

บทที่ 3

การสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติบนพื้นฐานของ วงจรรองขาวิสกี-โกเลย์

ในบทที่ 3 นี้จะได้นำเสนอปัญหาและวิธีการปรับปรุงวงจรรองขาวิสกี-โกเลย์ (Savitzky-Golay : SG filter) ต้นแบบไปเป็นวงจรรองขาวิสกี-โกเลย์แบบวน (Cyclic Savitzky-Golay : CSG filter) สำหรับนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติในขอบข่ายงานของการสแกนแบบเชิงเส้นทางกล หลังจากนั้นจึงจะนำเสนอวงจรรองเร็กกูลาร์ไรซ์ขาวิสกี-โกเลย์แบบวน (Cyclic Regularized Savitzky-Golay : CRSG filter) โดยการนำเทคนิคในการเร็กกูลาร์ไรซ์ไปรวมกับฟังก์ชันจุดประสงค์ของระเบียบวิธี CSG เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการประมาณค่าในช่วงข้อมูลที่ขาดหายไป พร้อมทั้งลดทอนสัญญาณรบกวนแบบจุดภายในภาพให้ดีขึ้นในเวลาเดียวกัน

3.1 ระเบียบวิธีของวงจรรองขาวิสกี-โกเลย์ต้นแบบ

วงจรรองขาวิสกี-โกเลย์ (SG) ต้นแบบนั้นจะเป็นวงจรรองหนึ่งมิติสำหรับใช้ในการลดทอนสัญญาณรบกวนในข้อมูลที่บันทึกได้จากเครื่องสเปกโตรมิเตอร์ (Spectrometer) [21] โดยใช้หลักการในการฟิตฟังก์ชันพหุนามแบบกำลังสองน้อยสุด (Least squares polynomial fitting) บนลำดับของกลุ่มข้อมูลตัวอย่าง $f(t_i)$ เพื่อประมาณค่าที่ปราศจากสัญญาณรบกวน $\tilde{f}(t_i)$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับที่ว่า t_i จะต้องมีความเท่ากับ $t_0 + \Delta i$ เมื่อ Δ คือค่าคงที่ของระยะห่างระหว่างข้อมูล และ $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$

ระเบียบวิธีของวงจรรอง SG ต้นแบบจะเริ่มจากการพิจารณาลำดับข้อมูล f_i เมื่อ $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ และนิยามฟังก์ชันพหุนาม g_i ที่มีอันดับเท่ากับ K บนตำแหน่งข้อมูลในหน้าต่างวงจรรองที่มีตัวแปรดัชนีคือ m เมื่อ $m = \{-M : M\}$, นั่นคือ m มีค่าอยู่ในช่วง $-M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M$ ดังสมการ

$$g_i(m) = \sum_{k=0}^K a_i(k) m^k, \quad (3.1)$$

โดยในแต่ละตำแหน่ง i นั้น วงจรกรอง SG จะคำนวณค่าเอาต์พุต $\tilde{f}_i$ ด้วยการฟิตฟังก์ชันพหุนาม g_i แบบกำลังสองน้อยไปยังข้อมูล $f_{i-M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, f_{i+M}$ จากนั้นจะเลือกค่าเอาต์พุตของวงจรกรอง ณ ตำแหน่งศูนย์กลางของฟังก์ชันพหุนามในหน้าต่างวงจรกรองที่ตำแหน่ง $m=0$, ส่งผลให้เอาต์พุตของวงจรกรอง ณ ตำแหน่งที่ i ในสมการที่ (3.1) มีค่าดังสมการ

$$\tilde{f}_i = g_i(0) = a_i(0). \quad (3.2)$$

ในการหาค่าเอาต์พุตของวงจรกรอง SG ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ $a_i(0)$ ในสมการที่ (3.2) นั้นจะสามารถทำได้โดยการกำหนดรูปแบบของปัญหาแบบกำลังสองน้อยสุดด้วยฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective function) ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\varepsilon_i = \sum_{m=-M}^M (g_i(m) - f_{i+m})^2, \quad (3.3)$$

และฟังก์ชันพหุนามที่ได้นิยามไว้ในสมการที่ (3.1) จะถูกนำมาเขียนจัดเรียงใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของผลคูณระหว่างเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาด (Error vector) ได้ดังสมการ

$$\varepsilon_i = \vec{e}_i^T \vec{e}_i, \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$\vec{e}_i = \mathbf{A} \vec{a}_i - \vec{f}_i = \begin{bmatrix} (-M)^0 & (-M)^1 & \dots & (-M)^K \\ (-M+1)^0 & (-M+1)^1 & \dots & (-M+1)^K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0^0 & 0^1 & \dots & 0^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (M-1)^0 & (M-1)^1 & \dots & (M-1)^K \\ M^0 & M^1 & \dots & M^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i(0) \\ a_i(1) \\ \vdots \\ a_i(K) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{i-M} \\ f_{i-M+1} \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{i+M-1} \\ f_{i+M} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

เมื่อ $\vec{a}_i = [a_i(k); k=1, 2, \dots, K]^T$, $\vec{f}_i = [f_{i+m}; m=-M, \dots, 0, \dots, M]^T$, และสมาชิกของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ มีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{A}_{qr} = m(q)^{k(r)}, \quad (3.6)$$

เมื่อ $m(q) = q - M - 1$ สำหรับ $q = 1, 2, \dots, (2M+1)$, และ $k(r) = r - 1$ สำหรับ $r = 1, 2, \dots, (K+1)$. จากการนิยามเวกเตอร์ในสมการที่ (3.4) และ (3.5) ทำให้เราสามารถเขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (3.3) ข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์และเวกเตอร์ได้ดังสมการ

$$\varepsilon_i = (\mathbf{A}\vec{a}_i - \vec{f}_i)^T (\mathbf{A}\vec{a}_i - \vec{f}_i), \tag{3.7}$$

ผลเฉลยทั่วไปของเวกเตอร์ $\vec{a}_i$ ที่ถูกกำหนดภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าความผิดพลาดกำลังสองน้อยสุดในสมการที่ (3.7) สามารถทำการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) ได้ดังสมการ

$$\vec{a}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \vec{f}_i), \tag{3.8}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a_i(0)$ ซึ่งใช้เป็นค่าเอาต์พุต $g_i(0)$ ของวงจรกรอง SG คือค่าสมาชิกตัวแรกของเวกเตอร์ $\vec{a}_i$ ดังที่ได้นิยามไว้ในสมการที่ (3.5) และสามารถเขียนกำหนดเพื่อหาค่าได้ดังสมการ

$$g_i(0) = a_i(0) = \{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T\}_1 \vec{f}_i, \tag{3.9}$$

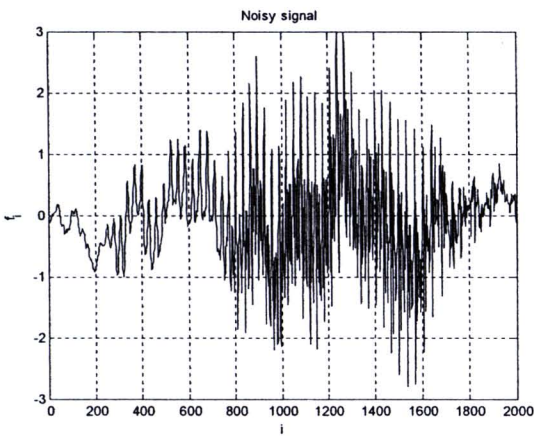
เมื่อ $\{ \}_1$ คือสัญกรณ์ที่ระบุว่าเป็นเวกเตอร์แนวนอนแถวแรกของเมตริกซ์ที่อยู่ในสัญกรณ์ดังกล่าว โดยจะสังเกตเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ $a_i(0)$ ในสมการที่ (3.9) คือค่าที่ได้จากการทำผลคูณภายใน (Inner product) ระหว่างเวกเตอร์แนวนอนแถวแรกของเมตริกซ์ที่อยู่ในสัญกรณ์ $\{ \}_1$ และเวกเตอร์ข้อมูล $\vec{f}_i$ ดังนั้นเราสามารถเขียนลดรูปสมการผลเฉลยของวงจรกรอง SG ให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นได้ดังสมการ

$$\tilde{f}_i = g_i(0) = \sum_{q=1}^{2M+1} \alpha_q f_{i-m-l+q}, \tag{3.10}$$

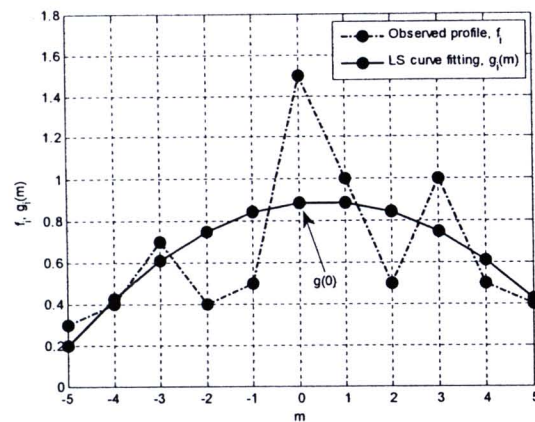
เมื่อ

$$\alpha_q = \{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{u}_q\}_1, \tag{3.11}$$

เครื่องหมาย $\vec{u}_q$ ในสมการที่ (3.11) คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง q th

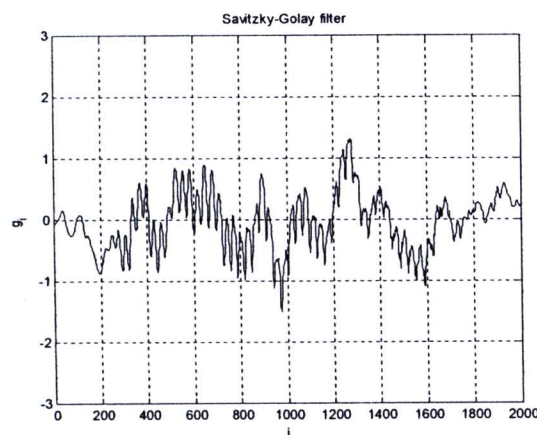


รูปที่ 3.1 ตัวอย่างฟังก์ชัน f ที่ประกอบไปด้วยสัญญาณรบกวนชุดหนึ่ง



รูปที่ 3.2 การประมาณกลุ่มข้อมูล f ที่ตำแหน่ง $m = 0$ ด้วยฟังก์ชันพหุนาม g ,
อันดับ 2 ขนาด $M = 5$

รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันหนึ่งมิติ f ที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนชุดหนึ่ง โดยเราจะนำข้อมูลในช่วงที่เราสนใจมาเก็บไว้ในหน้าต่างวงจรรองดังแสดงในรูปที่ 3.2 ในช่วง $m = [-5, \dots, 0, \dots, 5]$ จากนั้นจึงใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับสองฟิตกลุ่มข้อมูลที่เรานำมา โดยเอาจุด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางของหน้าต่างวงจรรอง $m = 0$ ก็คือค่า ณ ตำแหน่งตรงกลางของฟังก์ชันพหุนาม $g_i(m=0)$ ที่ประมาณค่าได้ และเมื่อทำเช่นเดียวกันกับทุก ๆ ข้อมูลในช่วงหน้าต่างวงจรรองจะได้ผลลัพธ์หลังการกรองดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ผลลัพธ์หลังผ่านวงจรรองซาวิตซ์กี-โกเลย์ต้นแบบ

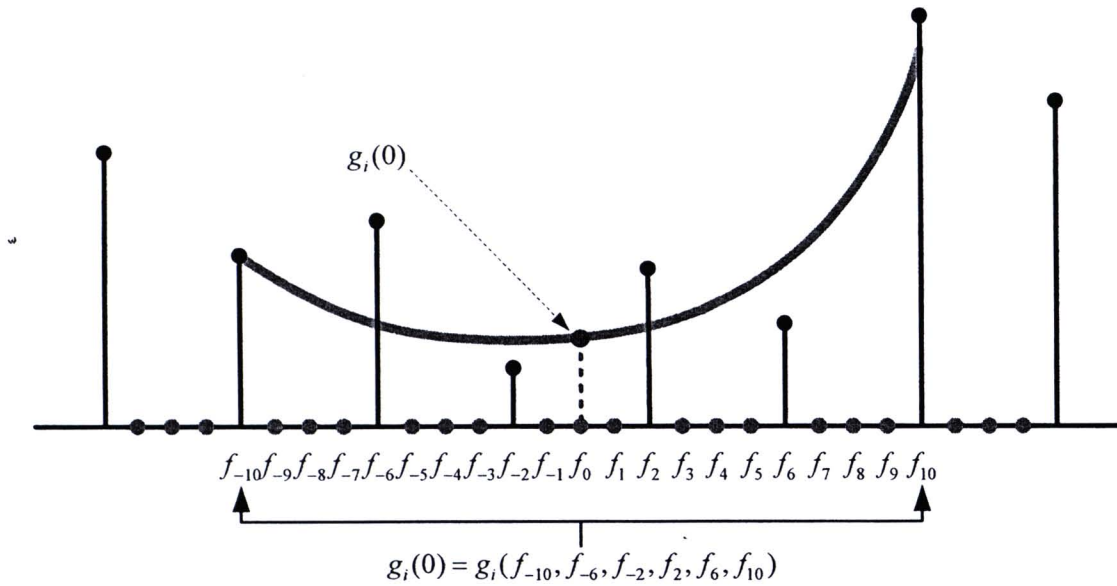
จากสมการที่ (3.10) แสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์ที่มีอยู่ของ α_q ซึ่งสามารถจะช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าของการประมาณฟังก์ชันพหุนามกำลังสองน้อยสุดบนกลุ่มของข้อมูลโดยอาศัยการคำนวณหาผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของกลุ่มข้อมูล f_{i+m} กับค่าสัมประสิทธิ์ α_1

$\dots, \alpha_{(2M+1)}$ เท่านั้น โดยค่าสัมประสิทธิ์ α_q จะขึ้นอยู่กับค่าเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ และค่าเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่สร้างขึ้นนั้นจะเป็นค่าคงที่สำหรับทุก ๆ ตำแหน่งข้อมูล i จึงทำให้เราคำนวณค่า α_q เพียงครั้งเดียวสำหรับการสร้างวงจรกรอง SG นี้ ส่งผลให้กระบวนการดังกล่าวมีความรวดเร็วและมีความซับซ้อนน้อยลง

3.2 การกำหนดแนวทางของวงจรกรองซาวีทกี-โกเลย์แบบวน

เหตุที่มาของการนำวงจรกรอง SG ต้นแบบมาพัฒนาต่อสำหรับการนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวด์สามมิติในขอบข่ายงานของการสแกนแบบเชิงเส้นทางกลนั้นเนื่องมาจาก ที่ผ่านมามีวงจรกรองดังกล่าวได้ถูกพัฒนาสำหรับใช้ในการลดทอนสัญญาณรบกวนในภาพอัลตราซาวด์สองมิติได้อย่างมีประสิทธิภาพ [26, 27] อย่างไรก็ตามดังที่ได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 3.1 ในข้างต้นไว้แล้วว่าการทำงานของวงจรกรอง SG จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบังคับของตำแหน่งข้อมูล t_i นั่นคือวงจรกรอง SG จะสามารถประมาณค่าข้อมูล $\tilde{f}(t_i)$ ได้เฉพาะตำแหน่งที่มีข้อมูล $f(t_i)$ ได้เท่านั้น ยิ่งไปกว่านั้นตำแหน่งของข้อมูลที่จะถูกนำมาใช้ในการพิตเส้นโค้งจะต้องมีระยะห่างระหว่างแต่ละตำแหน่งข้อมูล Δ ที่เท่ากันและเหมือนกัน (Equally and likely spaced data) สำหรับทุก ๆ ตำแหน่ง t_i , แต่ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวด์สามมิติบนพื้นฐานของขอบข่ายงานการสแกนแบบเชิงเส้นทางกลนั้น นอกเหนือจากข้อมูลที่บ้านทิกได้จะถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบจุดแล้ว ชุดภาพปัสแกนแบบตัดขวางที่บ้านทิกได้จะมีลักษณะที่ Sparse หรือก็คือมีความละเอียดของจำนวนภาพในแนวเอลลิพซันที่ต่ำ ไม่เพียงพอที่จะนำมาแสดงผลเป็นภาพสามมิติ ดังนั้นเราจะต้องทำการประมาณค่าในช่วงข้อมูลที่ขาดหายไปเพื่อเพิ่มความละเอียดของข้อมูลภาพ พร้อมทั้งขจัดความผิดเพี้ยนของสัญญาณอันเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนแบบจุดที่เกิดขึ้นในขั้นตอนของการบันทึกข้อมูล

จากเงื่อนไขบังคับที่ได้อธิบายไว้ในข้างต้น ส่งผลทำให้การนำวงจรกรอง SG ต้นแบบมาประยุกต์ใช้งานดังกล่าวไม่อาจทำได้โดยตรง เนื่องจากรูปแบบของระยะห่าง Δ ในแต่ละตำแหน่งข้อมูลเมื่อมาอยู่ในแถวลำดับเชิงปริมาตรสามมิติแล้ว จะมีลักษณะที่ไม่เท่ากันและเปลี่ยนไปในทุก ๆ ตำแหน่ง t_i ดังนั้นระเบียบวิธีที่จะได้พัฒนาต่อไปนี้จะเป็นการพัฒนาและการขยายผลของวงจรกรองซาวีทกี-โกเลย์ต้นแบบให้สามารถลดทอนสัญญาณรบกวนและประมาณค่าข้อมูลที่ขาดหายไปได้ในคราวเดียวกัน รูปที่ 3.4 แสดงตัวอย่างในการพิตฟังก์ชันพหุนามแบบกำลังสองน้อยสุดลงบนจุดข้อมูลหนึ่งมิติ $\{f_{-5}, f_{-3}, f_{-1}, f_1, f_3, f_5\}$ โดยจะเห็นได้ว่าเส้นโค้งดังกล่าวจะถูกนำมาใช้ในการประมาณค่า g_i ณ ตำแหน่ง f_0 ซึ่งเป็นตำแหน่งของข้อมูลที่ขาดหายไป



รูปที่ 3.4 ตัวอย่างการประมาณค่าในช่วงของข้อมูล f_0 ที่ขาดหายไปด้วยวิธีการฟิตเส้นโค้งอันดับสองแบบกำลังสองน้อยสุดสำหรับการนำมาประยุกต์ใช้ในวงจรกรอง CSG

ในหัวข้อนี้จะได้นำเสนอระเบียบวิธีในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติบนพื้นฐานของขอบข่ายงานของการสแกนแบบเชิงเส้นทางกลด้วยวงจรกรอง CSG โดยนอกเหนือจากการที่ระเบียบวิธีของวงจรกรองดังกล่าวนี้จะต้องถูกขยายผลจากวงจรกรอง SG ต้นแบบออกไปเพื่อรองรับข้อมูลในแถวลำดับสามมิติแล้ว ฟังก์ชันชี้บอกการวนซ้ำ (Cyclic indicator function) จะถูกพัฒนาสำหรับใช้เป็นกลไกในการสร้างกลับโดยจะถูกนำไปรวมกับฟังก์ชันจุดประสงค์แบบกำลังสองน้อยสุดเพื่อทำให้วงจรกรอง CSG สามารถทำงานได้ทั้งในรูปแบบของวงจรกรองแบบปรับเรียบ (Smoothing filter) และวงจรกรองประมาณค่าในช่วง (Interpolation filter) ได้ในตัว

ในการกำหนดรูปแบบปัญหาของวงจรกรอง CSG สำหรับนำมาใช้ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติบนพื้นฐานของขอบข่ายงานการสแกนแบบเชิงเส้นทางกลนั้นจะเริ่มจาก กำหนดให้ว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง (Voxel neighborhood) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\{i, j, k\}$ มีค่าเท่ากับ

$$V_{\{i,j,k\}} = \{ v(i+m, j+n, k+o) \}, \quad (3.12)$$

เมื่อ $m = \{-M : M\}$, $n = \{-N : N\}$, และ $o = \{-O : O\}$

สำหรับในแต่ละว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$, จะกำหนดให้ $g_{\{i,j,k\}}$ เป็นฟังก์ชันหนูนามสามมิติโดยมี P เป็นอันดับของ m , Q เป็นอันดับของ n , และ R เป็นอันดับของ o ซึ่งสามารถเขียนนิยามได้ดังสมการ

$$g_{\{i,j,k\}}(m,n,o) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \sum_{r=0}^R a_{\{i,j,k\},\{p,q,r\}} m^p n^q o^r. \quad (3.13)$$

ในการจัดรูปสมการที่ (3.13) ให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์นั้น เราจะกำหนดให้ p , q , และ r เป็นฟังก์ชันดัชนี (Indexing function) ซึ่งมีค่านิยามดังสมการ

$$p(s) = \lfloor (s-1)/((Q+1)(R+1)) \rfloor, \quad (3.14)$$

$$q(s) = \lfloor (s-1)/(R+1) \rfloor \bmod (Q+1), \quad (3.15)$$

$$r(s) = (s-1) \bmod (R+1), \quad (3.16)$$

เมื่อ $s = 1, \dots, (P+1)(Q+1)(R+1)$, และ $\lfloor \rfloor$ คือฟังก์ชัน floor และ $\bmod$ คือฟังก์ชัน modulo, จากฟังก์ชันดัชนีในสมการข้างต้น เราสามารถจัดเรียงค่าสัมประสิทธิ์ $a_{\{i,j,k\},\{p,q,r\}}$ และค่าดัชนีของตำแหน่งข้อมูล $m^p n^q o^r$ ในสมการที่ (3.13) ในรูปแบบของเวกเตอร์ได้ดังต่อไปนี้

$$\vec{a}_{\{i,j,k\}} = [a_{\{i,j,k\},\{p(s),q(s),r(s)\}} ; s = 1, \dots, (P+1)(Q+1)(R+1)]^T, \quad (3.17)$$

และ

$$\vec{b}_{\{i,j,k\}}(m,n,o) = [m^{p(s)} n^{q(s)} o^{r(s)} ; s = 1, \dots, (P+1)(Q+1)(R+1)]^T. \quad (3.18)$$

เวกเตอร์ $\vec{a}_{\{i,j,k\}}$ และเวกเตอร์ $\vec{b}_{\{i,j,k\}}$ ในสมการที่ (3.17) และ (3.18) ทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ (3.13) ขึ้นใหม่ในรูปแบบที่กระชับขึ้นได้ดังสมการ

$$g_{\{i,j,k\}}(m,n,o) = [\vec{b}_{\{i,j,k\}}(m,n,o)]^T \vec{a}_{\{i,j,k\}}. \quad (3.19)$$

จากนั้นเราจะกำหนดให้ $\tilde{f}(i,j,k)$ เป็นเอาต์พุตของวงจรรอง CSG ที่ตำแหน่งว็อกเซล $v(i,j,k)$, การสร้างกลับข้อมูลของวงจรรอง CSG จะคำนวณค่าเอาต์พุต $\tilde{f}(i,j,k)$ ด้วยการฟิตฟังก์ชันพหุนาม $g_{\{i,j,k\}}$ แบบกำลังสองน้อยสุดไปยังความเข้มของข้อมูล $f(i,j,k)$ ที่ถูกเติมด้วยข้อมูลจากชุดภาพปัสแกนในว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$, จากนั้นจึงหาค่าเอาต์พุตของวงจรรองเป็นค่า ณ ตำแหน่งศูนย์กลางของว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$, ซึ่งมีค่า $m = 0$, $n = 0$, และ $o = 0$, โดยเอาต์พุตของวงจรรอง CSG สามารถกำหนดและเขียนได้ดังสมการ

$$\tilde{f}(i,j,k) = g_{\{i,j,k\}}(0,0,0) = a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}. \quad (3.20)$$

สำหรับการแก้สมการหาค่าเอาต์พุต $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ ในสมการที่ (3.20) ข้างต้นนั้น เราจะทำการหาค่าเหมาะที่สุดในฟังก์ชันจุดประสงค์ดังสมการ

$$\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}}) = \sum_{(m,n,o) \in V_{\{i,j,k\}}} I_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \{ e_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \}^2, \quad (3.21)$$

เมื่อ $e_{\{i,j,k\}}(m,n,o)$ คือผลต่างระหว่างฟังก์ชันพหุนาม $g_{\{i,j,k\}}(m,n,o)$ และข้อมูลที่อยู่ในว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $f(i+m, j+n, k+o)$, สมการที่ (3.21) ในข้างต้นนั้น เราได้รวมฟังก์ชันชี้บอกร (Indicator function) $I_{\{i,j,k\}}(m,n,o)$ เข้าไปเพื่อระบุให้ค่าความผิดพลาดกำลังสอง $\{ e_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \}^2$ ที่สอดคล้องข้อมูลในว็อกเซลที่ถูกเติมมีค่าถ่วงน้ำหนักเท่ากับหนึ่ง และระบุให้ค่าความผิดพลาดกำลังสอง $\{ e_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \}^2$ ที่สอดคล้องข้อมูลในว็อกเซลที่ไม่ถูกเติมมีค่าถ่วงน้ำหนักเท่ากับศูนย์ โดยสามารถเขียนฟังก์ชันชี้บอกร $I_{\{i,j,k\}}(m,n,o)$ ได้ดังสมการ

$$I_{\{i,j,k\}}(m,n,o) = \begin{cases} 1, & \text{if } \phi_{\{i,j,k\}}(o) = 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.22)$$

โดย $\phi_{\{i,j,k\}}$ เป็นฟังก์ชันของเลขจำนวนเต็มมีค่าเท่ากับ

$$\phi_{\{i,j,k\}}(o) = |k+o| \bmod N_{SCAN}, \quad (3.23)$$

เมื่อ $o \in [-O:O]$. จากคุณสมบัติเฉพาะทางของฟังก์ชัน modulo ที่มีลักษณะการให้ค่าผลลัพธ์แบบวนดังแสดงในภาคผนวก ข และทำให้เราสามารถพิสูจน์ และสรุปได้ในภาคผนวก ค ได้ว่า

$$I_{\{i,j,k\}}(m,n,o) = I_{\sigma(k)}(o), \quad (3.24)$$

เมื่อ $\sigma(k) = k \bmod N_{SCAN}$, จากสมการที่ (3.24) นี้ทำให้เราสามารถนำฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (3.10) มาเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}}) = \sum_{(m,n,o) \in V_{\{i,j,k\}}} I_{\sigma(k)}(o) \{ e_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \}^2, \quad (3.25)$$

ในการหาค่า $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (3.25) มีค่าน้อยที่สุดแบบตรงไปตรงมานั้น โดยส่วนมากจะใช้เวลาในการคำนวณที่ค่อนข้างสูงอันมีสาเหตุมาจากจำนวนว็อกเซลที่จะถูกนำมาใช้ในฟังก์ชันจุดประสงค์นั้นมีปริมาณที่มาก ดังนั้นในการคำนวณหาค่า $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ อย่างมีประสิทธิภาพนั้น เราจะเลือกใช้หลักการตามที่ได้พัฒนามาในระเบียบวิธีของวงจรกรองชาวีสกี-โกเลย์หนึ่งมิติ [21] ซึ่งจะทำให้เราสามารถคำนวณหาค่า $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ ด้วยวิธีผลรวมเชิงเส้นกับข้อมูลที่ถูกเติมในว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$ ได้โดยง่าย สำหรับการได้มาซึ่งการคำนวณของผลรวมเชิงเส้นเพื่อให้ได้ค่าเอาต์พุต $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ นั้น เราจะเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}})$ ในสมการที่ (3.25) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์กำลังสอง (Quadratic matrix) ของตัวแปร $a_{\{i,j,k\},\{p,q,r\}}$ จากนั้นจึงจะแก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์ $a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ ต่อไป

เช่นเดียวกันกับการใช้ฟังก์ชันดัชนีในสมการที่ (3.14), (3.15) และ (3.16) เราจะกำหนดให้ m , n , และ o เป็นฟังก์ชันดัชนีซึ่งนิยามโดย

$$m(t) = \lfloor (t-1)/((2N+1)(2O+1)) \rfloor - M, \quad (3.26)$$

$$n(t) = \lfloor (t-1)/(2O+1) \rfloor \bmod (2N+1) - N, \quad (3.27)$$

$$o(t) = (t-1) \bmod (2O+1) - O, \quad (3.28)$$

เมื่อ $t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)$, จากนั้นเราจะเขียนฟังก์ชันพหุนาม $g_{\{i,j,k\}}(m,n,o)$ ในสมการที่ (3.19) และข้อมูลภาพ $f(i+m, j+n, k+o)$ ที่เกี่ยวข้องกับสมการที่ (3.25) ให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ดังสมการ

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\{i,j,k\}} &= [(\vec{b}_{\{i,j,k\}}(m(t), n(t), o(t)))^T \vec{a}_{\{i,j,k\}}] ; \\ &t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)]^T, \end{aligned} \quad (3.29)$$

และ

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\{i,j,k\}} &= [f(i+m(t), j+n(t), k+o(t)) ; \\ &t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)]^T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมตริกซ์จุดประสงค์ (Design matrix) ขนาด $(2M+1)(2N+1)(2O+1) \times (P+1)(Q+1)(R+1)$ โดยมีค่าในแต่ละตำแหน่ง (ts) เท่ากับ

$$\mathbf{A}_{ts} = \{m(t)\}^{p(s)} \{n(t)\}^{q(s)} \{o(t)\}^{r(s)}. \quad (3.31)$$

โดยเมตริกซ์จุดประสงค์ในสมการที่ (3.31) ทำให้เราสามารถเขียนเวกเตอร์ของฟังก์ชันพหุนามในสมการที่ (3.29) ได้เป็น

$$\vec{g}_{\{i,j,k\}} = \mathbf{A} \vec{a}_{\{i,j,k\}}. \quad (3.32)$$

จากสมการที่ (3.29), (3.30) และ (3.32) เราสามารถเขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ $\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}})$ ในสมการที่ (3.25) ใหม่ได้ดังนี้

$$\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}}) = \{\vec{e}_{\{i,j,k\}}\}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \{\vec{e}_{\{i,j,k\}}\}. \quad (3.33)$$

โดยที่ $\vec{e}_{\{i,j,k\}}$ มีค่าเท่ากับ $(\vec{f}_{\{i,j,k\}} - \mathbf{A} \vec{a}_{\{i,j,k\}})$ และ $\mathbf{W}_{\sigma(k)}$ คือเมตริกซ์ทแยง (Diagonal matrix) ที่มีค่าดังสมการ

$$\mathbf{W}_{\sigma(k)} = \text{diag}\{ I_{\sigma(k)}(o(t)) ; t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1) \}. \quad (3.34)$$

จะสังเกตเห็นได้ว่าลำดับของอาร์กิวเมนต์ $o(t)$ ที่ใช้ในเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $\mathbf{W}_{\sigma(k)}$ ในสมการข้างต้นจะเป็นอิสระกับค่าอาร์กิวเมนต์ k ในฟังก์ชัน σ . โดยเวกเตอร์ผลเฉลย $\vec{a}_{\{i,j,k\}}$ ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ $\varepsilon(\vec{a}_{\{i,j,k\}})$ ในสมการที่ (3.33) มีค่าน้อยที่สุดสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$\vec{a}_{\{i,j,k\}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \vec{f}_{\{i,j,k\}}). \quad (3.35)$$

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในสมการที่ (3.20) เอาต์พุตของวงจรกรอง CSG จะมีค่าเท่ากับ $g_{\{i,j,k\}}(0,0,0) = a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}}$ ดังนั้นเราสามารถเขียนแสดงค่าเอาต์พุต $g_{\{i,j,k\}}(0,0,0)$ ได้จากนิยามของเวกเตอร์ผลเฉลยในสมการที่ (3.35) ข้างต้นให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} g_{\{i,j,k\}}(0,0,0) &= a_{\{i,j,k\},\{0,0,0\}} \\ &= \sum_{t=1}^{(2M+1)(2N+1)(2O+1)} \alpha_{\{i,j,k\},t} f(i+m(t), j+n(t), k+o(t)), \end{aligned} \quad (3.36)$$

โดย

$$\alpha_{\{i,j,k\},t} = \left\{ (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \vec{u}_t) \right\}_1. \quad (3.37)$$

สัญลักษณ์ $\vec{u}_t$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง t th, ส่วน $\{ \}_1$ คือสัญลักษณ์ที่ระบุว่าเป็นการเลือกค่าตัวแรกของเวกเตอร์ในสมการที่ (3.37).

จากสมการที่ (3.36) จะสังเกตเห็นได้ว่า เอาต์พุตของวงจรกรอง CSG สามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยวิธีผลรวมเชิงเส้นระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ กับข้อมูล $f(i+m, j+n, k+o)$ ในว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$. ยิ่งไปกว่านั้นค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ ที่คำนวณได้ยังขึ้นอยู่กับเมตริกซ์จุดประสงค์ $\mathbf{A}$ และเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $\mathbf{W}_{\sigma(k)}$ โดยเมตริกซ์ทั้งสองนี้สามารถสร้างขึ้นมารอไว้ได้ในกรรมวิธีล่วงหน้า ทำให้เราสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ ดังกล่าวก่อนนำไปใช้ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติ

ยิ่งไปกว่านั้นจะเห็นได้ว่าเมตริกซ์จุดประสงค์ $\mathbf{A}$ จะเป็นเมตริกซ์คงที่สำหรับทุกๆ ว็อกเซลบริเวณในใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$ ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ จึงขึ้นอยู่กับเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $\mathbf{W}_{\sigma(k)}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่งของว็อกเซลที่ถูกเติมในแต่ละว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$ ที่แตกต่างกัน, ส่งผลทำให้เราสามารถแบ่งกลุ่มค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ ตามจำนวนกลุ่มของเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $\mathbf{W}_{\sigma(k)}$ ออกไปได้ N_{SCAN} กลุ่มด้วยคุณสมบัติแบบวนของฟังก์ชัน modulo ดังที่ได้พิสูจน์ไว้ในภาคผนวก ค, คุณสมบัติต่างๆ เหล่านี้ชี้ให้เราเห็นว่าการเพียงการคำนวณเซตของค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_{\{i,j,k\},t}$ จำนวน N_{SCAN} ชุดไว้ล่วงหน้าสำหรับนำไปใช้ในการดำเนินการสร้างกลับภาพอัลตราซาวนด์สามมิติทั้งรูปภาพ ส่งผลให้กระบวนการดังกล่าวมีความรวดเร็วและมีความซับซ้อนในการคำนวณที่น้อยลง โดยในหัวข้อถัดไปจะได้กล่าวถึงการนำเร็กกู-

ลาร์เรซชันเทคนิคเข้ามาผสมผสานกับวงจรกรอง CSG เพื่อให้วงจรกรองดังกล่าวมีประสิทธิภาพ ในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวด์สามมิติให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

3.3 การกำหนดแนวทางของวงจรกรองเร็กกูลาร์ไรซ์ซาว์สกี-โกเลย์ แบบวน



ในหัวข้อที่ผ่านมาได้นำเสนอวงจรกรอง CSG ซึ่งเป็นการพัฒนาระเบียบวิธีของวงจรกรอง SG ต้นแบบในการสร้างกลับภาพอัลตราซาวด์สามมิติในขอบข่ายงานของการสแกนแบบเชิงเส้น ทางกล โดยให้วงจรกรอง CSG ดังกล่าวสามารถประมาณค่าในช่วง (Interpolate) ในว็อกเซลที่ไม่ถูกเติม (Unfilled voxel) และลดทอนสัญญาณรบกวนแบบจุดในว็อกเซลที่ถูกเติม (Filled voxel) ในหัวข้อนี้จะได้พัฒนาวงจรกรอง CRSG ด้วยการนำระเบียบวิธีของวงจรกรอง CSG มาขยายผลโดยการเพิ่มฟังก์ชันในการเร็กกูลาร์ไรซ์เข้าไปในฟังก์ชันจุดประสงค์แบบกำลังสองน้อยสุด เพื่อถ่วงดุลกันระหว่างระดับความราบเรียบในการลดทอนสัญญาณรบกวนและระดับความสามารถในการรักษาขอบภาพให้ใกล้เคียงกับข้อมูลที่บันทึกได้

โดยเริ่มแรกเราจะทำการปรับปรุงฟังก์ชันจุดประสงค์ของวงจรกรอง CSG ในสมการที่ (3.25) ขึ้นใหม่ โดยในระเบียบวิธีการสร้างกลับของวงจรกรอง CRSG นี้ เราจะกำหนดให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ $\xi_{\{i,j,k\}}(\vec{a})$ สำหรับการนำมาหาค่าที่น้อยที่สุดได้ดังสมการ

$$\xi_{\{i,j,k\}}(\vec{a}) = \varepsilon_{\{i,j,k\}}(\vec{a}) + \lambda \zeta_{\{i,j,k\}}(\vec{a}), \quad (3.38)$$

โดย λ คือพารามิเตอร์ในการเร็กกูลาร์ไรซ์โดยความมากน้อยของค่าดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับระดับของสัญญาณรบกวนภายในภาพ ฟังก์ชันในพจน์แรกของสมการที่ (3.38) ด้านขวามือคือฟังก์ชันจุดประสงค์ของวงจรกรอง CSG ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ในขณะที่ฟังก์ชันในพจน์ที่สองคือฟังก์ชันในการเร็กกูลาร์ไรซ์ ซึ่งจะถูกรวบรวมตามองค์ความรู้ล่วงหน้า (A priori knowledge) ของผลเฉลย $\vec{a}_{\{i,j,k\}}$ ว่าเราต้องการให้ผลเฉลยที่เราต้องการมีแนวโน้มออกมาในลักษณะใด [28, 29] โดยในการพัฒนาวงจรกรอง CRSG นี้เราจะกำหนดให้ฟังก์ชันในการเร็กกูลาร์ไรซ์มีค่าเท่ากับ

$$\zeta_{\{i,j,k\}}(\vec{a}) = I_{\{i,j,k\}}(m,n,o) \left\{ (D_1 g_{\{i,j,k\}}(m,n,o))^2 + (D_2 g_{\{i,j,k\}}(m,n,o))^2 + (D_3 g_{\{i,j,k\}}(m,n,o))^2 \right\}. \quad (3.39)$$

เมื่อ D_1 , D_2 , และ D_3 คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันพหุนาม $g_{\{i,j,k\}}$ เทียบกับ m , n , และ o ตามลำดับ โดยฟังก์ชันในการเร็กกูลาร์ไรซ์ในสมการข้างต้นนี้ได้ถูก

ออกแบบไว้เพื่อลดทอนแรงกระเพื่อม (Ripple) ของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งในฟังก์ชันพหุนาม $g_{\{i,j,k\}}$ ที่จะไปติดตามความแรงของสัญญาณรบกวนแบบจุดภายในภาพ [30]

จากการใช้ฟังก์ชันดัชนีของตัวแปรตำแหน่งข้อมูล m , n , และ o ตามที่ได้นิยามไว้ในสมการที่ (3.26), (3.27), และ (3.28) ตามลำดับ เราสามารถจัดเรียง $D_1 g_{\{i,j,k\}}$, $D_2 g_{\{i,j,k\}}$, และ $D_3 g_{\{i,j,k\}}$ ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ได้ดังสมการ

$$\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1 = [D_1 g_{\{i,j,k\}}(m(t), n(t), o(t)) ; \quad (3.40)$$

$$t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)]^T,$$

$$\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2 = [D_2 g_{\{i,j,k\}}(m(t), n(t), o(t)) ; \quad (3.41)$$

$$t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)]^T,$$

$$\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3 = [D_3 g_{\{i,j,k\}}(m(t), n(t), o(t)) ; \quad (3.42)$$

$$t = 1, \dots, (2M+1)(2N+1)(2O+1)]^T.$$

จากการนิยามเวกเตอร์ $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1$, $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2$, และ $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3$ ในสมการที่ (3.40), (3.41), และ (3.42) เราสามารถเขียนแสดงฟังก์ชันในการเร็กกูลาร์ไรซ์ $\zeta_{\{i,j,k\}}(\bar{a})$ ในสมการที่ (3.38) ได้ดังสมการ

$$\zeta_{\{i,j,k\}}(\bar{a}) = \mathbf{W}_{\sigma(k)} \{ (\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1)^T \bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1 + (\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2)^T \bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2 + (\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3)^T \bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3 \}. \quad (3.43)$$

และเช่นเดียวกันกับการจัดรูปแบบของเวกเตอร์ฟังก์ชันพหุนาม $\bar{g}_{\{i,j,k\}}$ ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์จุดประสงค์ $\mathbf{A}$ และเวกเตอร์ผลเฉลย $\bar{a}_{\{i,j,k\}}$ ในสมการที่ (3.32) ดังนั้นเราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1$, $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2$, และ $\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3$ ให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวได้ดังสมการ

$$\bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^1 = \mathbf{B} \bar{a}_{\{i,j,k\}}, \quad \bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^2 = \mathbf{C} \bar{a}_{\{i,j,k\}}, \quad \text{and} \quad \bar{\delta}_{\{i,j,k\}}^3 = \mathbf{D} \bar{a}_{\{i,j,k\}}, \quad (3.44)$$

เมื่อ $\mathbf{B}$ คือเมตริกซ์จุดประสงค์ขนาด $(2M+1)(2N+1)(2O+1) \times (P+1)(Q+1)(R+1)$ และมีค่าในแต่ละตำแหน่ง (ts) เท่ากับ

$$\mathbf{B}_{ts} = p(s) m(t)^{|p(s)-1|} n(t)^{q(s)} o(t)^{r(s)}, \quad (3.45)$$

เมื่อ $\mathbf{C}$ คือเมตริกซ์จุดประสงค์ขนาด $(2M+1)(2N+1)(2O+1) \times (P+1)(Q+1)(R+1)$ และมีค่าในแต่ละตำแหน่ง (ts) เท่ากับ

$$\mathbf{C}_{ts} = q(s) m(t)^{p(s)} n(t)^{|q(s)-1|} o(t)^{r(s)}, \quad (3.46)$$

และ $\mathbf{D}$ คือเมตริกซ์จุดประสงค์ขนาด $(2M+1)(2N+1)(2O+1) \times (P+1)(Q+1)(R+1)$ โดยมีค่าในแต่ละตำแหน่ง (ts) เท่ากับ

$$\mathbf{D}_{ts} = r(s)m(t)^{p(s)}n(t)^{q(s)}o(t)^{|r(s)-1|}. \quad (3.47)$$

จากนิยามของเวกเตอร์ $\vec{\delta}_{\{i,j,k\}}^1$, $\vec{\delta}_{\{i,j,k\}}^2$, และ $\vec{\delta}_{\{i,j,k\}}^3$ ในสมการที่ (3.44) เราสามารถเขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ในสมการที่ (3.38) ได้ใหม่ดังสมการ

$$\begin{aligned} \xi_{\{i,j,k\}}(\vec{a}) = \varepsilon_{\{i,j,k\}}(\vec{a}) + \lambda \mathbf{W}_{\sigma(k)} \left(\vec{a}_{\{i,j,k\}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \vec{a}_{\{i,j,k\}} + \vec{a}_{\{i,j,k\}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \vec{a}_{\{i,j,k\}} \right. \\ \left. + \vec{a}_{\{i,j,k\}}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \vec{a}_{\{i,j,k\}} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

ดังนั้นเวกเตอร์ผลเฉลย $\vec{a}_{\{i,j,k\}}$ ของวงจรรอง CSG ที่ทำให้สมการที่ (3.48) มีค่าน้อยที่สุดจะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\{i,j,k\}} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{A} + \lambda (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{C} \right. \\ \left. + \mathbf{D}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{D}) \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \vec{f}_{\{i,j,k\}}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

และเช่นเดียวกับการหาค่าเอาต์พุตของวงจรรอง CSG ในหัวข้อก่อนหน้านี้ เอาต์พุตของวงจรรอง CSG, $g_{\{i,j,k\}}(0,0,0)$ จะมีค่าเท่ากับ

$$g_{\{i,j,k\}}(0,0,0) = \sum_{t=1}^{(2M+1)(2N+1)(2O+1)} \beta_{\{i,j,k\},t} f(i+m(t), j+n(t), k+o(t)), \quad (3.50)$$

โดย

$$\begin{aligned} \beta_{\{i,j,k\},t} = \left\{ \left(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{A} + \lambda (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{C} \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{D}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \mathbf{D}) \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_{\sigma(k)} \vec{u}_t \right\}_1. \end{aligned} \quad (3.51)$$

เมื่อ $\vec{u}_t$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง t th, ส่วน $\{ \}_1$ คือสัญลักษณ์ที่ระบุว่าเป็นการเลือกค่าตัวแรกของเวกเตอร์ในสมการที่ (3.51)

ค่าสัมประสิทธิ์ $\beta_{\{i,j,k\}}$ ของวงจรรอง CSG สามารถคำนวณได้ในกรรมวิธีล่วงหน้า (Pre-processing) เช่นเดียวกับค่า $\alpha_{\{i,j,k\}}$ ของวงจรรอง CSG ก่อนการดำเนินการสร้างกลับภาพอัลตราซาวด์สามมิติ และค่าเอาต์พุตของวงจรรองสามารถคำนวณได้ในรูปของการสังวัตนาการหรือผลการประสาน (Convolution) ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรอง $\beta_{\{i,j,k\}}$ กับข้อมูลภาพ $f_{\{i,j,k\}}$ ในว็อกเซลบริเวณใกล้เคียง $V_{\{i,j,k\}}$, ทำให้วงจรรอง CSG มีความซับซ้อนในการคำนวณค่าเอาต์พุตเช่นเดียวกับวงจรรอง CSG