บทที่ 2

ทฤษฎีและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการหาช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนของลักษณะที่สนใจในประชากรสำหรับการชักตัวอย่างเชิงซ้อนโดยดัดแปลงวิธีการของวิลสัน มีทฤษฎีและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทฤษฎีของการชักตัวอย่าง
2. การหาขนาดตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพ
3. การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง
4. การแจกแจงของค่าสัดส่วนตัวอย่าง
5. ทฤษฎีขีดจำกัดกลาง

1.ทฤษฎีของการชักตัวอย่าง (Sampling Theory)

ทฤษฎีของการชักตัวอย่าง คือ ทฤษฎีที่ว่าด้วยการชักตัวอย่างจากประชากรและการหาค่าประมาณจากตัวอย่าง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการชักตัวอย่างให้สามารถเลือกวิธีการที่เหมาะสมและประมาณค่าลักษณะที่สนใจในประชากรอย่างมีคุณภาพสูงสุด ภายใต้ข้อจำกัดด้านทรัพยากร โดยการกำหนดวิธีการชักตัวอย่างและวิธีการประมาณค่าประชากรจากข้อมูลตัวอย่างหรือที่เรียกว่าแผนแบบการเลือกตัวอย่าง (Sample Design) ดังนั้นทฤษฎีของการชักตัวอย่าง จึงเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการกำหนดแผนแบบการชักตัวอย่างที่ดี

1.1 การชักตัวอย่างโดยใช้ความน่าจะเป็น (Probability Sampling)

เป็นวิธีการชักตัวอย่างที่สามารถกำหนดความน่าจะเป็นของตัวอย่างขนาด n แต่ละตัวอย่างที่เป็นไปได้จากการเลือกด้วยวิธีการนั้น ๆ และใช้ความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างแต่ละตัวอย่างที่เป็นไปได้จะถูกเลือกมาเป็นส่วนประกอบในการสร้างตัวประมาณ ทำให้สามารถหาคุณภาพของ

ตัวประมาณด้วยค่าวัดเชิงปริมาณที่เป็นที่ยอมรับทั่วไปได้ และสร้างความเชื่อถือได้ของข้อสรุป จึงมีข้อเสนอแนะว่าการเลือกตัวอย่างทั่วไปควรใช้วิธีการชักตัวอย่างโดยใช้ความน่าจะเป็น อย่างไรก็ดีในทางปฏิบัติอาจมีข้อจำกัดบางประการที่ทำให้ไม่สามารถใช้การชักตัวอย่างโดยใช้ความน่าจะเป็นได้ในทุกโอกาส ในกรณีเหล่านั้นอาจพิจารณาการชักตัวอย่างที่ไม่ใช้ความน่าจะเป็น แต่ต้องเข้าใจว่าลักษณะของการชักตัวอย่างแบบนี้ไม่สามารถอาศัยวิธีการทางสถิติในการอธิบายคุณภาพของตัวประมาณได้ วิธีการชักตัวอย่างโดยใช้ความน่าจะเป็นมี 4 วิธีดังนี้

1.1.1 การชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว (Simple Random Sampling : SRS)

การชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว เป็นวิธีการชักตัวอย่างที่ให้แต่ละหน่วยในประชากรมีโอกาสถูกเลือกเท่าๆกันในแต่ละครั้งของการชักตัวอย่าง ถ้าประชากรมีขนาด N และต้องการชักตัวอย่างขนาด n หน่วย โดยเลือกทีละหน่วย ซึ่งการชักตัวอย่างมี 2 แบบคือ การชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียวแบบคืนที่ (Simple Random Sampling With Replacement) ซึ่งเป็นวิธีการที่ตัวอย่างถูกเลือกซ้ำได้ โดยที่จำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้มี ${}^{N+n-1}C_n$ ชุดซึ่งแต่ละชุดมีโอกาสถูกเลือกเป็นชุดตัวอย่างเท่ากันด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{{}^{N+n-1}C_n}$ และการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียวแบบไม่คืนที่ (Simple Random Sampling Without Replacement) ซึ่งเป็นวิธีที่เลือกได้หน่วยตัวอย่างหน่วยใดแล้ว จะไม่นำหน่วยนั้นใส่กลับคืนไปในประชากรอีก จึงไม่มีโอกาสเกิดหน่วยซ้ำในตัวอย่าง โดยที่จำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้มี ${}^{N}C_n$ ชุด ซึ่งแต่ละชุดมีโอกาสถูกเลือกเป็นชุดตัวอย่างเท่ากันด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{{}^{N}C_n}$

1.1.2 การชักตัวอย่างแบบมีระบบ (Systematic Sampling)

การชักตัวอย่างแบบมีระบบ เป็นวิธีการชักตัวอย่างที่มีการกำหนดระบบที่ชัดเจน สมมติว่าประชากรมีขนาด N และต้องการชักตัวอย่างขนาด n หน่วย ถ้าให้ k เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงกับ $\frac{N}{n}$ มากที่สุด การชักตัวอย่างแบบมีระบบจะเริ่มต้นด้วย การให้เลขที่แก่หน่วยต่างๆในประชากรโดยเรียงลำดับจาก 1 ถึง N แล้วเลือกตัวเลขสุ่ม 1 ตัว จากเลข 1 ถึง k สมมติว่าเลขสุ่มที่ได้คือเลข r หน่วยที่มีเลขที่ r, r + k, r + 2k, … จะตกเป็นตัวอย่าง เช่น ถ้า N = 1000, n = 50

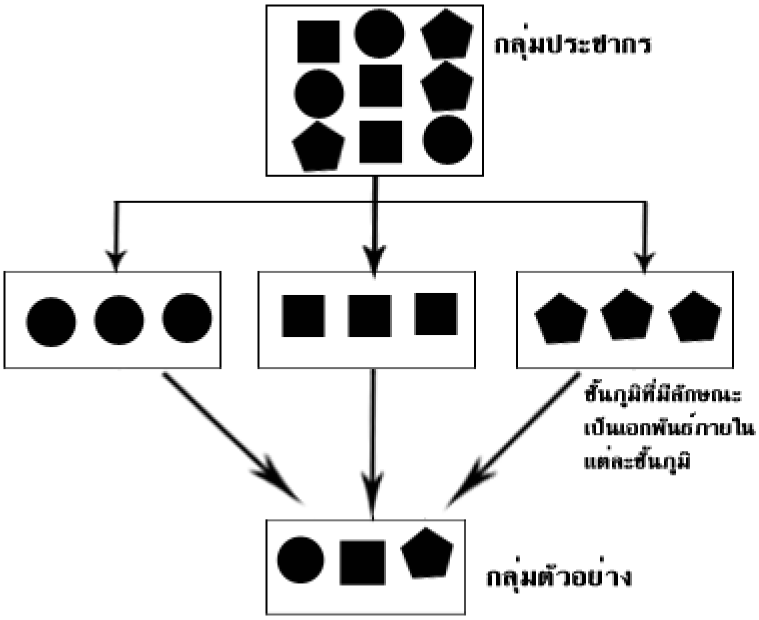
จะได้ k=1000/50 = 20 สมมติว่าเลือกเลขสุ่มหนึ่งตัวจาก 1 ถึง 20 ได้เลข 13 หน่วยที่มีหมายเลขเป็น 13, 33,53,73,…,993 จะเป็นตัวอย่าง รวมทั้งสิ้น 50 หน่วย เป็นต้น

การชักตัวอย่างแบบมีระบบ เป็นวิธีการชักตัวอย่างที่ค่อนข้างจะมีความสะดวกในการดำเนินการ ผู้เลือกตัวอย่างจะสามารถทำความเข้าใจกับวิธีการชักได้ค่อนข้างง่าย โอกาสที่จะทำผิดพลาดมีน้อย เพราะเป็นการชักตัวอย่างที่มีการกำหนดระบบที่ชัดเจน เช่น มีบ้านในหมู่บ้านหนึ่งอยู่จำนวน 100 หลังต้องการเก็บรวบรวมข้อมูลของบ้านตัวอย่าง 20 หลังผู้เลือกตัวอย่างเก็บรวบรวมข้อมูลจากบ้านหลังที่ตกเป็นตัวอย่างแรกซึ่งได้มาจากการชักตัวอย่างสุ่มเชิงเดียวของบ้านหลังที่ 1 ถึงบ้านหลังที่ 5 และเลือกบ้านทุกๆหลังที่ห้าถัดจากบ้านหลังที่ตกเป็นตัวอย่างแรกจนครบ 20 หลัง เป็นต้น การทำเช่นนี้ทำให้สะดวกแก่ผู้เก็บรวบรวมข้อมูลในการหาบ้านตามบ้านเลขที่ที่ถูกเลือกมาเป็นตัวอย่าง หรือให้ผู้เก็บรวบรวมข้อมูลกำหนดบ้านตัวอย่างด้วยการเลือกเลขสุ่มในงานสนาม เป็นต้น นอกจากนี้การชักตัวอย่างแบบมีระบบอาจทำให้ประหยัดเวลาได้ โดยเฉพาะเวลาในการเตรียมกรอบตัวอย่างหรือรายละเอียดอื่น การชักตัวอย่างแบบมีระบบทำให้ได้หน่วยที่ตกเป็นตัวอย่างกระจายไปทั่วประชากร

1.1.3 การชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น (Stratified Sampling)

การชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น เป็นการชักตัวอย่างที่มีการนำประชากรที่มีขนาด N หน่วยมาแบ่งออกเป็นกลุ่มๆ โดยเรียกแต่ละกลุ่มว่าชั้นภูมิ (Strata) โดยให้หน่วยตัวอย่างที่อยู่ภายในชั้นภูมิเดียวกันมีลักษณะที่สนใจศึกษาเหมือนกันหรือใกล้เคียงกัน ซึ่งเรียกว่าชั้นภูมิมีลักษณะเป็นเอกพันธ์ (Homogeneous)ภายใน แต่หน่วยตัวอย่างที่อยู่ต่างชั้นภูมิกันมีลักษณะแตกต่างกันมากที่สุด และแต่ละหน่วยตัวอย่างในประชากรจะต้องอยู่ในชั้นภูมิใดชั้นภูมิหนึ่งเท่านั้น สำหรับการชักตัวอย่างจะชักจากแต่ละชั้นภูมิอย่างเป็นอิสระกัน เช่น ชั้นภูมิที่ 1 อาจใช้วิธีการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว ชั้นภูมิที่ 2 อาจใช้วิธีการชักตัวอย่างแบบมีระบบ จึงถือเสมือนว่าแต่ละชั้นภูมิเป็นประชากรย่อย ขนาดตัวอย่างทั้งหมดจะเป็นผลบวกของขนาดตัวอย่างที่สุ่มจากแต่ละชั้นภูมิ การประมาณพารามิเตอร์ทำได้โดยการรวมค่าประมาณของสิ่งที่สนใจจากชั้นภูมิต่างๆ

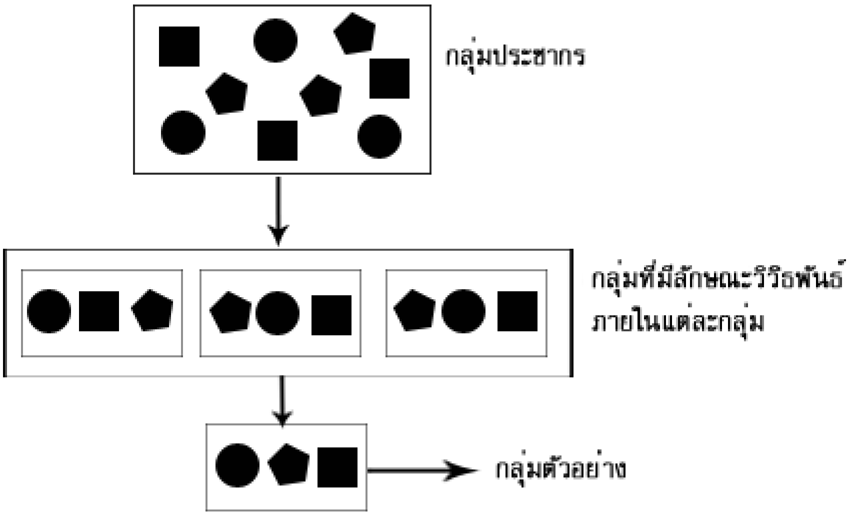
ให้ $N_1 , N_2 , \dots , N_L$ เป็นขนาดประชากรของชั้นภูมิที่ 1, 2, …, L ตามลำดับ โดยที่ $N_1 + N_2 + \dots + N_L = N$ ถ้าเลือกตัวอย่างขนาด $n_1 , n_2 , \dots , n_L$ จากชั้นภูมิที่ 1, 2 , …, L ตามลำดับ โดยที่ $n_1 + n_2 + n_L = n$ และแสดงแผนภาพการชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น ดังนี้



ภาพที่ 2.1 แสดงการชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น

1.1.4 การชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling)

การชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มมีวิธีการตรงข้ามกับการชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น กล่าวคือ แทนที่จะแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิ โดยให้หน่วยตัวอย่างที่อยู่ภายในชั้นภูมิเดียวกันมีลักษณะที่สนใจศึกษาเหมือนกันหรือใกล้เคียงกัน แต่หน่วยตัวอย่างที่อยู่ต่างชั้นภูมิกันมีลักษณะแตกต่างกันมากที่สุด แต่การชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มเป็นการชักตัวอย่างที่มีการแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มย่อยๆ (Cluster) โดยให้หน่วยตัวอย่างที่อยู่ในกลุ่มย่อยๆ เดียวกันมีลักษณะที่สนใจศึกษาครบทุกลักษณะหรือมีลักษณะที่สนใจศึกษาที่แตกต่างกันคละกันอยู่ภายในกลุ่มย่อยๆ เดียวกัน ซึ่งเรียกว่ากลุ่มที่มีลักษณะวิวิธพันธ์ (Heterogeneous)ภายในแต่ละกลุ่ม และระหว่างกลุ่มย่อยๆ มีลักษณะที่สนใจศึกษาเหมือนกันหรือใกล้เคียงกัน และขนาดของกลุ่มย่อยในการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มมีขนาดเล็กกว่าขนาดของชั้นภูมิในการชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น ซึ่งจะแสดงแผนภาพการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มดังนี้



ภาพที่ 2.2 แสดงการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม

การชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มจากประชากรไม่จำเป็นต้องชักตัวอย่างจากทุกกลุ่มย่อยเหมือนกับ การชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น เนื่องจากหน่วยตัวอย่างที่อยู่ภายในกลุ่มย่อยๆเดียวกันนี้มีลักษณะที่สนใจศึกษาครบทุกลักษณะเหมือนลักษณะประชากร ดังนั้นการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มจึงเป็นการชักตัวอย่างมาศึกษาเพียงบางกลุ่มย่อยเท่านั้น โดยจะทำการศึกษาจากทุกหน่วยที่อยู่ภายในกลุ่มย่อยที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่างและจะเรียกแผนการชักตัวอย่างนี้ว่าการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มขั้นเดียว (One-Stage Cluster Sampling) แต่ถ้าทำการศึกษาจากบางหน่วยที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่างซึ่งอยู่ภายในกลุ่มย่อยที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่างและจะเรียกแผนการชักตัวอย่างนี้ว่าการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มสองขั้น (Two-Stage Cluster Sampling)

เช่น ในกรณีที่ต้องการเลือกตัวอย่างครัวเรือนในกรุงเทพมหานคร หากใช้วิธีการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว จะต้องมีกรอบตัวอย่างที่แสดงครัวเรือนทุกครัวเรือนในกรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นที่แน่นอนว่า การหากรอบตัวอย่างไม่ว่าจะเป็นรายชื่อครัวเรือน หรือแผนที่แสดงที่ตั้งของทุกครัวเรือนย่อมกระทำได้ยากและประสบปัญหาอุปสรรคมากมายโดยเฉพาะข้อจำกัดของทรัพยากรและเงื่อนเวลา ถ้าไม่สามารถหากรอบตัวอย่างได้ ก็จะไม่สามารถชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียวได้ แต่ถ้าพิจารณาว่าครัวเรือนจะต้องตั้งอยู่บนพื้นที่ และอาจนำเขตของกรุงเทพมหานครมาจัดแบ่งออกเป็นพื้นที่เล็ก ๆ ที่เรียกว่าเขตการแจงนับ (Enumeration District) หรือเขตย่อยที่มีอาณาบริเวณชัดเจนสามารถแสดงพื้นที่เขตย่อยนี้ได้ในแผนที่ และหาอาณาบริเวณในภาคสนามได้ การเลือกตัวอย่างครัวเรือนกรุงเทพมหานครก็อาจกระทำได้โดยการเลือกเขตย่อยหรือเขตการแจงนับขึ้นมาจำนวนหนึ่ง ถ้าแบ่งเขตกรุงเทพมหานครออกเป็นเขตย่อยจำนวน N เขตย่อย

โดยแต่ละเขตย่อยมีครัวเรือนอยู่จำนวนหนึ่ง เลือกตัวอย่างออกมา n เขตย่อย แล้วทำการสร้างกรอบตัวอย่างของครัวเรือนในเขตย่อยที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่าง หากเก็บรวบรวมข้อมูลครัวเรือนจากทุกครัวเรือนในเขตตัวอย่าง จะเรียกแผนการชักตัวอย่างนี้ว่าการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มขั้นเดียว (One-Stage Cluster Sampling) เนื่องจากเป็นการชักตัวอย่างในขั้นเดียวคือเขตย่อยเท่านั้น แต่ถ้าเลือกตัวอย่างครัวเรือนในเขตย่อยตัวอย่างแทนที่จะใช้ทุกครัวเรือนในเขตนั้น ก็จะเป็นการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มสองขั้น (Two-Stage Cluster Sampling) เพราะมีการชักตัวอย่างในสองขั้น โดยขั้นที่หนึ่ง คือ เขต และขั้นที่สอง คือ ครัวเรือน หรือถ้าพิจารณาการเลือกตัวอย่างครัวเรือนในเขตภูมิภาคของประเทศไทย อาจจะทำการเลือกตัวอย่างจังหวัดก่อน แล้วเลือกอำเภอในจังหวัดที่ตกเป็นตัวอย่าง แล้วเลือกหมู่บ้านในอำเภอเป็นตัวอย่าง และขั้นสุดท้ายเลือกครัวเรือนในหมู่บ้านเป็นตัวอย่าง แผนการชักตัวอย่างนี้จะเรียกว่าการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มสี่ขั้น (Four-Stage Cluster Sampling) โดยหน่วยตัวอย่างในขั้นที่หนึ่งคือจังหวัด ขั้นที่สองคืออำเภอ ขั้นที่สามคือหมู่บ้าน และขั้นที่สี่คือครัวเรือน สำหรับการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มที่มากกว่าหนึ่งขั้นนี้อาจเรียกในชื่อรวมได้ว่าการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มหลายขั้น (Muti-Stage Cluster Sampling) นอกจากนี้ หน่วยตัวอย่างในแต่ละขั้นจะมีชื่อเรียกกันแตกต่างออกไป เช่น การเลือกตัวอย่างในภูมิภาค จังหวัดจะเป็นหน่วยตัวอย่างขั้นที่หนึ่ง (Primary Sampling Unit :PSU) อำเภอเป็นหน่วยขั้นที่สอง (Secondary Sampling Unit : SSU) หมู่บ้านเป็นหน่วยตัวอย่างระดับที่สาม (Tertiary Sampling Unit) และครัวเรือนเป็นหน่วยตัวอย่างระดับสุดท้าย (Ultimate Sampling Unit) ซึ่งเป็นหน่วยย่อยหรือหน่วยที่ให้ข้อมูลนั่นเอง

1.2 เทคนิคการชักตัวอย่างเชิงซ้อน

ในการสำรวจตัวอย่างโดยทั่วไป วิธีการชักตัวอย่างที่ใช้อาจไม่ใช่วิธีการใดวิธีการหนึ่งในวิธีที่ได้กล่าวมาแล้วโดยตรง เนื่องจากสถานการณ์ที่ทำการชักตัวอย่างอาจจะไม่อยู่ในลักษณะที่เอื้อต่อการใช้วิธีหลักเสมอไป ในหลายกรณีจำเป็นต้องนำวิธีการหลักเหล่านั้นมาผสมผสานกันสร้างวิธีการใหม่ที่อาจมีความซับซ้อนขึ้น แต่เป็นวิธีการที่เหมาะสมกับสถานการณ์มากกว่า เช่น การสำรวจตัวอย่างของสำนักงานสถิติแห่งชาติ ได้นำวิธีการชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้นและการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มรวมเข้าด้วยกัน เรียกว่าการชักตัวอย่างเกาะกลุ่มแบบแบ่งเป็นชั้น (Stratified Cluster Sampling) ที่ใช้รูปแบบการเลือกตัวอย่างที่หลากหลายขึ้นอยู่กับลักษณะต่างๆ ของประชากรนั้นและข้อมูลที่ผู้ศึกษามีเกี่ยวกับประชากร ในกรณีนี้ประชากรจะถูกจัดเป็นชั้นภูมิก่อน โดยแต่ละชั้นภูมิประกอบขึ้นด้วยหน่วยตัวอย่างที่ได้จากการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม

การชักตัวอย่างในแต่ละระดับ อาจใช้วิธีการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว หรือการชักตัวอย่างแบบมีระบบ หรือการชักตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นไม่เท่ากันก็ได้ (สุชาดา กีระนันทน์, 2541)

1.3 เทคนิคการชักหน่วยตัวอย่างซ้ำด้วยวิธีแจ็คไนฟ์ (Resampling Techniques: Jackknife)

การชักตัวอย่างซ้ำนับเป็นวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาในการพิจารณาคุณภาพของตัวประมาณ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณที่ยุ่งยากมาก เนื่องจากตัวประมาณที่ใช้ไม่ใช่ตัวประมาณที่ได้จากแผนการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว อาจเป็นตัวประมาณที่ไม่ใช่ฟังก์ชันเชิงเส้น และมีรูปแบบที่ซับซ้อน ซึ่งวิธีการชักตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นวิธีการชักตัวอย่างหลัก เช่น การชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียว การชักตัวอย่างแบบมีระบบ การชักตัวอย่างแบบแบ่งเป็นชั้น และการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม แต่ในสถานการณ์จริงวิธีการชักตัวอย่างที่ใช้มักเป็นวิธีการที่สร้างขึ้นโดยนำวิธีหลักเหล่านี้มาผสมกันให้เหมาะกับสถานการณ์ ดังนั้นหลักการชักตัวอย่างซ้ำมีอยู่ว่า จากข้อมูลตัวอย่างและตัวประมาณค่าที่ใช้ จะทำการชักตัวอย่างย่อยจากข้อมูลตัวอย่างที่มีอยู่นี้ซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง และทำการประมาณค่าประชากร แล้วใช้ข้อมูลจากตัวอย่างซ้ำที่ได้นี้มาทำการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน หรือความแปรปรวนของตัวประมาณ

ตัวประมาณแจ็คไนฟ์ (Jackknife Estimator) เป็นตัวสถิติที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้เป็นเทคนิคในการที่จะลดความเอนเอียง (Bias) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ตัวประมาณแจ็คไนฟ์ถูกพัฒนาขึ้นโดย เควนนูลเลน (Quenouillen) ในปี ค.ศ. 1949 และต่อมาในปี ค.ศ. 1958 ตูคี (Tukey) เป็นผู้ตั้งชื่อให้กับตัวประมาณดังกล่าว

วิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife) มีขั้นตอนดังนี้

ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งสุ่มจากประชากรที่มีพารามิเตอร์คือ θ และให้ $\hat{\theta}$ คือตัวประมาณของ θ ถ้าแบ่งตัวอย่างสุ่มออกเป็น A กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมีขนาดเท่าๆ กัน เท่ากับ $m = \frac{n}{A}$ (A เป็นตัวประกอบหนึ่งของ n) จากนั้นให้ตัดกลุ่มตัวอย่างที่แบ่งออกมาทิ้งทีละกลุ่ม และหาตัวประมาณค่าของ θ โดยใช้ข้อมูลที่เหลืออยู่ (A – 1)m ตัว วิธีการประมาณให้ใช้วิธีเดียวกับการประมาณพารามิเตอร์เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ n

ให้ $\hat{\theta}_i$ คือค่าประมาณของ θ ซึ่งได้มาจากการประมาณโดยตัดตัวอย่างกลุ่มที่ i ทิ้ง ดังนั้นค่า $\hat{\theta}_i$ จะมีทั้งหมด A ค่า (i = 1 , 2 , … , A) ค่า $\hat{\theta}_i$ นี้จะเรียกว่า ตัวสถิติแจ็คไนฟ์ (Jackknife Statistic) เมื่อ $\theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{A}$, x_j คือ ผลรวมค่าสังเกตกลุ่มที่ j , j = 1, 2, …, n

จะได้ $$\hat{\theta}_i = \frac{1}{A-1}\sum_{j \neq i}^{n} x_j ,$$ x_j คือ ผลรวมค่าสังเกตกลุ่มที่ j , j = 1, 2, …, n

เมื่อได้ค่า $\hat{\theta}_i$ แล้ว จากนั้นให้คำนวณค่าแฝง (Pseudovalues) ได้ดังนี้

$$J_i = A\hat{\theta} - (A-1)\hat{\theta}_i \quad ; \; i = 1 , 2 , \ldots , A$$

นิยาม ตัวประมาณค่าแจ็คไนฟ์ของพารามิเตอร์ θ (Jackknife Estimator of θ) คือ

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}) &= \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A} J_i \\ &= \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}(A\hat{\theta} - (A-1)\hat{\theta}_i) \\ &= A\hat{\theta} - (A-1)\bar{\hat{\theta}} \quad \text{โดย} \quad \bar{\hat{\theta}} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\hat{\theta}_i \end{aligned}$$

จากนิยามสามารถหาตัวประมาณค่าความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Variance Estimator) ได้ดังนี้

$$\hat{V}_{JK}(\hat{\theta}) = \frac{1}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{A}\left(J_i - J(\hat{\theta})\right)^2$$

ข้อสังเกต

1) ตัวประมาณแจ็คไนฟ์ สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

   $$J(\hat{\theta}) = \hat{\theta} + (A-1)(\hat{\theta} - \bar{\hat{\theta}})$$

   ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ตัวประมาณ $J(\hat{\theta})$ คือการปรับค่า $\hat{\theta}$ ด้วยเทอมปรับแก้ซึ่งเป็นฟังก์ชันของผลต่างของ $\hat{\theta}$ และ $\bar{\hat{\theta}}$

2) กรณีพิเศษคือ เมื่อ m = 1 ซึ่งเป็นกรณีที่ใช้มากในการนำตัวประมาณแจ็คไนฟ์ไปใช้ ดังนั้น สามารถเขียนได้ในรูป

   $$J(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\hat{\theta}} \quad ; \; A = n$$

การใช้ m = 1 จะทำให้ได้ค่าแฝง (J_i) จำนวน n ค่า ซึ่งมีจำนวนเท่ากับขนาดตัวอย่างเมื่อเริ่มต้นพอดี ทำให้จำนวนองศาแห่งเสรี (Degree of Freedom) ไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าหากใช้ m >1 จะทำให้องศาแห่งเสรี ลดลง และหากขนาดตัวอย่างมีค่าน้อยอยู่แล้ว การใช้ m > 1 จะทำให้ค่าแฝง (J_i) ถูกสร้างขึ้นจากขนาดตัวอย่างที่เล็ก ซึ่งอาจทำให้การประมาณไม่น่าเชื่อถือ ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการคือ จำนวนค่าแฝง (J_i) จำนวนมากและแต่ละค่าสร้างจากค่าสังเกต (x_i) จำนวนมากเช่นกัน

กรณีตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli)

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli) คือ $x_i = 0$ เมื่อหน่วยตัวอย่างที่ i ไม่มีลักษณะที่สนใจและ $x_i = 1$ เมื่อหน่วยตัวอย่างที่ i มีลักษณะที่สนใจ จะได้ว่า $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ เป็นตัวประมาณควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator : MLE) สำหรับพารามิเตอร์ p และ $\hat{p}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด เมื่อใช้วิธีการประมาณแบบแจ็คไนฟ์ (Jackknife) โดยใช้ m = 1 จะได้

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} x_j \;;\quad i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n,\ x_j = 0 \text{ หรือ } 1$$

$$\begin{aligned}
\bar{\hat{p}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j\neq i}^{n} x_j \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\
&= \hat{p}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $J(\hat{p}) = n\hat{p} - (n-1)\hat{p} = \hat{p}$

ตัวประมาณแจ็คไนฟ์ (Jackknife) สำหรับ p คือ $\hat{p}$ ซึ่งจะเห็นว่าเป็นตัวประมาณตัวเดียวกับตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด

การหาความแปรปรวนของ $\hat{p} : \hat{V}(\hat{p})$ โดยวิธีการแจ็คไนฟ์ (Jackknife)

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli) ที่มี $\hat{p}$ เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ p เมื่อพิจารณาความแปรปรวนของ $\hat{p}$ จะได้ว่า $V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ และ $\hat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง

ซึ่ง
$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right]$$

เมื่อใช้วิธีการประมาณแบบแจ็คไนฟ์ (Jackknife) โดยใช้ m = 1 จะได้
$$\hat{V}_i(\hat{p}) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} x_j-\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} x_j\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n\hat{p}-x_i}{n-1}-\left(\frac{n\hat{p}-x_i}{n-1}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n\hat{p}-x_i}{n-1}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}x_i+x_i^2}{(n-1)^2}\right]$$
$$= \left[\frac{n\hat{p}-x_i}{n(n-1)}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}x_i+x_i^2}{n(n-1)^2}\right]$$

เนื่องจาก $x_i = 0$ หรือ 1 ดังนั้น $x_i^2 = x_i$

นั่นคือ
$$\hat{V}_i(\hat{p}) = \left[\frac{n\hat{p}-x_i}{n(n-1)}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}x_i+x_i}{n(n-1)^2}\right]$$

ดังนั้น
$$\overline{V}(\hat{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{V}_i(\hat{p})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n\hat{p}-x_i}{n(n-1)}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}x_i+x_i}{n(n-1)^2}\right]$$
$$= \frac{n\hat{p}-\sum_{i=1}^{n}x_i/n}{n(n-1)}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}\sum_{i=1}^{n}x_i/n+\sum_{i=1}^{n}x_i/n}{n(n-1)^2}$$
$$= \frac{n\hat{p}-\hat{p}}{n(n-1)}-\frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}^2+\hat{p}}{n(n-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{V}}(\hat{p}) &= \frac{n\hat{p}-\hat{p}}{n(n-1)} - \frac{n^2\hat{p}^2-2n\hat{p}^2}{n(n-1)^2} - \frac{\hat{p}}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{(n-1)\hat{p}}{n(n-1)} - \frac{(n^2-2n)\hat{p}^2}{n(n-1)^2} - \frac{\hat{p}}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{\hat{p}}{n} - \frac{(n^2-2n)\hat{p}^2}{n(n-1)^2} - \frac{\hat{p}}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{(n-1)^2\hat{p}-\hat{p}}{n(n-1)^2} - \frac{(n^2-2n)\hat{p}^2}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{(n^2-2n)\hat{p}}{n(n-1)^2} - \frac{(n^2-2n)\hat{p}^2}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{(n^2-2n)^2}{n(n-1)^2}\left[\hat{p}(1-\hat{p})\right] \\
&= \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right] \\
\overline{\hat{V}}(\hat{p}) &= \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\hat{V}(\hat{p})
\end{aligned}$$

ตัวประมาณความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Variance Estimator) คือ

$$\begin{aligned}
J[\hat{V}(\hat{p})] &= n\hat{V}(\hat{p}) - (n-1)\overline{\hat{V}}(\hat{p}) \\
&= n\hat{V}(\hat{p}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-1)^2}\hat{V}(\hat{p}) \\
&= n\hat{V}(\hat{p}) - \frac{n(n-2)}{(n-1)}\hat{V}(\hat{p}) \\
&= \frac{n(n-1)}{(n-1)}\hat{V}(\hat{p}) - \frac{n(n-2)}{(n-1)}\hat{V}(\hat{p}) \\
&= \frac{n(n-1)-n(n-2)}{(n-1)}\hat{V}(\hat{p}) \\
&= \frac{n}{(n-1)}\hat{V}(\hat{p}) \\
&= \frac{n}{(n-1)}\left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right] \\
J[\hat{V}(\hat{p})] &= \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}
\end{aligned}$$

ซึ่ง $J[\hat{V}(\hat{p})]$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงสำหรับ $V(\hat{p})$ (ดูหัวข้อที่ 4)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่าวิธีการของแจ็คไนฟ์ไม่เพียงแต่จะลดความเอนเอียงเท่านั้น แต่กลับพบว่าวิธีการของแจ็คไนฟ์ทำให้ได้ตัวประมาณใหม่ที่ไม่เอนเอียง

เมื่อหาตัวประมาณความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Variance Estimator) ของกรณีตัวแปรสุ่มการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli) จากสูตร

$$\hat{V}_{JK}(\hat{\theta}) = \frac{1}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{A}\left(J_i - J(\hat{\theta})\right)^2$$

ดังนั้น

$$\hat{V}_{JK}(\hat{p}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(J_i - J(\hat{p})\right)^2 \quad \text{เมื่อ } A = n$$

ซึ่ง $J(\hat{p}) = \hat{p}$

และ $J_i = n\hat{p} - (n-1)\hat{p}_i \quad \because \; J_i = A\hat{\theta} - (A-1)\hat{\theta}_i ; A = n, \hat{\theta} = \hat{p}$

$$= n\hat{p} - (n-1)\frac{\sum_{j\neq i}^{n} x_j}{n-1} \quad , \quad \hat{p}_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} x_j$$

$$= n\hat{p} - (n\hat{p} - x_i)$$

$$= x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \;,\; x_i = 0 \text{ หรือ } 1$$

จะได้ว่า

$$\hat{V}_{JK}(\hat{p}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{p}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\hat{p}x_i + \hat{p}^2\right)$$

เนื่องจาก $x_i = 0$ หรือ 1 จะได้ว่า $x_i^2 = x_i$

$$\hat{V}_{JK}(\hat{p}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 2\hat{p}x_i + \hat{p}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\hat{p}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\hat{p}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[n\hat{p} - 2n\hat{p}^2 + n\hat{p}^2\right]$$

นั่นคือ $\hat{V}_{JK}(\hat{p}) = \dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{(n-1)}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $V(\hat{p}) = \dfrac{p(p-1)}{n}$

หมายเหตุ ค่าของ $\hat{\theta}_i$ ซึ่งคำนวณได้จากการตัดค่าสังเกตที่ i ทิ้ง (กรณีใช้ m = 1) ทั้ง n ตัว จะไม่เป็นอิสระกัน(dependent) เนื่องจากค่าของ $\hat{\theta}_i$ สำหรับ i = 1 , 2 , … , n คำนวณมาจากค่าสังเกต (x_i) เกือบเหมือนกันทุกค่า เช่น $\hat{\theta}_1$ คำนวณมาจาก $x_2, x_3, \ldots, x_n$ และ $\hat{\theta}_2$ คำนวณมาจาก $x_1, x_3, \ldots, x_n$ โดยวิธีการแจ็คไนฟ์ จะนำค่า $\hat{\theta}_i$ เหล่านี้มาคำนวณหาค่าแฝง (J_i) คือ

$$J_i = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_i$$

ทำให้ได้ค่าแฝง (J_i) มา n ค่า ดังนั้น ค่า J_i ; i = 1 , 2 , … , n เปรียบเสมือนเป็นตัวอย่างสุ่มของค่าแฝง ซึ่ง J_i แต่ละตัวเป็นอิสระกันและยังมีการแจกแจงเหมือนกัน จะได้ว่า

ตัวประมาณค่าแจ็คไนฟ์ของพารามิเตอร์ θ (Jackknife Estimator of θ) คือ

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J_i$$

ดังนั้นตัวประมาณความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ ของ $\hat{\theta}$ (Jackknife Variance Estimator of $\hat{\theta}$) คือ

$$\hat{V}_{JK}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(J_i - J(\hat{\theta})\right)^2 \quad \text{เมื่อ } A = n \text{ กรณี } m=1$$

(ปรีชา วิจิตรธรรมรส, 2542)

การใช้ m>1 เช่นกรณีใช้การชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มหลายขั้น (Multi-stage Cluster Sampling) สามารถหาตัวประมาณความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ของ $\hat{\theta}$ ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหา $\hat{\theta}$ จากตัวอย่างทั้งหมดตามวิธีของการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มหลายขั้น

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาที่ ระดับ PSU ให้จำนวน PSU มี A กลุ่ม เปรียบเสมือนการแบ่งตัวอย่างสุ่มออกเป็น A กลุ่ม

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหา $\hat{\theta}_i$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ θ ที่ได้มาจากการประมาณโดยตัดตัวอย่างกลุ่มที่ i หรือ PSU ที่ i ทิ้ง ดังนั้นค่า $\hat{\theta}_i$ จะมีทั้งหมด A ค่า (i = 1 , 2 , … , A) ค่า $\hat{\theta}_i$ นี้จะเรียกว่า ตัวสถิติแจ็คไนฟ์

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อได้ค่า $\hat{\theta}_i$ แล้ว จากนั้นให้คำนวณค่าแฝง (Pseudovalues) ได้ดังนี้

$$J_i = A\hat{\theta} - (A-1)\hat{\theta}_i \quad ; \; i = 1 , 2 , \dots , A$$

ขั้นตอนที่ 5 คำนวณตัวประมาณค่าแจ็คไนฟ์ของพารามิเตอร์ θ (Jackknife Estimator of θ) คือ

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A} J_i = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}(A\hat{\theta} - (A-1)\hat{\theta}_i)$$

$$= A\hat{\theta} - (A-1)\bar{\hat{\theta}} \quad \text{โดย} \quad \bar{\hat{\theta}} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\hat{\theta}_i$$

ขั้นตอนที่ 6 คำนวณตัวประมาณค่าความแปรปรวนโดยวิธีแจ็คไนฟ์ของ $\hat{\theta}$ (Jackknife Variance Estimator of $\hat{\theta}$) คือ

$$\hat{V}_{JK}(\hat{\theta}) = \frac{1}{A(A-1)}\sum_{i=1}^{A}\left(J_i - J(\hat{\theta})\right)^2$$

(Sarndal, 1991)

ข้อสังเกต ทุกขั้นตอนที่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ตัวประมาณค่าจะคำนวณจากสูตรที่มีการชักตัวอย่างแบบเกาะกลุ่มหลายขั้น (Multi-stage Cluster Sampling)

2. การหาขนาดตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพ (Effective Sample Size)

คอร์นและกรูบาร์ด (Korn and Graubard, 1998 อ้างจาก Gray,Haslett and Kuzmicich, 2004) แนะนำให้หาขนาดตัวอย่างใหม่โดยประมาณขนาดตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพ (Effective Sample Size) โดยนำขนาดตัวอย่างแบบเดิมหารด้วยอิทธิพลของแผนแบบ (Design Effect) และ ออแรนจิ (Oranji, 2006) ได้นำมาประยุกต์ใช้กับวิธีประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนของประชากรที่มีผู้คิดค้นขึ้นแล้วบางวิธี มาใช้ให้เหมาะสมกับตัวอย่างเชิงซ้อน ซึ่งขนาดตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพคำนวณได้ดังต่อนี้

$$\tilde{n} = n_{DEFF} = \frac{n}{DEFF}$$

เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่างแบบเดิม

DEFF คือ อิทธิพลของแผนแบบ

$\tilde{n}$ และ n_{DEFF} คือ ขนาดตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพ

อิทธิพลของแผนแบบ (Design Effect : DEFF) เป็นการวัดประสิทธิภาพของแผนแบบการชักตัวอย่าง ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$DEFF = \frac{V_{complex}}{V_{srs}}$$

เมื่อ $V_{complex}$ คือ ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มาจากแผนแบบการชักตัวอย่างเชิงซ้อน ซึ่งคำนวณโดยใช้วิธีแจ็คไนฟ์ ดังนั้น $V_{comple} = \hat{V}_{JK}(\hat{\theta})$

V_{srs} คือ ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มาจากแผนแบบการชักตัวอย่างแบบสุ่มเชิงเดียวภายใต้ขนาดตัวอย่างเดียวกัน

3.การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

การประมาณพารามิเตอร์แบบช่วงเป็นผลงานริเริ่มของลาปลาซ (laplace,1749-1827) ตั้งแต่ปี ค.ศ.1814 ซึ่งมีการพิจารณาการประมาณความน่าจะเป็นของการประสบผลสำเร็จ ในการแจกแจงแบบทวินามจากการใช้ค่าของตัวแปรสุ่ม โดยลาปลาซถือว่าช่วงที่ใช้คงที่ แต่ความน่าจะเป็นเป็นตัวแปรสุ่ม วิธีการของลาปลาซนี้ วิลสัน ได้ค้นพบใหม่เมื่อปี ค.ศ. 1927 วิลสันเป็นผู้แปลความหมายได้ถูกต้องว่า ช่วงที่ใช้ประมาณพารามิเตอร์เป็นช่วงสุ่ม (Random Interval) อย่างไรก็ตาม แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณพารามิเตอร์ด้วยช่วงที่ใช้กัน ในปัจจุบันได้มีผู้คิดค้นวิธีการประมาณพารามิเตอร์ด้วยช่วงขึ้นมากมาย เพื่อให้ผู้ใช้ได้วิธีการที่เหมาะสมกับสถานการณ์

<u>นิยาม</u> ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ θ เป็นพามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งเป็นจำนวนจริง ให้ $L(X_1,...,X_n) = L$ และ $U(X_1,...,X_n) = U$ เป็นตัวสถิติที่ L < U และ

$$P[L(X_1,...,X_n) \le \theta \le U(X_1,...,X_n)] = 1-\alpha$$

โดยที่ α ไม่ขึ้นอยู่กับ θ เราเรียกช่วงสุ่ม (Random Interval) $[L(X_1,...,X_n), U(X_1,...,X_n)]$ ว่าช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ($100(1-\alpha)\%$ Confidence Interval) ของพารามิเตอร์ θ และเรียก $1-\alpha$ ว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient)

ตัวสถิติ L เป็น ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Confidence Limit) ของพารามิเตอร์ θ ที่ระดับความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$

ตัวสถิติ U เป็น ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Limit) ของพารามิเตอร์ θ ที่ระดับความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$

เมื่อกำหนด $1-\alpha$ เป็นค่าความน่าจะเป็นที่ช่วงสุ่มจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์
(ประชุม สุวัตถี, 2545)

ในการประมาณค่าแบบช่วงนั้น ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่นสูงกว่า จะมีความกว้างของช่วงมากกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีระดับความเชื่อมั่นต่ำกว่า แต่ในการใช้ประโยชน์ ช่วงประมาณที่กว้างจะมีประโยชน์น้อยกว่าช่วงประมาณที่แคบ ดังนั้นนอกจากจะพิจารณาค่าระดับความเชื่อมั่นแล้ว สิ่งจำเป็นที่ควรพิจารณาถึงสำหรับการประมาณค่าแบบช่วงคือ ความกว้างเฉลี่ย

ของช่วงประมาณ ซึ่งคือค่าของผลต่างของขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของความเชื่อมั่นหรือหาได้จากค่า (U – L)

4.การแจกแจงของค่าสัดส่วนตัวอย่าง

4.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

ในการทดลองสุ่มใด ๆ ก็ตามที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 อย่าง คือ ลักษณะที่สนใจ และลักษณะที่ไม่สนใจ ด้วยความน่าจะเป็น p และ (1 – p) ตามลำดับ การทดลองนี้เรียกว่า การทดลองแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli experiment) ถ้าให้ x = 1 เมื่อเกิดลักษณะที่สนใจ และ x = 0 เมื่อเกิดลักษณะที่ไม่สนใจ ตัวแปรสุ่ม x จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli probability distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น p และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นในรูป

$$f(x;p) = p^{x}(1-p)^{1-x} \qquad ; x = 0,1$$

มีค่าความคาดหวังของ X เป็น

$$E(X) = \mu = 1(p) + 0(1-p) = p$$ และ

ความแปรปรวนของ X เป็น

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

(วีนัส พีรวณิชย์, ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์, 2547)

4.2 การแจกแจงแบบทวินาม

ในกรณีที่สนใจเกี่ยวกับจำนวนครั้งของการเกิดลักษณะที่สนใจในการทดลองซ้ำ n ครั้งที่เป็นอิสระกัน ถ้ากำหนดให้ตัวแปรสุ่ม Y เป็นจำนวนครั้งที่เกิดลักษณะที่สนใจในการทดลองแบบเบอร์นูลลี n ครั้ง เรียก Y ว่าเป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ

$$f(y) = \binom{n}{y} p^{y}(1-p)^{n-y} \qquad ; y = 0,1,2,...,n \qquad ; 0 \le p \le 1$$

โดยมี n และ p เป็นพารามิเตอร์มีค่าคาดหวัง

$E(Y) = \mu = np$ และ

ค่าความแปรปรวน ของ Y เป็น $V(Y) = \sigma^2 = np(1-p)$

(วีนัส พีรวณิชย์, ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์, 2547)

เมื่อให้ y เป็นจำนวนหน่วยที่เป็นลักษณะที่สนใจในตัวอย่างสุ่มขนาด n ดังนั้น $\hat{p} = \frac{y}{n}$ คือ ตัวประมาณแบบจุดสำหรับค่าสัดส่วนของลักษณะที่สนใจในประชากร p

สำหรับคุณสมบัติของตัวประมาณ เนื่องจาก y มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p ที่มีค่าเฉลี่ย np และค่าความแปรปรวนเป็น np(1 – p) ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าจะได้ว่า

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n}E(y)$$

$$= \frac{np}{n}$$

$$= p$$

แสดงให้เห็นว่า $\hat{p}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased estimator) ของ p และเมื่อพิจารณาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{p}$ จะได้ว่า

$$V(\hat{p}) = \frac{1}{n^2}V(y)$$

$$= \frac{np(1-p)}{n^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n}$$

และตัวประมาณความแปรปรวนของค่าประมาณสัดส่วนของลักษณะที่สนใจในประชากรจะได้

จาก

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$$

ซึ่ง $\hat{V}(\hat{p})$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ $V(\hat{p})$

เพราะว่า

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = E\left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\hat{p}(1-\hat{p})\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[E[\hat{p}]-E[\hat{p}^2]\right]$$

พิจารณา $E[\hat{p}^2] = E\left[\frac{y^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2}E[y^2]$

จาก

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

$$E(y^2) = V(y) + [E(y)]^2$$

$$= np(1-p) + n^2p^2$$

จะได้ว่า

$$E[\hat{p}^2] = \frac{1}{n^2}\left[np(1-p)+n^2p^2\right]$$

$$= \left[\frac{p(1-p)}{n} + p^2\right]$$

นั่นคือ

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \frac{1}{(n-1)}\left[E[\hat{p}]-E[\hat{p}^2]\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[p - \frac{p(1-p)}{n} - p^2\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[p(1-p) - \frac{p(1-p)}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[p(1-p) - \frac{p(1-p)}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[p(1-p)(1-\frac{1}{n})\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \frac{1}{(n-1)}\left[p(1-p)\frac{(n-1)}{n}\right]$$

$$= \frac{p(1-p)}{n}$$

ดังนั้น $$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = V(\hat{p})$$

ถ้า n มีขนาดใหญ่ จะสามารถประยุกต์ทฤษฎีขีดจำกัดกลาง คือ $\hat{p}$ มีการแจกแจงที่ประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย p และความแปรปรวน $\frac{p(1-p)}{n}$

5. ทฤษฎีขีดจำกัดกลาง (Central Limit Theorem)

เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบใดๆ ก็ตามที่มีความแปรปรวนเป็นค่าจำกัด ค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ นั่นคือ

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน โดยมีค่าเฉลี่ย $E(x_i) = \mu$ และความแปรปรวน $Var(X) = \sigma^2 < \infty$

ให้ $$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/n}$$

เมื่อ $$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ $(n \to \infty)$ จะได้ว่า Z_n ลู่เข้าในเชิงการแจกแจงสู่ตัวแปรสุ่ม Z ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (สุชาดา กีระนันทน์, 2534)

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บี.เค. โกช (B.K. Ghosh)(1979) ได้ศึกษาและนำเอาการแจกแจงแบบปกติมาใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินาม และทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินามโดยใช้การแจกแจงแบบปกติ ระหว่างวิธีการประมาณอย่างง่าย และวิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง ที่ระดับดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% ขนาดตัวอย่างเป็น 15, 20, 30, 50, 100 และ 200 และค่า p = 0.01, 0.05, 0.10(0.10)0.90, 0.95 และ 0.99 จากการศึกษาสรุปได้ว่าวิธีประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่กำหนด เมื่อ $0.01 \le p \le 0.99$ และขนาดตัวอย่างไม่น้อยกว่า 30 ในทางตรงกันข้ามวิธีการประมาณอย่างง่าย จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่กำหนด สำหรับ $p < 0.2$ หรือ $p > 0.8$ แม้ว่าจะใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 แล้วก็ตาม

แกรย์ , แฮสเลทท์ และ คัซมิคิช (Alistair Gray, Stephen Haslett และ Geoffrey Kuzmicich) (2004) ได้ทำการศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรทีได้ตัวอย่างจากแผนแบบการชักตัวอย่างเชิงซ้อน โดยทำการเปรียบเทียบ 4 วิธี ได้แก่ วิธีปกติ วิธีของ Korn และ Graubard วิธีเปอร์เซ็นต์ไทล์ และ วิธี BC_a (Bias Correction and Acceleration Methods) ซึ่งทำการจำลองแบบตัวอย่างโดยใช้แผนแบบการชักตัวอย่างเกาะกลุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ (Stratified Cluster Sampling) เพื่อใช้วิเคราะห์ข้อมูล 2 วิธีคือ วิธีเปอร์เซ็นต์ไทล์ และ วิธี BC_a โดยทั้งสองวิธีนี้จะใช้การสับเปลี่ยนของ Bootstrap เมื่อสำเร็จก็นำทั้งสองวิธีไปใช้กับข้อมูล New Zealand Gaming survey 1999 ทีมีแผนแบบการสำรวจตัวอย่างแบบเดียวกันกับการจำลองแบบ ซึ่งข้อมูลนี้ Korn และ Graubard ได้ทำการวิเคราะห์โดยวิธีของเขามาก่อนแล้ว เมื่อทำการเปรียบเทียบทั้ง 4 วิธีได้ผลดังนี้ ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ วิธีแบบปกติ และ วิธีของ Korn และ Graubard ให้ช่วงที่มีความกว้างใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด เมื่อขนาดตัวอย่างเล็กลง ทั้งสองวิธีนี้จะให้ผลที่แตกต่างกัน และพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีของ Korn และ Graubard จะให้ผลที่คล้ายกับ วิธีเปอร์เซ็นต์ไทล์ และ วิธี BC_a แต่วิธีของ Korn และ Graubard มีรูปแบบของการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นที่น่าเชื่อถือกว่า

ออแรนจิ (Oranji) (2006) ได้ศึกษาวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรที่มีพื้นฐานมาจาก การแปลงมาตราส่วน และ การดัดแปลงแบบต่อเนื่อง แล้วปรับวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรสำหรับนำมาใช้ในตัวอย่างเชิงซ้อน ซึ่ง

การศึกษาของเขาจะใช้การสำรวจตัวอย่างที่มีแผนการชักตัวอย่างเชิงซ้อน ในที่นี้ได้กำหนดให้ใช้แผนแบบการชักตัวอย่างเกาะกลุ่มสองขั้นแบบแบ่งเป็นชั้น : Stratified Multi-Stage Cluster Sampling โดยใช้ข้อมูลของ NAEP (National Assessment of Educational Progress) ได้ทำการปรับวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่น โดยคำนวณหาขนาดของตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพ (Effective Sample Size : $\tilde{n}$ หรือ $n_{DEFF} = \dfrac{n}{DEFF}$) ซึ่ง DEFF = $\dfrac{V_{complex}}{V_{srs}}$ คือ อิทธิพลของแผนแบบ (Design Effect) และหาความแปรปรวนของตัวอย่างเชิงซ้อนจากวิธีการ JRR (Jackknife Repeated Replication) แล้วทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรที่ถูกปรับแล้ว 15 วิธี ได้แก่ วิธีหาช่วงของวิลสัน วิธีดัดแปลงช่วงของวิลสัน1 วิธีดัดแปลงช่วงของวิลสัน2 วิธีหาช่วงของเจฟฟรี วิธีดัดแปลงช่วงของเจฟฟรี1 วิธีดัดแปลงช่วงของเจฟฟรี 2 วิธีของคอปเปอร์-เพียร์สัน วิธีลอจิก วิธีลอจิก1 วิธีลอจิก2 วิธีแปลงลอจิก วิธีแปลงลอจิก1 วิธีแปลงลอจิก2 วิธีแปลงลอจิก3 และวิธี อะเกรสติ-คูลล์ (Agresti-Coull) ซึ่ง NAEP มีขนาดตัวอย่างn = 1240 ทำการทดลองโดยกำหนดตัวอย่างขนาดเล็ก (ตัวอย่างที่มีขนาดน้อยกว่า 3% ของตัวอย่างทั้งหมด) และตัวอย่างขนาดใหญ่(ตัวอย่างที่มีขนาดมากกว่า 3% ของตัวอย่างทั้งหมด) ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%, 99% ผลที่ได้คือ ทุกวิธีให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และทุกวิธีที่ศึกษาจะเหมาะสมกับตัวอย่างที่มีขาดใหญ่ สำหรับวิธีที่เหมาะสมกับค่าสัดส่วนและตัวอย่างที่มีขนาดเล็กมี 2 วิธี คือ วิธีหาช่วงของวิลสัน และ วิธีแปลงลอจิก3 ดังนั้นทั้งสองวิธีนี้จะมีคุณสมบัติที่คล้ายกันคือสามารถใช้ได้กับตัวอย่างที่มีขนาดเล็กและใหญ่ แต่เมื่อเปรียบเทียบสองวิธีนี้แล้วพบว่าวิธีหาช่วงของวิลสัน จะให้ช่วงความเชื่อมั่นที่แคบที่สุด กล่าวคือ ช่วงความเชื่อมั่นเฉลี่ยของวิลสันประมาณ 9% แคบกว่าช่วงแปลงลอจิก ดังนั้นวิธีหาช่วงของวิลสัน เหมาะสมที่สุดกับการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรโดยใช้ตัวอย่างเชิงซ้อน

นภาพร สีมาเงิน (2536) ได้เสนอการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรบนพื้นฐานของการประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติ โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรโดยใช้การแจกแจงแบบปกติ 3 วิธีคือ วิธีการประมาณอย่างง่าย วิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง และวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 1 ถึง 50 และค่าสัดส่วนประชากร p มี 2 ระดับ คือ ระดับที่ 1 p มีค่าตั้งแต่ 0.01 ถึง 0.09 โดยค่า เพิ่มขึ้นทีละ 0.01 และระดับที่ 2 p มีค่าตั้งแต่ 0.10 ถึง 0.50 โดยค่า เพิ่มขึ้นทีละ 0.05 การศึกษาสรุปได้ว่า ช่วงความเชื่อมั่นของวิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และค่าสัดส่วนประชากรที่กำหนดทุกค่า เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดปานกลาง $(n \geq 30)$ ช่วงความเชื่อมั่นของวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกค่า และให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดได้ในทุกขนาดตัวอย่างที่กำหนด เมื่อค่าสัดส่วนประชากรมีค่าเล็กมาก $(p \leq 0.02)$ เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ $(n \geq 50)$ และค่าสัดส่วนประชากรอยู่ในช่วง $0.40 \leq p \leq 0.5$ วิธีการประมาณทั้ง 3 วิธีที่นำมาศึกษาจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นใกล้เคียงกัน

ปัทมนันท์ พันธุ์ประเสริฐ (2545) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากร 5 วิธีคือ วิธีปกติ วิธีสคอร์ วิธีแอดจัสท์ วาลด์ (Adjusted Wald) วิธีเอฟ และวิธีถ่วงน้ำหนักของวิธีสคอร์และแอสจัสท์ วาลด์ (Weighted Score and Adjusted Wald) โดยการเปรียบเทียบค่าร้อยละครอบคลุม ความกว้างเฉลี่ย และร้อยละของจำนวนครั้งที่ครอบคลุมได้ตามระดับที่กำหนดของแต่ละวิธีการประมาณค่า กำหนดขนาดตัวอย่าง 35 ระดับคือ 10 ถึง 95 โดยเพิ่มที่ละ 5 , 100 ถึง 200 โดยเพิ่มที่ละ 10 และ 250 ถึง 1000 โดยเพิ่มที่ละ50 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ p 24 ระดับคือ 0.10 ถึง 0.50 โดยเพิ่มที่ละ 0.05 , 0.02 ถึง 0.20 โดยเพิ่มที่ละ 0.20 , 0.20 ถึง 0.50 โดยเพิ่มที่ละ 0.05 , 0.01 ถึง 0.10 โดยเพิ่มที่ละ 0.01 , 0.10 ถึง 0.30 โดยเพิ่มที่ละ 0.02 และ 0.30 ถึง 0.50 โดยเพิ่มที่ละ 0.05 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% จากการศึกษาพบว่า วิธีปกติ ให้ค่าร้อยละครอบคลุมต่ำกว่าทุกวิธีและต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ถึงแม้ว่าเมื่อ p มีค่าตั้งแต่ 0.30 ถึง 0.50 ความกว้างเฉลี่ยมีค่าสูง แต่ร้อยละครอบคลุมมีค่าต่ำเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น โดยค่าที่ได้ใกล้เคียงกับระดับนัยสำคัญมากขึ้น วิธีสคอร์ ให้ค่าร้อยละครอบคลุมใกล้เคียงระดับความเชื่อมั่นครอบคลุมกว่าวิธีอื่น ๆ เมื่อ p มีค่าตั้งแต่ 0.30 ถึง 0.50 วิธีแอดจัสท์ วาลด์ ให้ค่าร้อยละครอบคลุมสูงกว่าวิธีประมาณค่าบางวิธี เนื่องจากค่าเฉลี่ยของความกว้างเฉลี่ยมีค่าค่อนข้างสูง แต่ไม่ใช่วิธีที่มีร้อยละครอบคลุมสูงสุด วิธีเอฟ ให้ค่าร้อยละครอบคลุมสูงกว่าเมื่อเทียบกับวิธีประมาณค่าวิธีอื่น ๆ ซึ่งสูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เนื่องจากความกว้างเฉลี่ยของวิธีนี้มีค่ามากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่นที่ศึกษา จึงทำให้ค่าร้อยละของจำนวนครั้งที่ครอบคลุมได้ตามระดับที่กำหนดมีค่าต่ำว่าวิธีอื่นๆ และวิธีถ่วงน้ำหนักของวิธีสคอร์และแอสจัสท์ วาลด์ ให้ค่าร้อยละครอบคลุมใกล้เคียงระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำกว่าวิธีอื่นๆ เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และ p มีค่าตั้งแต่ 0.10 ถึง 0.50

สาริณีย์ คงกัน (2546) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินาม โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรโดยใช้การแจกแจงแบบปกติ 5 วิธีคือ วิธีปกติ วิธีที่ใช้ค่าปรับแก้เพื่อความต่อเนื่องของเยธ วิธีแปลงแบบอาร์คไซน์ วิธีสคอร์ และวิธีเพิ่มจำนวนลักษณะที่สนใจและจำนวนลักษณะที่ไม่สนใจอีก 2 ค่า กำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 3 กลุ่มคือ กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก $(n < 50)$ กลุ่มตัวอย่างขนาดปานกลาง $(50 \leq n \leq 100)$ และกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ $(n > 100)$ กำหนดค่าพารามิเตอร์ p มีค่าตั้งแต่0.05 ถึง 0.09 โดยเพิ่มค่าทีละ 0.02 และเพิ่มค่าทีละ 0.05 เมื่อ p มีค่าตั้งแต่ 0.10 ถึง 0.50 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% จากการศึกษาพบว่า กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเล็กและขนาดปานกลาง การประมาณช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีสคอร์ จะให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และวิธีสคอร์มีค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำสุดหรือใกล้ค่าต่ำสุด ในทุกค่าพารามิเตอร์ p ที่กำหนด เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากวิธีแปลงแบบอาร์คไซน์ จะให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำสุด เมื่อ $p \leq 0.15$ และเมื่อ $p \geq 0.20$ วิธีสคอร์มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำสุด สำหรับวิธีเพิ่มจำนวนลักษณะที่สนใจและจำนวนลักษณะที่ไม่สนใจอีก 2 ค่า เป็นวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แม้ว่าจะไม่สามารถให้ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเท่ากับวิธีสคอร์ แต่สามารถให้ค่าใกล้เคียงกับค่าต่ำสุดได้ในทุกขนาดตัวอย่างและเกือบทุกพารามิเตอร์ เนื่องจากวิธีนี้คำนวณง่ายและสะดวกกว่าวิธีสคอร์มาก จึงเป็นวิธีการที่เหมาะสมจะนำมาใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ในการแจกแจงทวินามได้ในทุกๆ ขนาดตัวอย่าง และทุกค่า p ที่กำหนด