.2 ค่า  $\Omega = \omega_1$

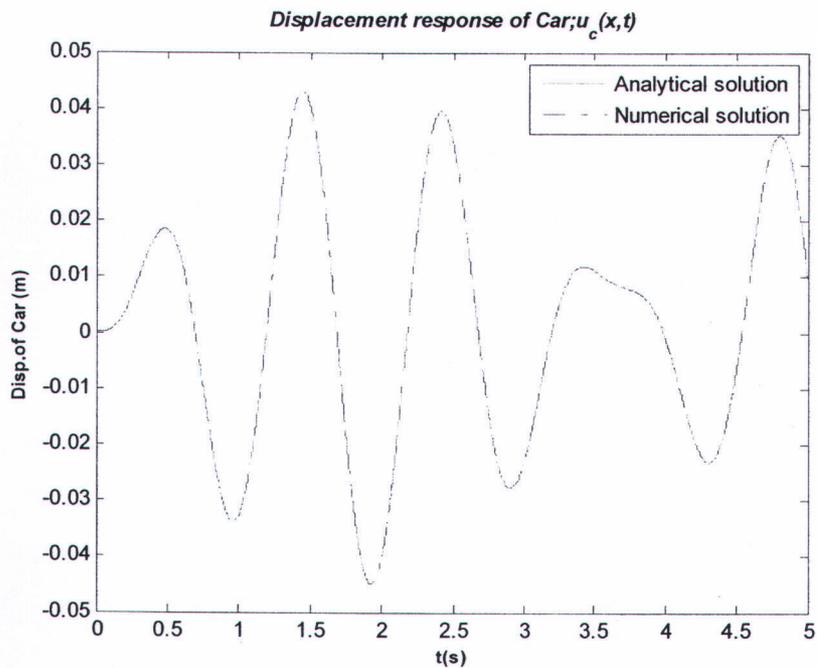
กรณีที่ 3.2.3 ค่า  $\Omega = 4\omega_1$

โดยที่

$\omega_1$  คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงมุมโหมดที่ 1

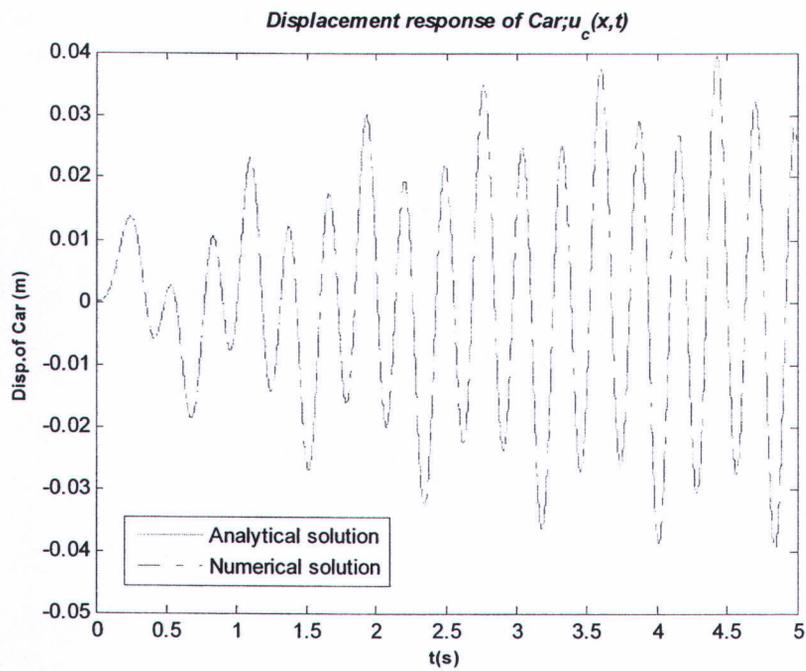
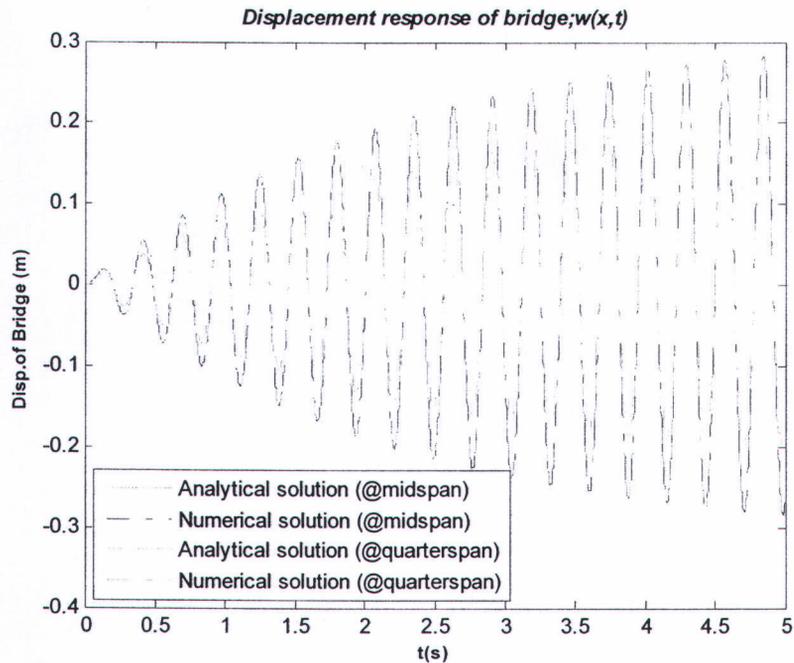


(ก)

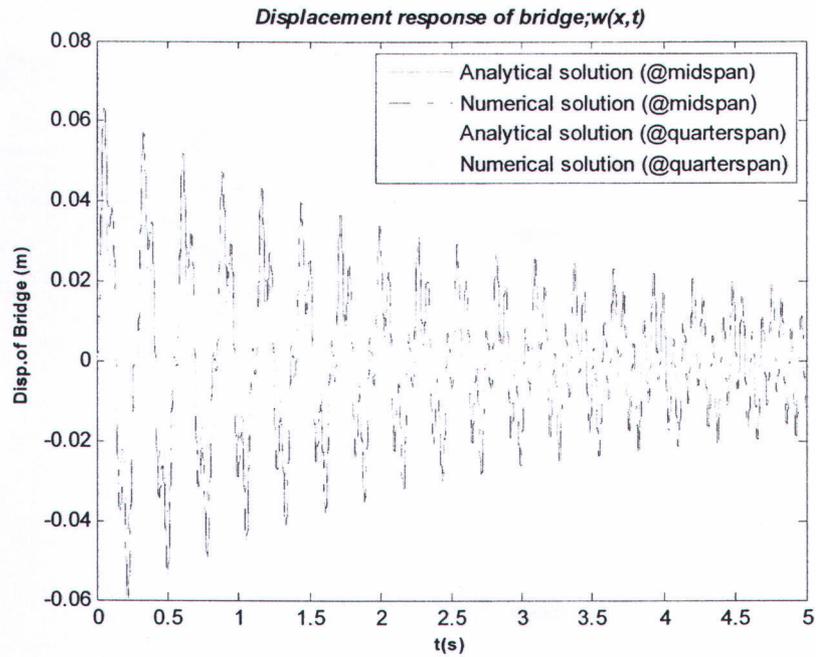


(ข)

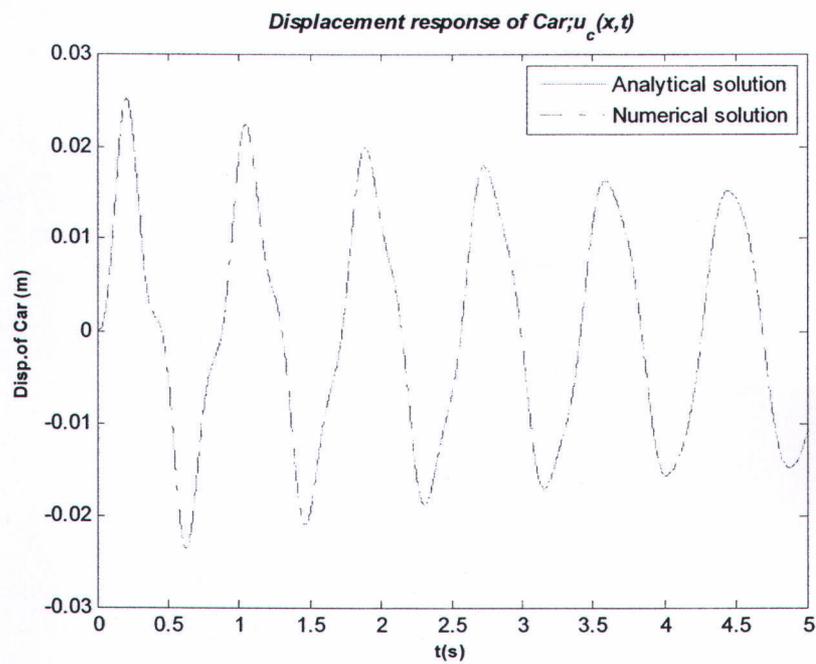
รูปที่ 3.8 แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจัดระหว่างค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลข กับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีนี้ที่  $\Omega = 0.25\omega_1$   
 (ก) ค่าการกระจัดของสะพาน (ข) ค่าการกระจัดของรถยนต์โดยสาร



รูปที่ 3.9 แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจัดระหว่างค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลข กับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีนี้ที่  $\Omega = \omega_1$  (ก) ค่าการกระจัดของสะพาน (ข) ค่าการกระจัดของรถยนต์โดยสาร



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.10 แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจัดระหว่างค่าที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลข กับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ของสะพานในกรณีนี้ที่  $\Omega = 4\omega_1$   
 (ก) ค่าการกระจัดของสะพาน (ข) ค่าการกระจัดของรถยนต์โดยสาร

ตาราง 3.4 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองระหว่างสะพานและรถยนต์โดยสารที่คำนวณโดยการดำเนินการทางตัวเลข เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ ในกรณีความถี่ของการสั่นไหวที่ฐานแตกต่างกัน

กรณี	ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุด (%)		
	สะพาน		รถยนต์โดยสาร
	บริเวณกลางช่วง	บริเวณหนึ่งในสี่ของ ความยาวช่วง	
2.1 ( $\Omega = 0.25\omega_1$ )	0.433	0.433	0.333
2.2 ( $\Omega = \omega_1$ )	1.139	1.139	1.009
2.3 ( $\Omega = 4\omega_1$ )	1.887	1.887	0.456