

บทที่ 2

การตรวจเอกสาร

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยนำเสนอตามลำดับ
ดังนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

1.1 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระที่ 3 เรขาคณิต ช่วงชั้นที่ 3

1.2 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการ แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสาระที่ 3 เรขาคณิต ช่วงชั้นที่ 3

1.3 ขอบข่ายเนื้อหาเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่นำมาใช้ในการวิจัย

2. รูปแบบการเรียนการสอนเรขาคณิต

2.1 ลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี

2.2 วิธีการสอนเรขาคณิต

2.3 การใช้คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนเรขาคณิต

3. การวัดผลและการประเมินผลคณิตศาสตร์

4. เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตใน การสอนเรขาคณิต

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ, 2545ก) เป็นหลักสูตรแกนกลางของประเทศได้กำหนดกรอบสาระและมาตรฐานที่เอื้ออำนวยให้สถานศึกษา ครู ผู้สอน และผู้เกี่ยวข้องสามารถจัดทำหลักสูตรได้ตามความเหมาะสมของผู้เรียนและเป็นไปตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร เน้นการจัดการเรียนรู้ที่ยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด ทั้งนี้เพื่อให้การจัดการศึกษาเป็นไปตามหลักการ จุดหมายและมาตรฐานการเรียนรู้ ที่กำหนดไว้ให้สถานศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องมีแนวปฏิบัติในการจัดหลักสูตรสถานศึกษา จึงได้กำหนดโครงสร้างของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน คือ

1. ระดับช่วงชั้นที่จัดให้เหมาะสมกับธรรมชาติการเรียนรู้และระดับพัฒนาการของผู้เรียน เป็น 4 ช่วงชั้น ดังนี้ ช่วงชั้นที่ 1 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3 ช่วงชั้นที่ 2 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6 ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6

2. สาระการเรียนรู้ที่ประกอบด้วย กลุ่มองค์ความรู้ ทักษะหรือกระบวนการการเรียนรู้และคุณลักษณะหรือค่านิยม คุณธรรม จริยธรรมของผู้เรียนเป็น ๘ กลุ่ม คือ ภาษาไทย คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ สังคมศึกษา ศาสนาและวัฒนธรรม สุขศึกษาและพลศึกษา ศิลปะ การงานอาชีพและเทคโนโลยี ภาษาต่างประเทศ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในแปดกลุ่มสาระที่ได้แบ่งสาระการเรียนรู้อันเป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียน คือสาระที่เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ได้แก่ สาระที่ 1 - 5 ประกอบด้วย จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และ สาระที่เป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในสาระที่ 6 ซึ่งในการจัดการเรียนรู้นั้น ผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันเท่าที่จะเป็นไปได้ เมื่อผู้เรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปี ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น การที่ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีคุณภาพนั้น จะต้องมีความสมดุลระหว่างสาระทางด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรมและค่านิยม ตามคุณภาพของผู้เรียนที่ได้กำหนดไว้ในแต่ละช่วงชั้น สำหรับผู้เรียนที่มีความสนใจหรือมีความสามารถสูงทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษาอาจจัดให้ผู้เรียนเรียนรู้สาระที่เป็นเนื้อหาวิชาให้กว้างขึ้น เข้มข้นขึ้น หรือ

ฝึกทักษะกระบวนการมากขึ้นโดยพิจารณาจากสาระหลักที่กำหนดไว้นี้ หรือสถานศึกษาอาจจัด
 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เพิ่มเติมโดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความสามารถและความ
 ต้องการของผู้เรียน(กระทรวงศึกษาธิการ, 2545ก)

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระที่ 3 เรขาคณิต ในช่วงชั้นที่ 3

ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
 ได้กำหนดรายละเอียดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระที่ 3 : เรขาคณิต ไว้ดังนี้

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและรูปเรขาคณิตสามมิติได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 3 :

1. อธิบายลักษณะและสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้
2. สร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยไม่เน้นการพิสูจน์ได้
3. วิเคราะห์ลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพสองมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 3 :

1. เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม
 เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับและนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้
2. เข้าใจเกี่ยวกับการแปลง(transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน
 (translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) และนำไปใช้ได้
3. บอกภาพที่เกิดขึ้นจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนรูปต้นแบบ และ
 สามารถอธิบายวิธีการที่จะได้ภาพที่ปรากฏเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพนั้นให้อธิบายลักษณะ
 และสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวยและทรงกลมได้

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหา
ในช่วงชั้นที่ 3 ที่เกี่ยวข้องกับสาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้
2. ใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

1. สามารถแสดงเหตุผลโดยการอ้างอิงความรู้ ข้อมูลหรือข้อเท็จจริง หรือสร้างแผนภาพ

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

1. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

1. เชื่อมโยงความรู้ เนื้อหาต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ
2. นำความรู้และทักษะที่ได้จากการเรียนคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และในการดำรงชีวิต

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

1. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการทำงาน

ขอบข่ายเนื้อหาเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่นำมาใช้ในการวิจัย

1. พื้นฐานทางเรขาคณิต

- 1.1 จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี
- 1.2 ความยาวของส่วนของเส้นตรง
- 1.3 มุมและขนาดของมุม
- 1.4 มุมฉากและมุมตรง
- 1.5 การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

- 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. เส้นขนาน

- 3.1 มุมตรงข้าม เส้นขนาน
- 3.2 มุมแย้ง มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด
- 3.3 ผลบวกขนาดของมุมภายในข้างเดียวกัน
- 3.4 ผลบวกขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

4. ความคล้าย

- 4.1 รูปสามเหลี่ยมคล้าย
- 4.2 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน
- 4.3 การนำไปใช้ การให้เหตุผลและการแก้ปัญหา

5 สมบัติของรูปเรขาคณิต

- 5.1 รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม
- 5.2 สมบัติ และ ความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต

รูปแบบการเรียนการสอนเรขาคณิต

ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี

1. ประวัติความเป็นมาของรูปแบบแวนฮีลี

ในการเรียนการสอนเรขาคณิต ปัญหาที่ครู นักจิตวิทยาและนักคณิตศาสตร์ศึกษาค้นพบและพยายามทำการแก้ไขคือ ปัญหาที่นักเรียนไม่เข้าใจในการเรียนเรขาคณิต Pierre Van Hiele และ Dina Van Hiele-Geldof สามีและภรรยาชาวดัตช์ ผู้ประกอบอาชีพครูคณิตศาสตร์และกำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญาเอก มหาวิทยาลัย Utrecht ประเทศเนเธอร์แลนด์ ในปี ค.ศ. 1954 ได้สังเกตและทำการศึกษาปัญหาการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนเช่นเดียวกัน พบว่านักเรียนไม่เข้าใจเรขาคณิตและนักเรียนรู้สึกว่าการเรียนเรขาคณิตเป็นเรื่องที่ยาก จากการสังเกตนี้จึงทำให้ทั้งคู่ได้พัฒนาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตคือ รูปแบบแวนฮีลี (Van Hiele Model) ลักษณะเด่นของรูปแบบแวนฮีลี คือ นักเรียนต้องผ่านกระบวนการเรียนรู้ที่ละขั้นจากสิ่งที่นักเรียนสังเกตเห็นจนไปสู่การพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผน แวนฮีลีเชื่อว่าการที่นักเรียนจะเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้นั้นต้องมาจากการคิดในลำดับขั้นสูง นักเรียนที่มีการคิดในลำดับขั้นต่ำต้องมีการฝึกฝนในการคิดที่มากเพียงพอก่อนที่จะเรียนรู้ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตที่เป็นแบบแผน โดยไม่ขึ้นกับระดับอายุของนักเรียน ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีส่วนมากพัฒนามาจากทฤษฎีทาง จิตวิทยาของเกสตัลท์ (Gestalt) และ จิน เพียเจ้ (Jean Piaget) ซึ่ง Pierre Van Hiele ได้กล่าวไว้ว่าเขาพัฒนาความคิดรวบยอดของแต่ละลำดับขั้นความคิดมาจากเพียเจ้ คือ ทฤษฎีพัฒนาการทาง สติปัญญาที่เชื่อว่า คนทุกคนมีความพร้อมที่จะมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม และ ปฏิสัมพันธ์นี้ทำให้เกิดพัฒนาการทางสติปัญญา องค์ประกอบที่เสริมสร้างการพัฒนาสติปัญญา คือ วุฒิภาวะ ประสบการณ์ การถ่ายทอดความรู้ทางสังคม และกระบวนการพัฒนาสมดุล (Molina, 1990; Van Hiele, 1986)

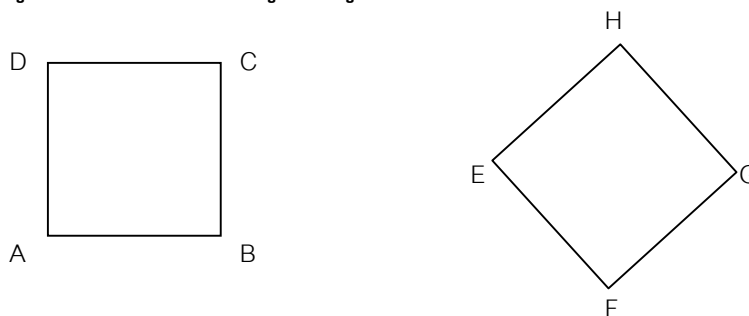
ในปี 1960 สาธารณรัฐโซเวียตได้เรียนรู้งานวิจัยของรูปแบบแวนฮีลีและได้นำรูปแบบแวนฮีลีนี้มาใช้เพื่อปรับปรุงหลักสูตรเรขาคณิตของประเทศ โดยมี Pyshkalo และ Stolyar จากสถาบันการสอนวิทยาศาสตร์ของโซเวียต (Soviet Academy of Pedagogicle Science) เป็นผู้นำรูปแบบแวนฮีลีมาทำการวิจัย (Teppo, 1991; Mason, 2004) จากนั้นในปี ค.ศ. 1982 สหรัฐอเมริกาได้สนใจรูปแบบแวนฮีลี สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติประเทศสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics : NCTM) จึงได้นำรูปแบบแวนฮีลีมาเรียนรู้ ส่งเสริม เน้นความสำคัญของการเรียนรู้และการทำกิจกรรมทางเรขาคณิตอย่างเป็นขั้นตอนเพื่อนำไปสู่ความเข้าใจและพัฒนาการเรียนการสอนเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพ และสหรัฐอเมริกาได้มีโครงการวิจัย 3 โครงการที่ศึกษาระดับลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี คือ โครงการออเรกอนของ University of Oregon และ Oregon state University โครงการบรูคลินของ Brooklyn College และโครงการชิคาโกของ University of Chicaco (Fuys และคณะ, 1984 อ้างถึงใน สิริพร, 2536: 119-120)

2. รูปแบบแวนฮิลี

แวนฮิลีได้แบ่งลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลีไว้ 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 เป็นการมองเห็น (Visualization) ขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis) ขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) ขั้น 3 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) และขั้น 4 เป็นการคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละขั้นดังนี้ (Crowley, 1987; NCTM, 1987; Clements และ Battista, 1992; Fuys และคณะ, 1984 อ้างถึงใน สิริพร, 2536: 119-120)

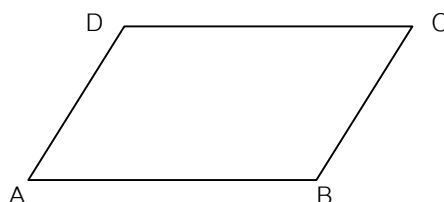
1. ขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 เป็นการมองเห็น (Visualization)

นักเรียนสามารถบอกชื่อรูปภาพที่มองเห็น เน้นเฉพาะลักษณะภายนอก โดยมองในภาพรวม เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อทำการหมุนรูป นักเรียนจะมองเห็นรูปภาพสองภาพนี้คล้ายรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ในขั้นนี้ นักเรียนไม่สามารถบอกคุณลักษณะส่วนย่อย เช่น ด้าน มุม สมบัติของรูปได้ ยกตัวอย่างเช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่นักเรียนมองเห็นนั้นมีมุมฉากสี่มุมและด้านสี่ด้านเท่ากัน หรือรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น



ภาพที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วางในตำแหน่งแตกต่างกัน

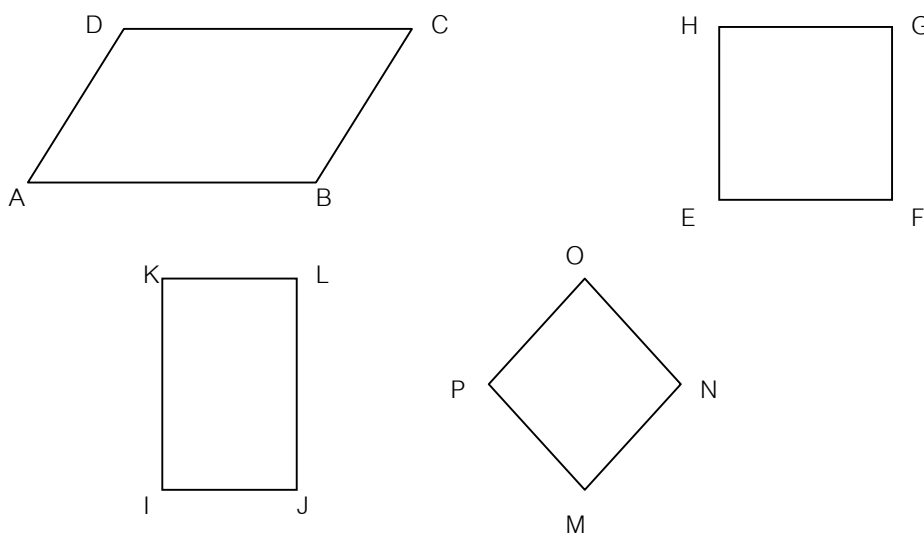
ตัวอย่างคำถามสำหรับนักเรียนในขั้นพื้นฐานนี้ เช่น คำถามที่ให้นักเรียนวัดขนาดของมุมทุกมุมในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



ภาพที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2. ขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis)

นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตสองมิติ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจความสัมพันธ์และสมบัติของรูป ตัวอย่างคำถามสำหรับนักเรียนในขั้นพื้นฐานนี้ ได้แก่ การพิจารณารูปเรขาคณิตต่างๆ แล้วพิจารณาว่ารูปใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนี้

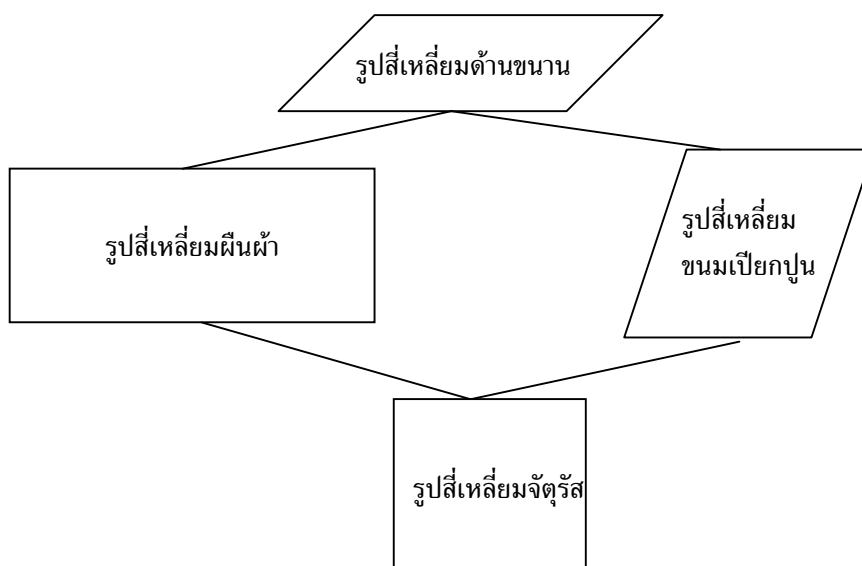


ภาพที่ 3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีลักษณะแตกต่างกัน

3. ขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันได้ การใช้โมเดลและการวาด(รวมถึงการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางเรขาคณิตแบบพลวัต)เป็นเครื่องมือในการสังเกตหาข้อสรุปโดยนัยและตัวอย่าง การสร้างและทดสอบสมมติฐาน การใช้ภาษาที่ยังไม่เป็นทางการแต่แสดงออกถึงความเป็นนิรนัย เช่น ทั้งหมด บ้าง ไม่ ถ้าแล้ว เป็นต้น เช่น ในรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ถ้าด้านตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากันแล้ว มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะต้องเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ยาวเท่ากัน นักเรียนสามารถบอกลักษณะที่แตกต่างกันของรูปสี่ด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้ถึงแม้ว่านักเรียนสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้อย่างไม่เป็นทางการ แต่ยังไม่สามารถพิสูจน์อย่างเป็นทางการได้

ในขั้นนี้นักเรียนเข้าใจคำจำกัดความต่าง ๆ มีการอภิปรายให้เหตุผลอย่างไม่มีแบบแผน ในบางครั้งนักเรียนอาจจะตอบว่า “ผมเข้าใจแต่อธิบายไม่ได้”



ภาพที่ 4 แผนภาพความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยม

4. ชั้น 3 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction)

นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ค้นเคยกับการพิสูจน์โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้อย่างไร นักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นได้มากกว่าหนึ่งวิธี

5. ชั้น 4 เป็นการคิดขั้นสุดยอด(Rigor)

เป็นขั้นสุดท้ายของลำดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลล์ นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่างๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์(Axiom) ทฤษฎี(Theory) และเรขาคณิตนอกแบบยูคลิด(Non-Euclidean Geometry) นักเรียนสามารถจัดทฤษฎีต่าง ๆ เข้าเป็นระบบระเบียบและสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ ทางเรขาคณิต ผู้ที่ได้ลำดับขั้นนี้ส่วนมากเป็นนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยที่ศึกษาวิชาเรขาคณิตระดับสูง

นอกจากนี้ Fuys, Geddes, Lovett และ Tischler (1988) ได้อธิบายเพิ่มเติมถึงลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลล์และพฤติกรรมของนักเรียนที่ตอบสนองในแต่ละลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตไว้สามขั้น คือ ชั้น 0 ชั้น 1 และชั้น 2 ในรูปแบบตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 3 ดังนี้

ตารางที่ 1 ลักษณะของนักเรียน และตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลล์ขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 เป็นการมองเห็น (Visualization)

ลักษณะของนักเรียน(ขั้น 0)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ขั้น 0)
1. นักเรียนสามารถระบุตัวอย่างของรูปได้โดยมองในภาพรวมดังนี้ 1.1) จากการวาดรูปง่าย ๆ หรือรูปที่ต่างจากพวก 1.2) จากตำแหน่งที่แตกต่างกัน 1.3) จากรูปที่มีความซับซ้อน	
2. นักเรียนสามารถสร้างรูป วาดรูป หรือคัดลอกรูปได้	การใช้ก้านไม้ขีดไฟ กระดานตะปู กระเบื้อง ในการคัดลอกรูปหรือแบบรูปลงบนกระดาน
3. นักเรียนสามารถเรียกชื่อหรือระบุชื่อรูปเรขาคณิตโดยใช้ศัพท์ที่เป็นมาตรฐานหรือไม่มาตรฐานได้ตามความเหมาะสม	การอ้างถึงมุม(angles)ว่าเหมือนหัวเลี้ยว (corners) หรือการใช้สัญลักษณ์ตัวอักษรหรือสีในแผนภาพ
4. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบและจัดประเภทของรูปตามลักษณะของรูปในภาพรวม	การจัดประเภทด้วยเหตุผลว่า “ดูคล้ายกันหรือแตกต่างกัน” หรือ “รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวกว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส”
5. นักเรียนสามารถใช้ภาษาที่อธิบายภาพรวมของรูป	รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เอียง และ มุมคือแขนของนาฬิกา
6. นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่พบเป็นประจำด้วยการดูรูปมากกว่าการอ้างถึงสมบัติของรูป	การลองผิดลองถูกด้วยการต่อแทนแตรมการวางกระเบื้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อหาพื้นที่ของรูป
7. นักเรียนสามารถระบุส่วนต่าง ๆ ของรูปได้ แต่ นักเรียน <u>ไม่สามารถ</u> 7.1) วิเคราะห์รูปโดยพิจารณาส่วนต่าง ๆ ของรูป 7.2) นึกถึงสมบัติที่เป็นลักษณะเฉพาะของรูปได้ 7.3) สร้างกรณีทั่วไปที่เกี่ยวกับรูปหรือภาษาที่สัมพันธ์กันได้ เช่น “ทั้งหมด” “ทุก ๆ” และ “ไม่มี”	

ตารางที่ 2 ลักษณะของนักเรียน และตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลล์ขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis)

ลักษณะของนักเรียน(ขั้น 1)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ขั้น 1)
1. นักเรียนสามารถระบุและตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบของรูป เช่น ความเท่ากันของด้าน	นักเรียนสังเกตได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านที่เท่ากันสี่ด้าน และมีมุมสี่มุมเป็นมุมฉาก
2. นักเรียนสามารถจำและใช้ภาษาที่เหมาะสมกับส่วนประกอบต่าง ๆ และความสัมพันธ์ของรูป เช่น มุมตรงข้าม เส้นทแยงมุมที่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน	
3. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบรูปสองรูปโดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่างๆของรูป และ นักเรียนสามารถจัดประเภทของรูปด้วยวิธีที่แตกต่างกันโดยการพิจารณาจากสมบัติของรูป	การเปรียบเทียบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยการอ้างถึงความคล้ายและความแตกต่างของด้านและมุม การสร้างกฎหรือเกณฑ์สำหรับจัดประเภทของรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากจำนวนมุมฉาก
4. นักเรียนสามารถแปลและใช้ภาษาอธิบายสมบัติของรูปได้ สามารถวาดรูปจากคำอธิบายและสามารถแปลภาษาหรือประโยคสัญลักษณ์ของสูตรและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้	นักเรียนสามารถอธิบายสูตรการหาพื้นที่และทราบว่าเมื่อไรที่จะนำสูตรนั้นไปประยุกต์ใช้ได้หรือไม่ได้
5. นักเรียนสามารถค้นพบสมบัติของรูปโดยอาศัยการสังเกตและพัฒนาไปสู่กรณีทั่วไปเพื่อแยกประเภทของรูป	ภายหลังจากระบายสีมุมที่เท่ากันในตารางกริดรูปสามเหลี่ยม นักเรียนพบว่าผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180° และจากนั้นนักเรียนพยายามค้นหาว่าเกิดกรณีเช่นเดียวกันนี้กับรูปสามเหลี่ยมทุกรูปหรือไม่
6. นักเรียนสามารถอธิบายกลุ่มหรือประเภทของรูปโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป และบอกรูปร่างของรูปได้เมื่อบอกสมบัติเฉพาะของรูปมาให้	นักเรียนสามารถอธิบายผ่านทางโทรศัพท์ได้ว่า “รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านสี่ด้าน มีมุมฉากสี่มุม ด้านทุกด้านยาวเท่ากันและด้านตรงข้ามขนานกัน” เมื่อกำหนดเงื่อนไขเฉพาะเกี่ยวกับรูปมาให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปร่างนั้นคือรูปอะไรโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป
7. นักเรียนสามารถระบุสมบัติที่ใช้ในการจัดประเภทของรูปและยังคงประยุกต์ใช้กับการจัดประเภทของรูปอื่น เปรียบเทียบแต่ละประเภทด้วยสมบัติของตัวเอง	การรู้ว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามขนานกัน และนักเรียนสังเกตได้ว่าสมบัตินี้ยังคงเป็นจริงสำหรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ตารางที่ 2 (ต่อ)

ลักษณะของนักเรียน(ชั้น 1)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ชั้น 1)
8. นักเรียนสามารถค้นพบสมบัติการจัดประเภทของรูปที่ไม่เคยพบมาก่อน	
9. นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทงเรขาคณิตโดยใช้สมบัติของรูปที่เคยทราบมาก่อนหรือมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง	นักเรียนคิดจนทราบได้ว่าจะหาพื้นที่ของรูปใหม่ได้อย่างไรโดยการแบ่งรูปเพื่อให้ได้รูปที่นักเรียนสามารถหาพื้นที่ได้ในที่สุด
10. นักเรียนสามารถคำนวณและใช้ข้อสรุปโดยทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติของรูปและการใช้ภาษาที่สัมพันธ์กัน เช่น “ทั้งหมด” “ทุก ๆ” และ “ไม่มี” แต่นักเรียน <u>ไม่สามารถ</u>	นักเรียนไม่สามารถอธิบายได้ว่า จากความคิดที่ว่า “รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดมุมตรงข้ามเท่ากัน” นั้นเนื่องมาจาก “ด้านตรงข้ามขนานกัน” ได้อย่างไร
10.1) อธิบายสมบัติเฉพาะของรูปว่ามีความสัมพันธ์ภายในกันอย่างไร	การให้นิยามของรูปประกอบด้วยรายการของสมบัติที่มากเกินไป
10.2) สร้างและใช้บทนิยามที่เป็นทางการได้	นักเรียนสามารถบอกรายการสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมได้หมดแต่ไม่สามารถอธิบายได้ว่าทำไม “รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกรูปจึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน”
10.3) อธิบายความสัมพันธ์ย่อยนอกเหนือจากการตรวจสอบกรณีเฉพาะที่แย้งกับรายการสมบัติที่กำหนดมาให้	หลังจากนักเรียนค้นพบผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมโดยระบายสีมุมของตารางกริดรูปสามเหลี่ยม นักเรียนมองไม่เห็นความจำเป็นในการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่แสดงว่าทำไมถึงเป็นจริง
10.4) มองเห็นความจำเป็นของการพิสูจน์หรือการอธิบายเชิงตรรกศาสตร์ในการค้นหากรณีทั่วไป หรือใช้ภาษาที่สัมพันธ์กันทางตรรกศาสตร์ เช่น “ถ้า.....แล้ว...” และ “เพราะว่า”	

ตารางที่ 3 ลักษณะของนักเรียนและตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีสซัน 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

ลักษณะของนักเรียน(ชั้น 2)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ชั้น 2)
1. นักเรียนสามารถระบุความแตกต่างของสมบัติที่อธิบายลักษณะกลุ่มของรูปและสามารถทดสอบได้ว่าสมบัตินั้นเพียงพอสำหรับกลุ่มของรูปดังกล่าว นักเรียนสามารถระบุสมบัติจำนวนน้อยที่สุดที่สามารถแยกลักษณะเฉพาะของรูปได้	การเลือกสมบัติที่แยกลักษณะเฉพาะกลุ่มของรูปและการทดสอบโดยการสร้างนั้นเพียงพอ การอธิบายว่าสมบัติของกลุ่มสองกลุ่มนั้นแตกต่างกัน สามารถชี้เฉพาะได้ด้วย

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ลักษณะของนักเรียน(ชั้น 2)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ชั้น 2)
นักเรียนสามารถสร้างและใช้ทฤษฎีสำหรับกลุ่มของรูปได้	รูปเดียวกัน การอธิบายรูปให้เพื่อนฟังด้วยวิธีที่สั้นที่สุด โดยนักเรียนเลือกสมบัติจำนวนที่น้อยที่สุดเพื่อให้แน่ใจว่ารูปที่อธิบายนั้นคือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส การสร้างและใช้ทฤษฎีของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว เพื่อบอกว่าทำไมรูปสี่เหลี่ยมนั้นจึงเป็นหรือไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว นักเรียนสรุปว่า “ถ้า $\angle a = \angle b$ และ $\angle b = \angle c$ ดังนั้น $\angle a = \angle c$ เพราะทั้งสองมุมเท่ากับ $\angle b$” รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีสมบัติทุกข้อเหมือนกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และมีสมบัติเฉพาะคือมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เมื่อกำหนดรายการสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นักเรียนกล่าวว่า “ด้านตรงข้ามเท่ากันไม่จำเป็น เพราะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกล่าวไว้แล้วว่าด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน” นักเรียนอธิบายว่ามุมแหลมสองมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบวกกันได้ 90° เพราะผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°
2. นักเรียนสามารถให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการ (การใช้แผนภาพ การตัดและพับรูป เป็นต้น) การวาดข้อสรุป ตัดสินข้อสรุปด้วยการใช้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ การเรียงอันดับกลุ่มของรูป การเรียงสมบัติสองสมบัติ การค้นหาสมบัติใหม่ด้วยการพิสูจน์แบบนิรนัย การเชื่อมโยงสมบัติต่าง ๆ ด้วยการใช้แผนภูมิต้นไม้	นักเรียนสรุปว่า “ถ้า $\angle a = \angle b$ และ $\angle b = \angle c$ ดังนั้น $\angle a = \angle c$ เพราะทั้งสองมุมเท่ากับ $\angle b$” รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีสมบัติทุกข้อเหมือนกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และมีสมบัติเฉพาะคือมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เมื่อกำหนดรายการสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นักเรียนกล่าวว่า “ด้านตรงข้ามเท่ากันไม่จำเป็น เพราะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกล่าวไว้แล้วว่าด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน” นักเรียนอธิบายว่ามุมแหลมสองมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบวกกันได้ 90° เพราะผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°
3. นักเรียนสามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน ติดตามการให้เหตุผลแบบนิรนัยและสามารถเติมส่วนประกอบต่าง ๆ ของเหตุผลได้ สามารถให้ข้อสรุปหรือให้เหตุผลแบบนิรนัยที่หลากหลาย สามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยด้วยตนเอง	นักเรียนสามารถให้เหตุผลเป็นขั้นตอนในการพิสูจน์เมื่อได้รับการแนะนำผ่านการพิสูจน์ นักเรียนสามารถให้เหตุผลด้วยตนเองสำหรับ “มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากัน”

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ลักษณะของนักเรียน(ชั้น 2)	ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียน(ชั้น 2)
4. นักเรียนสามารถให้คำอธิบายมากกว่าหนึ่งแบบในการพิสูจน์บางประการและให้เหตุผลด้วยการใช้แผนภูมิต้นไม้	นักเรียนสามารถอธิบายผลรวมของมุมภายในรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ 540° โดยการแบ่งรูปห้าเหลี่ยมเป็นรูปสามเหลี่ยมสามรูป หรือแบ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมหนึ่งรูปและรูปสามเหลี่ยมหนึ่งรูป และแสดงแต่ละขั้นตอนในรูปแผนภูมิต้นไม้
5. นักเรียนรู้เกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างข้อความและบทกลับอย่างไม่เป็นทางการ	นักเรียนรู้ว่าสิ่งเหล่านี้แตกต่างกัน ถ้ามุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว ดังนั้นเส้นตรงขนานกัน ถ้าเส้นตรงขนานกันแล้ว ดังนั้นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
6. นักเรียนสามารถระบุและใช้กลยุทธ์หรือความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในการใช้เหตุผลแก้ปัญหา	
7. นักเรียนรู้ถึงบทบาทของการให้เหตุผลแบบนิรนัยและการอ้างเหตุผลแบบนิรนัย แต่ <u>ไม่สามารถ</u>	นักเรียนรู้ถึงบทบาทของการอธิบายเชิงตรรกะ หรือการให้เหตุผลแบบนิรนัยในการสร้างข้อเท็จจริง เช่น “ฉันรู้ว่าผลรวมของมุมภายในรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ 540° แต่ฉันไม่ทราบว่าจะวัดมุมได้อย่างไร”
7.1) เข้าใจความหมายของนิรนัยในสัจพจน์ เช่น ไม่เห็นความจำเป็นสำหรับบทนิยามและสมมติฐานเบื้องต้น	
7.2) แยกความแตกต่างได้อย่างเป็นทางการระหว่างข้อความและบทกลับ	นักเรียนยังไม่มีประสบการณ์พิสูจน์ในสัจพจน์ (เช่น การใช้สัจพจน์ การอ้างบทนิยาม)
7.3) สร้างความสัมพันธ์ภายในระหว่างโครงสร้างของทฤษฎีบท	

จากลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีสซัน 0 ถึงชั้น 2 ข้างต้น เป็นขั้นที่สำคัญที่ควรจะพัฒนานักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นให้มีลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีสซันไม่ต่ำกว่าชั้น 2 เพื่อให้นักเรียนเรียนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้ต่อไปอย่างไม่มีอุปสรรค Teppo(1991)

3. การเรียกลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลี

การเรียกลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลีมีวิธีเรียก 3 แบบ ดังนี้ เมื่อกำหนดลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตทั้งหมด 5 ขั้นตอน วิธีการเรียกลำดับขั้นตอนการคิดมี 2 แบบ คือ แบบที่ 1 การเรียกแบบเรียงลำดับขั้นตอนจาก 0 ถึง 4 เป็นการเรียกแบบดั้งเดิมของรูปแบบแวนฮิลี แบบที่ 2 การเรียกแบบเรียงลำดับขั้นตอนจาก 1 ถึง 5 ซึ่งนิยมเรียกในประเทศสหรัฐอเมริกา การเรียกทั้งสองแบบนี้มีความหมายแต่ละลำดับขั้นตอนเหมือนกันทั้ง 5 ขั้นตอน และแบบที่ 3 เมื่อกำหนดลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตทั้งหมด 6 ระดับ มีวิธีการเรียกลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิต คือ การเรียกเรียงลำดับขั้นตอนจาก 0 ถึง 5 โดยเพิ่มลำดับขั้นตอน 0 คือ ขั้นตอน Pre-Recognition กล่าวคือลำดับขั้นตอนการคิดในขั้นตอนนี้ไม่ถึงลำดับขั้นตอนการมองเห็น (Visualization) (Van Hiele, 1959/1985 อ้างถึงใน Swafford, Jones and Thornton, 1997; Clements และ Battista, 1992; Usiskin, 1982) งานวิจัยในครั้งนี้ใช้การเรียกลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลีแบบที่ 1 คือ การเรียกลำดับขั้นตอนการคิดแบบเรียงลำดับขั้นตอนจาก 0 ถึง 4 เพราะเป็นการเรียกแบบดั้งเดิมของรูปแบบแวนฮิลี และเป็นวิธีเรียกที่นิยมโดยทั่วไป

4. การพัฒนาตามลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลี

การพัฒนาตามลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลีที่ครูผู้สอนควรรู้ 5 ประการ (Crowley, 1987; Fuys และคณะ, 1988; Geddes และ Fortunato, 1993) คือ

1. การมีลำดับขั้นตอนการคิด(Sequential) นักเรียนต้องคิดเป็นไปตามลำดับขั้นตอนการคิดทางเรขาคณิตทีละขั้น โดยไม่มีการข้ามขั้นเป็นเหมือนทฤษฎีพัฒนาการที่สำคัญที่สุดในรูปแบบแวนฮิลี
2. การมีระดับความก้าวหน้า(Advancement) นักเรียนต้องผ่านการคิดทีละขั้นจากลำดับต่ำไปสู่ลำดับสูง ไม่สามารถคิดข้ามลำดับขั้นได้ โดยความก้าวหน้าของแต่ละลำดับขั้นตอนการคิดขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีการเรียนการสอนมากกว่าช่วงอายุหรือวุฒิภาวะของผู้เรียน
3. การมีความเข้าใจที่ชัดเจนในขั้นถัดไป(Intrinsic and extrinsic) นักเรียนจะมีความเข้าใจที่ชัดเจนและสมบูรณ์ยิ่งขึ้นเมื่อนักเรียนอยู่ในลำดับขั้นตอนการคิดที่สูงขึ้น
4. การมีภาษาเฉพาะแต่ละลำดับขั้นตอนการคิด (Linguistics) ในแต่ละลำดับขั้นตอนการคิดจะมีภาษาเฉพาะของแต่ละขั้น การใช้ภาษาที่สัมพันธ์กับลำดับขั้นตอนการคิดที่ถูกต้องในขั้นหนึ่ง อาจเป็นภาษาที่ไม่ถูกต้องของอีกลำดับขั้นหนึ่งที่สูงขึ้น การใช้ภาษาผิดลำดับขั้นจะทำให้การสื่อสารระหว่างครูและนักเรียนน้อยลง
5. การไม่เข้ากันของลำดับขั้นตอนการคิด(Mismatch) ถ้านักเรียนมีลำดับขั้นตอนการคิดในขั้นใดขั้นหนึ่ง แต่ได้รับการสอนที่แตกต่างจากลำดับขั้นตอนการคิดที่นักเรียนมีอยู่ กล่าวคือครูสอนในลำดับขั้นตอนการคิดที่สูงกว่า นักเรียนจะไม่มีความต้องการเรียนรู้และไม่เกิดการเรียนรู้ นักเรียนที่มีลำดับขั้นตอนการคิดที่ต่ำกว่าจะติดตามกระบวนการคิดได้ยาก

ฉะนั้นการพัฒนาตามลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลส์มีความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพ ครูผู้สอนเป็นบุคคลสำคัญที่ต้องรู้พัฒนาการลำดับขั้นการรับรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียน หมั่นประเมินนักเรียน ตรวจสอบความเข้าใจและสื่อสารกับนักเรียนในขณะที่ทำการเรียนการสอนอยู่เสมอ เช่น เมื่อครูสอนเรื่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นักเรียนบางคนมีลำดับความคิดที่แตกต่างกัน ภาษาและคำศัพท์ที่ใช้อภิปรายกันเป็นสิ่งสำคัญที่แสดงให้เห็นถึงลำดับขั้นความคิด การแปลความหมาย และความคิดรวบยอดของนักเรียน ครูผู้สอนต้องเข้าใจลำดับขั้นความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลส์ สามารถจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับการพัฒนาการในแต่ละขั้น ให้ความเวลาในการเรียนการสอนแต่ละขั้นอย่างเพียงพอ หากครูสอนนักเรียนทั้ง ๆ ที่ นักเรียนไม่มีพร้อมในการใช้กระบวนการคิดแล้ว นักเรียนจะไม่เข้าใจ และอาจใช้วิธีจำในการเรียนซึ่งเป็นวิธีที่ไม่คงทนและไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ที่แตกต่างกันต่อไปได้ แม้ว่าลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลส์จะมีทั้งหมด 5 ขั้น แต่ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะเน้นเพียงแต่สี่ขั้นแรกเท่านั้น (De Villiers, 1996) ซึ่งแวนฮิลส์ได้ให้แนวทางการเรียนการสอนเพื่อสอดคล้องกับลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตแบ่งเป็น 5 ระยะ (สิริพร, 2537; Teppo, 1991) คือ

1. การนำเข้าสู่บทเรียนโดยใช้คำถาม (Inquiry Information)

ในขั้นเริ่มแรกนี้ ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนา อภิปราย และทำกิจกรรมในเนื้อหาที่ศึกษา เน้นในเรื่องการสังเกต คำศัพท์ที่ใช้ เช่น คำว่า “รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส” “รูปสามเหลี่ยม” และคำถามที่ครูตั้งขึ้น เช่น “รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร” “รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ เพราะเหตุใด”

2. การแนะนำโดยตรงจากครู (Guided/Directed Orientation)

นักเรียนปฏิบัติตามสิ่งที่ครูบอกอย่างเป็นขั้นตอน สำรวจเนื้อหาที่เรียนโดยใช้สื่อที่ครูตั้งใจจัดเรียงไว้ให้ตามลำดับการเรียนรู้ เช่น การพับ การวัด การหาสมมาตร ในกิจกรรมนี้ควรทำไปที่ละขั้นตอนตามลักษณะการเรียนรู้ของนักเรียน ครูแนะนำสัญลักษณ์ที่ใช้ในทางเรขาคณิต และรูปเรขาคณิตสามมิติ เช่น กรวย ทรงกระบอก ตลอดจนสมบัติที่สำคัญ ๆ เช่น สมบัติของการเท่ากัน เป็นต้น

3. การอธิบายอย่างชัดเจน (Explication/Explanation)

นักเรียนอธิบายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนได้พบเห็น หรือจากประสบการณ์ก่อนหน้านี้ บทบาทหน้าที่ของครูจะลดน้อยลง เช่น ครูทำหน้าที่ช่วยนักเรียนในเรื่องการใช้คำศัพท์ทางเรขาคณิตอย่างถูกต้องและเหมาะสม เนื่องจากในขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนจะเริ่มปรากฏลำดับขั้นตอนการคิดในเรื่องความสัมพันธ์ขึ้น

4. การศึกษาด้วยตนเอง (Free Orientation)

ครูให้นักเรียนมีอิสระในการเรียนมากยิ่งขึ้น นักเรียนจะได้รับงานที่สลับซับซ้อนขึ้น งานที่ต้องใช้วิธีการทำหลายขั้นตอน งานที่มีวิธีการคิดหรือพิสูจน์มากกว่าหนึ่งวิธี งานที่เป็นปลายเปิด นักเรียนจะได้รับประสบการณ์จากการแก้ปัญหาด้วยตนเอง และแสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ กับสิ่งที่นักเรียนได้ศึกษา นักเรียนสามารถตอบคำถามเกี่ยวกับความเป็นเหตุเป็นผลได้ เช่น นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า “ทำไมเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจึงเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้น” หรือการทำนายผลก่อนการปฏิบัติจริง ๆ เช่น “จะเกิดภาพอะไรขึ้นเมื่อนักเรียนตัดมุมของกระดาษที่พับซ้อนกัน 2 ครั้ง โดยการตัดเป็น 30° และ 90° ”

5. การบูรณาการ (Integration)

นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในเรื่องที่นักเรียนได้เรียนรู้มาเป็นแนวคิดในรูปแบบใหม่ ครูเป็นผู้ทำหน้าที่ช่วยสรุป ตั้งคำถามให้นักเรียนถามตอบ แสดงความคิดเห็น สังเคราะห์สิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้ทั้งหมด เช่น สรุปสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

รูปแบบการเรียนการสอนเรขาคณิต

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตมีวิธีการได้หลากหลาย ครูผู้สอนจะเลือกใช้รูปแบบหรือวิธีสอนแบบใดนั้นต้องคำนึงถึงความเหมาะสมของเนื้อหาวิชา ความสอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน โดยยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ ทั้งนี้ในแต่ละเนื้อหาอาจใช้วิธีการสอนที่แตกต่างกันหรือใช้วิธีการสอนหลาย ๆ วิธีผสมกันได้ ซึ่งยุพิน(2545: 13) ได้กล่าวว่า ในยุคปฏิรูปการศึกษา ต้องการให้ผู้เรียนสามารถค้นพบข้อสรุปด้วยตนเอง และสามารถสร้างองค์ความรู้ได้

จากแนวคิดการจัดการลำดับชั้นการเรียนรู้ของแวนฮิลล์พบว่า การให้นักเรียนรู้จักการค้นหาค้นพบเป็นวิธีการสำคัญในการเรียนเรขาคณิต ยุพิน(2545: 35-37) ได้กล่าวถึงวิธีการสอนแบบค้นพบ(Discovery Method) ไว้ว่าวิธีการสอนแบบค้นพบมีความหมายดังนี้

ประการแรก เป็นวิธีการสอนที่ให้ผู้เรียนพบปัญหาหรือสถานการณ์แล้วให้ผู้เรียนแสวงหาวิธีการแก้ปัญหานั้น ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาผลที่เกิดขึ้น ซึ่งผู้สอนมิได้คาดหวังว่าผู้เรียนจะต้องค้นพบดังที่ผู้สอนต้องการเสมอไป การค้นพบนี้จึงเน้นกระบวนการค้นพบไม่ได้เน้นที่ผลของการค้นพบ

ประการที่สอง เป็นวิธีการสอนที่เน้นไปที่ผู้เรียนว่าต้องการให้ค้นพบอะไร เช่น กฎ สูตร หรือบทนิยาม ผู้เรียนจะสามารถหาข้อสรุปได้ การค้นพบแบบนี้จะค้นพบวิธีการสอนวิธีใดก็ได้ เช่น

การถามตอบ การสาธิต การทดลอง การอภิปราย ตลอดจนวิธีการสอนแบบอุปนัยและนิรนัย วิธีการใดก็ตามที่ผู้เรียนสามารถสรุปหรือกำหนดนัยทั่วไป (Generalization) ได้ เรียกว่าการค้นพบ

วิธีการค้นพบมีดังนี้

1. ผู้เรียนค้นพบด้วยตัวเอง ตัวอย่างเช่น เมื่อผู้สอนยกตัวอย่างให้หลายๆ ตัวอย่าง พอผู้เรียนสังเกตเห็นแบบรูป ผู้เรียนก็สามารถสรุปได้ด้วยตนเอง หรือเมื่อผู้สอนมอบปัญหาใด ปัญหาหนึ่งแล้ว ผู้สอนก็จะปล่อยให้ผู้เรียนคิดอย่างอิสระเสรี ผู้เรียนก็จะศึกษาหาวิธีแก้ปัญหด้วยตนเอง
2. ผู้เรียนค้นพบภายใต้การแนะแนวทางของผู้สอน (Guided Discovery) การค้นพบแบบนี้ผู้สอนจะเป็นผู้แนะแนวทาง เพราะถ้าปล่อยให้ผู้เรียนค้นพบด้วยตนเอง ก็จะทำให้เสียเวลามาก บางที่เป็นเรื่องยาก ผู้สอนแนะเล็กน้อยผู้เรียนก็สามารถค้นพบคำตอบได้
3. ผู้เรียนค้นพบเป็นรายบุคคลหรือให้เรียนเป็นคณะ (Team Learning) เมื่อผู้เรียนมาร่วมปรึกษาหารือกันก็จะเกิดการค้นพบได้ง่ายเข้า ผู้เรียนบางคนก็ชอบคิดคนเดียวก็สามารถค้นพบได้เช่นเดียวกัน ผู้สอนสามารถใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ (Co-operative learning) ให้นักเรียนช่วยกันเพื่อให้เกิดการค้นพบ

ลิริพร (2545: 136) ได้กล่าวว่าวิธีการสอนแบบวิเคราะห์-สังเคราะห์ เป็นวิธีที่นำมาใช้อย่างมากในการพิสูจน์เรขาคณิต ใช้ทั้งการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ พิจารณาจากผลไปหาเหตุ โดยศึกษาว่า โจทย์ต้องการทราบอะไร หรือสิ่งใดที่โจทย์ถามแล้วเชื่อมโยงจากสิ่งที่โจทย์ถามไปยังสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วจึงใช้วิธีการสังเคราะห์โดยการพิจารณาจากเหตุไปหาผล ซึ่งเป็นการนำข้อสรุปย่อยๆ ที่จำเป็นต่างๆ มารวมกัน เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ต้องการหรืออาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าเป็นการเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้ที่เราทราบแล้วนำมาใช้ช่วยในการหาสิ่งที่เราต้องการทราบ ซึ่งมีข้อดีคือ ช่วยทำให้นักเรียนรู้จักคิดไปตามลำดับขั้นตอนและมีเหตุผล ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการคิดอย่างพินิจพิเคราะห์

ในการสอนเรขาคณิตโดยใช้วิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิตนั้นยุพิน (2545:24-25) ได้เสนอขั้นตอนไว้ดังนี้

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 1.1) ทาวิธีการที่ให้ผู้เรียนสรุปเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การใช้เหตุผล การใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป แล้วให้ผู้เรียนรู้จักแยกแยะเหตุและผลเสียก่อน

1.2) ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล จากตัวอย่างได้

1.3) ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1.4) เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจจะใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และสังเคราะห์ร่วมกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด

2.1) ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผล หรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกได้ จะต้องพยายามให้ฝึกจนกว่าจะแยกได้ โดยครูอาจให้ทำแบบฝึกหัด

2.2) เขียนรูปประกอบ

2.3) การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์ หรือสังเคราะห์ หรือใช้การวิเคราะห์ร่วมกับสังเคราะห์ จะต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง

3.1) ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับ ผู้เขียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วก็ถามผู้เรียนอีกว่าสร้างเป็นอย่างไร เป็นการเสียเวลา หรือถ้าเป็นเรื่องง่ายก็ให้ผู้เรียนแบ่งกลุ่มศึกษาสาระในหนังสือเรียน

3.2) การพิสูจน์จะใช้วิธีการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน แล้วช่วยกันพิสูจน์ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

การใช้คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนเรขาคณิต

ในปัจจุบันวิทยาการและเทคโนโลยีได้พัฒนาเพิ่มขึ้นอย่างมาก การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้ทำเทคโนโลยีเหล่านี้มาใช้เป็นสื่อการเรียนรู้ในการจัดการเรียนการสอน ทั้งเครื่องคิดเลขกราฟิก(graphic calculator) คอมพิวเตอร์ อินเทอร์เน็ต เป็นต้น ทั้งนี้การใช้เทคโนโลยีประเภทใดมาจัดการเรียนการสอนนั้นขึ้นอยู่กับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการให้ปรากฏ และเกิดประโยชน์สูงสุดต่อผู้เรียนเป็นหลัก จากเอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์(กระทรวงศึกษาธิการ, 2545ข)ได้ให้ความสำคัญของสื่อการเรียนรู้ว่าควรเน้นให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง ได้พัฒนาศักยภาพทางความคิด เช่น

การคิดอย่างสร้างสรรค์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การคิดอย่างมีเหตุผล การคิดอย่างหลากหลาย อีกทั้งสื่อที่ตีความกระตุ้นให้นักเรียนได้รู้จักแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง สื่อเหล่านี้มีประโยชน์ทั้งครูและนักเรียน ซึ่งยูพิน (2545: 52) ได้ให้ความสำคัญของการใช้คอมพิวเตอร์และเครื่องคิดเลข กราฟิกว่าครูผู้สอนควรใช้ให้เป็น เพราะสามารถช่วยในด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์อย่างมาก ช่วยสอนเนื้อหาบางเรื่องให้เห็นภาพอย่างชัดเจน สอดคล้องกับ ลีริพร(2537: 174-175) ที่ได้กล่าวถึงประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ที่มีต่อนักเรียนไว้ว่า เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนตามเอ็กต์ภาพ สามารถให้ข้อมูลย้อนกลับได้ทันที(feedback)ที่ทำให้นักเรียนตื่นเต้น กลับมาทบทวนได้ เรียนรู้ได้นอกเวลาเรียน ฝึกให้นักเรียนมีความกระตือรือร้น(active learning) ฝึกให้คิดอย่างมีเหตุผล ให้นักเรียนมีความคงทนในสิ่งที่เรียนและช่วยให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตนั้น สื่อคอมพิวเตอร์เป็นที่ยอมรับนำมาใช้ในประกอบการเรียนการสอนอย่างมากในสหรัฐอเมริกาตั้งเห็นได้จากหลักและมาตรฐานสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน(Principles and Standards for School Mathematics) ของสมาคมครูคณิตศาสตร์ระดับชาติของสหรัฐอเมริกา(NCTM) ที่ได้แนะนำโปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัต(Dynamic Geometry) คือ โปรแกรมสเก็ตซ์แพด(Geometer's Sketchpad: GSP) มาใช้ประกอบหลักสูตร ซึ่งโปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตสเก็ตซ์แพดได้เริ่มสร้างและพัฒนาขึ้นในโครงการ Visual Geometry Project (VGP) ณ Swarthmore College ภายใต้การควบคุมของ Eugene Klotz และ Doris Schattschneider ในช่วงกลางปีค.ศ. 1980 โดยได้รับทุนจาก National Science Foundation โครงการนี้ได้พัฒนาชุดวีดิโอเทปที่เน้นเรขาคณิตสามมิติ พร้อมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ในการนำเสนอ สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Klotz ในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษาได้มอบหมายให้ Nicholas Jackiw เป็นผู้รับผิดชอบ โดยในงานแรก Jackiw สร้างโปรแกรมสำเร็จรูปสามมิติเรียกว่า Cavalieri ที่มีลักษณะคล้ายกับโปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตสเก็ตซ์แพดตามจุดเน้นของโครงการเพื่อให้ได้ความคิดรวบยอดของเรขาคณิตสามมิติ แต่เนื่องด้วยความยากและการใช้เวลานานในการสร้าง Klotz และ Schattschneider จึงตัดสินใจเปลี่ยนมาเน้นสร้างโปรแกรมกราฟิกสองมิติแทน และ Jackiew สามารถทำได้สำเร็จในปี ค.ศ. 1991(Scher, 2002)

ลักษณะเด่นของโปรแกรม GSP เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่ให้นักเรียนสามารถใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีมาพร้อมกับโปรแกรม เช่น จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง เส้นโค้ง เครื่องมือวัดมุม เครื่องมือวัดความยาว ที่เที่ยงตรงและถูกต้อง เป็นต้น ในการสร้างรูปทางเรขาคณิตได้โดยการคลิก โยก เลื่อน ลากเมาส์ ให้มีการเคลื่อนไหวของวัตถุ หรือรูปได้อิสระตามต้องการในแต่ละคำสั่งสร้างรูปทางเรขาคณิตที่มีความซับซ้อนใช้เวลามากในการสร้าง สร้างยากหรือไม่สามารถสร้างได้ด้วยการใช้กระดาษและปากกาได้อย่างรวดเร็ว และด้วยประสิทธิภาพของโปรแกรม GSP ที่มีการเคลื่อนไหว(dynamic)แทนการหยุดนิ่ง(static) เป็นโปรแกรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ความคิดรวบยอดได้อย่างรวดเร็ว ได้อย่างอิสระทั้งการปฏิบัติและอิสระทางความคิด ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะที่จำเป็นต่อการเรียนเรขาคณิตคือ การสำรวจ สืบเสาะ คาดการณ์ ตรวจสอบ

สอบ เป็นต้น นักเรียนจะเรียนรู้ได้ดีและรู้สึกสนุก ตื่นเต้นในคราวเดียวกัน ได้มีการอภิปรายฝึกทักษะในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ทั้งนี้ในประเทศไทยได้มีการนำโปรแกรม GSP มาใช้ โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) ได้มีโครงการซื้อลิขสิทธิ์โปรแกรมมาให้ครูและนักเรียนไทยได้ใช้โปรแกรมที่มีประสิทธิภาพนี้ และยังมีโครงการโรงเรียนนำร่องเพื่อการใช้โปรแกรม ซึ่งยุพิน (2545) ได้กล่าวสนับสนุนว่าควรติดตามดูโปรแกรม GSP ติดตามการสำรวจและการสืบเสาะจากการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ทั้งยังให้ความเห็นว่าสื่อวัสดุสิ่งประดิษฐ์ทั้งหลายก็สามารถเปลี่ยนมาใช้คอมพิวเตอร์ได้เช่นกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงคิดว่าจากประโยชน์ของโปรแกรม GSP ดังกล่าวข้างต้น โปรแกรม GSP จึงควรเป็นโปรแกรมที่น่าสนใจในการนำมาใช้จัดการเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นอย่างยิ่ง

การวัดผลและประเมินผลคณิตศาสตร์

การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้เน้นกระบวนการที่ทำให้ผู้สอนทราบว่าผู้เรียนได้เปลี่ยนพฤติกรรมตามจุดมุ่งหมายของการสอนที่ครูผู้สอนกำหนดไว้หรือไม่ การสอนที่มีประสิทธิภาพนั้นจะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้หรือเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมไปในทางที่พึงปรารถนา เครื่องมือที่ใช้ในการวัดผลการศึกษาไม่จำเป็นต้องเป็นแบบทดสอบแต่เพียงอย่างเดียว ผู้สอนอาจใช้วิธีการสังเกต การสัมภาษณ์ การบันทึกพฤติกรรม(สิริพร, 2536)

การวัด หมายถึง การตรวจสอบหรือค้นหาลักษณะที่ผู้สอนต้องการตรวจสอบนั้นมีปริมาณและคุณภาพมากน้อยเพียงใด การประเมินผล หมายถึง การนำผลจากการวัดต่าง ๆ มาประมวลชี้ขาดในขั้นสรุปหรือขั้นการตัดสินใจ ทั้งนี้การวัดผลเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผล การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการคือ

1. เพื่อบ่งชี้ว่าผู้เรียนมีทักษะและความรู้ที่สำคัญเพียงพอหรือไม่
2. เพื่อบ่งชี้ระดับสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนของผู้เรียนแต่ละคน
3. เพื่อวินิจฉัยจุดเด่นหรือจุดด้อยของผู้เรียน โดยสังเกตจากผลการเรียนของผู้เรียนที่แสดงออกมาให้ผู้สอนเห็น

ยุพิน (2545) ได้สรุปแนวทางการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 ของกรมวิชาการไว้ว่า การวัดผลและการประเมินผล การเรียนรู้ มีองค์ประกอบดังนี้

1. การประเมินผลก่อนเรียน

1.1) การประเมินความพร้อมและพื้นฐานของผู้เรียน

1.2) การประเมินความรู้เรื่องที่จะเรียนก่อนเรียน

2. การประเมินผลระหว่างเรียน

2.1) การประเมินด้วยการสื่อสารส่วนบุคคล

2.1.1) การถามตอบระหว่างกิจกรรมการเรียนรู้

2.1.2) การสนทนาพบปะพูดคุยกับผู้เรียน

2.1.3) การสนทนาพบปะพูดคุยกับผู้เกี่ยวข้องกับผู้เรียน

2.1.4) การสอบปากเปล่าเพื่อประเมินความรู้ ความเข้าใจ และทัศนคติ

2.1.5) การอ่านบันทึกเหตุการณ์ต่างๆของผู้เรียน

2.1.6) การตรวจแบบฝึกหัดและการบ้าน พร้อมให้ข้อมูลย้อนกลับ

2.2) การประเมินจากการปฏิบัติ(Performance Assessment) เป็นวิธีการประเมินที่ผู้สอนมอบหมายงานหรือกิจกรรมให้ผู้เรียนปฏิบัติ ผู้สอนต้องเตรียมการ 2 ประการ คือ

2.2.1) ภาระงานหรือกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนปฏิบัติ (Task)

2.2.2) เกณฑ์การให้คะแนน (Rubrics)

วิธีการปฏิบัติจะเป็นไปตามลักษณะงานดังนี้

ก. ภาระงานที่ผู้สอนกำหนดให้ผู้เรียนทำเป็นรายบุคคล/กลุ่ม จะประเมินวิธีการทำงานตามขั้นตอนและผลงานของผู้เรียน

ข. ภาระงานหรือกิจกรรมที่ผู้เรียนปฏิบัติเป็นปกติในชีวิตประจำวัน จะประเมินด้วยวิธีสังเกต จดบันทึกเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับผู้เรียน

ค. การสาธิต

ง. การทำโครงงาน

2.3) การประเมินสภาพจริง เป็นการประเมินจากการปฏิบัติงานหรือกิจกรรม โดยงานหรือกิจกรรมที่มอบหมายให้ผู้เรียนปฏิบัติ จะเป็นสถานการณ์ที่เป็นจริง(Real life) หรือใกล้เคียงกับชีวิตจริง จึงเป็นงานที่มีสถานการณ์ซับซ้อน(Complexity) และเป็นองค์รวม(Holistic) มากกว่างานปฏิบัติในกิจกรรมการเรียนรู้ทั่วไป โดยวิธีการประเมินตามสภาพจริงไม่มีความแตกต่างจากการประเมินจากการปฏิบัติ แต่ยุ่งยากมากกว่า เนื่องจากเป็นสถานการณ์จริงหรือต้องจัดสถานการณ์ให้ใกล้เคียง

2.4) การประเมินด้วยแฟ้มสะสมงาน(Portfolio Assessment) เป็นวิธีการที่ช่วยส่งเสริมให้การประเมินตามสภาพจริงมีความสมบูรณ์สะท้อนศักยภาพที่แท้จริงของผู้เรียนมากขึ้น โดยการให้ผู้เรียนได้เก็บรวบรวมผลงานจากการปฏิบัติจริง ทั้งในชั้นเรียนหรือในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้ต่าง ๆ จัดแสดงอย่างเป็นระบบ

จากการวัดผลและประเมินผลในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีหลากหลายรูปแบบดังที่ได้กล่าวข้างต้น เมื่อพิจารณาในวิชาเรขาคณิต พบว่าโดยทั่วไปนอกเหนือจากการประเมินความรู้ด้านเนื้อหาแล้ว ยังมีการประเมินจากการปฏิบัติที่ครูผู้สอนส่วนใหญ่นิยมใช้เป็นเกณฑ์ในการประเมินร่วมด้วยคือ การประเมินผลงาน ภาระงานหรือกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนปฏิบัติ (Task) ซึ่งเป็นผลผลิต ผลการปฏิบัติที่ได้จากความรู้ที่สั่งสมมา แต่อีกสิ่งหนึ่งที่เกิดขึ้นพร้อมกันและสำคัญไม่น้อยกว่ากันคือ พฤติกรรมของผู้เรียน ครูผู้สอนควรทำการประเมินโดยการสังเกตพฤติกรรมผู้เรียน ครูผู้สอนควรคอยสังเกต สัมภาษณ์ และบันทึกพฤติกรรมที่เกิดขึ้นไว้ที่แบบบันทึกพฤติกรรม เพื่อให้เป็นข้อมูลในการนำมาประกอบใช้พิจารณาความสามารถของผู้เรียน ข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้น ซึ่งบุญธรรม (2547: 245-249) ได้ให้ความหมายของการสังเกต (Observation) ไว้ว่าเป็นการใช้ประสาทสัมผัสทั้งห้า ในการศึกษา ค้นหา พฤติกรรมมนุษย์หรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น เพื่อให้รู้ว่ามีมนุษย์คิดอะไร ทำอะไร โดยเฝ้าดูการกระทำที่แสดงออกในสถานการณ์ต่าง ๆ และในการทำกิจกรรมต่าง ๆ ที่เป็นไปตามธรรมชาติ ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ข้อมูลที่ได้จากการสังเกตจะถูกต้องและตรงกับความเป็นจริงมากกว่าข้อมูลที่ได้จากวิธีอื่น โดยมีหลักการสังเกตเพื่อทำวิจัย คือ การสังเกตต้องทำอย่างเป็นระบบ(Systematic) ต้องเฉพาะเจาะจง(Specific) มุ่งให้ตรงวัตถุประสงค์ของการวิจัย ต้องเป็นปรนัยใช้เกณฑ์เดียวกัน ควรมีคุณสมบัติเชิงปริมาณ(Quantitative) ต้องจดบันทึกผลทันที ต้องอาศัยผู้สังเกตที่รอบรู้เข้าร่วมด้วย และผลการสังเกตต้องตรวจสอบได้(Verifiable) ทั้งนี้เครื่องมือช่วยสังเกตที่สำคัญได้แก่ เทปบันทึกเสียง วีดีโอเทป กล้องถ่ายรูป นาฬิกาจับเวลา เป็นต้น

ส่วนการสัมภาษณ์เป็นการรวบรวมข้อมูลในลักษณะที่มีการสนทนากันระหว่างผู้ที่มีข้อมูลกับผู้ต้องการทราบข้อมูล สนทนากับให้ข้อมูลโดยตรง หากมีข้อสงสัยหรือคำถามใดไม่เข้าใจหรือเข้าใจไม่ชัดเจนก็ถามซ้ำและทำความเข้าใจทันที เป็นการสร้างความมั่นใจให้ทั้งผู้ตอบและผู้ทำการวิจัยโดยต้องกำหนดวัตถุประสงค์ของการสัมภาษณ์ให้ชัดเจน จัดคำถาม ศึกษาข้อมูล จด/บันทึกการสัมภาษณ์ทันที ให้ได้ข้อมูลครบถ้วน ทั้งนี้การสัมภาษณ์ยังทำให้ผู้สัมภาษณ์ได้สังเกตพฤติกรรมของผู้ที่ได้รับการสัมภาษณ์ไปด้วยในตัว (บุญธรรม, 2547: 249-257: บุญเรียง, 2543: 175-179) ซึ่งเห็นได้ว่าการวัดผลและการประเมินผลจากการสังเกตและการสัมภาษณ์เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนการสอนเรขาคณิต

จากการศึกษาลำดับขั้นการเรียนรู้คิดตามรูปแบบของแวนฮีสที่นักเรียนต้องผ่านการคิดที่ไล่ขึ้นจากลำดับต่ำไปสู่ลำดับสูงทั้ง 5 ขั้น โดยไม่สามารถเรียนรู้ข้ามกระโดดได้ ครูมีหน้าที่สำคัญที่จะสังเกต ชักถาม ติดตามวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนที่ไล่ขึ้นตอน เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนเรขาคณิตให้เหมาะสมกับนักเรียนและมีประสิทธิภาพมากที่สุด

เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์

การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้ได้เกิดผลดีนั้น ครูต้องคำนึงถึงการใช้ความรู้ในด้านเนื้อหาวิชา ควบคู่ไปกับการปลูกฝังให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ เพื่อนักเรียนจะได้มีความตั้งใจ และความกระตือรือร้นอยากเรียนมากขึ้น และมีส่วนร่วมช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียน ครูควรพยายามชักจูง โน้มน้าวและปลูกฝังให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ซึ่ง Bloom (1976: 685-689) อ้างถึงในหนึ่งฤทัย (2544) ได้เสนอองค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. ความพึงพอใจ(willingness) เป็นภาวะที่เกิดความอยากจะรับความสำคัญของคณิตศาสตร์มากระตุ้นความรู้สึก เช่น ได้รับเนื้อหาใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ พบโจทย์ปัญหาที่แปลกใหม่ เป็นต้น

2. ความสนใจ(interest) เป็นสภาวะที่เกิดขึ้นต่อเนื่องจากความพึงพอใจ เมื่อมีสิ่งเร้ามากระตุ้นหรือมีสถานการณ์บางอย่างเกิดขึ้น บุคคลนั้นจะเลือกรับหรือเลือกให้ความสนใจเฉพาะสิ่งที่ชอบหรือนำความพอใจมาให้ และขณะเดียวกันก็มีแนวโน้มที่จะไม่ให้ความสนใจสิ่งเร้าหรือสถานการณ์ที่ไม่ชอบ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ นักเรียนจะพบกันสิ่งเร้าหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นบุคลิกภาพของครู เนื้อหาในแต่ละระดับ วิธีการสอนของครู อุปกรณ์ที่ใช้ ฯลฯ สิ่งเหล่านี้จะเป็นตัวก่อให้เกิดความพอใจและความสนใจ หรือไม่สนใจในวิชาคณิตศาสตร์ในลักษณะที่สั่งสมอยู่ในตัวนักเรียนมากขึ้นน้อยแตกต่างกันไป

3. แรงจูงใจ(motivation) ในกรณีที่นักเรียนสนใจในคณิตศาสตร์ พฤติกรรมที่ตามมาคือพยายามที่จะทำสิ่งต่าง ๆ ให้สำเร็จไม่ย่อท้อ เป็นต้นว่า สอบได้คะแนนครั้งแรกไม่ดี ในครั้งต่อไปก็จะพยายามทำให้ดีขึ้น พยายามทำแบบฝึกหัดหรือโจทย์ปัญหาที่ยาก ๆ เพื่อจะพบกับโจทย์ปัญหาที่ยากกว่า ได้เข้าร่วมกิจกรรมเรขาคณิต เพื่อแสดงความสามารถทางเรขาคณิตของตน ในทางตรงกันข้ามถ้านักเรียนไม่สนใจเรขาคณิต พฤติกรรมที่จะบ่งชี้ก็จะเป็นไปในทางตรงกันข้าม

4. ความวิตกกังวล(anxiety) เป็นสภาวะจิตใจที่มีความตึงเครียด ซึ่งอาจเนื่องมาจากการตั้งความหวังไว้แล้วกลัวทำไม่สำเร็จ หรือได้ทำไปแล้วและไม่สำเร็จ หรือความไม่พร้อมที่จะทำสิ่งใดสิ่งหนึ่งแต่ต้องทำเป็นต้น ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ มีสถานการณ์มากมายที่ความวิตกกังวลของนักเรียน ช่วยบ่งชี้ถึงเจตนาของเขาที่มีต่อคณิตศาสตร์

5. มโนภาพแห่งตน(Self-concept) เป็นความรู้สึกเกี่ยวกับสภาพของตนเอง หลังจากที่ได้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เป็นความรู้สึกรวม ๆ ต่อคณิตศาสตร์ ของตนเอง เป็นต้นว่าความรู้สึกที่อยากจะพบกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตอยู่เสมอ มีความรู้สึกว่าเรขาคณิตมีความท้าทายความสามารถของตนเองเป็นอย่างดี เหล่านี้เป็นมโนภาพแห่งตนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการเรียนการสอนเรขาคณิตซึ่งเป็นสาระหนึ่งในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูควรปลูกฝังให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อเรขาคณิต อันจะส่งผลให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตต่อไป

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนสอนเรขาคณิต

งานวิจัยต่างประเทศ

Bettisari (2002) ได้ทำการสำรวจความเข้าใจและลำดับชั้นการคิดของแวนฮิลส์ในการสร้างทางเรขาคณิตของนิสิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตที่ลงทะเบียนวิชาเรขาคณิต I ที่มหาวิทยาลัยเซนเดอร์ลาวิช(Cenderawashi University: UNCEN) ประเทศอินโดนีเซีย โดยนิสิตได้ทำแบบทดสอบการพัฒนาสติปัญญาในวิชาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา (CDASSG) แบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต และการทดสอบหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิต จากการทดสอบพบว่าความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการสร้างทางเรขาคณิตสัมพันธ์กับลำดับชั้นความคิดทางเรขาคณิตของรูปแบบแวนฮิลส์และความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต จากการสัมภาษณ์พบว่านิสิตมีลำดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮิลส์อยู่ในช่วงลำดับชั้นที่ 1 ถึงลำดับชั้นที่ 3 อีกทั้งนิสิตมีการแสดงออกลำดับชั้นการคิดที่แตกต่างกันในปัญหาที่ต่างกันขึ้นอยู่กับความเข้าใจความคิดรวบยอดของนิสิตที่มีมาแต่เดิม

Gfeller (2004) ได้ทำการสำรวจความคิดเห็นของนักเรียนเกรด 10 จำนวน 25 คน เรื่อง จุดประสงค์ของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยมีวิธีการและเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูลที่หลากหลาย คือ การสังเกตในชั้นเรียน หลักสูตร เครื่องมือประเมินผล การใช้แบบสอบถามความคิดเห็นรวบยอดเบื้องต้น กับนักเรียนจำนวนหนึ่งห้องเรียน ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนจำนวนมากแสดงความคิดเห็นในเรื่องจุดประสงค์ของการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ยากลำบาก จำนวนนักเรียนหนึ่งในสามเขียนได้เพียงแค่สมบัติของทฤษฎีที่พบขณะทำการพิสูจน์ เมื่อผู้วิจัยถามเพื่อให้นักเรียนอธิบายถึงจุดประสงค์ของการพิสูจน์ที่ละขั้นตอน นักเรียนทุกคนสามารถตอบได้รวมทั้งการอธิบายและการตรวจสอบ

2. นักเรียนแสดงความคิดเห็นในเรื่องจุดประสงค์ของการพิสูจน์ ได้ค่อนข้างจำกัด นักเรียนส่วนใหญ่มักอ้างถึงการตรวจสอบ มีนักเรียนเพียงบางคนที่สามารถอ้างถึงได้ถึงชั้นการอธิบาย ระบบขั้นตอน และการสื่อสาร อย่างไรก็ตามนักเรียนสามารถอ้างจุดประสงค์ของ

การพิสูจน์ได้อย่างน้อย 2 จุดประสงค์(การอธิบาย การตรวจสอบ การสื่อสาร) ในการอธิบายกระบวนการพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตเชิงพีคัด

3. นักเรียนแสดงความคิดเห็นในเรื่องจุดประสงค์ที่หลากหลายของการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้แตกต่างกัน

งานวิจัยภายในประเทศ

อารีย์ (2535) ได้ทำการศึกษาผลของการสอนแบบปฏิบัติการเรื่องสมบัติเกี่ยวกับวงกลม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค311 ของโรงเรียนอิสลามวิทยาลัยแห่งประเทศไทย เขตราชบุรีบูรณะ กรุงเทพมหานคร จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 45 คน กลุ่มทดลองสอนแบบปฏิบัติการโดยผู้วิจัย และกลุ่มควบคุมสอนแบบปกติ โดยครูประจำวิชา ผลการวิจัยปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการและนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

วัฒนา (2541) ได้ทำการศึกษาผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อความสามารถทางการเรียนเรขาคณิต และการเห็นคุณค่าในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 43 คน โดยวิธีสุ่มแบบกลุ่ม (cluster random sampling) ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อความสามารถทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สูงกว่า 50% ของเกณฑ์การเรียนตามที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด คิดเป็นร้อยละ 60.5 และต่ำกว่า 50% ของเกณฑ์การเรียนตามที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด คิดเป็นร้อยละ 39.5 และการเห็นคุณค่าในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

กุลยา (2545) ได้ทำการศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮิลส์ ผู้วิจัยทำการทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 98 คน ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮิลส์ เรื่องเส้นขนานและความคล้าย ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮิลส์ นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับตามลำดับ เมื่อจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ พบว่า 1.1) นักเรียนกลุ่มสูงที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมา คือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับและเพิ่มขึ้น 1 ระดับ ตามลำดับ 1.2) นักเรียนกลุ่มปานกลางและต่ำที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับ ตามลำดับ

2. หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮิลส์ นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิต อยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด และเมื่อจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ พบว่า 2.1) นักเรียนกลุ่มสูงที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด และอยู่ในระดับ 2 มีจำนวนลดลงมากที่สุด 2.2) นักเรียนกลุ่มปานกลางที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น มากที่สุด และอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด 2.3) นักเรียนกลุ่มต่ำที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด และอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

นาตยา (2546) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวน 100 คนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮิลส์โมเดลกับการสอนปกติ ศึกษาความเข้าใจเรขาคณิตของนักเรียนกับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮิลส์โมเดลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังเรียนกับเกณฑ์ 60 % ของนักเรียนกลุ่มที่สอน โดยการเน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮิลส์โมเดล ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮิลส์โมเดล กับนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยวิธีการสอนปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความเข้าใจทางเรขาคณิตไม่สูงกว่าชั้นที่ 1 ของแวนฮิลส์โมเดลอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮิลส์โมเดลสูงกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

วสีพร (2547) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 สถาบันราชภัฏสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าสุทนต์มณี โดยเนื้อหา คือ การหาพื้นที่ ความเท่ากัน ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยม ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตด้วยวิธีการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตทุกเนื้อหาวิชาอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตในการสอนเรขาคณิต

งานวิจัยต่างประเทศ

Hodanbosi (2001) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลกระทบของการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปแบบพลวัตกับเครื่องมือการสร้างที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 80 คนในรัฐโอไฮโอทางตะวันออกเฉียงเหนือ ทำการทดลองโดยใช้สถิติวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบแฟคทอเรียลจำนวนสามปัจจัย ๆ ละ 2 ระดับ $2 \times 2 \times 2$ ตัวแปรปัจจัย คือ วิธีการทดลอง เพศ และระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ ตัวแปรตาม คือ คะแนนผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนและเจตคติทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่ได้มาจากการสุ่ม โดยกลุ่มทดลอง คือ นักเรียนที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปแบบพลวัตคือโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการเรียนการสอน และกลุ่มควบคุมคือนักเรียนที่มีการเรียนการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปแบบพลวัตเพื่อการเรียนรู้และการสร้างทางเรขาคณิตขั้นพื้นฐานมีผลการปฏิบัติที่ดีกว่านักเรียนที่ใช้เครื่องมือแบบปกติที่ประกอบด้วยวงเวียนไม้โปรแทรกเตอร์ และไม้บรรทัด นักเรียนชายมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนหญิงแต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงไม่มีความแตกต่างกัน ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน นักเรียนที่มีความสามารถสูงสามารถปฏิบัติงานได้ดีกว่านักเรียนที่มีความสามารถต่ำ แต่ระดับความสามารถและเจตคติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่มีความแตกต่างกัน

Baharvand (2001) ได้ทำการศึกษาเชิงทดลองเพื่อระบุผลกระทบของการสอนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เปรียบเทียบกับการสอนโดยครูบรรยายและกิจกรรมกระดาษและดินสอ (paper and pencil) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตัวแปรอิสระ

คือ การปฏิบัติงานของนักเรียน ระดับความคงทนในการเรียนของนักเรียน และเจตคติของนักเรียน ต่อความคิดรวบยอดทางเรขาคณิต กลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยครู จำนวนนักเรียน 26 คน กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GSP จำนวนนักเรียน 24 คน ซึ่งทั้งสองกลุ่มได้เรียนรู้ ความคิดรวบยอดที่เหมือนกัน การวิเคราะห์ข้อมูลใช้การทดสอบแบบที (t – test) ผลการวิจัย พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองได้คะแนนสอบหลังเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ ระดับ 0.05 และนักเรียนกลุ่มทดลองมีเจตคติด้านต่อวิชาคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาเรขาคณิต แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งจากผลการทดลองระบุได้ว่าโปรแกรม GSP เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

Scher (2002) ได้ทำการศึกษาความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตในการใช้โปรแกรม เรขาคณิตแบบพลวัตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยให้นักเรียนพิจารณารูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และเส้นแบ่งครึ่งมุมตั้งฉาก ที่สร้างขึ้นจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) โดยนักเรียนทำการตรวจสอบวัตถุ อธิบายสิ่งที่ได้เห็น และ สร้างวัตถุที่เหมือนกันจากการเขียนแบบร่าง ผู้วิจัยสัมภาษณ์และบันทึกวิดีโอให้นักเรียนกลุ่มทดลอง ที่ใช้โปรแกรม GSP ในครั้งแรก ทั้งนี้วิดีโอได้แสดงภาพแบ่งเป็นสองส่วน คือ ภาพนักเรียนที่ได้รับการ สัมภาษณ์และภาพการเคลื่อนไหวของเมาส์บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ผลการวิจัยพบว่าความคิด รวบยอดของนักเรียนในเรื่องรูปเรขาคณิตได้รับอิทธิพลมาจากการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปอย่างแท้ จริง เมื่อวิเคราะห์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า นักเรียนให้ความสนใจต่อพฤติกรรมของจุดแต่ละจุดเมื่อนำ มาสร้างเป็นมุมฉากของรูปสี่เหลี่ยมเป็นอย่างมาก เมื่อสำรวจรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า นักเรียนไม่ สามารถพบรูปวงกลมที่แฝงอยู่ ซึ่งรูปวงกลมจะช่วยให้ นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมได้อีกโดยไม่ จำเป็นต้องคำนึงถึงความยาวของด้านทั้งสองว่าต้องเท่ากัน เมื่ออธิบายถึงเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก นักเรียนได้ใช้คำศัพท์เปรียบเทียบเพื่อระบุว่าวัตถุที่สร้างเคลื่อนไหวได้อย่างโรบนหน้าจอ และเมื่อ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากการวาด นักเรียนสามารถใช้เครื่องมือการสร้างของโปรแกรม GSP จัดกลุ่มได้ง่ายกว่ารูปที่สร้าง “ถูกหรือผิด”

Harper (2002) ได้ทำการวิจัยเชิงคุณภาพ เพื่อศึกษาความรู้ของนิสิตฝึกสอนในระดับ ประถมศึกษาในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ศึกษาปฏิกิริยาที่นิสิตฝึกสอนแสดงออกขณะใช้ โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต และศึกษาความรู้ของนิสิตฝึกสอนที่เปลี่ยนแปลงในขณะที่เรียนหรือ ภายหลังการเรียนการสอนด้วยการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต กลุ่มทดลองคือนิสิตฝึกสอน หญิงระดับประถมศึกษาจำนวน 4 คนที่ลงทะเบียนในชั้นปีสี่ของโครงการครูห้าปี นิสิตแต่ละคนจะ ได้รับการสัมภาษณ์ จากนั้นได้รับการสอนด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ทั้ง หมด 3 ช่วง แต่ละช่วงใช้เวลาประมาณหนึ่งชั่วโมงถึงหนึ่งชั่วโมงครึ่ง โดยทำการบันทึกเทปและ วิดีโอระหว่างการสัมภาษณ์นิสิตฝึกสอนจนสร้างงานการแปลงทางเรขาคณิตเสร็จสิ้น ในกรณีนี้ไม่มี

การศึกษาค้นคว้าเฉพาะบุคคลในเรื่องความรู้ที่แสดงออกขณะแก้ปัญหาทางการแปลงทางเรขาคณิต การพิจารณาถึงปฏิกิริยาต่อโปรแกรม GSP ในระหว่างขั้นตอนการเรียนการสอน และพัฒนาการที่แสดงออกมาเมื่อเสร็จสิ้นเทียบกับการสัมภาษณ์แทรกครั้งหลัง ผลการวิจัยปรากฏว่านิสิตฝึกสอนเริ่มใช้คำศัพท์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น มีการใช้ศัพท์คณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการ นิสิตฝึกสอนทุกคนสามารถสร้างภาพสะท้อนและเส้นตรงของการสะท้อนบนพื้นฐานของสมบัติของการสะท้อน นิสิตฝึกสอนมีความรู้มากขึ้นจากการใช้वेक्टरเพื่อเสนอทิศทางของการแปลงและขนาด สามารถระบุจุดศูนย์กลางและมุมของการหมุนหนึ่งครั้งเพื่อวางภาพที่มาจากการหมุนของภาพนั้นได้ โปรแกรม GSP ให้ผลสะท้อนกลับในการมองได้โดยทันทีซึ่งช่วยให้นิสิตฝึกสอนตั้งข้อสงสัย คัดค้าน ทดสอบและตรวจสอบคำตอบได้ นิสิตฝึกสอนสามารถใช้และไม่ใช้การแปลงเพื่อแก้ปัญหาในการเชื่อมโยงสมบัติทางเรขาคณิตของการแปลงที่รู้จักได้

Baylor (2002) ได้ทำการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อนิสิตฝึกสอนระดับประถมศึกษาที่ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต คือ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อแก้ปัญหาการวัด คือ การคำนวณค่าที่ได้จากการวัดเพื่อหาพื้นที่ การหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด หรือการวัดค่าต่าง ๆ ของรูปที่กำหนดให้ ทั้งนี้ นักเรียนมักจะสร้างแผนภาพแล้ววัดส่วนต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาในแต่ละข้อคำถาม ผู้วิจัยให้นิสิตฝึกสอนระดับประถมศึกษาที่เป็นอาสาสมัคร 15 คน ได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GSP เรียนรู้การแก้ปัญหาโดยการสร้างแผนภาพที่แสดงเงื่อนไขของปัญหา และวิเคราะห์ข้อมูลจากการสัมภาษณ์และวิดีโอ พร้อมทั้งศึกษาการแก้ปัญหาของนิสิตฝึกสอน 8 คนในเชิงลึกโดยลดข้อมูลที่ซ้ำกันและใช้แผนภาพปัจจัยที่สร้างขึ้นเฉพาะในตอนท้ายเพื่อแสดงจุดเด่นและปฏิกิริยาต่อกันของแต่ละปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อสิ่งที่นักเรียนกระทำ 4 ปัจจัยดังนี้คือ 1) การใช้ความสัมพันธ์ของการมองเห็น (Visual Relationship) 2) ความสะดวกในการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต 3) ความต้องการและความสามารถในการสร้างรูปที่ซับซ้อน เช่น ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตนั้นยังคงเดิมเมื่อทำการลากรูป 4) ความคิดเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ ผลการวิจัยปรากฏว่านิสิตฝึกสอนโดยส่วนใหญ่มีความสมดุลทั้ง 4 ปัจจัยเนื่องจากอิทธิพลของปัจจัยแรก แต่ในทางตรงกันข้ามผู้ที่แก้ปัญหาเก่งที่สุด 2 คนแสดงให้เห็นว่าความสมดุลของปัจจัยมาจากอิทธิพลของปัจจัยแรกเพียงเล็กน้อยเท่านั้น การวิเคราะห์ขั้นต่อไปคือนิสิตฝึกสอนต้องใช้ผลย้อนกลับจากแผนภาพเพื่อสร้างแนวคิดในการปรับแนวทางการได้คำตอบและสามารถตรวจสอบผลลัพธ์ได้ทันที ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับกระบวนการสร้างที่สามารถย้อนกลับไปได้เพื่อตรวจสอบคำตอบสุดท้ายได้ และการสร้างความสมดุลของความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตที่เชื่อมกันมากด้วยการใช้แผนภาพเป็นเรื่องที่ยาก นั่นคือการกระทำของนิสิตฝึกสอนสื่อถึงการมีปฏิกิริยาต่อโปรแกรมสำเร็จรูป

Moyer (2003) ได้ทำการศึกษาผลกระทบของการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการเรียนการสอนเรขาคณิตเพื่อเพิ่มความรู้ตามระดับแวนฮิลล์และเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในรัฐเพนซิลเวเนีย ผู้วิจัยออกแบบกลุ่มควบคุมที่ไม่เท่ากัน (non-equivalent control group design) นักเรียนได้รับการคัดเลือกมาจากห้องเรียนที่มีการเรียนการสอนเรขาคณิต จำนวน 4 ห้อง และครูจำนวน 2 คน ซึ่งสอนคนละ 2 ห้อง ห้องหนึ่งสอนเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP ใช้หนังสือเรียนของ Michale Serra ชื่อ Discovering Geometry : An Inductive Approach พิมพ์ครั้งที่ 2 โดย Key Curriculum Press อีกห้องหนึ่งสอนด้วยวิธีปกติ แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียนที่ใช้ คือ แบบทดสอบแวนฮิลล์ (VH) ที่สร้างขึ้นโดย Dr. Zalman Usiskin และ แบบทดสอบการนึกภาพเชิงปริภูมิที่คงความถูกต้อง (Purdue Spatial Visualization : PSVT) ผลการวิจัยปรากฏว่าการใช้โปรแกรม GSP ไม่มีผลกระทบต่อการเพิ่มระดับแวนฮิลล์อย่างมีนัยสำคัญ แต่มีผลกระทบต่อคะแนน PSVT ที่เพิ่มขึ้น และคะแนนจากการทดสอบเนื้อหาก่อนเรียนและหลังเรียนเพิ่มขึ้น

งานวิจัยภายในประเทศ

วรรณวิภา (2542) ได้ทำการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ คือ The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ผู้วิจัยทำการทดลองกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ที่อาสาสมัครจำนวน 42 คน โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 โดยทำการทดลองเป็นรายบุคคลกับนักเรียน 3 คน และทำการทดลองเป็นกลุ่มย่อยกับนักเรียน 9 คน พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอ เนื้อหาและกิจกรรมบางอย่างในการทดลองครั้งที่สาม ซึ่งเป็นการตรวจสอบหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ได้ทำการทดลองภาคสนามกับนักเรียน 30 คน พบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ดังนั้น บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นสามารถทำให้นักเรียนได้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้และมีลักษณะตามที่กำหนดตามความมุ่งหมาย

สุจิรา (2542) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ และด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ใช้และไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตในการเรียนรู้เรื่องเส้นขนานและความคล้าย ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยทำการทดลองกับนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียน คือห้องเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต และห้องเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตมีความสามารถด้าน

มิติสัมพันธ์ ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนานและความคล้ายไม่แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ยุวดี (2547) ได้ทำการพัฒนาบทเรียนเรื่องวงกลมที่ใช้คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ โปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้คือ The Geometer's Sketchpad (GSP) ผู้วิจัยทำการทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่อาสาสมัครจำนวน 42 คน โรงเรียนภัทรญาณวิทยา ปีการศึกษา 2543 โดยทำการทดลองเป็นรายบุคคลกับนักเรียน 3 คน และทำการทดลองเป็นกลุ่มย่อยกับนักเรียน 9 คน พบว่าส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอเนื้อหาและกิจกรรมในบางตอน ในด้านประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตพบว่าบทเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลมมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ในการทดลองครั้งที่สามได้ทำการทดลองภาคสนามกับนักเรียน 30 คนไม่พบข้อบกพร่องเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลมออกมอย่างชัดเจน ในด้านประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลมพบว่ามีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ดังนั้น บทเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลมที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์การตัดสินที่กำหนด

จากการศึกษาเอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศพบว่าในงานวิจัยส่วนมากยึดหลักการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ค้นพบ ลงมือปฏิบัติได้ด้วยตนเอง ให้นักเรียนได้รู้จักสำรวจ คิดวิเคราะห์ คาดการณ์ และตรวจสอบ เพื่อฝึกทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ได้เกิดเป็นความรู้ที่คงทน มีความกระตือรือร้นในการเรียนรู้ และสร้างเจตคติที่ดีต่อการเรียนเรขาคณิต เน้นการจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตเป็นไปตามลำดับขั้นของแวนฮีลี 5 ขั้น สื่อการเรียนรู้ที่นำไปใช้ในงานวิจัยโดยส่วนใหญ่ คือ โปรแกรม GSP ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่นักเรียนสามารถสร้างรูป สำรวจ สืบเสาะ คาดการณ์สมบัติต่าง ๆ ได้ตามความพอใจสามารถทำได้อย่างรวดเร็วและถูกต้องอันเป็นสมบัติสำคัญที่ทำให้ยากหรือไม่สามารถทำได้ในการวาดหรือสร้างรูปด้วยการใช้กระดาษและดินสอ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสร้างหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตโดยการนำโปรแกรม GSP มาใช้ประกอบการสอนเรขาคณิตเพื่อเพิ่มลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเพื่อให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนเรขาคณิตต่อไป