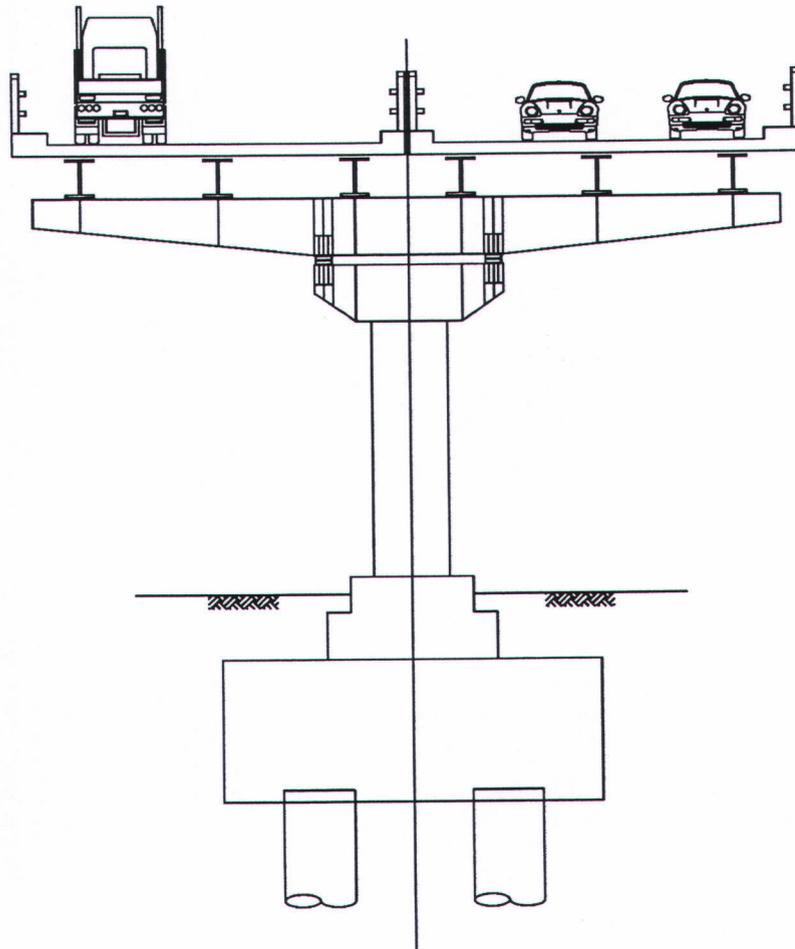


บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีเกี่ยวข้อง

2.1 แนวทางในการศึกษาปัญหาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สะพานข้ามทางแยกและทางยกระดับซึ่งเป็นโครงสร้างเหล็กนิยมใช้โครงสร้างเสาเดี่ยวดังแสดงในรูปที่ 2.1 ซึ่งผู้ใช้บริการสะพานมักประสบปัญหาความรู้สึกได้ถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นกับรถยนต์โดยสารที่จอดติดอยู่ในฝั่งที่มีการจราจรหนาแน่นส่งผลไปยังผู้โดยสารที่อยู่ภายในห้องโดยสารซึ่งสามารถรับรู้ได้ถึงการสั่นสะเทือนดังกล่าวทุกครั้งที่มีการเคลื่อนที่ผ่านของยานพาหนะในฝั่งที่มีการจราจรคล่องตัวในกรณีที่ความหนาแน่นทางการจราจรในสองทิศทางของสะพานข้ามทางแยกแตกต่างกันมากและมักพบเห็นได้อย่างบ่อยครั้ง โดยสาเหตุเกิดขึ้นจากการสั่นไหวจากการเคลื่อนที่ผ่านของยานพาหนะในทิศทางที่มีการจราจรคล่องตัวส่งผ่านไปยังฝั่งตรงข้ามที่มียานพาหนะจอดติดอยู่บนสะพาน ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนขึ้นภายในห้องโดยสารจนรู้สึกได้อย่างรุนแรง



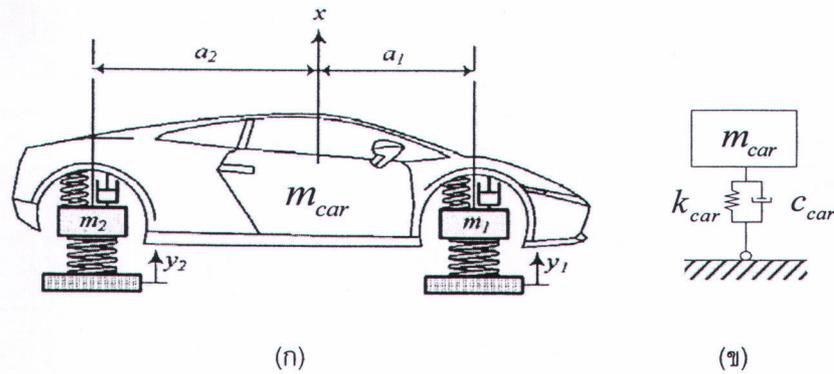
รูปที่ 2.1 แสดงภาพตัดทางขวางของสะพานเหล็กข้ามทางแยกในกรุงเทพมหานคร

การศึกษาปัญหาโดยการทดสอบในสถานการณ์จริงที่เกิดขึ้นทำได้ยากลำบากและอาจส่งผลกระทบต่อสภาพการจราจรรวมถึงเป็นอุปสรรคในการให้บริการแก่ผู้ที่ใช้สะพานพาดหน้าด้วยการใช้สะพานข้ามทางแยก เนื่องจากสะพานข้ามทางแยกที่กรุงเทพมหานครที่เปิดให้บริการอยู่ในปัจจุบันมีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการโดยสารผ่านของยานพาหนะทั้งในส่วนของรถยนต์โดยสารส่วนบุคคลและรถยนต์โดยสารสาธารณะเพื่อบรรเทาความหนาแน่นทางการจราจรบริเวณแยกต่างๆได้เป็นอย่างดี ด้วยประโยชน์ดังกล่าวทำให้มีอัตราการใช้บริการสะพานข้ามทางแยกที่สูงมากในแต่ละวัน การศึกษาปัญหาดังที่กล่าวมาข้างต้นโดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์ถึงปัญหาจากการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจึงเป็นวิธีที่เหมาะสมอย่างยิ่งเนื่องจากไม่ส่งผลกระทบต่อการทำงานของสะพาน โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถจำลองสถานการณ์ให้ใกล้เคียงความเป็นจริงได้อีกทั้งยังสามารถจำลองสถานการณ์ได้หลากหลายกว่าการทดสอบในสถานการณ์จริง และสามารถประหยัดค่าใช้จ่ายในการศึกษาวิจัยได้เป็นอย่างมาก

การสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมกับปัญหาเกิดขึ้นจากการพิจารณาถึงคุณสมบัติทางรูปลักษณะภายนอกของสะพานซึ่งพบว่าโครงสร้างสะพานข้ามทางแยกโดยทั่วไปที่มีรูปร่างคล้ายคลึงกัน โดยโครงสร้างหลักของสะพานในแต่ละทิศทางการจราจรจะวางตัวอยู่บนปลายคานขวางเดียวกัน เมื่อมีการเคลื่อนที่ของยานพาหนะในฝั่งที่มีการจราจรคล่องตัวจึงเกิดการสั่นไหวของคานขวางในฝั่งนั้นส่งผ่านไปยังฝั่งตรงข้ามที่มียานพาหนะจอดติดอยู่บนสะพานจนเป็นสาเหตุทำให้เกิดการสั่นสะเทือนขึ้นภายในห้องโดยสารจนรู้สึกได้อย่างรุนแรง จากการวิเคราะห์ถึงสาเหตุและที่มาของปัญหาจึงนำไปสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องได้ดังรายละเอียดที่จะทำการกล่าวไว้ในบทนี้

2.1.1 แบบจำลองรถยนต์ที่จอดติดอยู่บนสะพาน

ในส่วนของแบบจำลองรถยนต์โดยสารที่จอดติดอยู่บนสะพานนั้นจะพิจารณาให้อยู่ในระนาบเช่นเดียวกับกับสะพาน แต่จะพิจารณาให้มีเพียงองศาอิสระเดียว (Single Degree Of Freedom; SDOF) ที่ประกอบไปด้วยมวลของรถยนต์ ความแข็งของช่วงล่างรถยนต์ และความหน่วง โดยมีการสั่นไหวได้เฉพาะในแนวตั้งเท่านั้น ในความเป็นจริงนั้นแบบจำลองของรถยนต์โดยสารจากงานวิจัยต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบยานยนต์จะมีการพิจารณาเป็นระบบองศาอิสระทั้งสิ้น 2 องศาอิสระ (2-DOF) ดังรูปที่ 2.2 (ก) ซึ่งประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นมวลแขวน (Sprung mass) หมายถึงมวลของรถยนต์ในส่วนที่เหนืออย่างล้อขึ้นไปและในส่วนของมวลที่ไม่ถูกแขวน (Unsprung mass) ซึ่งหมายถึงมวลในส่วนที่เป็นยางล้อ โดยในส่วนของมวลที่ไม่ถูกแขวนจะมีค่าความแข็งสูงมากเมื่อเทียบความแข็งของช่วงล่างรถยนต์ (ในส่วนของยางรถยนต์จะต้องมีคุณสมบัติในการด้านการเสียรูปได้เป็นอย่างดี) อีกทั้งในส่วนของมวลที่ไม่ถูกแขวนยังมีค่าที่ต่ำกว่ามวลที่ถูกแขวนอย่างมาก ทำให้ความถี่ของช่วงล่างรถยนต์มีความแตกต่างอย่างมากเมื่อเทียบกับความถี่ของยางล้อรถยนต์ ดังนั้นจึงไม่พิจารณาในส่วนของมวลที่ไม่ถูกแขวนเนื่องจากมีความถี่สูงกว่าความถี่ในช่วงที่เราพิจารณา ทำให้แบบจำลองรถยนต์โดยสารที่ใช้ถูกพิจารณาให้มีเพียงองศาอิสระเดียวดังแสดงในรูป 2.2 (ข)

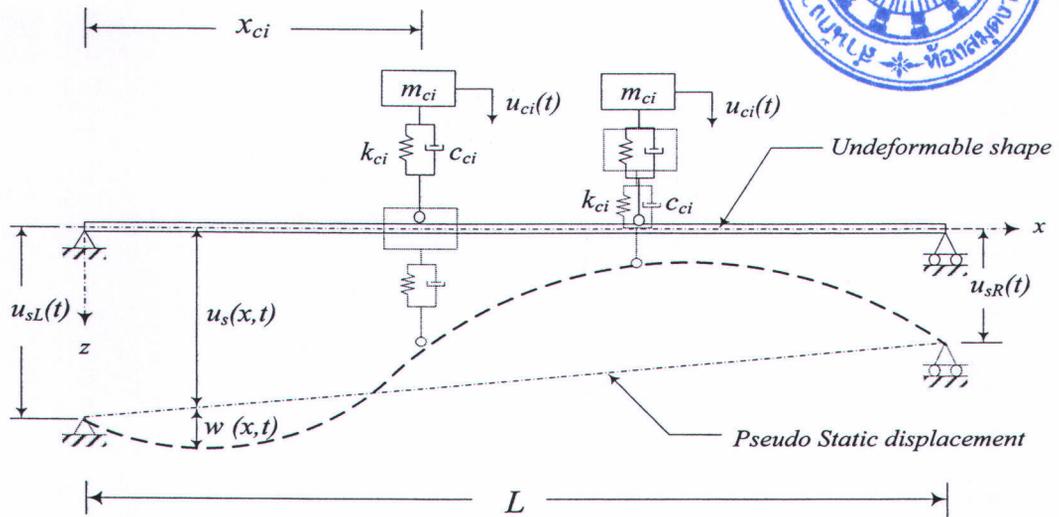


รูปที่ 2.2 แบบจำลองรถยนต์โดยสาร (ก) แบบจำลองในระนาบ Bicycle Car
(ข) แบบจำลองเทียบเท่า

จากรูปที่ 2.2 (ก) ได้แสดงแบบจำลองของรถยนต์โดยสารในระนาบ หรือ Bicycle Car [2] ซึ่งเป็นแบบจำลองรถยนต์ที่พิจารณาคุณสมบัติเชิงมวลครั้งหนึ่งของมวลทั้งหมด และพิจารณาคณะสมบัติช่วงล่างทั้งในส่วนหน้าและหลังที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังมีการพิจารณาองศาอิสระในส่วนของยางล้อรถยนต์ด้วย แต่เนื่องจากจำนวนองศาอิสระที่มากของแบบจำลองรถยนต์ทำให้เกิดความซับซ้อนอย่างมากในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระหว่างสะพานและรถยนต์ อีกทั้งองศาความอิสระบางส่วนอาจอยู่นอกเหนือปัญหาที่ได้ทำการศึกษาอยู่นี้ ดังนั้นเพื่อให้เกิดความสะดวกต่อการวิเคราะห์ปัญหาจึงได้ทำการลดจำนวนองศาอิสระของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นกับรถยนต์ลงให้เหลือเพียงองศาอิสระเดียวดังรูปที่ 2.2 (ข) ที่พิจารณามวลของรถยนต์เท่ากับแบบจำลอง Bicycle Car แต่ไม่พิจารณาองศาอิสระของยางล้อรถยนต์เนื่องจากมีค่าความถี่ที่สูงกว่าความถี่ที่สอดคล้องกับปัญหามาก รวมถึงการพิจารณาโหมดการสั่นสะเทือนเฉพาะในแนวตั้งเพียงโหมดเดียวตามความถี่ทั่วไปของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในแนวตั้งของรถยนต์เป็นตัวแทนของความถี่ช่วงล่างรถยนต์ในแบบจำลองสำหรับการพิจารณาในการศึกษานี้

2.1.2 แบบจำลองและการสร้างสมการการกระจัดของปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานและรถยนต์โดยสาร

เมื่อจุดรองรับของสะพานเกิดการสั่นไหว จะทำให้สะพานเกิดการสั่นสะเทือนส่งผลให้และรถยนต์โดยสารที่จอดอยู่บนสะพานมีการสั่นสะเทือนไปด้วยกัน อันเกิดจากปฏิริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพานกับรถยนต์โดยสาร โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะพิจารณาคานหลักตัวริมสุดของสะพานที่อยู่บริเวณปลายของคานขวางเป็นตัวแทนในการวิเคราะห์ ทั้งนี้ในการวิเคราะห์จะพิจารณาให้แบบจำลองมีลักษณะเป็นคานช่วงเดี่ยวและมีระบบองศาอิสระเดียว (Single Degree Of Freedom; SDOF) ติดอยู่บนคานเพื่อใช้เป็นตัวแทนของแบบจำลองรถยนต์ที่จอดติดอยู่บนสะพานดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระหว่างสะพานและรถยนต์โดยสารภายใต้แรงกระทำที่เกิดจากการสั่นไหวในแนวตั้งที่จุดรองรับทั้งสองข้างของสะพาน

หากพิจารณารถยนต์โดยสารที่จอดนิ่งอยู่บนสะพานดังแบบจำลองแสดงในรูปที่ 2.1 โดยสะพานซึ่งถูกจำลองรูปแบบในระนาบมีองศาความอิสระ (degree of freedom) ที่ประกอบด้วยโหมดเนื่องจากการดัด (bending mode) ส่งผลให้เกิด $w(x,t)$ (ซึ่งถูกสมมติให้เป็นผลรวมของโหมดการสั่นไหว n โหมดดังแสดงไว้ในสมการที่ 2.1) และผลจากการเคลื่อนตัวในแนวตั้งของจุดรองรับทำให้เกิดการกระจัดสมมติเชิงสถิตย์ (Pseudo Statics Displacement) $u_s(x,t)$ เมื่อรวมผลทั้งสองส่วนเข้าด้วยกันจะทำให้เกิดการกระจัดรวมของสะพาน (Total displacement) $u'(x,t)$ ทั้งนี้ได้มีการคำนึงถึงผลของความหน่วงในตัวสะพาน (damping) รวมอยู่ในการวิเคราะห์ด้วย โดยจะพิจารณาเป็นความหน่วงเชิงเส้นในรูปแบบโหมด (linear modal damping)

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)q_j(t) = \Phi(x)\mathbf{q}_b(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

โดยที่ $\mathbf{q}_b(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งเชิงโหมด

$\Phi(x) = \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{Bmatrix}$ คือ ฟังก์ชันฐานในแต่ละโหมด

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
 ห้องสมุดฯ ก.ว. 2555
 วันที่.....
 เลขทะเบียน..... 247638
 เลขเรียกหนังสือ.....

เมื่อพิจารณาการสั่นไหวของจตุรกรรับ จากรูป 2.2 จะได้

$$u_s(x,t) = q_{sL}(t) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + q_{sR}(t) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) = \Psi(x) \mathbf{q}_s(t) \quad (2.3)$$

โดยที่

$$\Psi = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q}_s = \left\{ \begin{array}{c} q_{sL}(t) \\ q_{sR}(t) \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

นอกจากนี้ได้สมมติให้การเคลื่อนที่ของรถยนต์โดยสารที่จอดติดอยู่บนสะพานซึ่งอธิบายโดยตัวแปร $\mathbf{u}_c(t)$

$$\mathbf{u}_c(t) = \left\{ \begin{array}{c} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \\ \vdots \\ u_{cm}(t) \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

เมื่อ m คือจำนวนรถยนต์โดยสารที่จอดติดอยู่บนสะพาน

การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งระบบโดยใช้สมการการเคลื่อนที่เชิงพลังงานของลากรานจ์ (Lagrange's equation) ซึ่งพลังงานและงานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative force) จะถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดทั่วไป (generalized coordinate) และอนุพันธ์ของตัวแปรเทียบกับเวลา ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.7)$$

โดยที่	T	คือ	พลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบ
	V	คือ	พลังงานศักย์ทั้งหมดของระบบ
	q_j	คือ	พิกัดทั่วไป (generalized coordinates)
	Q_j	คือ	แรงกระทำ ณ ตำแหน่งของพิกัดทั่วไป (generalized force) ที่สอดคล้องกับ q_j

จากแบบจำลองในรูป (2.3) สามารถเขียนสมการของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ทั้งระบบได้ดังสมการต่อไปนี้

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_b(x) [\dot{u}']^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} [m_{ci} \cdot \dot{u}_{ci}^2] \quad (2.8)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI_b(x) \cdot [w''(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} k_{ci} \cdot [u_{ci}(x_{ci},t) - u'_i(x_{ci},t)]^2 - [R_L(t) \cdot u_{sL}(t) + R_R(t) \cdot u_{sR}(t)] \quad (2.9)$$

โดยที่	u'	คือ	การกระจัดรวมของสะพาน มีค่าเท่ากับผลรวมระหว่างการเคลื่อนตัวของสะพานอันเนื่องจากการดัดและการเคลื่อนที่ของจุดรองรับ หรือ $u'(x,t) = w(x,t) + u_s(x,t)$
	u_{ci}	คือ	ค่าการกระจัดสัมบูรณ์ของรถยนต์คันที่ i
	$m_b(x)$	คือ	มวลของสะพานต่อหนึ่งหน่วยความยาว
	m_{ci}	คือ	มวลของรถยนต์คันที่ i
	k_{ci}	คือ	ความแข็งของช่วงล่างรถยนต์คันที่ i
	$EI_b(x)$	คือ	ค่าความแข็งเกร็งต้านทานการดัด (Flexural rigidity) ของสะพานต่อหนึ่งหน่วยความยาว
	R_L และ R_R	คือ	แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของสะพานด้านซ้ายและขวาตามลำดับ

ทั้งนี้จะพิจารณาโดยการสมมติให้สะพานมีการกระจายหน้าตัดอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว $m_b(x)$ สามารถพิจารณาเป็นค่าคงที่ได้คือ m_b เช่นเดียวกับกับค่า $EI_b(x)$ ก็สามารถพิจารณาเป็นค่าคงที่ได้คือ EI_b และจากสมการที่ (2.8) และ (2.9) สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ตัวอักษรได้

$$\mathbf{T} = \frac{m_b}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{u}}^T \cdot \dot{\mathbf{u}}) dx + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_c^T \mathbf{m}_c \dot{\mathbf{u}}_c) \quad (2.10)$$

หรือสามารถเขียนสมการพลังงานจลน์ให้อยู่ในรูปของพิกัดทั่วไปได้ดังสมการที่ 2.11

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi^T \cdot \Phi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi^T \cdot \Psi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_b^T \dot{\mathbf{q}}_s \\ & + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Psi^T \cdot \Phi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_s^T \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Psi^T \cdot \Psi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_s^T \dot{\mathbf{q}}_s \\ & + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_c^T \mathbf{m}_c \dot{\mathbf{q}}_c) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{V} = \frac{EI_b}{2} \int_0^L (w''(x,t)^T \cdot w''(x,t)) dx + \frac{1}{2} (\delta_c^T \cdot \mathbf{k}_c \cdot \delta_c) - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u}_s \quad (2.12)$$

โดยสามารถเขียนสมการพลังงานศักย์ให้อยู่ในรูปของพิกัดทั่วไปได้ดังสมการที่ 2.13

$$\mathbf{V} = \frac{EI_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi''^T \cdot \Phi'') dx \right\} \mathbf{q}_b^T \mathbf{q}_b + \frac{1}{2} (\delta_c^T \cdot \mathbf{k}_c \cdot \delta_c) - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{q}_s \quad (2.13)$$

โดยที่ $\delta_c = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{c1} - \mathbf{u}'(x_{c1}) \\ \mathbf{u}_{c2} - \mathbf{u}'(x_{c2}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{cm} - \mathbf{u}'(x_{cm}) \end{Bmatrix}$ คือ การกระจัดสัมพัทธ์ (Relative displacement) ของรถยนต์

ในที่นี้พจน์ Q_j ในสมการที่ 2.7 หมายถึงแรงไม่อนุรักษ์เนื่องจากความหน่วง (nonconservative damping force) มีค่าเท่ากับอนุพันธ์ย่อยของพลังงานที่สูญเสีย \mathbf{D} เทียบกับความเร็วของพิกัดทั่วไป q_j

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} c_b \int_0^L (\dot{w}''(x,t)^T \cdot \dot{w}''(x,t)) dx + \frac{1}{2} (\dot{\delta}_c^T \cdot \mathbf{c}_c \cdot \dot{\delta}_c) \tag{2.14}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนสมการของพลังงานสูญเสียให้อยู่ในรูปของพิกัดทั่วไปได้ดังสมการที่ 2.15

$$\mathbf{D} = \frac{c_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi''^T \cdot \Phi'') dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{1}{2} (\dot{\delta}_c^T \cdot \mathbf{c}_c \cdot \dot{\delta}_c) \tag{2.15}$$

นำสมการที่ 2.11 2.13 และ 2.15 แทนในสมการ 2.7 ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่เชิงพลังงานของลากรางจ์ (Lagrange's equation) เมื่อพิจารณาแต่ละพจน์จะได้ความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงพจน์ต่างๆจากการสังเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ระหว่างสะพานและรถยนต์โดยสมการที่ 2.9

Coordinate	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
Bridges	$\begin{bmatrix} m_b \int_0^L \Phi^T \cdot \Phi dx \\ + m_b \int_0^L \Phi^T \cdot \Psi dx \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b$ $\ddot{\mathbf{q}}_s$	0	$\left\{ \begin{aligned} &EI_b \int_0^L \Phi''^T \cdot \Phi'' dx \\ &+ [\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)] \end{aligned} \right\} \mathbf{q}_b$ $+ \{-\mathbf{k}_c \cdot \Phi^T(x_c)\} \mathbf{q}_c$ $+ \{\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)\} \mathbf{q}_s$	$\left\{ \begin{aligned} &c_b \int_0^L (\Phi'' \cdot \Phi''^T) dx \\ &+ [\Phi(x_c)^T \cdot \mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)] \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{q}}_b$ $+ \{-\mathbf{c}_c \cdot \Phi^T(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_c$ $+ \{\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_s$
Cars	$m_c \ddot{\mathbf{q}}_c$	0	$\{-\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)\} \mathbf{q}_b + \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{q}_c$ $+ \{-\mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)\} \mathbf{q}_s$	$\{-\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{c}_c \cdot \dot{\mathbf{q}}_c$ $+ \{-\mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_s$
Support	$\begin{bmatrix} m_b \int_0^L \Psi^T \cdot \Phi dx \\ + m_b \int_0^L \Psi^T \cdot \Psi dx \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b$ $\ddot{\mathbf{q}}_s$	0	$\{\mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)^T \cdot \Phi(x_c)\} \mathbf{q}_b$ $+ \{-\mathbf{k}_c \cdot \Psi^T(x_c)\} \mathbf{q}_c$ $+ \{\mathbf{k}_c \cdot [\Psi(x_c)^T \cdot \Psi(x_c)]\} \mathbf{q}_s$ $-\mathbf{R}$	$\{\mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)^T \cdot \Phi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_b$ $+ \{-\mathbf{c}_c \cdot \Psi^T(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_c$ $+ \{\mathbf{c}_c \cdot [\Psi^T(x_c) \cdot \Psi(x_c)]\} \dot{\mathbf{q}}_s$

แต่เนื่องจากคุณสมบัติการตั้งฉากกัน (orthogonality property) ของฟังก์ชันพื้นฐานของสะพาน ดังนั้นค่านอกแนวทแยง (off-diagonal) ของเมตริกซ์มวล (mass matrix) เท่ากับศูนย์ ทำให้เกิดความสมมาตรขึ้นในเมตริกซ์มวล และจากการวิเคราะห์เชิงโหมด (modal analysis) จะสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนสเชิงโหมด (modal stiffness matrix) และเมตริกซ์ความหน่วงเชิงโหมด (modal damping matrix) ได้โดยที่ค่านอกแนวทแยงของเมตริกซ์สติฟเนสเชิงโหมดและเมตริกซ์ความหน่วงเชิงโหมดเท่ากับศูนย์เช่นเดียวกัน เมื่อแทนสมการความสัมพันธ์ ของพจน์ต่างๆในตารางที่ 2.1 ลงในสมการ (2.7) จะได้สมการการกระจัดทั้งระบบซึ่งสามารถจัดในรูปแบบการกระจายของเมตริกซ์ที่สอดคล้องกันระหว่างพิกัดทั่วไปต่างๆทั้งในส่วนของสะพาน รถยนต์และจุดรองรับดังสมการที่ 2.15 ก

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc} m_b \int_0^L (\Phi \cdot \Phi^T) dx & \vdots \quad \mathbf{0} \\ \dots & \vdots \dots \dots \\ \mathbf{0} & \vdots \quad \text{diag}(m_{ci}) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} (2 \cdot \mathbf{M}_b \omega \xi) & \vdots \\ + [\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)]^T \cdot \Phi(x_c) & \vdots \quad -\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c) \\ \dots & \vdots \dots \dots \\ -[\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)]^T & \vdots \quad \text{diag}(c_{ci}) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} \\
 & + \left[\begin{array}{cc} EI_b \int_0^L (\Phi'' \cdot \Phi''^T) dx & \vdots \quad -\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c) \\ + [\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)]^T \cdot \Phi(x_c) & \vdots \dots \dots \\ \dots & \vdots \dots \dots \\ -[\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)]^T & \vdots \quad \text{diag}(k_{ci}) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \vdots \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = - \left[\begin{array}{c} m_b \int_0^L (\Phi \cdot \Psi) dx \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \ddot{\mathbf{q}}_s - \left[\begin{array}{c} [\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)]^T \cdot \Psi(x_c) \\ \dots \\ -\mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c) \end{array} \right] \dot{\mathbf{q}}_s \\
 & - \left[\begin{array}{c} [\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)]^T \cdot \Psi(x_c) \\ \dots \\ -\mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c) \end{array} \right] \mathbf{q}_s
 \end{aligned} \tag{2.16n}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{c}_{bc} \\ \mathbf{c}_{bc}^T & \mathbf{c}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{k}_{bc} \\ \mathbf{k}_{bc}^T & \mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} \\
 & = - \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s - \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{sc} \end{Bmatrix} \mathbf{q}_s
 \end{aligned} \tag{2.16ข)$$

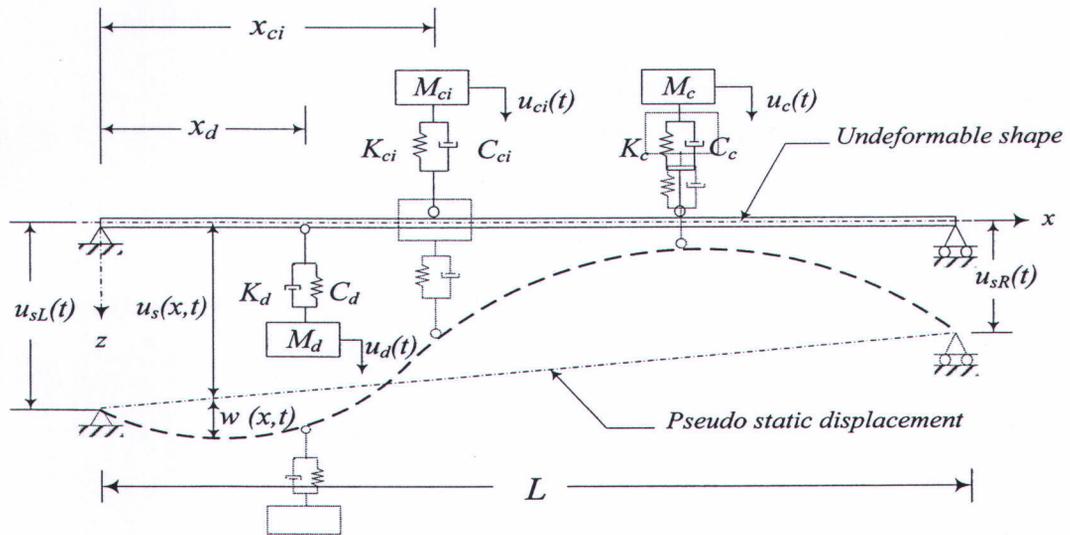
สมการการเคลื่อนที่ 2.16ข สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ทั่วไป (General form) โดยการรวมพจน์ทางขวาของสมการเข้าไว้ด้วยกันในรูปแบบของแรง $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_s(t) - \mathbf{K}_s\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.17)$$

โดยที่ $\mathbf{P}(t)$ คือ แรงกระทำรวม ณ ตำแหน่งของพิกัดทั่วไป (generalized force)

2.1.3 การประยุกต์เพื่อสร้างแบบจำลองและสมการการกระจัดของปฏิกริยาตอบสนองซึ่งกันและกันระหว่างสะพาน รถยนต์โดยสารและมวลห้วงปรับค่า

การสร้างสมการการกระจัดในกรณีที่มีการติดตั้งมวลห้วงปรับค่าในแบบจำลองสะพานที่มีรอยจุดติดอยู่บนสะพานสามารถทำได้โดยการประยุกต์สมการการเคลื่อนที่ที่ได้สร้างขึ้นมาแล้วในสมการที่ (2.17) ด้วยการเพิ่มพิกัดการเคลื่อนที่เข้าไปยังสมการ โดยพิกัดที่เพิ่มเข้ามาในสมการการเคลื่อนที่ก็คือ พิกัดการเคลื่อนที่ของมวลห้วงปรับค่า \mathbf{u}_d ซึ่งมีพิกัดทั่วไปแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{q}_d(t)$



รูปที่ 2.4 รูปแบบจำลองระหว่างสะพานที่มีการติดตั้งมวลห้วงปรับค่าและรถยนต์โดยสาร

จากสมการ (2.10) (2.12) และ (2.14) พลังงานจลน์และพลังงานศักย์สามารถปรับเขียนใหม่ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{T} = \frac{m_b}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{u}}^T \cdot \dot{\mathbf{u}}) dx + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_c^T \mathbf{m}_c \dot{\mathbf{u}}_c) + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_d^T \mathbf{m}_d \dot{\mathbf{u}}_d) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{V} = \frac{EI_b}{2} \int_0^L (w''(x,t)^T \cdot w''(x,t)) dx + \frac{1}{2} (\delta_c^T \cdot \mathbf{k}_c \cdot \delta_c) + \frac{1}{2} (\delta_d^T \cdot \mathbf{k}_d \cdot \delta_d) - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u}_s \quad (2.19)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} c_b \int_0^L (\dot{w}''(x,t)^T \cdot \dot{w}''(x,t)) dx + \frac{1}{2} (\dot{\delta}_c^T \cdot \mathbf{c}_c \cdot \dot{\delta}_c) + \frac{1}{2} (\dot{\delta}_d^T \cdot \mathbf{c}_d \cdot \dot{\delta}_d) \quad (2.20)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนสมการที่ 2.18 ถึง 2.20 ให้อยู่ในรูปของพิกัดทั่วไปได้ดังสมการที่ 2.21 ถึง 2.23

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi^T \cdot \Phi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_b^T \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi^T \cdot \Psi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_b^T \dot{\mathbf{q}}_s \\ & + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Psi^T \cdot \Phi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_s^T \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{m_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Psi^T \cdot \Psi) dx \right\} \dot{\mathbf{q}}_s^T \dot{\mathbf{q}}_s \\ & + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_d^T \mathbf{m}_d \dot{\mathbf{q}}_d) + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_c^T \mathbf{m}_c \dot{\mathbf{q}}_c) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & \frac{EI_b}{2} \left\{ \int_0^L (\Phi''^T \cdot \Phi'') dx \right\} \mathbf{q}_b^T \mathbf{q}_b + \frac{1}{2} (\delta_c^T \cdot \mathbf{k}_c \cdot \delta_c) \\ & + \frac{1}{2} (\delta_d^T \cdot \mathbf{k}_d \cdot \delta_d) - \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{q}_s \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{โดยที่ } \delta_c = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{c1} - \mathbf{u}'(x_{c1}) \\ \mathbf{u}_{c2} - \mathbf{u}'(x_{c2}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{cm} - \mathbf{u}'(x_{cm}) \end{Bmatrix} \quad \text{คือ การกระจัดสัมพัทธ์ (Relative displacement) ของรถยนต์}$$

$$\delta_d = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{d1} - \mathbf{u}'(x_{d1}) \\ \mathbf{u}_{d2} - \mathbf{u}'(x_{d2}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{dm} - \mathbf{u}'(x_{dm}) \end{Bmatrix} \quad \text{คือ การกระจัดสัมพัทธ์ (Relative displacement) ของมวลหน่วงปรับค่า}$$

ตารางที่ 2.2 แสดงพจน์ต่างๆจากการสังเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ระหว่างสะพาน รถยนต์และมวลหน่วงปรับ

ค่าโดยสมการที่ 2.9

Coordinate	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
Bridges	$\begin{bmatrix} m_b \int_0^L \Phi^T \cdot \Phi dx \\ + m_b \int_0^L \Phi^T \cdot \Psi dx \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b$	0	$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & EI_b \int_0^L \Phi'' \cdot \Phi''' dx \\ & + [\Phi^T(x_d) \cdot \mathbf{k}_d \cdot \Phi(x_d)] \\ & + [\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)] \end{aligned} \right\} \mathbf{q}_b \\ & + \{-\mathbf{k}_d \cdot \Phi^T(x_d)\} \mathbf{q}_d \\ & + \{-\mathbf{k}_c \cdot \Phi^T(x_c)\} \mathbf{q}_c \\ & + \{\Phi^T(x_d) \cdot \mathbf{k}_d \cdot \Psi(x_d)\} \mathbf{q}_s \\ & + \{\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)\} \mathbf{q}_s \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & c_b \int_0^L (\Phi'' \cdot \Phi''') dx \\ & + [\Phi(x_c)^T \cdot \mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)] \\ & + [\Phi(x_d)^T \cdot \mathbf{c}_d \cdot \Phi(x_d)] \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{q}}_b \\ & + \{-\mathbf{c}_c \cdot \Phi^T(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_c \\ & + \{-\mathbf{c}_d \cdot \Phi^T(x_d)\} \dot{\mathbf{q}}_d \\ & + \{\Phi^T(x_c) \cdot \mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_s \\ & + \{\Phi^T(x_d) \cdot \mathbf{c}_d \cdot \Psi(x_d)\} \dot{\mathbf{q}}_s \end{aligned}$
Cars	$\mathbf{m}_c \ddot{\mathbf{q}}_c$	0	$\begin{aligned} & \{-\mathbf{k}_c \cdot \Phi(x_c)\} \mathbf{q}_b + \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{q}_c \\ & + \{-\mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)\} \mathbf{q}_s \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \{-\mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{c}_c \cdot \dot{\mathbf{q}}_c \\ & + \{-\mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_s \end{aligned}$
TMDs	$\mathbf{m}_d \ddot{\mathbf{q}}_d$	0	$\begin{aligned} & \{-\mathbf{k}_d \cdot \Phi(x_d)\} \mathbf{q}_b + \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{q}_d \\ & + \{-\mathbf{k}_d \cdot \Psi(x_d)\} \mathbf{q}_s \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \{-\mathbf{c}_d \cdot \Phi(x_d)\} \dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{c}_d \cdot \dot{\mathbf{q}}_d \\ & + \{-\mathbf{c}_d \cdot \Psi(x_d)\} \dot{\mathbf{q}}_s \end{aligned}$
Support	$\begin{bmatrix} m_b \int_0^L \Psi^T \cdot \Phi dx \\ + m_b \int_0^L \Psi^T \cdot \Psi dx \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b$	0	$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{k}_c \cdot \Psi(x_c)^T \cdot \Phi(x_c) \\ & + \mathbf{k}_d \cdot \Psi(x_d)^T \cdot \Phi(x_d) \end{aligned} \right\} \mathbf{q}_b \\ & + \{-\mathbf{k}_c \cdot \Psi^T(x_c)\} \mathbf{q}_c \\ & + \{-\mathbf{k}_d \cdot \Psi^T(x_d)\} \mathbf{q}_d \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{k}_c \cdot [\Psi^T(x_c) \cdot \Psi(x_c)] \\ & + \mathbf{k}_d \cdot [\Psi^T(x_d) \cdot \Psi(x_d)] \end{aligned} \right\} \mathbf{q}_s - \mathbf{R} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{c}_c \cdot \Phi(x_c) \cdot \Psi(x_c) \\ & + \mathbf{c}_d \cdot \Phi(x_d) \cdot \Psi(x_d) \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{q}}_b \\ & + \{-\mathbf{c}_c \cdot \Psi(x_c)\} \dot{\mathbf{q}}_c \\ & + \{-\mathbf{c}_d \cdot \Psi(x_d)\} \dot{\mathbf{q}}_d \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{c}_c \cdot [\Psi(x_c) \cdot \Psi^T(x_c)] \\ & + \mathbf{c}_d \cdot [\Psi(x_d) \cdot \Psi^T(x_d)] \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{q}}_s \end{aligned}$

ในทำนองเดียวกันจากหัวข้อที่ผ่านมาข้างต้น โดยคุณสมบัติการตั้งฉากกัน (orthogonality property) ของฟังก์ชันพื้นฐานของสะพาน และจากการวิเคราะห์เชิงโหมด (modal analysis) จะสามารถสร้างเมตริกซ์สติฟเนสเชิงโหมด (modal stiffness matrix) และเมตริกซ์ความหน่วงเชิงโหมด (modal damping matrix) ได้เมื่อแทนสมการความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆในตารางที่ 2.2 ลงในสมการ (2.7) จะได้สมการการกระจัดทั้งระบบซึ่งสามารถจัดในรูปแบบการกระจายของเมตริกซ์ที่สอดคล้องกันระหว่างพิกัดทั่วไปต่างๆทั้งในส่วนของสะพาน รถยนต์ มวลหน่วงปรับค่าและจุดรองรับดังสมการที่ 2.20

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{c}_{bd} & \mathbf{c}_{bc} \\ \mathbf{c}_{bd}^T & \mathbf{c}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{bc}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{k}_{bd} & \mathbf{k}_{bc} \\ \mathbf{k}_{bd}^T & \mathbf{k}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{bc}^T & \mathbf{0} & \mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} \\
& = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{sd} \\ \mathbf{k}_{sc} \end{bmatrix} \mathbf{q}_s
\end{aligned} \tag{2.23}$$

นอกจากนี้สมการที่ 2.23 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการการเคลื่อนที่ทั่วไป (General form) ได้เช่นเดียวกับสมการที่ 2.17

2.2 การแก้สมการการเคลื่อนที่โดยการประมาณเชิงตัวเลขด้วยวิธีเสตทสเปซ

การใช้สมการเสตทสเปซ (state-space formulation) สมการ (2.16) จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดง

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{f} \tag{2.21}$$

โดยที่

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \tag{2.22}$$

โดยที่ \mathbf{X} คือ เวกเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ $2n$ ซึ่งประกอบด้วย การแอนตัวและความเร็ว

n_f คือ จำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ

\mathbf{f} คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่าที่มีมิติเท่ากับ $n_f \times 1$

สมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่ต่อเนื่อง (discrete equation) โดยการใช้ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix) เข้ามาเกี่ยวข้อง จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \bar{\mathbf{G}}_{j+1}\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j \tag{2.23}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}h} \tag{2.24}$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{2.25}$$

โดยที่ \mathbf{F} คือ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)

$\bar{\mathbf{G}}$ คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างแรงกับระบบ

$j+1$ คือ การคำนวณ ณ ชั้นเวลาที่ $j+1$

h คือ ผลต่างของเวลาในการคำนวณ (variable state) ระหว่าง \mathbf{X}_j และ \mathbf{X}_{j+1}

จากการแทนสมการ (2.24) และ (2.25) ลงไปในสมการ (2.23) จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{f}_j \quad (2.26)$$

โดยที่

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \quad (2.27)$$

2.2.1 วิธีการหาเอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix) \mathbf{F}

$$\text{จาก } \mathbf{e}^{A h} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{h^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots \quad (2.28)$$

$$\text{และ } \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (2.29)$$

โดยที่

$\mathbf{\Lambda}$ คือ เมตริกซ์ไอเกนแวลู (eigenvalue) ของเมตริกซ์ \mathbf{A}

\mathbf{V} คือ เมตริกซ์ไอเกนเวกเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ \mathbf{A}

แทนสมการ (2.38) ลงใน (2.37) จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{A h} &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V}\left(\mathbf{I} + h\mathbf{\Lambda} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{\Lambda}^2 + \frac{h^3}{3!}\mathbf{\Lambda}^3 + \dots\right)\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda} h}\mathbf{V}^{-1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ผลจากการแก้สมการโดยการดำเนินการทางตัวเลขด้วยวิธีเสถียรค่าเวกเตอร์ \mathbf{X} ที่ได้จะอยู่ในรูปของเวกเตอร์ที่ประกอบไปด้วยค่า \mathbf{q} และอนุพันธ์ของค่า \mathbf{q} ซึ่งได้จากการแก้สมการเพียงครั้งเดียวและหากต้องการทราบค่าอนุพันธ์อันดับสองของ \mathbf{q} สามารถทำได้โดยการแทนค่าเวกเตอร์ \mathbf{X} กลับไปยังสมการที่ 2.21 เพื่อหาค่า $\dot{\mathbf{X}}$ ซึ่งจากสมการที่ 2.22 พบว่า $\dot{\mathbf{X}}$ นั้นประกอบไปด้วยเวกเตอร์อนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของ \mathbf{q} ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าการแก้สมการโดยวิธีเสถียรค่าสามารถให้ผลจากการแก้สมการที่ครบถ้วนและรวดเร็ว แต่ค่าความถูกต้องของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับขั้นตอนในการหาเอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์