บทที่ 4

พื้นฐานระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัจจุบันการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ได้มีการนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มาผสมผสานกับความสามารถในการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ เพื่อทำการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำ เนื่องจากปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่ล้วนประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่สอดคล้องกัน สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้โดยปกติอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งอยู่ในรูปแบบต่าง ๆ กัน จึงจำเป็นต้องแก้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่แตกต่างกันออกไป

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่าง ๆ โดยปกติแล้วจะทำโดย (1) การใช้ระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ชั้นสูง (advance mathematics) เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) และ (2) การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ซึ่งประโยชน์จากการใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงจะก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นตรงที่ถูกต้องเที่ยงตรงตามตำแหน่งใด ๆ ที่ต้องการ แต่โดยทั่วไปผลเฉลยแม่นตรงจะไม่สามารถหาได้ โดยเฉพาะปัญหาทางปฏิบัติในปัจจุบันที่เงื่อนไขขอบเขตและลักษณะรูปแบบของปัญหานั้นมีความซับซ้อน ซึ่งความซับซ้อนในลักษณะรูปแบบของปัญหาดังกล่าวประกอบกับประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันทำให้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้รับความนิยมอย่างกว้างขวาง ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี แต่ในขณะเดียวกันจะให้ผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งบางตำแหน่งเท่านั้น นอกจากนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความผิดพลาด ซึ่งความผิดพลาดนั้นจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับระเบียบวิธีที่เลือกใช้ ประกอบกับความรู้และประสบการณ์ของผู้ใช้ด้วย ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อาจแบ่งเป็น 2 ระเบียบวิธีใหญ่ ๆ คือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งในที่นี้เลือกระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องในการอธิบายลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้น

4.1 ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

ก่อนอื่นจำเป็นต้องทราบก่อนว่าปัญหาที่ต้องการทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาที่เป็นสมการรูปแบบใดเพื่อที่จะได้เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ซึ่ง โดยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมี 3 ชนิดด้วยกัน คือ

(1) สมการเอลลิปติก มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{4.1}$$

(2) สมการพาราโบลิก มีรูปแบบดังนี้

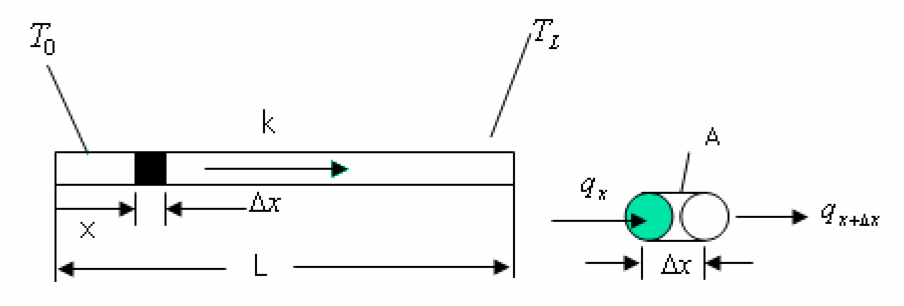
$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.2}$$

(3) สมการไฮเปอร์โบลิก มีรูปแบบดังนี้

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.3}$$

ซึ่งพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในงานวิจัยนี้คือ สมการพาราโบลิก ดังนั้น ในที่นี้จะนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาสมการพาราโบลิกด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

โดยปัญหาที่ง่ายต่อการเข้าใจสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบนี้คือ ปัญหาของการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว ดังภาพที่ 4.1



ภาพที่ 4.1 การถ่ายเทความร้อนโดยการนำความร้อนในแท่งโลหะ

กำหนดให้ แท่งโลหะมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) เท่ากับ k ค่าความหนาแน่นของมวล (mass density) เท่ากับρ ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat)

เท่ากับ c สามารถประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ได้โดยพิจารณาเอลิเมนต์เล็ก ๆ ดังแสดงดังรูปขวาของภาพที่ 4.1 โดยใช้หลักของการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัวที่ว่า

ปริมาณความร้อนเข้า – ปริมาณความร้อนออก = ปริมาณความร้อนสะสม (4.4)

นั่นคือ

$$q_x - q_{x+\Delta x} = \rho cA\Delta x\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.5}$$

โดย q_x และ $q_{x+\Delta x}$ แทนปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าและออกจากพื้นที่หน้าตัด A ของเอลิเมนต์ตามลำดับ ปริมาณความร้อนดังกล่าวขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier’s law) ดังนี้

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \tag{4.6}$$

แทนสมการ (4.6) ลงในสมการ (4.5) และประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์เข้ากับพจน์ $q_{x+\Delta x}$ จะได้

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x} - [-kA\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(kA\frac{\partial T}{\partial x})\Delta x - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(kA\frac{\partial T}{\partial x})(\Delta x^2) - .....] = \rho cA\Delta x\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.7}$$

สองพจน์แรกของสมการ (4.7) หักล้างกันไป จากนั้นทำการหารตลอดด้วย $A\Delta x$ แล้วจึงให้ $\Delta x \rightarrow 0$ จะได้

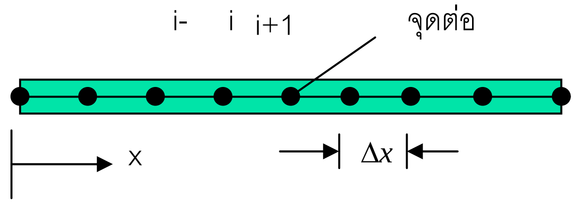
$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.8}$$

หากสมมติให้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k มีค่าคงที่โดยไม่เปลี่ยนแปลงไปกับอุณหภูมิ T และไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x ใด ๆ บนแท่งโลหะนั้น จะได้สมการอนุพันธ์ที่อยู่ในแบบของสมการพาราโบลิก ดังนี้

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.9}$$

โดยในที่นี้เลือกระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบระเบียบวิธีแบบชัดแจ้งในการแก้ปัญหา ระเบียบวิธีนี้ง่ายแก่การทำความเข้าใจและสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์คือ การ

ประยุกต์สมการผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (4.9) ซึ่งอธิบายการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว ในขั้นตอนแรกเราจะแบ่งแท่งโลหะออกเป็นหลายส่วนโดยในแต่ละส่วนนั้นมีความยาวเท่ากับ Δx และส่วนต่าง ๆ เหล่านี้ต่างเชื่อมกันที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ i-1,i+1 ดังแสดงในภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.2 การแบ่งแท่งโลหะออกเป็นหลายส่วนเพื่อใช้กับวิธีผลต่างสืบเนื่อง

ที่จุดต่อต่าง ๆ นี้เองจะเป็นตำแหน่งที่เราจะคำนวณหาค่าของอุณหภูมิ T ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา t เราจะประยุกต์วิธีผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (4.9) โดยเราจะใช้การประมาณจากผลต่างแบบไปข้างหน้า (forward Difference) เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลา ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{4.10}$$

การประมาณในรูปเช่นนี้ จะพบว่ามีอันดับความผิดพลาด $o(\Delta t)$ โดย Δt แทนค่าของช่วงเวลา (time step) และดรรชนีบน n ในสมการ (4.10) ในขณะเดียวกัน เราจะประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะ x ดังนี้

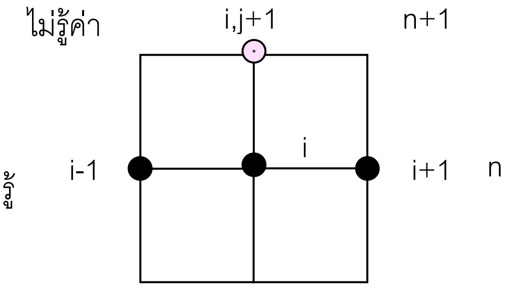
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n - T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.11}$$

ซึ่งมีอันดับความผิดพลาด $o(\Delta x^2)$ ทั้งสมการ (4.10) และ (4.11) นี้เป็นการประมาณค่าที่ตำแหน่งของเวลาครั้งที่ n หากเราแทนสมการทั้งสมการทั้งสองนี้กลับลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (4.9) หลังจากทำการจัดพจน์ต่าง ๆ จะก่อให้เกิดสมการเดี่ยวที่สามารถนำไปใช้ในการคำนวณโดยตรงคือ

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \tag{4.12}$$

$$\text{โดย} \qquad \alpha = \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2} \tag{4.13}$$

สมการ (4.12) ที่เกิดขึ้นนี้แสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิที่จุดต่อ i ณ เวลาครั้งที่ n+1 สามารถคำนวณได้โดยตรงจากอุณหภูมิของ 3 จุดต่อที่ i-1,i,i+1 ซึ่งรู้ค่ามาแล้วจากการคำนวณ ณ เวลาครั้งที่ n ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีแบบชัดแจ้ง

เนื่องจากค่าของอุณหภูมิที่เวลาใหม่ครั้งที่ n+1 สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการ (4.12) โดยใช้ค่าของอุณหภูมิที่เวลาเก่าครั้งที่ n ระเบียบวิธีการเช่นนี้จึงถูกเรียกว่าเป็นระเบียบวีแบบชัดแจ้ง (explicit method) ถึงแม้ว่าระเบียบวีการนี้จะประกอบด้วยข้อดีที่ก่อให้เกิดความสะดวกในการคำนวณดังกล่าว แต่การใช้ระเบียบวิธีนี้มีเงื่อนไขที่ว่า $\alpha \le 1/2$ ซึ่งจากสมการ (4.12) เราจะได้

$$\Delta t \le \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2k} \tag{4.14}$$

ความหมายของสมการนี้คือ หลังจากเราได้ทำการสร้างรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วยจุดต่อที่มีระยะห่างกันเท่ากับค่า Δx ค่าใดค่าหนึ่ง จะก่อให้เกิดเงื่อนไขของการใช้ Δt สูงสุดได้เพียงค่า ๆ หนึ่ง ซึ่งเรียกว่าเป็นค่าช่วงเวลาวิกฤต (critical time step) จากผลลัพธ์ที่ควรจะเป็น เราสามารถทดลองปรากฏการณ์เช่นนี้ได้กับตัวอย่างต่อไปนี้หรือกับเงื่อนไขปัญหาอื่น ๆ หากโดยใช้ Δt ในการคำนวณที่มีค่ามากกว่าค่าช่วงเวลาวิกฤต เงื่อนไขดังแสดงในสมการ (4.14) ซึ่งเป็นขีดจำกัดของระเบียบวิธีการนี้ ยังบอกเราเป็นนัยว่า โดยปกติสำหรับการแก้ปัญหานั้น

หากเราต้องการค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง เราจำเป็นต้องใช้จุดต่อเป็นจำนวนมา ซึ่งหมายถึงความกว้างช่วง Δx จะมีค่าลดลง การใช้ Δx ที่มีค่าลดลงดังกล่าว จะก่อให้เกิดขีดจำกัดของการใช้ Δt ซึ่งมีค่าลดลงมากยิ่งขึ้นตามไปด้วยในอัตรา Δx กำลังสอง