



วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I  
สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

A Development of the Instructional Model of the Course 158222: Algorithms  
in Mathematics Proofs I for Undergraduate Students  
in the Faculty of Education at Kasetsart University

โดย

นายชานนท์ จันทรา

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์  
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน)  
พ.ศ. 2548

ISBN 974-16-1045-9

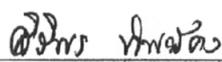
ชานนท์ จันทรา 2548: การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธี  
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัย  
เกษตรศาสตร์ ปริญญาศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน) สาขาวิชาหลักสูตร  
และการสอน ภาควิชาการศึกษา ประธานกรรมการที่ปรึกษา:  
รองศาสตราจารย์สิริพร ทิพย์คง, Ed.D. 396 หน้า  
ISBN 974-16-1045-9

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอน  
วิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และศึกษาผลของการใช้รูปแบบการเรียนการสอนในด้านผลสัมฤทธิ์  
ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคม และความคิดเห็น  
ต่อรูปแบบการเรียนการสอน ซึ่งการดำเนินการวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนาที่มีขั้นตอน 3  
ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นตอนที่ 1 วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน ขั้นตอนที่ 2 สร้างและพัฒนารูปแบบ  
การเรียนการสอนซึ่งกระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน คือ ชี้นำเข้าสู่  
บทเรียน ชี้เสนอสาระการเรียนรู้ ขั้นสรุปความรู้ ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และขั้นวัดผลและ  
ประเมินผลการเรียนรู้ ขั้นตอนที่ 3 นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้เพื่อประเมินประสิทธิภาพและ  
ปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนให้มีความเหมาะสม

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย นิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธี  
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน และนิสิตที่ลงทะเบียนเรียน  
รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน  
เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แบบสนทนากลุ่ม แบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทาง  
การเรียน แบบประเมินชิ้นงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบบประเมินพฤติกรรม  
การทำงานกลุ่ม แบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิต และแบบวัดเจตคติของนิสิตที่มีต่อรายวิชา  
วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์เนื้อหาและใช้สถิติค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย

ผลที่ได้จากการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตมี  
คะแนนการสอบหลังเรียนสูงขึ้นจากคะแนนสอบก่อนเรียนอย่างชัดเจน นิสิตมีพัฒนาการในการทำ  
ชิ้นงานที่มีคุณภาพมากขึ้น นิสิตมีทักษะทางสังคมอยู่ในระดับมากและมีแนวโน้มการพัฒนาไปในทาง  
ที่ดีขึ้น นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ดีมากและมีการพัฒนาทักษะดังกล่าวไป  
ในทางที่ดีขึ้น นิสิตมีเจตคติต่อรายวิชาไปในทิศทางที่ดีขึ้นจากก่อนเรียน และนิสิตส่วนใหญ่มีความเห็น  
ว่ารูปแบบการเรียนการสอนมีความเหมาะสมอยู่ในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่ง

  
ลายมือชื่อนิสิต

  
ลายมือชื่อประธานกรรมการ

20 / 12 / 2548

Chanon Chuntra 2005: A Development of the Instructional Model of the Course 158222: Algorithms in Mathematics Proofs I for Undergraduate Students in the Faculty of Education at Kasetsart University. Doctor of Philosophy (Curriculum and Instruction), Major Field: Curriculum and Instruction, Department of Education. Thesis Advisor: Associate Professor Siripom Thipkong, Ed.D. 396 pages.  
ISBN 974-16-1045-9

The purposes of this study were to develop instructional model of the course 158222: Algorithms in Mathematics Proofs I and to study implementation effects on the following student variables such as achievement, attitudes towards the course 158222: Algorithms in Mathematics Proofs I, skills in mathematics proof, social skills, and opinions of students related to this instructional model. Methodology of this study was the developed research and composed of 3 phases as follows. Phase 1: analyzed and synthesized the fundamental data related to the development of the instructional model. Phase 2: constructed and developed the instructional model that the instructional processes included 5 steps: 1) start the lesson 2) present the content 3) conclude the knowledge 4) practice and apply 5) measure and evaluate learning. Phase 3: implemented the instructional model for evaluating the efficiency and improving the instructional model to get the appropriate instructional model.

The population consisted of 23 undergraduate students who studied the course 158325: Algorithms in Mathematics Proofs in the second semester of the academic year 2004 and 29 undergraduate students who studied the course 158222: Algorithms in Mathematics Proofs I in the first semester of the academic year 2005. The instruments in data collection consisted of focus group form, achievement tests, worksheet evaluation forms, mathematics proof skill tests, group behavior evaluation forms, questionnaire, and attitude test. Content analysis, percentage, mean, and coefficient of variation were used for analyzing data.

The research results of implementing indicated the following: the achievement of students had clearly got the higher post-test scores than pre-test scores. They had developed higher quality projects. Their social skills were at the high level and they tended to improve social skills. Their mathematics proof skills were at the highest level and they showed better progress in this skill. They had got better attitudes towards the course and almost all students expressed their opinions that they totally agreed that the instructional model was appropriate.

Chanon Chuntra

Student's signature

Siripom Thipkong

Thesis Advisor's signature

20 / 12 / 2005

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ เอาใจใส่และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่ง จากรองศาสตราจารย์ ดร. ลีริพร ทิพย์คง ศาสตราจารย์ ยุพิน พิพิธกุล และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรพรรณ ตันบรรจง โดยกรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ทำให้ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ในโอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์นงนุช สุขวารี และอาจารย์มงคล วงศ์พ่ายพ ที่กรุณาให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพงศ์ ทิพนาค ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการในการสอบสัมภาษณ์ขั้นสุดท้ายในฐานะผู้แทนบัณฑิตวิทยาลัยและให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ทั้งที่เป็นอาจารย์ของผู้วิจัยและเพื่อนร่วมงานที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทวิชาและทำให้ผู้วิจัยรักในวิชาชีพครู

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทวิชาและทำให้ผู้วิจัยรักในวิชาคณิตศาสตร์

ขอขอบพระคุณเพื่อนนิสิตปริญญาเอก สาขาวิชาหลักสูตรและการสอนทุกท่านที่ให้คำแนะนำและกำลังใจ ตลอดจนให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ แก่ผู้วิจัยและที่สำคัญผู้วิจัยขอขอบใจนิสิตทุกคนที่ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีในการใช้รูปแบบการเรียนการสอนและการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณพร้อมทั้งมอบความสำเร็จในครั้งนี้ให้แก่ บิดา มารดา และครอบครัวที่ได้ให้กำลังใจ ส่งเสริมและสนับสนุนการศึกษาในครั้งนี้เป็นอย่างดีมาโดยตลอด จนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ชานนท์ จันทรา  
ธันวาคม 2548

## สารบัญ

	หน้า
สารบัญตาราง	(4)
สารบัญภาพ	(6)
บทที่ 1 บทนำ	1
ความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	7
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	7
ขอบเขตของการวิจัย	8
นิยามศัพท์	9
บทที่ 2 การตรวจเอกสาร	11
รูปแบบการเรียนการสอน	13
การออกแบบการเรียนการสอน	25
โครงสร้างรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์	
ทางคณิตศาสตร์ I	31
กระบวนการให้เหตุผล	32
วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	34
แนวคิดการเรียนรู้แบบกลุ่ม	42
การเรียนแบบร่วมมือ	44
การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์	63
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	71
กรอบแนวคิดในการวิจัย	84

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 วิธีการวิจัย	87
ประชากร	99
เครื่องมือและการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	100
การเก็บรวบรวมข้อมูล	106
การวิเคราะห์ข้อมูล	108
บทที่ 4 ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์	111
ผลการวิจัย	111
ข้อวิจารณ์	161
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	175
สรุปผลการวิจัย	175
ข้อเสนอแนะ	188
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	191
ภาคผนวก	197
ภาคผนวก ก คู่มือประกอบการใช้รูปแบบการเรียนการสอน รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	198
ภาคผนวก ข แบบประเมินชิ้นงาน	358
ภาคผนวก ค แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	369
ภาคผนวก ง แบบแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับ รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	372

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก จ แบบวัดเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	377
ภาคผนวก ฉ แบบสนทนากลุ่ม	382
ภาคผนวก ช ตัวอย่างกิจกรรมบนระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	387
ภาคผนวก ซ Homepage ผู้สอนและ Homepage รายวิชา	393
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	396

## สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	กรอบแนวคิดในการวิจัย	85
2	ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	115
3	ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต	116
4	ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากแบบสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน ผลการ ทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอ และพฤติกรรมในชั้นเรียน	121
5	ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน	123
6	ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิต	124
7	ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต	125
8	ผลการประเมินเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน	126
9	ผลการสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียน การสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	128
10	ปัญหาและแนวทางการปรับปรุง แก้ไขจากการนำรูปแบบ การเรียนการสอนไปทดลองใช้	135

## สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
11	ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	139
12	ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต	140
13	ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน	145
14	ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน	147
15	ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิต	148
16	ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต	149
17	ผลการประเมินเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ก่อนเรียนและหลังเรียน	150
18	ผลการสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	152

### สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบ STAD	49
2	แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบปริศนาความคิด (Jigsaw II)	51
3	แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบ Team Assisted Individualization (TAI)	54
4	ขั้นตอนการพัฒนาารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับ ปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	88
5	จำนวนนิสิตจำแนกตามช่วงคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	115
6	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่ของชิ้นงาน	117
7	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะ การมอบหมายงาน	117
8	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะของชิ้นงาน	118
9	จำนวนนิสิตจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	121
10	ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตตาม ครั้งที่ของการประเมินผล	125
11	ร้อยละของนิสิตจำแนกตามระดับเจตคติของนิสิตต่อการเรียน รายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ก่อน เรียนและหลังเรียน	127

### สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
12	จำนวนนิสิตจำแนกตามช่วงคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	139
13	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่ของชิ้นงาน	141
14	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะการมอบหมายงาน	141
15	ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะของชิ้นงาน	142
16	จำนวนนิสิตจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	145
17	ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตตามครั้งที่ของการประเมินผล	149
18	ร้อยละของนิสิตจำแนกตามระดับเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ก่อนเรียนและหลังเรียน	151
 ภาพผนวกที่		
ช1	หน้าจอแสดงองค์ประกอบต่างๆ บนระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	388
ช2	หน้าจอแสดงสมาชิกของรายวิชาบนระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	389
ช3	หน้าจอแสดงกิจกรรมใน webboard บนระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	390

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพผนวกที่		หน้า
ช4	หน้าจอแสดงกิจกรรมกลุ่มบนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	391
ช5	หน้าจอแสดงกิจกรรมรายบุคคลบนระบบการจัดการเรียนการ สอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	392
ช1	หน้าจอแสดง Homepage ของผู้สอน	394
ช2	หน้าจอแสดง Homepage รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ I	395

## บทที่ 1

### บทนำ

#### ความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมที่เกี่ยวข้องกับความคิด วิธีการและกระบวนการเชิงเหตุผล เป็นภาษาอย่างหนึ่งและเป็นเครื่องมือของวิทยาการแขนงต่าง ๆ คณิตศาสตร์มีเนื้อหาที่ส่งเสริมให้คนคิดเป็น ทำเป็นและแก้ปัญหาเป็น สร้างเสริมให้มีความคิด มีเหตุผลและคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานของการเรียนวิชาต่าง ๆ ด้วยเหตุนี้เองคณิตศาสตร์จึงได้ถูกบรรจุไว้ในหลักสูตรตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจนถึงระดับอุดมศึกษา เพราะคณิตศาสตร์มีความจำเป็นต่อการพัฒนาความสามารถทางสมองของมนุษย์ที่จะนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน และนำไปสู่ความเจริญก้าวหน้าในด้านต่าง ๆ ดังที่ Hersh (1993) ได้กล่าวว่านักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์และถือว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นและจะละเว้นเสียไม่ได้ซึ่งสอดคล้องกับ Markel (1994) ที่กล่าวว่าการพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบทและการพิสูจน์ทฤษฎีบทเป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ Saeed (1997) กล่าวว่าความสามารถในการพิสูจน์และความเข้าใจในธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์รวมทั้งเทคนิควิธีในการพิสูจน์เป็นองค์ประกอบในการวิเคราะห์ที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการเรียนคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยขั้นตอนการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลเป็นสำคัญ แต่พบว่าผู้เรียนส่วนมากไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ อันเนื่องมาจากสาเหตุหลายประการที่ทำให้การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ยังไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ดังที่ ยุกิน (2539: 3-8) ได้กล่าวถึงปัญหาในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งพอสรุปได้ว่าในการจัดการเรียนการสอนนั้นมีใช้ว่าปัญหาจะขึ้นอยู่กับตัวผู้เรียนแต่ฝ่ายเดียว องค์ประกอบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวผู้เรียนย่อมทำให้เกิดปัญหาได้ซึ่งได้แก่ ผู้บริหารไม่เข้าใจธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์จัดครูเข้าสอนไม่เหมาะสม ครูบางคนมีพื้นความรู้ไม่เพียงพอที่จะสอนเนื้อหา นั้น ๆ ดำเนินการสอนโดยยังใช้วิธีสอนแบบเก่า ไม่นั่นให้นักเรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ ขาดการมีอารมณ์ขันและไม่มีมนุษยสัมพันธ์ หลักสูตรเปลี่ยนแปลงบ่อย อาจจะทำให้ครูปรับตัวไม่ทัน ผู้เรียนขาดความพร้อม ขาดความเชื่อมั่นในตนเอง มีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์รวมทั้งวิธีการเรียนของนักเรียนซึ่งบางคนเรียนโดยการท่องจำ แต่ไม่มีความเข้าใจ จำสูตรหรือกฎได้ทุกสูตรแต่ทำโจทย์ไม่ได้ บางคนจำทฤษฎีได้แต่พิสูจน์ไม่ได้ เมื่อไม่เข้าใจก็ไม่กล้าถามและการไม่ทำแบบฝึกหัด เป็นต้น

ตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ สำนักงานนายกรัฐมนตรี, 2545) ใน มาตรา 22 และมาตรา 24 ของพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติฉบับนี้ได้กำหนด แนวการจัดการศึกษาไว้ดังนี้

**มาตรา 22** การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ

**มาตรา 24** การจัดกระบวนการเรียนรู้ให้สถานศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง ดำเนินการดังต่อไปนี้

- (1) จัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล
- (2) ฝึกทักษะ กระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์และการประยุกต์ ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา
- (3) จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง
- (4) จัดการเรียนการสอนโดยผสมผสานสาระความรู้ด้านต่าง ๆ อย่างได้สัดส่วนสมดุลกัน รวมทั้งปลูกฝังคุณธรรม ค่านิยมที่ดีงามและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ไว้ในทุกวิชา
- (5) ส่งเสริมสนับสนุนให้ผู้สอนสามารถจัดบรรยากาศ สภาพแวดล้อม สื่อการสอน และอำนวยความสะดวกเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และมีความรอบรู้รวมทั้งสามารถใช้การวิจัย เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนรู้ทั้งนี้ผู้สอนและผู้เรียนอาจเรียนรู้ไปพร้อมกันจากสื่อการเรียน การสอนและแหล่งวิทยาการประเภทต่าง ๆ
- (6) จัดการเรียนรู้ให้เกิดขึ้นได้ทุกเวลาทุกสถานที่มีการประสานความร่วมมือกับบิดา มารดา ผู้ปกครองและบุคคลในชุมชนทุกฝ่ายเพื่อร่วมกันพัฒนาผู้เรียนตามศักยภาพ

จากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 ที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะพบว่าครูซึ่งเป็นผู้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องปรับปรุงและพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติฉบับนั้น บทบาทของครูจึงต้องเปลี่ยนแปลงไป ครูจะมีภาระหน้าที่จะต้องเตรียมการสอน เตรียมความพร้อม ครูที่มีความรู้ความสามารถและมีความชำนาญเพียงพอก็จะสามารถส่งเสริมผู้เรียนไปยังจุดหมายปลายทางที่ต้องการได้โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่หลากหลายเพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อผู้เรียนและผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้ซึ่งในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น ไม่ใช่เรียนรู้จากการถ่ายทอดความรู้ของครูเท่านั้น ผู้เรียนจะต้องรู้จักคิดวิเคราะห์ รู้จักลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อันจะนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ยากขึ้นตามลำดับความสามารถ

นักการศึกษาหลายท่านได้พยายามศึกษาค้นคว้าหาสาเหตุของปัญหาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาการเรียนรู้อคณิตศาสตร์ของผู้เรียนให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้นและวิธีการที่จะเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอน ซึ่งปัจจัยหนึ่งซึ่งส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนก็คือการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นที่จะเรียน สามารถนำความรู้ที่ได้รับไปใช้เป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปและช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนรู้ต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้น ดังที่ จันทรชลิ (2542: 38-42) ได้กล่าวถึงแนวทางในการลดความสูญเปล่าทางการศึกษาจากการที่ผู้เรียนไม่สำเร็จการศึกษาตามหลักสูตร 4 ปี เนื่องจากออกกลางคันและใช้เวลาศึกษานานเกินกว่าระยะเวลาที่กำหนดของโปรแกรมวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษาในมหาวิทยาลัยของรัฐซึ่งส่งผลก่อให้เกิดความสูญเปล่าทางการศึกษาอย่างใหญ่หลวงเพราะนอกจากรัฐจะต้องเสียงบประมาณเพื่อสนับสนุนในการเรียนการสอนแล้วยังเป็นผลเสียในแง่การผลิตกำลังคนได้ไม่ตรงตามเป้าหมายตามความต้องการที่กำหนด ดังนั้นเพื่อเป็นการลดความสูญเปล่าทางการศึกษาจึงได้เสนอแนวทางเชิงนโยบายที่จะนำไปสู่การพัฒนาและการจัดการศึกษาระดับอุดมศึกษาต่อไปในอนาคตคือควรมีการวางแผนการสอนและจัดการเรียนการสอนอย่างเป็นระบบ มีการประเมินผลการสอนของอาจารย์และควรรนำผลการประเมินมาใช้ในการปรับปรุงวิธีการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น ควรมีการนำเทคโนโลยีใหม่ ๆ มาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพิ่มขึ้น ควรเน้นความสัมพันธ์ระหว่างอาจารย์กับผู้เรียนเพิ่มมากขึ้นและควรปรับปรุงและพัฒนา กิจกรรมการเรียนการสอนโดยอาศัยสื่ออื่น ๆ เพิ่มเติมเพื่อเป็นแรงจูงใจในการเรียนและ สุวันเพ็ญ (2540) ได้ศึกษาสภาพและปัญหาของนิสิตคณะครุศาสตร์ในโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศพบว่าปัญหาด้านการเรียน รายวิชาต่าง ๆ ในมหาวิทยาลัยนั้นนิสิตไม่มีปัญหาการเรียนในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป ยกเว้นวิชาภาษาอังกฤษ 1 และไม่มีปัญหาการเรียนในหมวดวิชาเฉพาะวิชาครู แต่ในหมวดวิชาเฉพาะวิชาเอก

คณิตศาสตร์ นิสิตชั้นปีที่ 1 ส่วนใหญ่มีปัญหาในวิชาแคลคูลัส 1 ซึ่งเป็นวิชาที่นิสิตเรียนในภาคต้นปีแรก เนื่องจากนิสิตยังปรับตัวเข้ากับการเรียนไม่ค่อยได้และอาจเป็นเพราะนิสิตเคยชินอยู่กับวิธีการเรียนที่ครูผู้สอนบอกวิธีจดบรรยายไม่ต้องค้นคว้าหาความรู้เอง ตลอดทั้งวิธีการสอบที่ใช้ข้อสอบแบบปรนัยเลือกตอบที่ไม่ต้องบรรยายความรู้จึงทำให้นิสิตยังไม่สามารถปรับตัวเข้ากับลักษณะการเรียน การประเมินผลในระดับอุดมศึกษาได้และนิสิตชั้นปีที่ 2 มีปัญหาการเรียนในวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้น 1 เนื่องจากนิสิตเรียนตามผู้สอนไม่ทันและเนื้อหาวิชาโดยรวมทั้งนิสิตอาจจะไม่ได้เตรียมตัวก่อนที่จะเรียน ไม่ได้ทบทวนหลังเรียนหรือนิสิตอาจจะไม่ได้ทำแบบฝึกหัดอย่างเพียงพอจึงไม่มีความเข้าใจทำให้เกิดปัญหาในรายวิชานั้นได้

จากสภาพปัญหาและแนวทางในการจัดการศึกษาในระดับอุดมศึกษาที่ได้กล่าวมาข้างต้น จะพบว่าการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัยจำเป็นต้องมีการพัฒนาและปรับปรุงรูปแบบในการจัดการเรียนการสอนไม่ว่าจะเป็นวิธีสอน การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ การประเมินผลการสอนของอาจารย์ผู้สอน การมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างอาจารย์ผู้สอนกับนิสิตและการนำสื่อและเทคโนโลยีใหม่ ๆ มาใช้ในการเรียนการสอนซึ่งสิ่งเหล่านี้ล้วนมีส่วนช่วยในการส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตให้สูงขึ้นและช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอนและการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความเข้าใจว่าการคิดอย่างมีเหตุผลและการพิสูจน์เป็นพื้นฐานในการเรียนรู้และทำให้เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยการเรียนรู้ของผู้เรียนซึ่งจะเกิดขึ้นขณะที่ทำกิจกรรมต่าง ๆ และในการสนทนาแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้สอนและกับเพื่อน ๆ ซึ่งการสื่อสารความคิดและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้เรียนนั้นมีความสำคัญในกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพราะจะช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสที่จะอธิบายซักถามและพิจารณาตรวจสอบทบทวนทำให้ผู้เรียนได้สร้างความรู้หรือปรับโครงสร้างความรู้เดิม ดังนั้นผู้สอนจึงควรให้ผู้เรียนได้มีโอกาสทำงานเป็นกลุ่ม นอกจากนี้ผู้สอนยังสามารถส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดแรงจูงใจภายใน รับรู้ความสามารถของตนเอง มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้โดยจัดบรรยากาศสภาพแวดล้อมและกิจกรรมการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียนทำให้ผู้เรียนมั่นใจว่าเมื่อตนมีความพยายามแล้วจะทำงานได้สำเร็จคอยให้การสนับสนุน ให้กำลังใจและในบางเวลาควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเลือกงานที่จะทำเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนมีอิสระ ทำงานด้วยตนเอง มีความรับผิดชอบและเกิดความเชื่อมั่นในตนเอง นอกจากนี้ครูควรจัดกิจกรรมที่ทำให้ผู้เรียนเห็นคุณค่า ความสำคัญและประโยชน์ของคณิตศาสตร์ซึ่งจะเป็นการพัฒนาเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ได้เช่นเดียวกัน อลงกรณ์ (2546: 21-27) และ น้อมศรี (2547: 18-28) ยังได้กล่าวว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้คณิตศาสตร์สื่อสารโดยการอ่าน การพูดและการเขียนแสดงแนวคิดถือว่าเป็นทักษะที่ต้องใช้การฝึกและฝึกจากประสบการณ์ที่หลากหลายและควรได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่องจากบรรยากาศ

ของชั้นเรียนที่สนับสนุนให้มีการสืบค้น การพรรณนาและการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การแลกเปลี่ยนความคิด การชี้แจงเหตุผลและการแก้ปัญหาาร่วมกัน

สำหรับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษานั้นผู้เรียนจะต้องอ่านทำความเข้าใจ วิเคราะห์การพิสูจน์ แสดงความคิดเห็นและเขียนแสดงการพิสูจน์เองได้ซึ่งนับว่ามีความสำคัญมากในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจอย่างถ่องแท้ในคณิตศาสตร์แขนงนั้น ถึงแม้ว่าการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นเรื่องยากสำหรับผู้เรียนจำนวนมากแต่การพิสูจน์เป็นสิ่งที่จำเป็นและหลีกเลี่ยงไม่ได้ในการค้นพบความรู้ใหม่ๆ โดยปกติผู้ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะไม่ชอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท กฎหรือสูตรการคำนวณต่างๆ สนใจเพียงการนำไปใช้ ดังที่ Moore (1990) กล่าวว่าในการเรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ผู้เรียนมักประสบปัญหาในการอ่านและการเขียนพิสูจน์ ซึ่งสาเหตุสำคัญที่ทำให้ผู้เรียนประสบปัญหาในการพิสูจน์คือ ผู้เรียนไม่ทราบบทนิยามทำให้ไม่สามารถเขียนบทนิยามได้ ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในนิยามทางคณิตศาสตร์น้อย ภาพลักษณ์มโนทัศน์ (concept image) ของผู้เรียนมีไม่เพียงพอในการเขียนพิสูจน์ ผู้เรียนไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างของการพิสูจน์อย่างไร ผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และจากการศึกษาสภาพการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านมาพบว่าถึงแม้บัณฑิตจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรายวิชานี้อยู่ในระดับที่ค่อนข้างสูงแต่บัณฑิตส่วนใหญ่ยังไม่สามารถนำความรู้ที่ได้รับเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นสูงของคณะวิทยาศาสตร์ได้ ดังเช่นจากผลการเรียนของนิสิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ในรายวิชา 417321 พีชคณิตเบื้องต้น (Introductory algebra) พบว่านิสิตส่วนใหญ่ไม่ผ่านการเรียนในรายวิชานี้หรือได้ผลการเรียนเป็น F คิดเป็นร้อยละ 80 ซึ่งจากการสัมภาษณ์นิสิตพบว่าสาเหตุหลักของการที่นิสิตเรียนไม่ผ่านในรายวิชานี้เนื่องจากนิสิตไม่สามารถพิสูจน์ได้ โดยนิสิตไม่ทราบว่าควรใช้รูปแบบหรือวิธีการใดมาพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้และยังเขียนแสดงการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง รวมถึงวิธีการสอนของอาจารย์ผู้สอนที่ยังไม่ค่อยเปิดโอกาสให้นิสิตได้ซักถามหรือมีส่วนร่วมในการเรียนซึ่งแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนการสอนในรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านมาแล้วยังไม่บรรลุตามจุดประสงค์ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้ ซึ่งปัญหาในการเรียนการสอนของผู้เรียนมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งเพราะจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์คือการสอนให้ผู้เรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผลและมีความสามารถในการพิสูจน์ ดังนั้นหากผู้เรียนมีปัญหาในการเรียนการสอนพิสูจน์ย่อมส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์และการพัฒนาตนเองอย่างแน่นอน ดังนั้นสิ่งสำคัญที่จะทำให้บัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์สามารถอ่าน สื่อสารและเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์

ตลอดจนสามารถทำการพิสูจน์ทฤษฎีบท กฎ สูตรต่าง ๆ ได้นั้น นิสิตจำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ ความรู้ทางตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ เป็นอย่างดีก่อนเพื่อที่นิสิตจะสามารถเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นสูงต่อไปได้ดี ดังนั้นทางสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์จึงได้จัดรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นรายวิชาในหมวดวิชาเฉพาะสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 2 ทุกคน โดยนิสิตต้องเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น (คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2547) จัดว่าเป็นรายวิชาที่มีความสำคัญและเป็นพื้นฐานการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับนิสิตก่อนที่จะไปเรียนรายวิชาเฉพาะเลือกในกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ของคณะวิทยาศาสตร์ต่อไป โดยรายวิชานี้มีเนื้อหาประกอบด้วยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ กระบวนการให้เหตุผล ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ

จากข้อค้นพบดังกล่าวข้างต้นทำให้ผู้วิจัยได้แนวคิดว่าร่ายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งจัดว่าเป็นวิชาทักษะที่ต้องอาศัยการฝึกฝนและการทำแบบฝึกหัดของนิสิต หากนิสิตได้รับการสอนและการฝึกฝนในลักษณะหรือรูปแบบที่เหมาะสมก็จะช่วยทำให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นรวมถึงสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไปได้ ผู้วิจัยจึงได้วางแผนการทำวิจัยเพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นรายวิชาบังคับสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์โดยมุ่งพัฒนาให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอไปใช้ในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ได้ มีทักษะทางสังคมและมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และใช้เป็นแนวทางสำหรับนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์แก่นิสิตระดับปริญญาตรีเพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้น ตลอดจนเป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับอาจารย์ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาต่อไป

## วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. ศึกษาผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคมและความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

## ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ทราบสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาและปรับปรุงการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. ได้รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์แก่นิสิตระดับปริญญาตรีเพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้น
3. เป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สำหรับอาจารย์ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

### **ขอบเขตของการวิจัย**

#### **1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย**

1.1) นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547

1.2) นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548

2. เนื้อหาที่ใช้สอนสำหรับการวิจัยคือ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ กระบวนการให้เหตุผล ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่างๆ จากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรี สาขาวิชา คณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ได้จากการวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

4. ตัวแปรที่ต้องการศึกษาในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคมและความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

## นียมศัพท์

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดนียมศัพท์ในการทำวิจัยดังนี้

**รูปแบบการเรียนการสอน** หมายถึง แผนการจัดองค์ประกอบต่าง ๆ ของการเรียนการสอน ได้แก่ หลักการ วัตถุประสงค์ สาระการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้และการวัดผลและการประเมินผล การเรียนรู้โดยผ่านขั้นตอนการดำเนินการสร้าง พิสูจน์และทดสอบอย่างเป็นระบบ สามารถช่วยให้ผลิตเกิดการเรียนรู้ได้ตามจุดมุ่งหมายที่ต้องการ

**รายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์** หมายถึง รายวิชาในหมวดวิชาเฉพาะตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานระดับปริญญาตรีซึ่งเป็นหลักสูตร 4 ปี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์เป็นรายวิชาที่ผลิตชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคนต้องเรียนซึ่งถือว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญและเป็นพื้นฐานสำหรับนิสิตก่อนที่จะไปเรียนรายวิชาเฉพาะเลือกในกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ของคณะวิทยาศาสตร์ต่อไปโดยรายวิชานี้มีเนื้อหาประกอบด้วยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ กระบวนการให้เหตุผล ตรรกศาสตร์ และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ

**รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I** หมายถึง รายวิชาในหมวดวิชาเฉพาะตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานระดับปริญญาตรีซึ่งเป็นหลักสูตร 5 ปี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์เป็นรายวิชาที่ผลิตชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคนต้องเรียนซึ่งถือว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญและเป็นพื้นฐานสำหรับนิสิตก่อนที่จะไปเรียนรายวิชาเฉพาะเลือกในกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ของคณะวิทยาศาสตร์ต่อไปโดยรายวิชานี้มีเนื้อหาเช่นเดียวกับรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

**ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน** หมายถึง คะแนนที่ได้จากการประเมินผลการเรียนรู้ของนิสิต ซึ่งพิจารณาจากคะแนนที่ได้จากการทำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและคะแนนจากงานที่มอบหมายให้นิสิตทำ

เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I หมายถึง ความรู้สึกของผู้เรียนที่มีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และรูปแบบ การเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นในลักษณะที่ชอบหรือไม่ชอบซึ่งวัดได้จากแบบวัดเจตคติของ นิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความชำนาญในการพิสูจน์ข้อความทาง คณิตศาสตร์ของนิสิตที่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเลือกใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาสถานการณ์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และแสดง เหตุผลซึ่งอ้างอิงความรู้ ข้อมูล ข้อเท็จจริง นิยามหรือทฤษฎีบทได้อย่างเหมาะสมรวมถึงสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และรัดกุมซึ่งวัดได้จากแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ทักษะทางสังคม หมายถึง ความสามารถในการทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข การแสดงความคิดเห็นร่วมกัน ความรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมายและการได้รับการยอมรับจากเพื่อนร่วมงานซึ่งวัดได้จากแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มโดยผู้เรียนและ แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของผู้เรียนโดยผู้สอนซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สร้างแบบประเมิน พฤติกรรมทั้งสอง

## บทที่ 2

### การตรวจเอกสาร

ในการวิจัยเรื่องการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยข้อมูล เอกสารและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นพื้นฐาน ดังจะเสนอตามลำดับดังนี้

#### 1. รูปแบบการเรียนการสอน

- 1.1) วัตถุประสงค์การจัดการเรียนการสอน
- 1.2) เนื้อหาสาระ
- 1.3) กิจกรรมการเรียนการสอน
- 1.4) สื่อการเรียนการสอน
- 1.5) การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

#### 2. การออกแบบการเรียนการสอน

- 2.1) ความหมายของการออกแบบการเรียนการสอน
- 2.2) ลักษณะสำคัญของการออกแบบการเรียนการสอน
- 2.3) ขั้นตอนการออกแบบการเรียนการสอน

#### 3. โครงสร้างรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

- 3.1) เนื้อหารายวิชา
- 3.2) วัตถุประสงค์ของรายวิชา
- 3.3) หัวข้อรายวิชา

#### 4. กระบวนการให้เหตุผล

## 5. วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

- 5.1) การพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$
- 5.2) การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง
- 5.3) การพิสูจน์ข้อความในแบบ  $p \leftrightarrow q$
- 5.4) การพิสูจน์ข้อความโดยการแจงกรณี
- 5.5) การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
- 5.6) การพิสูจน์ว่ามี(อย่างน้อยหนึ่ง) และมีเพียงหนึ่งเดียว
- 5.7) การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

## 6. แนวคิดการเรียนรู้แบบกลุ่ม

- 6.1) ความหมายการเรียนรู้แบบกลุ่ม
- 6.2) หลักการเรียนรู้แบบกลุ่ม

## 7. การเรียนแบบร่วมมือ

- 7.1) ความหมายและองค์ประกอบสำคัญของการเรียนแบบร่วมมือ
- 7.2) รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือ
- 7.3) การเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
- 7.4) การประเมินผลการเรียนแบบร่วมมือ

## 8. การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

- 8.1) ความหมายของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์
- 8.2) ลักษณะสำคัญของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์
- 8.3) การเรียนการสอนผ่านเครือข่ายหรือผ่านเว็บ
- 8.4) ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

## 9. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

9.1) งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

9.2) งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

## 10. กรอบแนวคิดในการวิจัย

### รูปแบบการเรียนการสอน (instructional model)

รูปแบบการเรียนการสอน (instructional model) เป็นแผนการจัดองค์ประกอบต่าง ๆ หรือลักษณะของการจัดการเรียนการสอนที่มีความสำคัญต่อการเรียนรู้ของนักเรียน เนื่องจากเป็นการจัดประสบการณ์การเรียนรู้เพื่อพัฒนานักเรียนให้มีลักษณะที่พึงประสงค์ ซึ่งองค์ประกอบของการจัดการเรียนการสอนประกอบด้วยวัตถุประสงค์ เนื้อหาสาระ กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน และการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ (Reiser and Dick, 1996; Kemp, Morrison and Ross, 1994; Gagne' and Briggs, 1974)

### วัตถุประสงค์การจัดการเรียนการสอน

วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนการสอนเพื่อต้องการพัฒนาพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนใน 3 ด้าน ได้แก่

1. ด้านพุทธิพิสัยหรือด้านสติปัญญา (cognitive domain) เป็นพฤติกรรมการเรียนรู้ที่สังเกตเห็นได้ชัด ปฏิบัติได้ และวัดได้ในด้านความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์และการประเมินค่า

2. ด้านจิตพิสัยหรือด้านความรู้สึก (affective domain) เป็นพฤติกรรมการเรียนรู้ที่สังเกตเห็นไม่ชัด สังเกตได้ยากในด้านอารมณ์ จิตใจ ความรู้สึก ความสนใจ ความซาบซึ้ง ค่านิยม แรงจูงใจ คุณลักษณะนิสัย เช่น นักเรียนมีความสนใจ ความกระตือรือร้น การเข้าร่วมกิจกรรม ความตั้งใจ ความรับผิดชอบ เป็นต้น

3. ด้านทักษะพิสัย (psycho-motor domain) เป็นพฤติกรรมการเรียนรู้ที่สังเกตเห็นได้ชัด เป็นทักษะทางกาย เช่น ให้นักเรียนสร้างหรือปฏิบัติด้วยมือ เราก็สามารถวัดความคล่องแคล่วว่องไวของนักเรียนได้ เป็นต้น (ยุพิน, 2539; Snow, Corno, and Jackson, 1996: 243-245; Benjafield, 1992: 2-10)

ดังนั้นการกำหนดวัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนการสอนควรคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลในด้านความสามารถทางสติปัญญา อารมณ์และสังคม ความพร้อมทางร่างกายและจิตใจ ความถนัด ความต้องการ และความสนใจที่ให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ในสิ่งต่างๆ ได้ตามศักยภาพของตนเอง

### เนื้อหาสาระ

การจัดเนื้อหาสาระในรูปแบบการเรียนการสอนต้องสอดคล้องกับหลักสูตรในระดับต่างๆ และยังต้องให้มีความสอดคล้องกับความสนใจ ความถนัด ความสามารถและความต้องการของนักเรียนมีการจัดประสบการณ์การเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะ กระบวนการคิด การแก้ปัญหาที่สอดคล้องกับประสบการณ์ในชีวิตประจำวันของนักเรียนเพื่อให้นักเรียนแต่ละคนได้เรียนรู้ตามศักยภาพของตนเองและสามารถนำไปใช้ในการดำรงชีวิตได้

### กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จำเป็นต้องมุ่งเน้นการจัดกิจกรรมที่สนองต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล ให้นักเรียนได้เรียนรู้ทักษะต่างๆ ที่จำเป็นในการดำรงชีวิต เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาและสามารถสร้างองค์ความรู้เองได้ เพื่อการพัฒนาศักยภาพของนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้และตอบสนองความแตกต่างของแต่ละบุคคลซึ่งทำได้โดยการจัดการเรียนการสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง (student centered) ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ คือ ให้นักเรียนได้ปฏิบัติงานด้วยตนเองทั้งงานในลักษณะกิจกรรมกลุ่มและรายบุคคลโดยมีผู้สอนเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ เช่น เตรียมความพร้อม สื่อ อุปกรณ์ เอกสาร ใบงานและให้คำปรึกษาแนะนำ ตลอดจนการพัฒนาให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างต่อเนื่องโดยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่กระตุ้น ทำทหายความสนใจของนักเรียนให้เกิดความสนุก เพลิดเพลิน ใฝ่รู้ใฝ่เรียน คือเกิดการเรียนรู้อย่างมีความสุขและอย่างมีความหมายอันนำไปสู่การเป็นคนดี คนเก่ง และมีความสุข ซึ่งในการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดดังกล่าวมีลักษณะดังนี้

1. การเรียนรู้ในห้องเรียนที่มีผู้สอนเป็นผู้อำนวยความสะดวกโดยจัดกิจกรรมที่เน้นกระบวนการมีส่วนร่วมและกระบวนการกลุ่มของนักเรียน ให้นักเรียนได้คิด ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วยตนเอง มีทักษะชีวิต กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ และกระบวนการทักษะทางสังคม นอกจากนี้ยังจัดสภาพแวดล้อมภายในห้องเรียนให้เอื้อต่อการเรียนรู้ เช่น จัดมุมคณิตศาสตร์ และมีสื่อการเรียนต่างๆ เป็นต้น

2. การเรียนรู้จากภายนอกห้องเรียน หมายถึง การที่นักเรียนค้นพบและแสวงหาความรู้ด้วยตนเองทั้งในกิจกรรมกลุ่มและรายบุคคลจากสิ่งแวดล้อมภายในโรงเรียนและสิ่งแวดล้อมที่บ้านและชุมชนของนักเรียนซึ่งนักเรียนจะเกิดการเรียนรู้จากสิ่งใกล้ตัว จากประสบการณ์ที่นักเรียนพบเห็นและสัมพันธ์กับวิถีการดำรงชีวิตในสังคมพร้อมทั้งเชื่อมโยงการเรียนรู้ทางวิชาการกับโลกแห่งความเป็นจริง (วิชัย, 2543: 58-61; รุ่ง, 2542: 90-127)

การจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนรู้ ผู้สอนจำเป็นต้องวางแผนจัดการเรียนการสอนอย่างดี ต้องใช้รูปแบบ เทคนิค กระบวนการเรียน และกิจกรรมการเรียนที่หลากหลายให้นักเรียนได้รับการพัฒนาความคิดขั้นสูง (higher-order thinking) มีกระบวนการศึกษาหาความรู้ (process of learning) มีความสามารถในการแก้ปัญหา (problem solving abilities) ซึ่งกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ได้หลายวิธี เช่น การเรียนการสอนที่อยู่บนพื้นฐานของการสืบเสาะหาความรู้ (inquiry base) การเรียนแบบร่วมมือ (cooperative learning) การเรียนการสอนโดยการแก้ปัญหา (problem solving) การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (e-Learning) กิจกรรมที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติ (hands-on activity) และกิจกรรมอภิปราย (discussion) เป็นต้น

สำหรับบทบาทของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้สอนเป็นศูนย์กลางโดยผู้สอนเป็นผู้นำหรือผู้ที่มีบทบาทในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นส่วนใหญ่และถึงแม้ว่ากิจกรรมจะยึดผู้สอนเป็นศูนย์กลางโดยผู้สอนเป็นผู้ถ่ายทอดความรู้เป็นส่วนใหญ่ แต่ก็มิได้หมายความว่านักเรียนจะไม่มีส่วนร่วมในกิจกรรมเลย นักเรียนยังคงสามารถปฏิบัติกิจกรรมภายใต้การแนะนำของผู้สอน โดยกิจกรรมการเรียนการสอนแบบนี้ ได้แก่ การสอนแบบบรรยาย การสาธิต เป็นต้น

ดังนั้น สำหรับการจัดการเรียนการสอนในบางวิชา เช่น วิชาคณิตศาสตร์อาจใช้การจัดการเรียนการสอนที่ผสมผสานกันระหว่างการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางและผู้สอนเป็นศูนย์กลาง เนื่องจากเนื้อหาสาระของวิชาคณิตศาสตร์อาจไม่เอื้อให้ผู้สอนจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางเพียงอย่างเดียว แต่เอื้อให้ครูผู้สอนมีบทบาท

สำคัญในการจัดการเรียนการสอนด้วย ผลจากการศึกษางานวิจัยของ ศิริยุภา (2542) ที่จำแนกกิจกรรมการเรียนการสอนตามบทบาทของครูผู้สอนและนักเรียนมีดังนี้

### บทบาทของผู้สอน

1. บทบาทที่ผู้สอนเป็นผู้นำในชั้นเรียน (conduct) คือ ผู้สอนมีหน้าที่ในการถ่ายทอดความรู้ ชี้แนะและควบคุมการเรียนการสอนอย่างเต็มที่
2. บทบาทที่ผู้สอนเป็นผู้ประสานงาน (coordinator) คือผู้สอนและนักเรียนมีบทบาทในการเรียนรู้ร่วมกัน มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนกับผู้สอน
3. บทบาทที่ผู้สอนเป็นผู้อำนวยความสะดวก (facilitator) คือผู้สอนมีหน้าที่คอยอำนวยความสะดวก ประสานงาน ส่งเสริมให้นักเรียนร่วมกิจกรรมและช่วยเหลือให้นักเรียนให้เกิดการเรียนรู้

### บทบาทของนักเรียน

1. นักเรียนมีหน้าที่รับการถ่ายทอดความรู้จากผู้สอน (passive learner)
2. นักเรียนมีบทบาทในการทำกิจกรรมร่วมกับผู้สอน (combine) นักเรียนและผู้สอนจะมีปฏิสัมพันธ์กัน
3. นักเรียนมีบทบาทในการทำกิจกรรมกลุ่ม (active group) ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนมีการจัดกลุ่มนักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ร่วมกัน
4. นักเรียนมีบทบาทในการทำกิจกรรมเดี่ยว (active individual) ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ด้วยตัวเอง

## สื่อการเรียนการสอน

สื่อการเรียนการสอนนับว่าเป็นองค์ประกอบหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนที่มีความสำคัญสำหรับช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพโดยสื่อการเรียนการสอนอาจเป็นวัสดุ อุปกรณ์และวิธีการต่างๆ ที่มีคุณค่าต่อการจัดการเรียนการสอนดังนี้

1. ช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ดีขึ้นจากประสบการณ์ที่มีความหมายในรูปแบบต่างๆ
2. ช่วยให้นักเรียนรู้ได้มากขึ้นโดยใช้เวลาในการเรียนรู้น้อยลง
3. ช่วยให้นักเรียนมีความสนใจในการเรียนและมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างกระฉับกระเฉง
4. ช่วยให้นักเรียนเกิดความประทับใจ มั่นใจและจดจำได้นาน
5. ช่วยส่งเสริมการคิดและการแก้ปัญหาในการเรียนรู้
6. ช่วยให้สามารถเอาชนะข้อจำกัดต่างๆ ในการเรียนรู้ได้ เช่น ทำสิ่งซับซ้อนให้ง่ายขึ้น ทำสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมมากขึ้น ทำสิ่งที่เคลื่อนไหวเร็วให้ดูช้าลงและทำสิ่งที่ใหญ่มากๆ ให้เล็กเหมาะแก่การศึกษา
7. ช่วยลดการบรรยายของผู้สอนให้น้อยลงแต่นักเรียนเข้าใจง่ายขึ้น
8. ช่วยลดการสูญเปล่าทางการศึกษา เนื่องจากนักเรียนสามารถเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สมบุรณ์, 2534: 43-44; ประมาณ, 2535: 339-340)

## ประเภทของสื่อการเรียนการสอน

ยุพิน (2545: 52-53) ได้จำแนกประเภทของสื่อการเรียนการสอนออกเป็น 4 ประเภท คือ

## 1. วัสดุ ซึ่งประกอบด้วย

1.1) วัสดุประกอบการสอนประเภทสิ่งพิมพ์ ได้แก่ หนังสือเรียน เอกสารประกอบการสอน วารสาร จุลสาร หนังสืออ่านประกอบ บทเรียนแบบโปรแกรม เอกสารแนะแนวทาง เอกสารฝึกหัด บทเรียนกิจกรรม บทเรียนสำหรับเรียนด้วยตนเอง เป็นต้น

1.2) วัสดุประดิษฐ์เป็นสิ่งที่ครูสามารถทำด้วยตนเอง อาจใช้กระดาษ ไม้ พลาสติก หรือสิ่งอื่น ๆ ที่ครูนำมาประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอน เช่น รูปทรงต่างๆ ที่ทำจากกระดาษ ภาพถ่าย แผ่นภาพโปร่งใส บัตรคำ กระดาษแข็ง แผนภูมิ กระดานตะปู สไลด์ประกอบเสียง สื่อเทคโนโลยี เช่น วิตทัศน์ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (computer assisted instruction) อินเทอร์เน็ต เป็นต้น

1.3) วัสดุถาวร ได้แก่ กระดานดำ กระดานนิเทศ กระดานกราฟ ของจริง ของจำลอง แผนที่ แผ่นเสียง เป็นต้น

1.4) วัสดุสิ้นเปลือง ได้แก่ ชอล์ก ปากกา ดินสอ เป็นต้น

2. อุปกรณ์ เป็นสื่อการเรียนการสอนประเภทเครื่องมือ เช่น เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ เครื่องฉายสไลด์และฟิล์มสตริป เครื่องบันทึกเสียง เครื่องรับวิทยุ เครื่องรับโทรทัศน์ เครื่องฉายภาพยนตร์ เป็นต้น

3. กิจกรรม การจัดกิจกรรมต่างๆ ถือว่าเป็นสื่อการเรียนการสอนทั้งสิ้น เช่น การทดลอง การสาธิต การจัดนิทรรศการ การเล่นเกม การทำโครงงาน การศึกษานอกสถานที่ การแสดง บทบาทสมมติ การเล่าเรื่อง การร้องเพลง การใช้เกม ปริศนา การ์ตูน กลลวง เป็นต้น

4. สื่อการเรียนรู้จากสิ่งแวดล้อม เป็นสื่อการเรียนการสอนที่หาได้ง่ายเพราะอยู่รอบๆ ตัวเรา สำหรับสื่อการเรียนรู้ภายในห้องเรียน เช่น กระดานดำ ประตู หน้าต่าง สมุด หนังสือ ฯลฯ และสื่อการเรียนรู้ภายนอกห้องเรียน เช่น ต้นไม้ สนามฟุตบอล ทุ่งนา ฯลฯ

นอกจากนี้ คิริยูภา (2530: 11) ได้จำแนกประเภทของสื่อการเรียนการสอนตามระดับการตอบสนองของนักเรียนเป็นเกณฑ์ โดยจำแนกสื่อการเรียนการสอนออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. สื่อทางเดียว เป็นสื่อที่มีความเคลื่อนไหวของข่าวสารข้อมูลเพียงด้านเดียว คือจากผู้สอนไปสู่ผู้เรียน ลักษณะการตอบสนองของนักเรียนจึงเป็นผู้รับ แทบจะไม่มีโอกาสสื่อสารกับผู้สอน สื่อประเภทนี้ ได้แก่ หนังสือ บัตรภาพ ภาพยนตร์ โทรทัศน์ สไลด์ เป็นต้น

2. สื่อสองทาง เป็นสื่อที่มีความเคลื่อนไหวของข่าวสารข้อมูลสองทาง คือมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนกับผู้สอน นักเรียนมีโอกาสสื่อสารกับผู้สอนหรือกับนักเรียนด้วยกันเอง สื่อประเภทนี้ ได้แก่ การแสดงบทบาทสมมติ การเล่นเกม การจัดสถานการณ์จำลอง เป็นต้น

3. สื่อที่ให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเอง เป็นสื่อที่มีความเคลื่อนไหวของข่าวสารข้อมูลคล้ายกับสื่อสองทาง แต่มีโครงสร้างของการเคลื่อนไหวที่แน่นอนกว่า ลักษณะของนักเรียนที่ตอบสนองต่อสื่อประเภทนี้นักเรียนจะเป็นผู้ปฏิบัติหรือเรียนรู้ด้วยตนเอง สื่อประเภทนี้ ได้แก่ ชุดการสอน บทเรียนแบบโปรแกรม บทเรียนโมดูล บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นต้น

### การเลือกสื่อการเรียนการสอน

การเลือกสื่อการเรียนการสอนนับว่ามีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการจัดการเรียนการสอนซึ่งในการจัดการเรียนการสอนแต่ละครั้ง ผู้สอนจะต้องพิจารณาเลือกสื่อการเรียนการสอนให้เหมาะสม โดยสื่อการเรียนการสอนนั้นจึงจะสามารถช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพซึ่งการเลือกสื่อการเรียนการสอนควรมีหลักการในการพิจารณาดังนี้

1. ความเหมาะสมกับเนื้อหาและวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนโดยผู้สอนต้องพิจารณาว่าจะนำสื่อการเรียนการสอนมาใช้ในด้านใด เช่น ใช้ในการนำเข้าสู่บทเรียนใช้ประกอบการอธิบาย ใช้ประกอบกิจกรรมการเรียนการสอน และมีความสอดคล้องกับเนื้อหาหรือประสบการณ์ในการเรียนรู้ที่ต้องการให้เกิดแก่นักเรียน

2. ความเหมาะสมกับนักเรียนในการใช้สื่อการเรียนการสอนผู้สอนต้องพิจารณาความเหมาะสมระหว่างสื่อการเรียนการสอนนั้นกับนักเรียนไม่ว่าจะเป็นในด้านวุฒิภาวะ ความสนใจ ความต้องการและประสบการณ์ของนักเรียน นอกจากนี้ยังต้องพิจารณาถึงจำนวนหรือขนาดของกลุ่มนักเรียนด้วย

3. ความเหมาะสมกับรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอนที่นำมาใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งในแต่ละขั้นตอนอาจจะต้องใช้สื่อเพียงหนึ่งอย่างหรือหลายอย่างพร้อมกัน ในทางกลับกันสื่อการเรียนการสอนอย่างเดียวยังอาจสามารถใช้กับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนได้หลายขั้นตอน ผู้สอนจึงควรพิจารณาถึงความเหมาะสมของสื่อการเรียนการสอนกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วย

4. ความเหมาะสมกับสภาพแวดล้อมในการใช้สื่อการเรียนการสอน เช่น วัสดุอุปกรณ์ที่มีอยู่ในสถานศึกษาหรือท้องถิ่น เวลา สถานที่

5. ความสะดวกต่อการนำมาใช้และการเก็บรักษาสื่อการเรียนการสอนที่ดีจะต้องไม่มีความยุ่งยากต่อการนำมาใช้ ให้ผลคุ้มค่า ไม่เสียเวลา เก็บรักษาง่าย ใช้ทน กะทัดรัด ถ้าเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสาธิตหรือการทดลองต้องมั่นใจว่าสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพและไม่เกิดปัญหาในการนำมาใช้

6. มีความน่าสนใจให้พิจารณาในด้านต่าง ๆ ของสื่อการเรียนการสอนนั้น เช่น ขนาด รูปร่าง รูปทรง สี สัน ความประณีต ความเรียบร้อย ความสวยงาม ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้จะช่วยดึงดูดความสนใจของนักเรียน ช่วยสร้างศรัทธาให้เกิดในตัวนักเรียน ช่วยให้นักเรียนได้เกิดความสนใจและเกิดความพึงพอใจในการเรียนรู้ (กิตานันท์, 2543: 101-103; สมบูรณ์, 2534: 49-50)

### การใช้สื่อการเรียนการสอน

การใช้สื่อการเรียนการสอนให้เกิดประสิทธิภาพสามารถช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ที่ดีนั้นควรคำนึงถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการใช้สื่อการเรียนการสอนมีดังนี้

#### 1. การเตรียมก่อนการใช้สื่อการเรียนการสอน ได้แก่

1.1) การเตรียมตัวผู้สอนโดยพิจารณาถึงคุณลักษณะของสื่อการเรียนการสอนนั้น ๆ และทดลองใช้การเรียนการสอนนั้นก่อนนำมาใช้จริง

1.2) การเตรียมสภาพแวดล้อมโดยการจัดเตรียมวัสดุ อุปกรณ์และเครื่องมือที่จำเป็นต้องใช้ให้พร้อมรวมทั้งการเตรียมสภาพของสถานที่ ห้องเรียนให้อยู่ในสภาพที่เหมาะสม

1.3) การเตรียมนักเรียนก่อนที่จะมีการใช้ประกอบกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้สอนควรอธิบายให้นักเรียนได้ทราบล่วงหน้าเกี่ยวกับการใช้สื่อ นั้น ๆ เช่น จะใช้สื่ออะไร สอนเรื่องอะไร เพื่ออะไรและบทบาทหน้าที่ของนักเรียนระหว่างใช้สื่อการเรียนการสอนด้วย

2. การใช้สื่อการสอนที่เตรียมไว้ เป็นการนำเสนอสื่อการเรียนการสอนตามที่กำหนด แผนการสอนโดยให้นักเรียนได้เห็น ได้ยินและได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมอย่างทั่วถึงในการใช้สื่อการเรียนการสอนควรมีการสังเกตปฏิกิริยาของนักเรียนด้วยเช่นกัน

3. การติดตามผลการใช้สื่อการเรียนการสอน เมื่อใช้สื่อการเรียนการสอนเสร็จแล้วควรมีการติดตามผลการใช้สื่อการเรียนการสอนนั้นว่าสามารถทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้มากน้อยเพียงใด เช่น มีการอภิปรายถึงสื่อการเรียนการสอนเป็นตอน ๆ ไปรวมทั้งผู้สอนอาจอธิบายถึงสิ่งที่นักเรียนยังเรียนรู้ไม่ชัดเจน เปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามหรืออภิปรายกันโดยผู้สอนอาจตั้งประเด็นการอภิปรายเพื่อสรุปบทเรียนด้วย

4. การจัดกิจกรรมต่อเนื่องเป็นการหาวิธีเพื่อให้นักเรียนนำสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์หรือศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม (กิตานันท์, 2543: 105-106; สมบูรณ์, 2534: 50-53)

ดังนั้นสื่อการเรียนการสอนนับว่าเป็นเครื่องมือสำคัญในการจัดการเรียนการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพซึ่งในการจัดการเรียนการสอนควรคำนึงถึงหลักการของการเลือกและการใช้สื่อการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพเพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ควรยึดหลักการของการวัดผลและการประเมินผลเพื่อค้นหาและพัฒนาศักยภาพของนักเรียนโดยเป็นการวัดผลและการประเมินผลที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เป็นการประเมินตามสภาพความเป็นจริง เป็นการประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนการสอนจากการปฏิบัติที่ผู้สอนมอบหมายงานหรือกิจกรรมซึ่งให้นักเรียนทำตามที่กำหนดหรือเลือกทำตามความถนัด ความสนใจ งานหรือกิจกรรมที่มอบหมายให้ทำมักจะมีลักษณะที่แตกต่างกัน ตั้งแต่ข้อสอบเขียนตอบและการปฏิบัติตามสถานการณ์ชีวิตจริงถึงแม้ว่าจะไม่สามารถคาดคะเนสถานการณ์จริงที่นักเรียนจะนำผลการเรียนรู้ไปใช้ได้อย่างแน่ชัดก็ตาม แต่ก็สามารถดำเนินการปฏิบัติที่ใกล้เคียงกับสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ด้วยวิธีการประเมินที่หลากหลาย

(บุญเชิด, 2544: 126–127; วิชัย, 2543: 16) และยุพิน (2545) ยังได้กล่าวถึงการประเมินผล การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 โดย เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ดังนั้นการประเมินผลก่อนเรียนประกอบด้วย การประเมินความพร้อมและ พื้นฐานของผู้เรียนและการประเมินความรอบรู้ในเรื่องที่จะเรียนก่อนเรียน ส่วนการประเมินผล ระหว่างเรียนมีหลายลักษณะคือ

### การประเมินด้วยการสื่อสารส่วนบุคคล

การประเมินด้วยการสื่อสารส่วนบุคคลเป็นวิธีการประเมินที่เน้นการใช้ทักษะการสื่อสาร ระหว่างบุคคลซึ่งประกอบด้วย

1. การถามตอบระหว่างทำกิจกรรมการเรียนรู้
2. การสนทนาพบปะพูดคุยกับผู้เรียน
3. การสนทนาพบปะพูดคุยกับผู้ที่เกี่ยวข้องกับผู้เรียน
4. การสอบปากเปล่าเพื่อประเมินความรู้ ความเข้าใจและทัศนคติ
5. การอ่านบันทึกเหตุการณ์ต่างๆ ของผู้เรียน
6. การตรวจแบบฝึกหัดและการบ้าน พร้อมให้ข้อมูลย้อนกลับ

### การประเมินจากการปฏิบัติ (performance assessment)

การประเมินจากการปฏิบัติเป็นวิธีการประเมินที่ผู้สอนมอบหมายงานหรือกิจกรรมให้ ผู้เรียนปฏิบัติ โดยผู้สอนต้องเตรียมการ 2 ประการคือ

1. ภาระงานหรือกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนปฏิบัติ (task)
2. เกณฑ์การให้คะแนน (rubrics)

สำหรับวิธีการปฏิบัติจะเป็นไปตามลักษณะงาน ดังนี้

1. ภาระงานที่ผู้สอนกำหนดให้ผู้เรียนทำเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่ม จะประเมินวิธีการ ทำงานตามขั้นตอนและผลงานของผู้เรียน

2. ภาระงานหรือกิจกรรมที่ผู้เรียนปฏิบัติเป็นปกติในชีวิตประจำวันจะประเมินด้วยวิธีสังเกต จดบันทึกเหตุการณ์ที่เกี่ยวกับผู้เรียน

3. การสาธิต

4. การทำโครงการงาน

#### การประเมินสภาพจริง (authentic assessment)

การประเมินสภาพจริงเป็นการประเมินจากการปฏิบัติงานหรือกิจกรรมโดยงานหรือกิจกรรมที่มอบหมายให้ผู้เรียนปฏิบัติจะเป็นสถานการณ์ที่เป็นจริง (real life) หรือใกล้เคียงกับชีวิตจริงจึงเป็นงานที่มีสถานการณ์ซับซ้อน (complexity) และเป็นองค์รวม (holistic) มากกว่างานปฏิบัติในกิจกรรมการเรียนรู้ทั่วไป ดังนั้นวิธีการประเมินสภาพจริงจึงไม่มีความแตกต่างจากการประเมินจากการปฏิบัติ แต่ยุ่งยากกว่าเนื่องจากเป็นสถานการณ์จริงหรือต้องจัดสถานการณ์ให้ใกล้เคียง

#### การประเมินด้วยแฟ้มสะสมงาน (portfolio assessment)

การประเมินด้วยแฟ้มสะสมงานเป็นวิธีการที่จะช่วยส่งเสริมให้การประเมินตามสภาพจริงมีความสมบูรณ์และสะท้อนศักยภาพที่แท้จริงของผู้เรียนมากขึ้น โดยการให้ผู้เรียนได้เก็บรวบรวมผลงานจากการปฏิบัติจริง ทั้งในชั้นเรียนหรือในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้ต่างๆ แล้วนำมาจัดแสดงอย่างเป็นระบบ

นอกจากนี้ บุญเชิด (2544: 47-49) ยังได้อธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับลักษณะของการประเมินผลการเรียนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญดังนี้

1. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่มุ่งรวบรวมสารสนเทศของพัฒนาการและการเรียน

2. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่มุ่งเน้นพัฒนาการที่เกิดขึ้นอย่างเด่นชัด

3. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงให้  
ความสำคัญกับจุดเด่นของผู้เรียน
4. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
เป็นผลมาจากการจัดหลักสูตรการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
5. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
สถานการณ์สอดคล้องกับชีวิตจริง
6. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
อาศัยการปฏิบัติ
7. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
สอดคล้องกลมกลืนกับการเรียนการสอน
8. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
เน้นการเรียนรู้อย่างมีจุดมุ่งหมาย
9. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
ต้องดำเนินการควบคู่ไปกับทุกสภาพแวดล้อม
10. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริงที่  
สามารถให้ภาพเรื่องราวการเรียนรู้และความสามารถของผู้เรียนทุกๆ ไปและกว้างขวาง
11. การประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเป็นการประเมินตามสภาพจริง  
ต้องอาศัยความร่วมมือกันระหว่างผู้ปกครอง ผู้สอน และผู้เรียน รวมทั้งบุคคลในวิชาชีพอื่นๆ  
ด้วยความจำเป็น

ดังนั้น การจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้สมควรใช้วิธีการ  
ประเมินที่หลากหลาย เช่น การประเมินด้วยการสื่อสารส่วนบุคคล การประเมินจากการปฏิบัติ  
การประเมินตามสภาพจริงและสอดคล้องกับแนวคิดการประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็น  
สำคัญ

## การออกแบบการเรียนรู้การสอน (instructional design)

### ความหมายของการออกแบบการเรียนรู้การสอน

การออกแบบการเรียนรู้การสอน (instructional design) หมายถึง การกำหนดแบบแผนของการจัดการเรียนรู้การสอนไว้ล่วงหน้าโดยการจัดทำขึ้นอย่างมีจุดมุ่งหมายของการจัดการเรียนการสอนอย่างชัดเจนซึ่งประกอบไปด้วยองค์ประกอบต่างๆ ของการจัดการเรียนรู้การสอน ได้แก่ วัตถุประสงค์ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้การสอน สื่อการเรียนรู้การสอน การประเมินผลการเรียน และกิจกรรมสนับสนุนอื่นๆ ที่มีความต่อเนื่องสัมพันธ์กันอย่างเป็นระบบ เพื่อให้บรรลุตามจุดมุ่งหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนนั้นๆ และเมื่อนำรูปแบบการเรียนรู้การสอนไปใช้สามารถทำได้ด้วยความสะดวก รวดเร็ว ประหยัดเวลา ค่าใช้จ่ายและเกิดผลตามที่ต้องการทุกประการ ดังนั้น การออกแบบการเรียนรู้การสอนจึงเป็นสิ่งที่ช่วยให้ผู้สอนดำเนินการจัดการเรียนการสอนได้อย่างสะดวก ลดปัญหาที่จะเกิดขึ้นในการจัดการเรียนการสอนและที่สำคัญคือช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมและพัฒนาให้มีคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (วารินทร์, 2542: 45; Dick and Carey, 1997; Kemp, Morrison, and Ross, 1994; Smith and Ragan, 1999)

### ลักษณะสำคัญของการออกแบบการเรียนรู้การสอน

ลักษณะสำคัญของการออกแบบการเรียนรู้การสอนควรมีลักษณะ ดังนี้

1. มีแนวคิดหรือหลักการพื้นฐาน รูปแบบการสอนต้องมีแนวคิดหรือหลักการพื้นฐานซึ่งอาจเกิดมาจากแนวคิดทางการศึกษา เช่น การให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ตรง ทฤษฎีจิตวิทยา ทฤษฎีการเรียนรู้ เป็นต้น ในการออกแบบการเรียนรู้การสอนอาจมีแนวคิดหรือหลักการพื้นฐานเพียงอย่างเดียวหรือมีแนวคิดหรือหลักการพื้นฐานเป็นสหวิทยาการ (multidisciplinary) ซึ่งแนวคิดหรือหลักการพื้นฐานนี้จะเป็นหลักหรือแนวทางในการกำหนดและจัดระเบียบความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่างๆ ให้สอดคล้องต่อเนื่องกัน

2. มีองค์ประกอบและความสัมพันธ์ขององค์ประกอบ ลักษณะนี้จัดเป็นสิ่งสำคัญที่ท้าทายผู้ออกแบบหรือผู้พัฒนารูปแบบการเรียนรู้การสอน เนื่องจากจะต้องเป็นผู้กำหนดองค์ประกอบและความสัมพันธ์ขององค์ประกอบให้เป็นไปอย่างมีเหตุผลสอดคล้องกับแนวคิดพื้นฐาน การกำหนดองค์ประกอบของรูปแบบการศึกษานั้นขึ้นอยู่กับความรู้และประสบการณ์ของผู้พัฒนารูปแบบการเรียนรู้การสอน ดังนั้นการกำหนดองค์ประกอบและความสัมพันธ์ของ

องค์ประกอบจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ผู้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนจะต้องวิเคราะห์จนสามารถมองเห็นความสำคัญและความสัมพันธ์ของแต่ละองค์ประกอบได้อย่างชัดเจนจึงจะสามารถกำหนดองค์ประกอบและความสัมพันธ์ได้อย่างสมเหตุสมผลและมีประสิทธิภาพ ซึ่งลักษณะของรูปแบบการเรียนการสอนในข้อนี้จะแตกต่างกันออกไปและยังไม่มีข้อกำหนดใดที่ชัดเจนเป็นที่ยอมรับกันในศาสตร์ของการสอนว่าจะต้องมีลักษณะหรือรูปแบบเป็นอย่างไรนั้นเป็นอย่างนี้

3. **มีการพัฒนาหรือการออกแบบอย่างเป็นระบบ** ในการออกแบบหรือการพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนจะต้องเป็นขั้นตอนโดยเริ่มตั้งแต่การศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลและองค์ประกอบของการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้อง การกำหนดองค์ประกอบที่สำคัญและจำเป็น การจัดความสัมพันธ์ขององค์ประกอบให้สอดคล้องกัน การนำแผนการจัดการเรียนการสอนไปทดลองใช้ การประเมินเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอนเพื่อยืนยันผลที่เกิดขึ้นกับนักเรียนสามารถพัฒนานักเรียนให้มีคุณลักษณะตามที่ต้องการจึงจะยอมรับว่ารูปแบบการจัดการเรียนการสอนนั้นมีประสิทธิภาพซึ่งการพัฒนาการเรียนการสอนมีผลต่อการพัฒนานักเรียนในด้านต่าง ๆ (วารินทร์, 2542: 46)

#### ขั้นตอนการออกแบบการเรียนการสอน

ขั้นตอนการออกแบบการเรียนการสอน มีดังนี้ (วารินทร์, 2542: 47-86; Dick and Carey, 1997; Kemp, Morrison, and Ross, 1994; Reiser and Dick, 1996; Smith and Ragan, 1999)

1. การวิเคราะห์ (analysis)
2. การพัฒนา (development and production)
3. การนำไปทดลองใช้ (implementation)
4. การประเมินผล (evaluation)

## ขั้นวิเคราะห์ (analysis phase)

ขั้นวิเคราะห์เป็นขั้นตอนที่เกี่ยวข้องกับ

1. การวิเคราะห์ปัญหา คือ การใช้กระบวนการประเมินความต้องการซึ่งเป็นเครื่องมือในการค้นหาปัญหาที่จะนำมาออกแบบและพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการให้รายละเอียดของปัญหา คำถามที่เกี่ยวข้องกับปัญหา การระบุแหล่งของปัญหาและส่วนอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ก็คือ ปัญหาที่มีหรือไม่มี ปัญหาอะไรที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน ปัญหานั้นเป็นปัญหาที่แท้จริงหรือไม่ อะไรคือสาเหตุของปัญหา อะไรคือวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ข้อจำกัดคืออะไรและเป้าประสงค์ของการออกแบบการเรียนการสอนคืออะไร เป็นต้น วัตถุประสงค์ของการออกแบบและการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนจะได้มาจากกระบวนการประเมินความต้องการดังกล่าวและการประเมินความต้องการยังเป็นการกำหนดความเข้าใจว่าการเรียนการสอนที่จะทำการออกแบบและพัฒนาขึ้นเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาหรือเป็นสิ่งที่ต้องการอย่างแท้จริงหรือไม่

2. การวิเคราะห์กิจกรรมหรืองาน เป็นการวิเคราะห์หารายละเอียดของกิจกรรมหรืองานที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนหรือการฝึกอบรม ในการวิเคราะห์อาจทำได้โดยการสัมภาษณ์ การสังเกตกิจกรรมหรืองานที่ได้ทำอยู่แล้วเพื่อให้เกิดความรู้ตามทักษะที่ต้องการ กิจกรรมหรืองานที่ดีและไม่ดีจะต้องแยกออกจากกันให้ชัดเจน ซึ่งการวิเคราะห์งานหรือกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน (learning task analysis) มีงานที่ต้องกระทำ 5 ประการด้วยกัน คือ

- 2.1) กำหนดวัตถุประสงค์การเรียนการสอน
- 2.2) กำหนดเนื้อหาสาระการเรียนรู้
- 2.3) กำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน
- 2.4) กำหนดสื่อการเรียนการสอน
- 2.5) กำหนดแนวทางในการประเมินผลการเรียน

3. การวิเคราะห์นักเรียน เป็นการวิเคราะห์คุณลักษณะของนักเรียนในประเด็นต่างๆ ที่มีผลต่อการเรียนรู้ไม่ว่าจะเป็นอายุ เพศ พื้นฐานทางสังคม เศรษฐกิจ ความถนัด แรงจูงใจ ความรู้พื้นฐานเดิมก่อนเรียนรวมทั้งความแตกต่างระหว่างบุคคลหรือระหว่างกลุ่มตลอดจนด้านระดับการพัฒนา (development levels) รูปแบบการเรียน (learning style) รูปแบบการรับข้อมูลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับนักเรียนให้มากที่สุดซึ่งจะเป็นกลยุทธ์การสอนและเทคนิคการวัดผล

4. การวิเคราะห์ทรัพยากรที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน ในการออกแบบ และพัฒนาระบบการเรียนการสอนควรให้ความสนใจในการวิเคราะห์ทรัพยากรที่เกี่ยวข้อง เช่น บุคลากร งบประมาณ องค์กร สื่อและสิ่งอำนวยความสะดวกที่เอื้อให้การออกแบบการเรียน การสอนประสบความสำเร็จโดยการวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้รวมไปถึงการวิเคราะห์ถึงประโยชน์และ การคุ้มทุน (cost/benefits analysis) ด้วย

### ขั้นพัฒนา (development/production phase)

ขั้นตอนในการพัฒนาการเรียนการสอนสามารถแยกองค์ประกอบที่สำคัญ ได้ดังนี้

#### 1. การพัฒนาเนื้อหาความรู้ มีองค์ประกอบที่สำคัญ ได้แก่

1.1) พัฒนารายละเอียดของเนื้อหาความรู้แต่ละหน่วยโดยรายละเอียดจะประกอบไปด้วยความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง หลักการหรือกระบวนการ

1.2) พัฒนาสิ่งที่เป็นตัวอย่างของเนื้อหาแต่ละหน่วย

1.3) พัฒนาการฝึกปฏิบัติในแต่ละหน่วยของเนื้อหา การมีกิจกรรมให้นักเรียนได้ ฝึกปฏิบัติจะช่วยให้ นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ที่ดี

2. การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอน กิจกรรมการเรียนการสอนมีหลายแนวทาง เช่น การพัฒนาการเรียนการสอนโดยยึดพฤติกรรมการเรียนรู้ (learning domain) แล้วเขียน กิจกรรมการเรียนการสอนดังกล่าวในลักษณะของแผนการสอน (lesson plan) ที่จะดำเนินการ อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปการจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพมักจะมีขั้นตอนหรือกิจกรรม การเรียนการสอนดังนี้

2.1) การสร้างแรงจูงใจ ในขั้นตอนแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนั้น ผู้สอนควรกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ ความตั้งใจเพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมให้ นักเรียนและการจูงใจนี้ควรแทรกอยู่ในทุกขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยอาจ ใช้การเสริมแรงด้วยวิธีการต่างๆ ตามความเหมาะสม

2.2) การให้วัตถุประสงค์แก่นักเรียน ควรให้นักเรียนได้ทราบบ้างว่าเขาจะได้เรียน อะไร ซึ่งนักเรียนจะมีความก้าวหน้าในการเรียนได้ดีถ้า นักเรียนได้ทราบวัตถุประสงค์การเรียนก่อน

2.3) คำนี้ถึงความรู้พื้นฐานของนักเรียนในกระบวนการเรียนการสอนซึ่งต้องให้รู้ชัดแจ้งว่านักเรียนต้องมีความรู้ มีทักษะและเจตคติอย่างไรบ้างก่อนมาเรียน

2.4) การให้สารสนเทศและตัวอย่าง สารสนเทศที่ให้เป็นสิ่งให้นักเรียนจะต้องค้นคว้า จะต้องรับเข้าสู่สติปัญญาและความคิดของตนเองเพื่อให้เกิดผลต่อวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสารสนเทศที่ให้อาจเป็นข้อเท็จจริง กฎเกณฑ์ เป็นตัวอย่างทักษะซึ่งอาจให้ในรูปการบรรยาย ในรูปสื่อที่นำเสนอ ให้การปฏิบัติ ให้ทำตามความสอดคล้องของเนื้อหา

2.5) การให้การฝึกปฏิบัติและข้อมูลย้อนกลับ ในการที่นักเรียนเรียนรู้เนื้อหา ความรู้ (knowledge) ทักษะ (skill) และเจตคติ (attitude) นักเรียนจะต้องปฏิบัติพฤติกรรมนั้น ๆ และการฝึกปฏิบัติต้องให้มีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์

2.6) การประเมินผลเป็นการตรวจสอบว่านักเรียนได้เรียนรู้อะไรและผลการเรียนรู้นั้นเป็นอย่างไร มีสิ่งใดบ้างที่ควรมีการปรับปรุงแก้ไขซึ่งการประเมินผลทำให้ทราบว่านักเรียนเรียนรู้อะไรมาบ้างและมีสิ่งใดบ้างที่ต้องดำเนินการปรับปรุงแก้ไข

### ขั้นนำไปทดลองใช้ (implementation phase)

เมื่อการออกแบบและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนได้ดำเนินการจนได้ผลผลิต (product) ที่จะสามารถนำไปทดลองใช้ได้แล้วก็ถึงขั้นการนำไปใช้โดยในขั้นนำไปใช้นี้ต้องทำควบคู่กันไปกับขั้นการประเมินผลเพื่อให้มีการเก็บรวบรวมข้อมูลสำหรับนำมาปรับปรุงและตัดสินใจตลอดเวลา ขั้นนี้เป็นขั้นการนำเสนอและจัดดำเนินการสอนซึ่งองค์ประกอบสำคัญที่เกี่ยวข้องกับการนำหลักสูตรไปใช้มี 2 ประการ คือ

1. การสอน (instruction)
2. การบริหารการสอน (administration)

ข้อควรตระหนักในขั้นการจัดการเรียนการสอนมี ดังนี้

1. ต้องให้การดำเนินการสอนเป็นไปในรูปแบบการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง
2. มีความสัมพันธ์ระหว่างผู้สอนกับนักเรียน คือผู้สอนเป็นผู้ที่ทำหน้าที่เหมือนผู้จัดการเรียนหรือสภาพแวดล้อมเพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ มีแรงจูงใจที่อยากจะเรียนรู้

มีการแนะนำและประเมินผลการเรียนรู้ และการเรียนการสอนต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและผู้สอนต้องทำหน้าที่เป็นผู้สอนเสริม (tutor) และเป็นที่ปรึกษาให้แก่นักเรียน

3. ครูผู้สอนต้องพัฒนาวิธีการเรียนการสอนให้ทันสมัยอยู่เสมอ โดยมีการวางแผนและใช้เทคโนโลยีในการสอนอย่างเหมาะสม

### ขั้นประเมินผล (evaluation phase)

การประเมินผลเป็นการวัดว่าวงจรของการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอนนั้น สมบูรณ์แล้วหรือยังซึ่งข้อมูลย้อนกลับ (feedback) เป็นส่วนสำคัญที่ได้จากการประเมินผลเพื่อนำไปปรับปรุงในส่วนของแต่ละขั้นตอนให้ดียิ่งขึ้นและตรงตามวัตถุประสงค์ ถ้าการประเมินผลพบว่า จุดใดควรปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงก็ต้องดำเนินการปรับปรุง

สิ่งที่ได้จากการประเมินผลเพื่อนำไปปรับปรุง ออกแบบและพัฒนาระบบการสอน มีดังต่อไปนี้

1. รายงานในการควบคุมให้วงจรการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอนดำเนินไปได้ทำให้ทราบว่ามีส่วนแตกต่างอะไรในขั้นตอนต่างๆ ที่ได้จากการประเมินผล
2. ทรัพยากรต่างๆ ว่ามีเพียงพอขาดตกบกพร่องตรงจุดใด เช่น เครื่องมืออุปกรณ์ สิ่งอำนวยความสะดวก สภาพแวดล้อมทางการเรียน
3. สื่อการสอนและสิ่งอำนวยความสะดวกในการสอนที่ต้องปรับปรุงแก้ไขมีอะไรบ้าง
4. ครูผู้สอน กิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูนำเสนอเป็นไปด้วยดีและถูกต้องเหมาะสมหรือไม่
5. แบบสอบเหมาะกับการทดสอบ โดยตรงกับวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่
6. ข้อควรปรับปรุงอื่นๆ เช่น การสอนเสริม การสอนซ่อมเสริม

7. ในการประเมินผลอาจแยกได้เป็น 2 ประเภท คือ

7.1) การประเมินผลเพื่อการปรับปรุง (formative evaluation)

7.2) การประเมินผลลัพท์หรือผลสัมฤทธิ์ (summative evaluation)

ดังนั้นการออกแบบการเรียนการสอนจึงเป็นการกำหนดแผนการจัดการเรียนการสอนอย่างมีขั้นตอนและเป็นระบบที่มีจุดมุ่งหมายที่ชัดเจนและมีองค์ประกอบต่างๆที่มีความต่อเนื่องสัมพันธ์กันอย่างเป็นระบบ ได้แก่ วัตถุประสงค์ เนื้อหาสาระ กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน การประเมินผลการเรียน และกิจกรรมสนับสนุนอื่นๆ โดยมีขั้นตอนในการออกแบบการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ดังนี้ 1) ชั้นวิเคราะห์ประกอบด้วยการวิเคราะห์ปัญหา กิจกรรม ตัวนักเรียนและทรัพยากรที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน 2) ชั้นพัฒนา ประกอบด้วยการพัฒนาเนื้อหาความรู้และกิจกรรมการเรียนการสอน 3) ชั้นนำไปทดลองใช้ และ 4) ชั้นประเมินผล

### โครงสร้างรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

#### เนือหารายวิชา (course description)

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผล นิยาม ความหมายของภาษา คณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ วิธีตรง วิธีเดินหน้าถอยหลัง วิธีการแย้งสลับที่ วิธีการหาข้อขัดแย้ง วิธีการแจกกรณี วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การฝึกทักษะการใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

#### วัตถุประสงค์ของรายวิชา

เมื่อเรียนจบรายวิชานี้แล้วนิสิตสามารถ

1. เข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผลรวมถึงมองเห็นความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์
2. รู้จักและเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ ได้เหมาะสมกับโจทย์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

3. อ่านและเข้าใจการพิสูจน์ที่เป็นลายลักษณ์อักษรโดยชี้ให้เห็นถึงเทคนิคที่ช่วยให้สามารถติดตามข้อสรุปและพัฒนาการพิสูจน์ของตนเองกับผู้ที่เรียนหรือผู้ใช้คณิตศาสตร์ได้

4. นำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไปได้

### หัวข้อวิชา (course outline)

หน่วยที่ 1 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผล นิยามและศัพท์ทางคณิตศาสตร์

หน่วยที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ

หน่วยที่ 3 วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ

3.1) วิธีตรง

3.2) วิธีเดินหน้าถอยหลัง

3.3) วิธีการแย้งสลับที่

3.4) วิธีการหาข้อขัดแย้ง

3.5) การพิสูจน์ข้อความในแบบ  $p \leftrightarrow q$

3.6) วิธีการแจกกรณี

3.7) วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน

3.8) วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว

3.9) วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

### กระบวนการให้เหตุผล (reasoning)

การให้เหตุผลเป็นสิ่งที่มนุษย์ใช้อยู่เป็นประจำเพื่อนำไปสู่ความเชื่อหรือการยอมรับในเรื่องราวต่างๆ ว่าเป็นจริงหรือไม่จริงด้วยความสนใจ กระบวนการซึ่งนำเอาข้อความหรือปรากฏการณ์ต่างๆที่เป็น เหตุ (ข้อกำหนด) (hypothesis) อาจจะมีหลายอันมาวิเคราะห์และแจกแจงแสดงความสัมพันธ์หรือความต่อเนื่องเพื่อทำให้เกิดข้อความใหม่หรือปรากฏการณ์ใหม่ๆ ขึ้นซึ่งเรียกว่า ข้อสรุป (ผล/ข้อยุติ) (conclusion) ขบวนการนี้เราเรียกว่าการให้เหตุผล (reasoning)

กระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญ แบ่งออกได้ 2 รูปแบบ คือ

1) **การให้เหตุผลแบบอุปนัย** (inductive reasoning or induction) เป็นการให้เหตุผล โดยสรุปผลมาจากเหตุย่อย ๆ หลาย ๆ เหตุหรือความรู้อย่อย ๆ หลาย ๆ ความรู้หรือกรณีเฉพาะ หลาย ๆ กรณี โดยที่แต่ละเหตุหรือความรู้นั้นเป็นอิสระต่อกันแล้วนำมาสรุปผลเป็นกรณีทั่วไป ตัวอย่างเช่น

เหตุ : 1) คนทุกคนต้องตาย  
 2) ต้นไม้ทุกชนิดต้องตาย  
 3) ปลาทุกชนิดต้องตาย  
 4) นกทุกชนิดต้องตาย  
 ∴  
 สรุป : สิ่งมีชีวิตทุกชนิดต้องตาย

จะเห็นว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเราได้จากการสังเกต ประสบการณ์หรือการทดลอง หลาย ๆ ครั้งแล้วสรุปผลเป็นข้อความรู้ใหม่ให้เป็นหมวดหมู่หรือเป็นแม่บทที่วางนัยทั่วไป (generalization) จึงทำให้ผลสรุปกว้างขึ้นซึ่งผลสรุปเป็นการคาดคะเนที่อาจเป็นไปได้เท่านั้น นั่นคือถ้าเหตุเป็นจริงหรือถูกต้องผลสรุปก็จะเป็นจริงถูกต้องด้วยและการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น จะวางนัยทั่วไปภายหลังซึ่งแตกต่างจากการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่วางนัยทั่วไปก่อน สำหรับการจัดการเรียนการสอนในเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ครูก็จะเริ่มต้นจากกิจกรรมย่อยต่าง ๆ หรือการยกกรณี ตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างเพื่อให้ผู้เรียนเห็นรูปแบบ เมื่อผู้เรียนใช้การสังเกต เปรียบเทียบดูสิ่งที่มีลักษณะร่วมกันก็จะสามารถนำไปสู่ข้อสรุปได้และมักจะตามด้วยการสอนโดยการใช้เหตุผลแบบนิรนัย

กล่าวคือข้อสรุปที่ได้จากการทดลองหรือการสังเกตปรากฏการณ์ต่าง ๆ จากกรณีเฉพาะในทางคณิตศาสตร์จะกลายเป็นกฎเกณฑ์หรือทฤษฎีบทที่จะนำไปใช้ได้ก็ต่อเมื่อข้อสรุปนั้นจะต้องได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นจริงซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย

2) **การให้เหตุผลแบบนิรนัย** (deductive reasoning or deduction) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยสรุปผลจากเหตุใหญ่หรือข้อความรู้ใหญ่หรือข้อความรู้ที่เป็นแม่บทมาเป็นข้อความรู้ย่อย (ผลสรุป) จะเห็นได้ว่า ผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนิรนัยนี้ถูกบังคับจากเหตุหรือข้อความรู้เดิมที่ยอมรับกันมาแล้วอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ดังนั้นผลสรุปที่ได้จึงอยู่ในวงจำกัดเฉพาะเหตุเท่านั้นจะสรุปผลกว้างกว่านี้ไม่ได้ การให้เหตุผลแบบนี้พบมากในวิชาคณิตศาสตร์โดยจะนำ

เอานิยาม สัจพจน์และหลักการทางตรรกศาสตร์มาช่วยให้ได้ผลสรุป ซึ่งถ้าหากสรุปสมเหตุสมผล (valid) ก็จะเกิดเป็นกฎหรือทฤษฎีบทตามมา

โดยทั่วไปแล้วการจัดระบบคณิตศาสตร์จะใช้เหตุผลแบบนิรนัยซึ่งเรียกว่าระบบเชิงนิรนัย (deductive system) สำหรับการจัดกระบวนการเรียนการสอนที่ครูให้นัยทั่วไป ข้อสรุป กฎ สูตร หรือหลักการก่อนแล้วยกตัวอย่างประกอบหลักการนั้นเพื่อที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาเรื่องใหม่และเกิดข้อสรุปอันใหม่ขึ้นจัดได้ว่าเป็นการสอนด้วยหลักการให้เหตุผลแบบนิรนัย

ดังนั้น การให้เหตุผลแบบอุปนัยและแบบนิรนัยมีลักษณะที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนคือ ผลสรุปของการให้เหตุผลแบบนิรนัยถูกบังคับจากเหตุอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ แต่ผลสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นเพียง “อาจจะ” เป็นไปได้นั่นเอง (ชานนท์, 2545)

### วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (methods of mathematics proof)

วัตถุประสงค์ของนักคณิตศาสตร์ คือ การค้นหาและสื่อสารความจริงบางอย่างในคณิตศาสตร์ ดังนั้น คณิตศาสตร์จึงเป็นภาษาของนักคณิตศาสตร์และการพิสูจน์เป็นวิธีการที่นักคณิตศาสตร์ใช้สื่อสารความจริงระหว่างนักคณิตศาสตร์ด้วยกันเองโดยอาศัยคณิตศาสตร์เป็นภาษาในการพูดคุยกัน ภาษาคณิตศาสตร์มีข้อน่าสังเกตที่สำคัญคือเป็นภาษาที่มีความแม่นยำสูง (precise) การพิสูจน์จะไม่ผิดไปจากความจริง ชัดเจนและไม่ผิดพลาด แต่น่าเสียดายที่การพิสูจน์ที่ปรากฏในตำรา (textbook) และวารสาร (journal) ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีอยู่มากมายนั้นมีไว้สำหรับบุคคลที่รู้ภาษาคณิตศาสตร์เท่านั้น ในการแก้ปัญหาความไม่เข้าใจดังกล่าวเราจึงจำเป็นต้องเรียนภาษาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นภาษาใหม่อีกภาษาหนึ่งและเรียนการพิสูจน์ซึ่งเป็นวิธีคิดใหม่อีกวิธีหนึ่ง

คณิตศาสตร์ที่มีระบบจะประกอบด้วยนิยาม อนิยาม สัจพจน์และทฤษฎีบท มีทฤษฎีบทเป็นจำนวนมากที่พัฒนามาจากการใช้นิยาม อนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่เราพิสูจน์แล้วว่าจริง ดังนั้นการพัฒนาทางคณิตศาสตร์จึงเป็นเรื่องสำคัญและถือกันว่าเป็นหลักอย่างหนึ่งหรือศิลปะอย่างหนึ่งของคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีพื้นฐานของการพิสูจน์และในการพิสูจน์จำเป็นต้องใช้หลักของตรรกศาสตร์เข้าช่วยเพื่อที่การให้เหตุผลจะได้สมเหตุสมผลซึ่งในการพิสูจน์ถ้ากำหนดประพจน์สองประพจน์ คือ  $p$  และ  $q$  ทั้งสองประพจน์อาจจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ แต่ปัญหาพื้นฐานของนักคณิตศาสตร์อันหนึ่งก็คือการแสดงว่าถ้า  $p$  เป็นจริงแล้ว  $q$  เป็นจริงด้วยซึ่งในการพิสูจน์ข้อความดังกล่าวเราควรจะตรวจว่า  $p$  เป็นจริงแล้วหาทางทราบ

ให้ได้ว่า  $q$  เป็นจริงด้วยซึ่งจะทำได้ง่ายกว่าการตรวจว่า  $q$  เป็นจริง สิ่งนี้คือเหตุผลอันหนึ่งที่ใช้ในการพิสูจน์ข้อความ " $p \rightarrow q$ "

สำหรับทฤษฎีบทถือว่าเป็นส่วนประกอบที่สำคัญอันหนึ่งในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และทฤษฎีบทแต่ละทฤษฎีบทนั้นได้มาโดยอาศัยบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อน เมื่อเรายอมรับว่าบทนิยามและสัจพจน์เป็นจริงก็นำบทนิยามและสัจพจน์ดังกล่าวมาอ้างอิงเป็นเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อความใหม่ว่าเป็นจริงเราเรียกขบวนการนี้ว่า การพิสูจน์ข้อความใหม่ให้เป็นทฤษฎีบท ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการพิสูจน์ในระบบใดระบบหนึ่งก็คือ

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \vdash C$$

โดยที่  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  เป็นบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อน (บทแทรก ทฤษฎีบทประกอบ) ในระบบนั้นและ  $C$  เป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ โดยปกติแล้วจะเป็นทฤษฎีบท จะเห็นได้ว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้มาต้องผ่านการพิสูจน์เพื่อยืนยันให้แน่ใจว่าเป็นการสรุปที่สมเหตุสมผล ดังนั้นจึงขอเสนอวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บ่อย ดังนี้คือ

### การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$

การพิสูจน์ข้อความในแบบ  $p \rightarrow q$  สามารถทำได้สามวิธี คือ วิธีตรง (direct proof) วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof) และวิธีขัดแย้ง (contradiction proof) โดยจะแยกกล่าวแต่ละวิธีดังนี้

#### วิธีตรง (direct proof)

ถ้า  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  เป็นบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว ในการพิสูจน์  $p \rightarrow q$  ทางตรงหรือการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ว่าจาก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  สรุปได้ว่า  $p \rightarrow q$  ในการพิสูจน์แบบนี้เราให้  $p$  เป็นส่วนหนึ่งของเหตุ แล้วพิสูจน์ว่าจาก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, p$  สรุปได้ว่า  $q$  ดังรูปแบบต่อไปนี้

พิสูจน์ สมมติว่า  $p$   
 $\therefore$  (ใช้  $p$  และ  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ )  
 เพราะฉะนั้น  $q$   
 นั่นคือ  $p \rightarrow q$

ในการพิสูจน์รูปแบบ  $p \rightarrow q$  โดยวิธีตรงมีเทคนิคการพิสูจน์พื้นฐานวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้การพิสูจน์สามารถทำได้ง่ายยิ่งขึ้นเราเรียกเทคนิคนี้ว่าวิธีเดินหน้า-ถอยหลัง (forward-backward method) ซึ่งเทคนิคการพิสูจน์นี้จะเป็ความรูพื้นฐานที่สามารถนำไปใช้เป็นส่วนประกอบหนึ่งในการพิสูจน์ของเทคนิคการพิสูจน์อื่น ๆ ต่อไปได้ การพิสูจน์โดยการใช่วิธีเดินหน้า-ถอยหลังใช้สำหรับการพิสูจน์ให้  $p \rightarrow q$  เป็นจริง โดยเริ่มต้นจากประพจน์  $q$  ซึ่งเป็นข้อสรุปที่ต้องการแสดงให้เห็นว่าจริง จาก  $q$  ใช้กระบวนการถอยหลัง โดยตั้งคำถามหลัก (key question) แล้วตอบคำถามของคำถามหลักซึ่งจะเกิดประพจน์ใหม่ในขั้นตอนตรงนี้เรียกว่า  $q_1$  โดยที่  $q_1$  มีสมบัติว่าเมื่อ  $q_1$  เป็นจริงแล้ว  $q$  เป็นจริง จาก  $q_1$  ใช้กระบวนการถอยหลังเช่นนี้อีกก็จะได้ประพจน์ใหม่เรียกว่า  $q_2$  และ  $q_2$  จะมีสมบัติว่าเมื่อ  $q_2$  เป็นจริงแล้ว  $q_1$  จริงและโปรดจำไว้ว่ากระบวนการถอยหลังถูกชักจูง (motivate) โดยข้อเท็จจริงของ  $p$  ซึ่งถูกสมมติว่าจริงทำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งไม่สามารถที่จะตั้งคำถามหลักและตอบคำถามของคำถามหลักได้ ในกรณีเช่นนี้ถึงเวลาที่จะใช้กระบวนการเดินหน้า โดยเริ่มจากการสมมติว่า  $p$  เป็นจริง จาก  $p$  จะสามารถสร้างประพจน์ใหม่ ๆ ได้อีกหลายประพจน์และโปรดจำไว้ว่ากระบวนการเดินหน้ามีจุดมุ่งหมายเพื่อเชื่อมต่อกับจุดหมายปลายทางของกระบวนการถอยหลัง ดังนั้นการสร้างประพจน์ใหม่จาก  $p$  ควรเลือกให้เกิดประโยชน์ในการเชื่อมต่อกับกระบวนการถอยหลังเพื่อการสรุปว่า  $q$  เป็นจริง

ดังนั้น วิธีเดินหน้า-ถอยหลังจึงเป็นกระบวนการสองกระบวนการซึ่งง่ายต่อการจดจำ ถ้าจะเปรียบประพจน์  $q$  เสมือนเข็มหนึ่งเล่มในกองหญ้ากระบวนการเดินหน้าจะเริ่มต้นด้วยการสมมติว่า  $p$  เป็นจริงซึ่งเปรียบเสมือนการพยายามค้นหาเข็มในกองหญ้าโดยเริ่มต้นจากนอกกองหญ้า ส่วนกระบวนการถอยหลังเป็นกระบวนการทำงานที่เริ่มต้นจากเข็มซึ่งอยู่ภายในกองหญ้าแล้วพยายามหาวิถีทางภายในกองหญ้าเพื่อให้พบ  $p$  ที่อยู่นอกกองหญ้านั้นเอง

### วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive)

เนื่องจากข้อความ  $p \rightarrow q$  สมมูลกับ  $\sim q \rightarrow \sim p$  กล่าวคือมีตารางค่าความจริงเหมือนกันซึ่งในทางตรรกศาสตร์สามารถใช้แทนกันได้ จึงสามารถพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  โดยพิสูจน์ข้อความ  $\sim q \rightarrow \sim p$  แทน

ดังนั้นการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริง โดยสมมติว่า  $\sim q$  เป็นจริงแล้วแสดงให้เห็นได้ว่า  $\sim p$  เป็นจริงมีรูปแบบดังต่อไปนี้

**พิสูจน์** สมมติว่า  $\sim q$   
 $\therefore$  (ใช้  $\sim q$  บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น  $\sim p$   
 นั่นคือ  $\sim q \rightarrow \sim p$   
 ดังนั้น  $p \rightarrow q$

### วิธีการหาข้อขัดแย้ง (contradiction)

แนวคิดของการพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้งก็คือการสมมติว่า  $p$  เป็นจริงและ  $q$  เป็นเท็จ วิธีนี้มีชื่อเรียกอื่นๆ อีก เช่น **reductio ad absurdum** หรือการพิสูจน์ทางอ้อม (indirect proof) เนื่องจาก  $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q \rightarrow c)$  เมื่อ  $c$  แทนข้อความขัดแย้ง จะได้ว่าเราสามารถพิสูจน์  $p \wedge \sim q \rightarrow c$  แทนการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  ได้ซึ่งการพิสูจน์ว่า  $p \wedge \sim q \rightarrow c$  นั้นเราจะสมมติว่า  $p$  และ  $\sim q$  เป็นจริงทั้งคู่แล้วพยายามหาข้อขัดแย้ง ดังนั้นการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้งอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

**พิสูจน์** สมมติว่า  $p$  และ  $\sim q$  เป็นจริง  
 $\therefore$  (ใช้  $p, \sim q$  บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น เกิดข้อความขัดแย้ง ( $c$ )  
 นั่นคือ  $p \wedge \sim q \rightarrow c$   
 ดังนั้น  $p \rightarrow q$  เป็นจริง

### การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง (proof by contradiction)

จากที่ได้กล่าวถึงการพิสูจน์  $p \rightarrow q$  โดยวิธีหาข้อขัดแย้งแล้วในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความ  $p$  ใดๆ โดยวิธีหาข้อขัดแย้งซึ่งหากเราจะพิสูจน์ข้อความ  $p$  หรือจะพิสูจน์ว่า  $p$  เป็นจริงก็เพียงสมมติให้  $\sim p$  เป็นจริงแล้วแสดงให้เห็นได้ว่า  $q \wedge \sim q$  (เป็นเท็จ) เนื่องจาก  $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$  เป็นสัจนิรันดร์ จึงสรุปได้ว่า  $p$  เป็นจริง ดังนั้นการพิสูจน์ว่า  $p$  เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้งอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

พิสูจน์ สมมติว่า  $\sim p$  เป็นจริง  
 $\therefore$  (ใช้  $\sim p$  บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น  $q \wedge \sim q$   
 นั่นคือ  $\sim p \rightarrow q \wedge \sim q$   
 ดังนั้น  $p$  เป็นจริง

### การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \leftrightarrow q$

เนื่องจาก  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \leftrightarrow q)$  ดังนั้นวิธีหนึ่งที่เราจะพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  โดยแยกการพิสูจน์เป็นสองตอน คือ

- 1)  $p \rightarrow q$  ขั้นตอนนี้เรียกว่า “if part” หรือ “sufficient part” ( $p$  เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับ  $q$ )
- และ 2)  $q \rightarrow p$  ขั้นตอนนี้เรียกว่า “only if part” หรือ “necessity part” ( $p$  เป็นเงื่อนไขที่เป็นสำหรับ  $q$ )

นอกจากนี้เรายังอาจใช้วิธีการแย้งสลับที่มาช่วยในการพิสูจน์ได้ กล่าวคือจะพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  เราต้องแสดงว่า  $p \rightarrow q$  และ  $\sim p \rightarrow \sim q$  เป็นจริง

อีกวิธีหนึ่งที่เรานิยมใช้ในการพิสูจน์ข้อความแบบ  $p \leftrightarrow q$  ซึ่งเรียกว่า **Iff-String** คือ การสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจาก  $p$  ไป  $q$  ดังนี้

$p \leftrightarrow q_1$	อาจจะเขียนสั้น ๆ ได้เป็น	$p \leftrightarrow q_1$
$q_1 \leftrightarrow q_2$		$\leftrightarrow q_2$
$\vdots$		$\vdots$
$q_n \leftrightarrow q$		$\leftrightarrow q$

### การพิสูจน์ข้อความโดยการแจกกรณี (proof by cases)

เนื่องจากข้อความ  $(p \vee q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$  กล่าวคือถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความ  $p \vee q \rightarrow r$  เป็นจริงทำได้โดยการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow r$  และ  $q \rightarrow r$  เป็นจริง เราจะเรียกการพิสูจน์ในลักษณะนี้ว่าการพิสูจน์แบบการแจกกรณี

ในทำนองเดียวกันถ้าจะพิสูจน์ว่า  $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow r$  เป็นจริงก็โดยการพิสูจน์ว่า  $(p_1 \rightarrow r) \wedge (p_2 \rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow r)$  เป็นจริงนั่นเอง

### การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน (disproof by counterexample)

การที่จะพิสูจน์ว่าข้อความ  $p$  เป็นเท็จนั้นสามารถทำได้โดยการพิสูจน์ว่าข้อความ  $\sim p$  เป็นจริงนั่นเองและจะพิสูจน์ว่า  $\sim p$  เป็นจริงได้โดยวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นแต่มีกรณีที่น่าสนใจเป็นพิเศษคือการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านซึ่งเป็นการคัดค้านข้อความ “สำหรับทุก ๆ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์  $U$  ที่สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้” กล่าวคือเป็นการพิสูจน์ว่า  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จหรือ  $\sim \forall x, p(x)$  เป็นจริงนั่นเองหรือกล่าวได้ว่าเราสามารถพิสูจน์  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จ (หรือ  $\sim \forall x, p(x)$  เป็นจริง) โดยพิสูจน์ว่า  $\exists x, \sim p(x)$  เป็นจริง เนื่องจาก  $\sim \forall x, p(x) \equiv \exists x, \sim p(x)$  ดังนั้นการพิสูจน์ว่า  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

พิสูจน์ เลือก  $a$  ที่เหมาะสม โดยให้  $a \in U$   
 $\vdots$   
 เพราะฉะนั้น  $\sim p(a)$  เป็นจริง  
 นั่นคือ  $\exists x, \sim p(x)$  เป็นจริง  
 ดังนั้น  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จ

### การพิสูจน์ว่ามี(อย่างน้อยหนึ่ง) และมีเพียงหนึ่งเดียว (proof of existence and uniqueness)

การพิสูจน์ว่ามีเป็นการพิสูจน์ว่ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์  $U$  ที่สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้ กล่าวคือเป็นการพิสูจน์ว่า  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง โดยการหาสมาชิกหนึ่งในเอกภพสัมพัทธ์มาแทนตัวแปร  $x$  แล้วทำให้  $p(x)$  เป็นจริง ซึ่งมีรูปแบบการพิสูจน์ดังนี้

พิสูจน์ เลือก  $a \in U$  ที่เหมาะสม  
 $\vdots$   
 เพราะฉะนั้น  $p(a)$  เป็นจริง  
 ดังนั้น  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า  $\exists! x \ni p(x)$  เป็นจริงหรือต้องการพิสูจน์ว่ามี  $x$  เพียงตัวเดียว (unique) เท่านั้นที่ทำให้  $p(x)$  เป็นจริง เราจะต้องแสดงสองขั้นตอนคือ

- 1) พิสูจน์ว่า  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง (แสดงว่ามี  $x$  อย่างน้อยที่สุดตัวหนึ่งซึ่งมีสมบัติ  $p(x)$ )
- และ 2) พิสูจน์ว่า  $\forall x \forall y [p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y]$  (แสดงว่ามี  $x$  อย่างมากที่สุดเพียงตัวเดียวซึ่งมีสมบัติ  $p(x)$ ) ซึ่งจากทั้งสองขั้นตอนเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น  $(\exists x \ni p(x)) \wedge (\forall x \forall y [p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y])$

### การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (the principle of mathematical induction)

บ่อยครั้งที่เราจะต้องพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $\forall n \in \mathbf{N}, p(n)$  หรืออาจกล่าวได้ว่าหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ใช้กับข้อสรุปซึ่งอยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

“For every integer  $n \geq 1$ ”, “something happens”  
 (“สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม  $n \geq 1$ ”, “บางสิ่งบางอย่างเกิดขึ้น”)

จะเห็นได้ว่า “บางสิ่งบางอย่างเกิดขึ้น” จะเกิดขึ้นได้ขึ้นอยู่กับ “จำนวนเต็ม  $n$ ” เช่น ต้องการพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbf{N}$$

$$(n-3)(n+2) = n^2 - n - 6 \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbf{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+x^n \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbf{N}$$

การพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นั้นเป็นการตรวจสอบคำตอบไม่ใช่การหาคำตอบ ในการหาคำตอบนั้นต้องหาด้วยวิธีอื่นอาจจะใช้วิธีเดาก็ได้ หลังจากนั้นเราก็จะตรวจสอบคำตอบของเราได้ด้วยวิธีการพิสูจน์แบบนี้ ในที่นี้จะขอกล่าวถึงหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แยกเป็นสองทฤษฎีบทใหญ่ๆ ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1** วิธีพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 1  
(the first method of proof by mathematical induction)

สำหรับ  $n \in \mathbb{N}$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$

ถ้า (1)  $p(1)$  เป็นจริง

และ (2) สำหรับ  $k \in \mathbb{N}$  ถ้า  $p(k)$  เป็นจริงแล้ว  $p(k + 1)$  เป็นจริงด้วย

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

จากที่กล่าวมาข้างต้นทำให้ทราบว่าส่วนหนึ่งของการพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์คือการสมมติว่า  $p(k)$  เป็นจริงแล้วใช้ข้อมูลตรงนี้นำไปสู่การสรุป  $p(k + 1)$  เป็นจริง แต่ในขั้นตอนนี้อาจจะเริ่มจากการสมมติว่า  $p(k - 1)$  เป็นจริงแล้วสรุปว่า  $p(k)$  เป็นจริงก็ได้ ซึ่งทั้งสองวิธีดังกล่าวถือว่าเป็นสิ่งเดียวกันหรือเหมือนกันทุกประการโดยถือหลักว่า ถ้า  $p$  (ตัวนี้เป็นจริง) แล้ว  $p$  (ตัวถัดไปเป็นจริงด้วย)

ในบางกรณี เช่น สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ถ้าให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $n! > 2^n$  จะเห็นได้ว่า  $p(1), p(2), p(3)$  เป็นเท็จ แต่  $p(4), p(5), p(6)$  เป็นจริงจะสามารถพิสูจน์ได้หรือไม่ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ซึ่ง  $n \geq 4$  เพื่อพิสูจน์ข้อความประเภทนี้จึงจำเป็นต้องมีบทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 2** สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$  และ  $m$  เป็นจำนวนนับที่กำหนดให้

ถ้า (1)  $p(m)$  เป็นจริง

และ (2) สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $k$  ซึ่ง  $k \geq m$

ถ้า  $p(k)$  เป็นจริงแล้ว  $p(k + 1)$  เป็นจริงด้วย

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ซึ่ง  $n \geq m$

### ทฤษฎีบท 3 วิธีพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 2

(the second method of proof by mathematical induction หรือ strong induction)

สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$

ถ้า (1)  $p(1)$  เป็นจริง

และ (2) สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $m$  ถ้า  $p(k)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $k$

ซึ่ง  $k \leq m$  แล้ว  $p(m + 1)$  เป็นจริง

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\{p(1) \wedge [\forall m \in \mathbb{N}, p(1) \wedge p(2) \wedge \dots \wedge p(m) \rightarrow p(m + 1)]\} \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, p(n)$$

โดยปกติแล้วทฤษฎีบท 3 จะเขียนไว้ในรูปต่อไปนี้

สมมติว่าสำหรับจำนวนนับ  $m$  ใดๆ ถ้า  $p(k)$  เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ  $k$  ซึ่ง  $k < m$  แล้ว  $p(m)$  เป็นจริง เราจะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า  $\{\forall m, [\forall k < m, p(k)] \rightarrow p(m)\} \rightarrow \forall n, p(n)$  (ชานนท์, 2545)

### แนวทางการเรียนรู้แบบกลุ่ม

#### ความหมายการเรียนรู้แบบกลุ่ม

การเรียนรู้แบบกลุ่ม หมายถึง การที่ผู้เรียนเข้ามาทำกิจกรรมร่วมกันและได้มีโอกาสรับรู้ แลกเปลี่ยนข้อมูล ความคิดเห็นและประสบการณ์ซึ่งกันและกัน จนค้นพบเป้าหมายที่ต้องการและสามารถนำไปใช้ได้ ดังที่ Gale (1969 อ้างถึงใน วราพร, 2542) ได้กล่าวถึง จุดประสงค์ของการเรียนรู้แบบกลุ่ม ดังนี้

1. เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความร่วมมือในการเรียนมากกว่าเกิดการแข่งขัน
2. เพื่อให้ผู้เรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็นร่วมกันและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมภายในกลุ่ม

3. เพื่อให้กลุ่มมีการอภิปราย ผู้เรียนที่เป็นสมาชิกทุกคนในกลุ่มได้มีโอกาสปรับปรุงทักษะการพูดและการฟัง

4. เพื่อให้เกิดแหล่งรวมของความคิดอย่างหลากหลายและโครงการต่าง ๆ ซึ่งเกิดจากการร่วมมือกันของสมาชิกในกลุ่ม

5. เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มได้เรียนรู้ความคิดเห็นของสมาชิกคนอื่นและเป็นการฝึกการยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น การเป็นคนใจกว้างมีเหตุผลและสมาชิกทุกคนในกลุ่มสามารถได้รับประสบการณ์ของการเป็นทั้งผู้นำและผู้ตามที่ดี

6. เพื่อให้ผู้สอนได้กระตุ้นผู้เรียนทุกคนให้ช่วยกันคิด ช่วยกันทำกิจกรรมและแสดงความคิดเห็นได้สะดวกกว่าการเรียนเป็นห้องใหญ่ห้อง

### หลักการเรียนรู้แบบกลุ่ม

การเรียนรู้แบบกลุ่มมีหลักการพื้นฐาน (ทิตนา, 2537: 146) ดังนี้

1. การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่ควรเป็นไปอย่างมีชีวิตชีวา ดังนั้นผู้เรียนจึงควรมีบทบาทรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตนเองและมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

2. การเรียนรู้เกิดขึ้นจากแหล่งต่าง ๆ กันมิใช่เกิดจากแหล่งใดแหล่งหนึ่งเพียงแหล่งเดียว ประสบการณ์ความรู้สึกริ่กคิดของแต่ละบุคคลถือว่าเป็นแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญ

3. การเรียนรู้ที่ดีต้องเป็นการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นจากความเข้าใจจึงจะช่วยให้ผู้เรียนจดจำและสามารถใช้การเรียนรู้ให้เป็นประโยชน์ได้ การเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นผู้ค้นพบด้วยตนเองจะมีส่วนช่วยให้ผู้เรียนเกิดความลึกซึ้งและจดจำได้ดี

4. กระบวนการเรียนรู้มีความสำคัญหากผู้เรียนเข้าใจและมีทักษะในเรื่องนี้แล้วจะสามารถใช้เป็นเครื่องมือแสวงหาความรู้และคำตอบต่าง ๆ ที่ตนเองต้องการ

5. การเรียนรู้ที่มีความหมายแก่ผู้เรียน คือการเรียนรู้ที่สามารถนำไปใช้ได้จะช่วยให้ผู้เรียนได้ใช้ความรู้จนเกิดความเข้าใจในสิ่งนั้นมากขึ้นและเกิดการเรียนรู้เพิ่มขึ้น

แนวคิดการเรียนรู้แบบกลุ่มจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดความร่วมมือในการเรียน สนใจการทำงานของตนเองเท่ากับการทำงานของสมาชิกกลุ่ม ผู้เรียนมีการให้คำแนะนำชมเชย เสนอแนะกันและกันและสมาชิกทุกคนใช้ความสามารถเต็มที่ในการทำงานกลุ่ม ด้วยเหตุผลดังกล่าวการเรียนรู้แบบกลุ่มจึงเป็นแนวคิดหนึ่งที่ผู้วิจัยสนใจต้องการนำมาใช้ในการฝึกให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเพื่อให้ได้ผลตามที่ผู้สอนต้องการให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนอย่างสมบูรณ์และถูกต้อง

### การเรียนรู้แบบร่วมมือ (cooperative learning)

#### ความหมายและองค์ประกอบสำคัญของการเรียนรู้แบบร่วมมือ

การเรียนรู้แบบร่วมมือสามารถใช้ได้กับทุกรายวิชาและใช้กับกลุ่มเล็ก ๆ โดยมีเป้าหมายเพื่อพัฒนาและใช้ทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณและการทำงานร่วมกันของสมาชิกในกลุ่ม รวมทั้งสนับสนุนให้เกิดการเรียนรู้ ความสัมพันธ์ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน อันจะนำไปสู่ผลสำเร็จของกลุ่ม

Slavin (1987) ได้ให้ความหมายไว้ว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือเป็นการสอนแบบหนึ่งโดยให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก (ปกติกลุ่มละประมาณ 4 คน) และการจัดกลุ่มต้องคำนึงถึงความสามารถของผู้เรียน (เช่น ผู้เรียนที่มีความสามารถสูง 1 คน ความสามารถปานกลาง 2 คน และความสามารถต่ำ 1 คน) หน้าที่ของผู้เรียนทุกคนในกลุ่มจะต้องช่วยกันทำงาน รับผิดชอบและช่วยเหลือการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

Artzt and Claire (1990) ได้ให้ความหมายไว้ว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือเป็นแนวทางที่จัดให้ผู้เรียนทำการแก้ปัญหาพร้อมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ สมาชิกทุกคนร่วมกันทำงานในกลุ่มเพื่อให้ประสบความสำเร็จหรือบรรลุเป้าหมายร่วมกัน สมาชิกในกลุ่มทุกคนต้องระลึกเสมอว่าเขาเป็นส่วนสำคัญของกลุ่ม ความสำเร็จหรือความล้มเหลวของกลุ่มเป็นความสำเร็จหรือความล้มเหลวของทุกคนในกลุ่มเพื่อให้บรรลุเป้าหมายสมาชิกทุกคนต้องพูด อธิบายแนวคิดและช่วยเหลือกันให้เกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหา ครูไม่ใช่เป็นแหล่งความรู้ที่คอยป้อนแก่ผู้เรียน แต่จะมีบทบาทเป็นผู้คอยให้ความช่วยเหลือหรืออำนวยความสะดวก จัดหาและชี้แนะแหล่งข้อมูลในการเรียนรู้แก่ผู้เรียนและตัวผู้เรียนเองจะเป็นแหล่งความรู้ซึ่งกันและกันในกระบวนการเรียนรู้

Johnson and Johnson (1989 อ้างถึงใน สิริพร, 2545) ได้กล่าวว่าการเรียนแบบร่วมมือมีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ประการ ถ้าขาดองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งจะเป็นการทำงานกลุ่ม (group work) จะไม่ใช้การเรียนแบบร่วมมือ และองค์ประกอบทั้ง 5 ประการสรุปได้ ดังนี้

1. การพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกันในทางบวก (positive interdependence) นักเรียนจะต้องเข้าใจว่าความสำเร็จของแต่ละคนในกลุ่มขึ้นอยู่กับความสำเร็จของกลุ่ม งานของกลุ่มจะประสบความสำเร็จบรรลุจุดประสงค์หรือไม่ ขึ้นอยู่กับสมาชิกทุกคนในกลุ่มที่จะต้องช่วยเหลือพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกัน โดยครูผู้สอนต้องกำหนดวัตถุประสงค์ของงานให้ชัดเจนตลอดจนกำหนดบทบาทการทำงานของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มให้ชัดเจนว่าสมาชิกคนใดมีหน้าที่และความรับผิดชอบอะไรกับงานของกลุ่ม เช่น ประธานกลุ่มทำหน้าที่เป็นผู้จัดบันทึก ผู้คอยดูแลให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นและผู้ตรวจสอบผลงาน

2. การรับผิดชอบของกลุ่ม (individual accountability) นักเรียนแต่ละคนต้องมีความรับผิดชอบร่วมกันในการทำงานของกลุ่ม เพื่อให้งานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีจึงเป็นหน้าที่ของสมาชิกในแต่ละกลุ่มที่จะต้องคอยตรวจสอบดูว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มเกิดการเรียนรู้หรือไม่ ทุกคนช่วยกันรับผิดชอบการเรียนรู้ในงานทุกขั้นตอนของสมาชิกในกลุ่มโดยมีการประเมินว่าทุกคนเข้าใจ รู้เรื่อง เห็นด้วยหรือไม่กับงานของกลุ่ม ให้แต่ละคนนำผลงานของตนมาอธิบาย มีการอภิปรายและลงสรุปความเห็นร่วมกันเพื่อให้มั่นใจว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มเกิดการเรียนรู้สามารถที่จะอธิบายคำถามหรืออธิบายงานของกลุ่มได้ทุกขั้นตอน โดยเฉพาะในงานส่วนที่ตนเองรับผิดชอบเท่านั้น ทั้งนี้เพื่อให้ทุกคนอยู่ในสภาพที่พร้อมที่จะนำเสนอผลงาน เมื่อมีการสุ่มถามให้นักเรียนคนใดคนหนึ่งรายงานผลงานของกลุ่มว่าเป็นอย่างไรในการรายงานหน้าชั้นเรียน

3. การติดต่อปฏิสัมพันธ์กันโดยตรง (face-to-face promotive interaction) การปฏิสัมพันธ์จะเกิดขึ้นได้เมื่อสมาชิกทุกคนในกลุ่มช่วยเหลือซึ่งกันและกัน มีการส่งเสริมสนับสนุนความคิด ผลงานซึ่งกันและกัน มีการอธิบาย การทำความเข้าใจและการให้เหตุผลต่าง ๆ ร่วมกันทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน มีความเข้าใจและเรียนรู้การรู้จักอยู่ร่วมกันในสังคมมากขึ้น

4. ทักษะความสัมพันธ์กันในกลุ่มเล็กและผู้อื่น (interpersonal and small group skills) การทำงานเป็นกลุ่มเล็กจะต้องได้รับการฝึกฝนเป็นอย่างดี เพื่อให้งานบรรลุผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายทำให้งานของกลุ่มมีประสิทธิภาพสูง สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องไว้วางใจซึ่งกันและกัน ต้องยอมรับฟังความคิดเห็นซึ่งกันและกัน สนับสนุนกัน มีวิธีการสื่อสารและสื่อความหมายที่ชัดเจน

5. กระบวนการกลุ่ม (group processing) สมาชิกทุกคนในกลุ่มช่วยกันทำงาน แสดงความคิดเห็น เมื่อทำงานเสร็จแล้วสมาชิกในกลุ่มสามารถตอบคำถาม อธิบายงาน บอกที่มาของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้ สมาชิกต้องช่วยกันประเมินประสิทธิภาพการทำงานของกลุ่มและประเมินได้ว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มสามารถปรับปรุงการทำงานของตนให้ดีขึ้นได้อย่างไร สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องช่วยกันแสดงความคิดเห็นและตัดสินใจได้ว่างานครั้งต่อไปจะมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ ควรปฏิบัติเช่นเดิมอีกหรือควรปรับปรุงเปลี่ยนแปลงขั้นตอนการทำงาน ขั้นตอนใดที่ยังขาดตกบกพร่องต้องการแก้ไขปรับปรุงอะไรและอย่างไรให้ดีขึ้น

นอกจากนี้การเรียนแบบร่วมมือยังเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้มีปฏิสัมพันธ์ร่วมกันในการเรียนและการทำงาน คอยช่วยเหลือ แนะนำ สนับสนุนความคิด ความสำเร็จซึ่งกันและกันโดยให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ผู้เรียนแต่ละคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบในงานของตนและมีการตรวจสอบงานที่ได้รับมอบหมาย มีการนำเสนอผลการทำงานของแต่ละคน มีการอภิปรายและสรุปร่วมกัน มีการช่วยเหลือกันในกลุ่ม คนเก่งช่วยคนอ่อน เพื่อให้มั่นใจว่าสมาชิกในกลุ่มทุกคนเกิดการเรียนรู้สามารถที่จะตอบคำถามได้และความสำเร็จของแต่ละบุคคลในกลุ่มคือความสำเร็จของกลุ่ม

ดังนั้น การเรียนแบบร่วมมือจึงเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ต้องการเน้นให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้เรียนรู้ร่วมกัน มีความรับผิดชอบและช่วยเหลือกัน มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ตลอดจนการฝึกการทำงานร่วมกับผู้อื่นและเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่มุ่งพัฒนาทั้งเจตคติและค่านิยมในตัวของผู้เรียน มีการนำเสนอและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและแนวคิดที่หลากหลายระหว่างสมาชิกในกลุ่ม พัฒนาพฤติกรรมการแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์และการคิดอย่างมีเหตุผลรวมทั้งพัฒนาคุณลักษณะของผู้เรียนให้รู้จักตนเองและเพิ่มคุณค่าของตนเอง ซึ่งกิจกรรมดังกล่าวจะมีผลต่อผู้เรียน 3 ประการ คือ

1. มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชา (academic learning)
2. มีทักษะทางสังคมโดยเฉพาะทักษะการทำงานร่วมกัน (social skills)
3. รู้จักตนเองและตระหนักในคุณค่าของตนเอง (self-esteem)

## รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ (นาตยา, 2543; ลีพร, 2545)

รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ได้นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ประกอบด้วย

### 1) STAD (Student Teams Achievement Division)

ในปี ค.ศ. 1980 Robert Slavin แห่งมหาวิทยาลัย John Hopkins เป็นผู้พัฒนา STAD ขึ้นซึ่งสามารถนำ STAD มาใช้ในการเรียนการสอนในปัจจุบันได้ โดยครูผู้สอนเพียงแต่เตรียมกิจกรรม ใบงาน สื่อการเรียนรู้และแบบทดสอบย่อยเท่านั้น ซึ่ง STAD มีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ประการคือ

1.1) **การนำเสนอสิ่งที่ต้องเรียน (class presentation)** ครูเป็นผู้นำเสนอสิ่งที่ผู้เรียนต้องเรียนไม่ว่าจะเป็นโมโนติ ทักษะการคิด กระบวนการ โดยครูอาจใช้วิธีการสอนแบบบรรยาย สาธิต อธิบายและแสดงเหตุผล ใช้คำถาม ทดลอง อุปนัย เป็นต้น

1.2) **การทำงานเป็นกลุ่ม (teams)** ครูแบ่งผู้เรียนออกเป็นกลุ่ม โดยจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มขึ้นอยู่กับจำนวนหัวข้อที่จะให้ผู้เรียนศึกษา ลักษณะกลุ่มเป็นแบบคละเพศ คละความสามารถและจากงานวิจัยของ Davidson ในปี ค.ศ. 1990 พบว่า การเรียนคณิตศาสตร์เป็นกลุ่มจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อในแต่ละกลุ่มมีจำนวนสมาชิก 3-4 คน หลังจากที่ครูจัดกลุ่มเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูต้องชี้แจงให้ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มทราบบทบาทและหน้าที่ของสมาชิกในกลุ่มว่าผู้เรียนต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน เรียนร่วมกัน อภิปรายปัญหาร่วมกัน ตรวจสอบคำตอบของงานที่ได้รับมอบหมายและแก้ไขคำตอบร่วมกัน สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องทำงานให้ดีที่สุดเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ ต้องให้กำลังใจซึ่งกันและกันตลอดจนสามารถทำงานร่วมกันได้ จากนั้นสมาชิกแต่ละคนศึกษากันคนละหัวข้อจากสื่อที่ครูเตรียมไว้ให้แล้วนำมาอธิบาย อภิปรายให้กันและกันฟัง จนเข้าใจและร่วมกันทำงานอื่น ๆ ตามที่ครูกำหนด

สำหรับการกระตุ้นให้สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบซึ่งกันและกันนั้น มีข้อควรปฏิบัติดังนี้

(1) สมาชิกในกลุ่มต้องแน่ใจว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มสามารถตอบคำถามแต่ละข้อได้อย่างถูกต้อง

(2) สมาชิกในกลุ่มต้องช่วยกันตอบคำถามทุกข้อให้ได้ โดยไม่ต้องขอความช่วยเหลือจากเพื่อนนอกกลุ่มหรือถ้าจำเป็นที่ต้องขอความช่วยเหลือจากครูก็ให้ขอความช่วยเหลืออย่างน้อยที่สุด

(3) สมาชิกในกลุ่มต้องแน่ใจว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มต้องอธิบายคำตอบแต่ละข้อได้

**1.3) การทดสอบย่อย (quizzes)** หลังจากที่ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มทำงานเสร็จเรียบร้อยแล้ว แล้วครูก็ทำการทดสอบย่อย โดยให้ผู้เรียนต่างคนต่างทำแบบทดสอบ เพื่อเป็นการประเมินความรู้ที่ผู้เรียนได้เรียนมา วิธีการนี้จะช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนมีความรับผิดชอบต่อตนเอง

**1.4) คะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคน (individual improvement score)** คะแนนพัฒนาการของผู้เรียนจะเป็นตัวกระตุ้นให้ผู้เรียนทำงานหนักมากขึ้น ในการทดสอบแต่ละครั้ง ครูจะมีคะแนนฐาน (base score) ซึ่งเป็นคะแนนเฉลี่ยของผู้เรียนที่ได้จากการทดสอบย่อยที่ผ่านมา ก่อนการใช้ STAD และคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคนหาได้จากความแตกต่างระหว่างคะแนนฐาน (คะแนนเฉลี่ยในการทดสอบย่อยที่ผ่านมา ก่อนการใช้ STAD) กับคะแนนที่ผู้เรียนสอบได้จากการทดสอบย่อยหลังจากการเรียนรู้แบบร่วมมือ (STAD) ส่วนคะแนนของกลุ่ม (team scores) หาได้จากการหาคะแนนเฉลี่ยโดยการรวมคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนทุกคนในกลุ่มแล้วหารด้วยจำนวนสมาชิกในกลุ่มแต่ละกลุ่ม

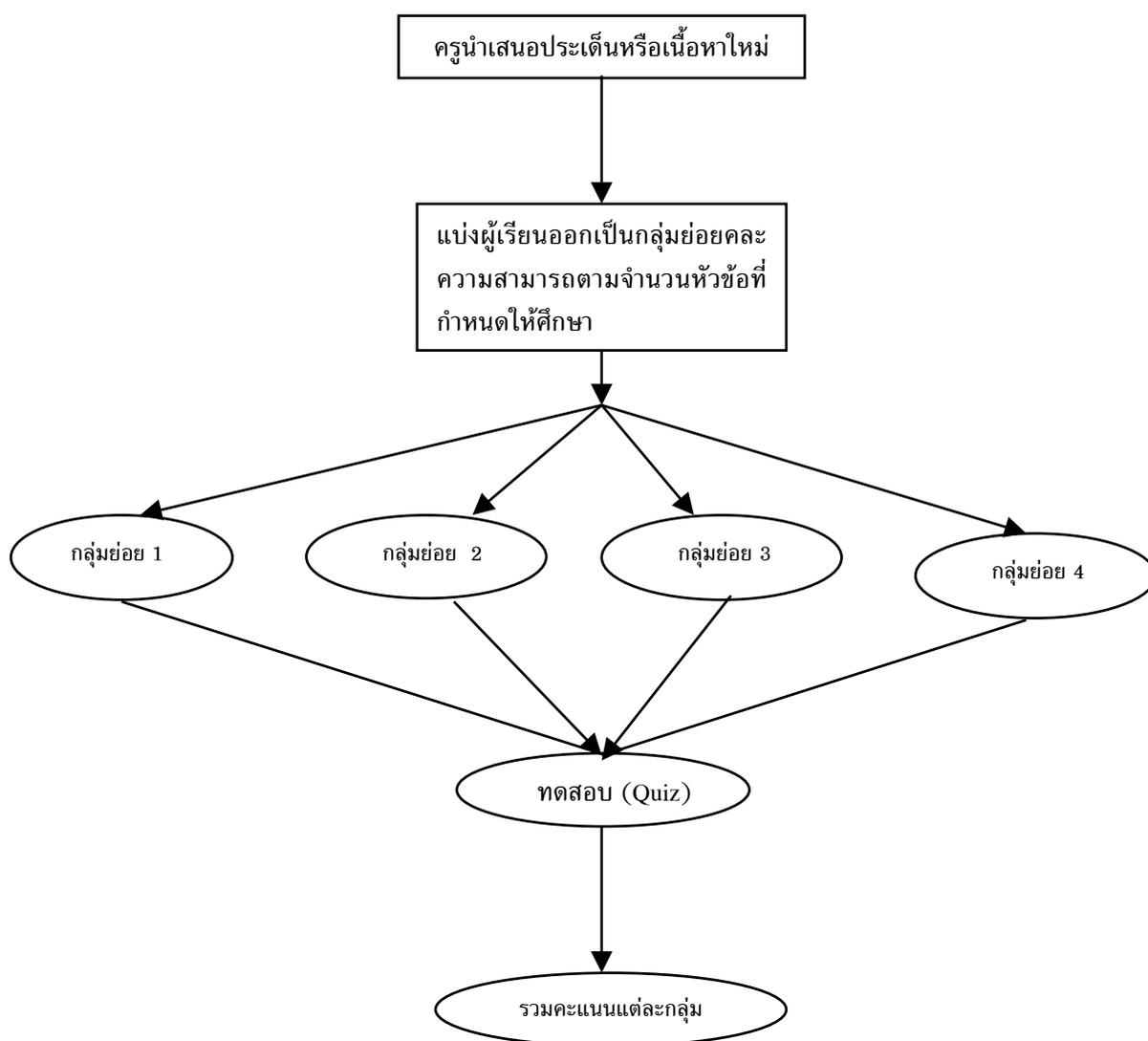
**1.5) การรับรองผลงานของกลุ่ม (team recognition)** เป็นการประกาศคะแนนกลุ่ม ให้แต่ละกลุ่มทราบพร้อมกับให้คำชมเชยหรือให้ประกาศนียบัตรหรือให้รางวัลกับกลุ่มที่มีคะแนนพัฒนาการของกลุ่มสูงสุดและครูควรชี้แจงกับผู้เรียนว่าคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคนมีความสำคัญเท่าเทียมกับคะแนนที่ผู้เรียนแต่ละคนได้รับจากการทดสอบ

ดังนั้น STAD (Student Teams Achievement Division) จึงเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่กำหนดให้ผู้เรียนที่มีระดับความสามารถทางการเรียนแตกต่างกันมาทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ โดยครูเป็นผู้กำหนดบทเรียนและงานของกลุ่มหรือครูอาจเป็นผู้สอนบทเรียนให้กับผู้เรียนทั้งชั้นและให้กลุ่มทำงานตามที่ครูกำหนด นักเรียนในกลุ่มช่วยเหลือกัน คนที่เรียนเก่งช่วยเหลือเพื่อน ๆ เวลาสอบทุกคนต่างทำข้อสอบของตนแล้วครูนำคะแนนของสมาชิกทุกคนภายในกลุ่มมาคิดเป็นคะแนนของกลุ่มและอาจจัดลำดับคะแนนของกลุ่มและปิดประกาศให้ทุกคนทราบ

## STAD ใช้เมื่อไร

1. ใช้ร่วมกับกิจกรรมการเรียนการสอนแบบอื่น ๆ หรือหลังจากที่ครูได้สอนผู้เรียนทั้งชั้นไปแล้วและต้องการให้ผู้เรียนได้ค้นคว้า ศึกษาร่วมกันเองภายในกลุ่มสืบเนื่องจากสิ่งที่ครูได้สอนไป

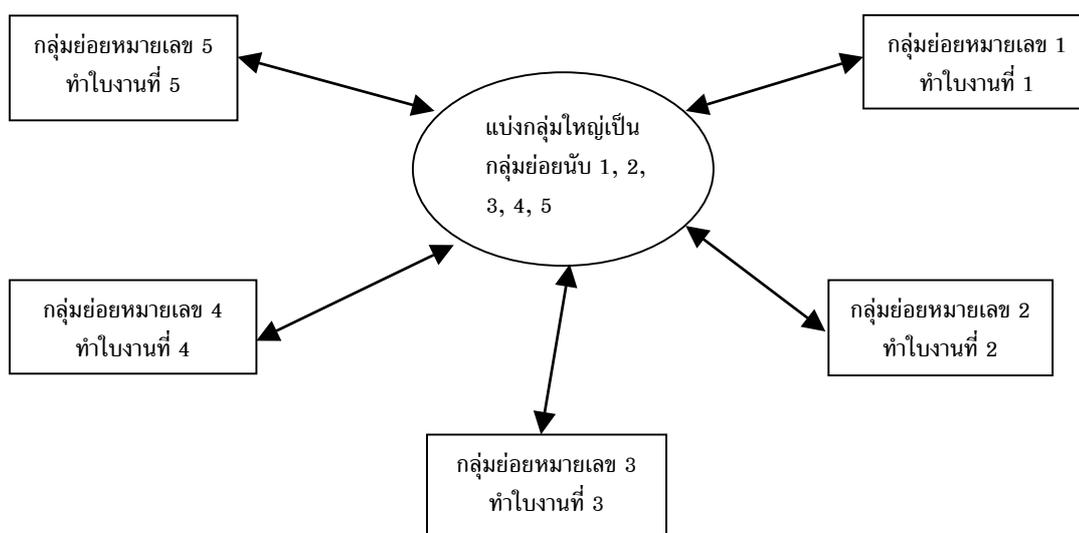
1. STAD ใช้ได้กับทุกวิชาที่ต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในสิ่งที่ เป็นข้อเท็จจริง เกิดความคิดรวบยอด ค้นหาคำตอบที่มีคำตอบแน่นอนชัดเจน



ภาพที่ 1 แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบ STAD

## 2) ปริศนาความคิด (Jigsaw II)

Jigsaw II เป็นการเรียนแบบร่วมมือที่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มจะเป็นผู้เชี่ยวชาญในแต่ละส่วนของกิจกรรมที่เขาเรียน โดยครูจะอธิบายให้ผู้เรียนเข้าใจในงานและลักษณะการเรียนภายในกลุ่มเช่นเดียวกับการเรียนด้วยวิธี STAD และจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มขึ้นอยู่กับจำนวนหัวข้อที่จะให้ผู้เรียนศึกษา เช่น ถ้าศึกษา 3 หัวข้อ ก็แบ่งกลุ่มละ 3 คน เป็นต้น ในกรณีที่อาจมีบางกลุ่มมีเรียน 4 คน แทนที่จะเป็น 3 คน ก็อาจให้มีบางหัวข้อให้ผู้เรียนศึกษากัน 2 คน ก็ได้ ผู้เรียนที่เป็นสมาชิกในกลุ่มและเชี่ยวชาญในเนื้อหาส่วนใดก็จะสอนส่วนนั้นให้กับสมาชิกคนอื่น ๆ ในกลุ่มที่ไม่ได้เชี่ยวชาญในส่วนนั้น ๆ การเป็นผู้เชี่ยวชาญของผู้เรียนไม่ใช่เพียงแค่การอ่านและค้นคว้าหาข้อมูลเท่านั้น แต่ผู้เรียนอาจจะใช้วิธีการอื่น ๆ ที่ทำให้ตนเองเป็นผู้เชี่ยวชาญได้ เช่น การสัมภาษณ์ การศึกษาจาก วิดีทัศน์ การลงมือปฏิบัติกิจกรรมหรือการค้นคว้า สืบหาข้อมูลจากคอมพิวเตอร์ (internet) เป็นต้น ในรูปแบบ Jigsaw II ครูต้องเตรียมใบงานให้กับผู้เรียนซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญแต่ละคนของกลุ่มและสร้างแบบทดสอบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ด้วย เมื่อครูแบ่งผู้เรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ซึ่งเรียกว่า Home Group ในแต่ละกลุ่มจะมีผู้เชี่ยวชาญซึ่งจะได้รับแจกใบงานแล้วผู้เชี่ยวชาญของแต่ละกลุ่มจะแยกย้ายกันไปทำงานตามใบงานที่ตนได้รับมอบหมาย โดยผู้เชี่ยวชาญที่ได้ใบงานที่เหมือนกันจะมารวมอยู่เป็นกลุ่มเดียวกันที่เรียกว่า Expert Group ซึ่งจะช่วยกันทำงานตามที่ได้รับมอบหมาย เมื่อเสร็จแล้วก็นำกลับไปสอนสมาชิกคนอื่น ๆ ในกลุ่ม Home Group ของตนที่ไม่ได้ศึกษาหัวข้อนั้น แล้วครูกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มได้รายงาน อภิปราย ซักถาม และให้มีการอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเรียนอีกครั้งหนึ่ง โดยมีการถามตอบในหัวข้อเรื่องที่ผู้เชี่ยวชาญแต่ละคนได้ศึกษามา แล้วครูจึงทำการทดสอบย่อยอีกครั้งหนึ่งเกณฑ์การประเมินผลเกี่ยวกับการให้คะแนนก็ทำวิธีการเดียวกับวิธีการของ STAD แต่วิธีการของ Jigsaw II จะดีกว่า STAD ตรงที่ Jigsaw II ฝึกให้นักเรียนแต่ละคนมีความรับผิดชอบในการเรียนมากขึ้นเพราะต้องใช้ความรู้ที่ตนได้ศึกษามาและนำความรู้เหล่านั้นไปสอนสมาชิกคนอื่น ๆ ของกลุ่มด้วย



**ภาพที่ 2** แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบปริศนาความคิด (Jigsaw II)

### **Jigsaw II ใช้เมื่อไร**

1. ใช้ควบคู่กับกิจกรรมการเรียนการสอนแบบอื่น ๆ หรือกรณีที่ครูกำลังสอนผู้เรียนทั้งชั้นแล้วต้องการให้ผู้เรียนทำงานกันในกลุ่มเพื่อศึกษาหัวข้อที่สับสนเนื่องจากสิ่งที่ครูได้สอนไป
2. Jigsaw II สามารถนำไปใช้ได้กับทุกวิชาที่มีจุดประสงค์ให้ผู้เรียนศึกษาความรู้ข้อเท็จจริงที่มีคำตอบเฉพาะแน่นอน เพื่อให้เกิดความคิดรวบยอดในเรื่องนั้น เช่นเดียวกับ STAD
2. หน่วยที่จะนำมาใช้สอนอาจใช้เวลาเรียนให้เสร็จใน 1 คาบ หรือใช้เวลา 2-3 คาบก็ได้ขึ้นอยู่กับ การแบ่งหัวข้อหรือเรื่องที่จะให้ผู้เรียนเรียนว่ามีสาระมากน้อยแค่ไหน ในกรณีที่ เป็นหัวข้อหรือเรื่องที่มีสาระมากพอควร อาจให้ผู้เรียนไปอ่านเป็นการบ้านมาก่อนแล้วค่อยให้มารวมกลุ่มกับเพื่อนที่ศึกษาหัวข้อหรือเรื่องเดียวกันในคาบต่อไป
3. เอกสารหรือใบความรู้ที่จะให้ผู้เรียนศึกษาในแต่ละหัวข้อหรือแต่ละเรื่องควรรอบ กรอบ ประเด็นที่สำคัญ ๆ ของหัวข้อหรือเรื่องนั้น ที่ผู้เรียนจะต้องให้ความสนใจหรือแนวทางที่ กลุ่มจะต้องศึกษาว่ามีอะไรบ้างเพื่อผู้เรียนจะได้นำไปอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มได้เข้าใจตรงกัน

Robert Slavin ได้ดัดแปลงวิธีการเรียนแบบ Jigsaw II มาจาก Jigsaw ของ Elliot Aronson ซึ่งวิธีการแบบ Jigsaw มีความยุ่งยากกว่าโดยฝึกให้ผู้เรียนต้องช่วยเหลือพึ่งพากันมากกว่า Jigsaw II เพราะในการเรียนแบบ Jigsaw II ผู้เรียนที่ศึกษาหัวข้อเดียวกันจะศึกษาจากเอกสารชุดเดียวกันเหมือนกันทุกกลุ่ม แต่สำหรับ Jigsaw ผู้เรียนที่ศึกษาหัวข้อเดียวกันจะได้รับเอกสารที่ไม่เหมือนกัน และ/หรือได้รับเอกสารที่เกี่ยวกับหัวข้อนั้นไม่สมบูรณ์ จึงต้องไปศึกษาร่วมกับเพื่อนต่างกลุ่มที่ศึกษาหัวข้อเดียวกับตน การเรียนแบบ Jigsaw จึงดีในแง่ที่ผู้เรียนได้เรียนจากสื่อที่หลากหลายและมีการช่วยเหลือพึ่งพากันในกลุ่มมากกว่า Jigsaw II ทั้ง Jigsaw และ Jigsaw II มีความคล้ายคลึงกับ STAD มาก ทั้งในแง่จุดประสงค์ของการเรียนและลักษณะกิจกรรมการเรียน ต่างกันตรงที่แทนที่ผู้เรียนแต่ละคนจะศึกษาหัวข้อของตนตามลำพังก่อน เช่นในการเรียนแบบ STAD แต่ผู้เรียนจะนำหัวข้อที่ศึกษานั้นมาศึกษาร่วมกันกับเพื่อนต่างกลุ่มก่อน ผู้เรียนจึงมีโอกาสปรึกษาหารือทำความเข้าใจกันได้ดีขึ้นก่อนจะนำไปสอนหรืออธิบายให้เพื่อนในกลุ่มเดิมของตน

### 3) TAI (Team Assisted Individualization)

TAI เป็นการจัดกิจกรรมที่ใช้กับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ แต่วิชาอื่น ๆ ก็สามารถนำไปปรับใช้ได้โดยเฉพาะในเรื่องที่ต้องการเน้นการพัฒนาทักษะให้กับผู้เรียน ครูจะใช้การจัดกิจกรรมการสอนแบบต่าง ๆ ให้ผู้เรียนเข้าใจเรื่องที่เรียน โดยอาจทำการสอนผู้เรียนรวมกันทั้งชั้นแล้วทำการทดสอบว่าผู้เรียนคนใดเข้าใจหรือไม่เข้าใจอย่างไร แล้วครูจึงจัดกลุ่มผู้เรียนตามระดับความสามารถ การจัดกิจกรรมการเรียนแบบ TAI จะมีการจัดกลุ่มผู้เรียนเป็น 2 ลักษณะ คือ จัดผู้เรียนเป็นกลุ่มที่ละความสามารถ (heterogeneous group) กลุ่มละ 4 คน และจัดผู้เรียนเป็นกลุ่มที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกัน (homogeneous group) สำหรับการทำงานกลุ่มแบบ TAI ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มจับคู่กันทำงานและผลัดกันตรวจงานในคู่ของตนเมื่อทำงานที่ได้รับมอบหมาย เช่น แบบฝึกหัด ครอบคลุมทุกชุดแล้ว ให้สมาชิกในกลุ่มทั้ง 4 คนต่างคนต่างทำแบบฝึกหัดชุดรวมแล้วแลกเปลี่ยนกันตรวจและตรวจดูเฉลยที่ครูจัดเตรียมไว้ หากผู้เรียนคนใดทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ เช่น กำหนดเกณฑ์ 75 % ก็ต้องทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม สำหรับผู้เรียนที่สอบได้ถึงเกณฑ์ หลังจากมารับการทดลองจากครูแล้วครูจะจัดให้ผู้เรียนที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกันมาจัดกลุ่มอยู่ด้วยกัน ครูอธิบายในเรื่องที่ได้สอนไปแล้ว โดยใช้เวลา 5-10 นาที แล้วให้ผู้เรียนแยกย้ายกลับเข้ากลุ่มของตนแล้วไปอธิบายชี้แจงให้เพื่อนในกลุ่มเข้าใจอีกครั้งหนึ่งและทำงานกับคู่ของตนต่อไปตามเดิม

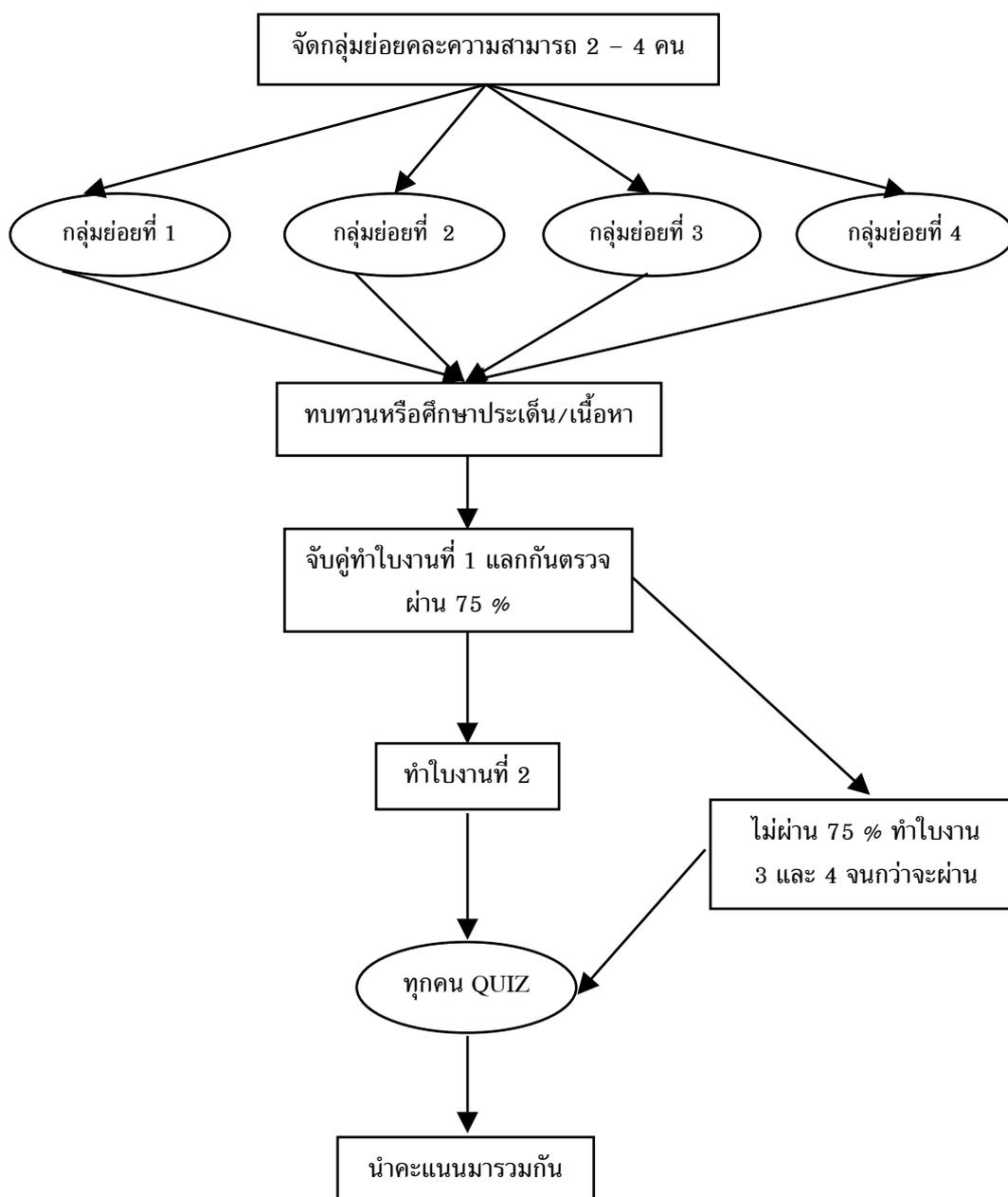
## TAI ใช้เมื่อไร

1. แนวคิดดั้งเดิมของ TAI มีการนำมาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์กันมาก ต่อมาก็ได้มีการนำวิธีการนี้ไปใช้ในวิชาอื่น ๆ อีก เช่น ภาษา พลศึกษา ศิลปะ ที่มีจุดประสงค์คล้ายคลึงกับการเรียนคณิตศาสตร์ นั่นคือ การเรียนที่มีจุดประสงค์เน้นการพัฒนาทักษะ ฝึกปฏิบัติ เพราะการเรียนวิชาใด ๆ ที่มีจุดประสงค์เช่นนี้จะมาสอนผู้เรียนรวมกันทั้งชั้นเป็นกลุ่มใหญ่ย่อมไม่ได้ผล ปัญหาที่มักพบกันก็คือ เมื่อครูสอนไป เด็กอ่อนก็ตามไม่ทัน เด็กเก่งก็อาจเบื่อเพราะรู้หมดแล้ว การเรียนและฝึกฝนฝึกหัดเป็นกลุ่มเล็ก ๆ เป็นคู่และฝึกด้วยตนเองจะเป็นวิธีที่เหมาะสมมากกว่า ตอบสนองความแตกต่างในความสามารถของผู้เรียนแต่ละคนได้ดีกว่า

2. การเลือกหัวข้อหรือเรื่องที่จะให้ผู้เรียนเรียนด้วย TAI ในกลุ่ม ควรย่อยออกมาเป็นหัวข้อหรือเรื่องเล็ก ๆ ที่ไม่สลับซับซ้อนมากนัก ไม่ยากเกินกว่าที่ผู้เรียนจะศึกษาด้วยตนเองและเรียนร่วมกันกับเพื่อนได้ หากพบว่าผู้เรียนบางคนในคู่หรือในกลุ่มไม่สามารถทำงานที่กำหนดนั้นได้ เช่น อาจเป็นวิชาคณิตศาสตร์ทำโจทย์หลายข้อไม่ได้ ครูก็อาจเข้าไปดูแลช่วยเหลือได้ว่าเขามีปัญหาที่ตรงไหน

3. ในการเรียกผู้เรียนที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกันมาพบครูเป็นระยะ ๆ นั้นครูอาจเรียกผู้เรียนให้ทยอยมาพบ ก่อนหรือระหว่างที่ผู้เรียนเข้าไปทำงานกันในกลุ่มย่อยหรือในคู่ของตนก็ได้หรือครูอาจเรียกผู้เรียนบางคนมาพบครูเป็นรายคนเป็นการส่วนตัวก็ได้ หากเห็นว่าผู้เรียนบางคนต้องการความช่วยเหลือเป็นพิเศษ

4. เวลาที่ใช้ในการเรียนด้วย TAI อาจแตกต่างกันไปในแต่ละวิชาเนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้กับการเรียนเพื่อฝึกทักษะ เช่น คณิตศาสตร์หรือภาษาที่ครูอาจมีแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนทำมาก ๆ ในกรณีเช่นนี้ระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนอาจติดต่อกันหลายคาบ ดังนั้น ครูอาจจัดเวลาให้ผู้เรียนที่มีความสามารถใกล้เคียงกันทยอยมาพบครูทุกครั้งก่อนไปศึกษาด้วยตนเองหรือไปทำงานกันในกลุ่มของตนเช่นนี้ก็ได้



ภาพที่ 3 แผนภูมิการจัดกิจกรรมแบบ Team Assisted Individualization (TAI)

#### 4) Giraffiti Model

Giraffiti Model เป็นกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่มีลักษณะดังนี้ คือ

1. แบ่งกลุ่มผู้เรียนแบบละความสามารถกลุ่มละ 4 คน จากนั้นให้ผู้เรียนจับคู่กัน
2. ครูกำหนดประเด็นที่จะให้ผู้เรียนอภิปรายกันในลักษณะเห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วยหรืออาจเป็นการอภิปรายในลักษณะอื่น ๆ ที่ความคิดเห็นในเรื่องนั้นมีหลากหลายไม่มีคำตอบที่แน่นอนเฉพาะเจาะจง
3. เริ่มต้นให้แต่ละคู่อภิปรายในลักษณะเห็นด้วยก่อน โดยคนหนึ่งเป็นคนแสดงความคิดเห็นและอีกคนหนึ่งเป็นคนจับบันทึกแล้วสลับหน้าที่กัน ต่อมาให้ทั้งคู่อภิปรายกันในลักษณะไม่เห็นด้วยบ้าง โดยคนหนึ่งเป็นคนแสดงความคิดเห็นและอีกคนหนึ่งเป็นคนจับบันทึกแล้วสลับหน้าที่กัน
4. เมื่อเสร็จสิ้นการอภิปรายในแต่ละคู่แล้วให้สมาชิกทุกคนมารวมกันนำความคิดเห็นทั้งที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วยของแต่ละคู่มาประมวลเข้าเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันโดยจะต้องมีความคิดเห็นทั้งที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วย และต้องคงความคิดเห็นของสมาชิกทุกคนเอาไว้ด้วย จากนั้นทุกคนในกลุ่มช่วยกันเขียนผลสรุปขั้นสุดท้ายก่อนส่งครูเป็นผลงานที่มีลายมือของสมาชิกทุกคนปรากฏอยู่ จากนั้นครูนำสิ่งที่ผู้เรียนอภิปรายกันในกลุ่มมาอภิปรายรวมในชั้น

#### Giraffiti Model ใช้เมื่อไร

1. วิธีการนี้มักนำมาใช้ต่อเนื่องจากการที่ผู้เรียนได้เรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่งจนมีความรู้ความเข้าใจในระดับหนึ่งมาแล้วและต้องการให้ผู้เรียนได้อภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับเรื่องนั้น
2. สิ่งที่จะนำมาให้ผู้เรียนอภิปรายกันควรมีลักษณะที่ไม่มีคำตอบที่ถูกต้องเฉพาะเจาะจง มีจุดประสงค์ที่จะให้ผู้เรียนมีทักษะในการแสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายทุกแง่มุม ฝึกการแสวงหาทางเลือกต่าง ๆ เพื่อการตัดสินใจ ด้วยจุดประสงค์เช่นนี้จึงเห็นได้ว่า Giraffiti Model สามารถแก้ไขข้อบกพร่องบางอย่างที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนได้อภิปรายกลุ่มซึ่งมักจะพบปัญหาอุปสรรคหลายประการ เช่น ผู้เรียนบางคนไม่แสดงความคิดเห็น นั่งคุยกันนำงานอื่นมาทำหรือไม่ก็ไปคุยเล่นกับเพื่อนกลุ่มอื่นปล่อยให้เพื่อนบางคนพูดกันไปแล้วตนเองก็

มาร่วมเขียนชื่อส่งงานกลุ่ม หรือไม่ก็ปรากฏว่ามีเพื่อนบางคนผูกขาดการพูดอยู่คนเดียว ไม่รับฟังความคิดเห็นของเพื่อน ๆ ในกลุ่ม บางครั้งก็จะพบว่าการอภิปรายกลุ่มของผู้เรียนไม่สะท้อนให้เห็นความคิดเห็นที่หลากหลาย ผู้เรียนตัดสินใจมองอะไรเพียงด้านเดียว ความคิดเห็นไม่กว้างขวาง เราจะพบปัญหาลักษณะเช่นนี้อยู่เสมอ ๆ เวลาที่ให้ผู้เรียนได้อภิปรายกลุ่มร่วมกัน ปัญหาดังกล่าวจะพบว่า Giraffiti Model สามารถแก้ไขปัญหาเหล่านี้ได้ดีทีเดียว

3. วิธีการ Giraffiti Model นอกจากจะนิยมนำมาใช้ในการฝึกให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายแล้วยังสามารถนำมาใช้ในการเรียนการสอนที่เป็นเนื้อหาวิชาได้ด้วยเช่นกัน เช่น ครูอาจจัดกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนช่วยกันค้นหาคำตอบจากคำถามที่ครูถามโดยให้แต่ละกลุ่มตอบทีละคำถาม สมาชิกในกลุ่มจะช่วยกันค้นหาคำตอบ โดยแต่ละคนเขียนตอบลงในกระดาษคำตอบ จากนั้นครูก็จะถามคำถามใหม่ให้แต่ละคนในกลุ่มค้นหาคำตอบ ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนหมดทุกคำถามที่ครูเตรียมไว้แล้ว จากนั้นครูก็จะให้แต่ละกลุ่มทบทวนสิ่งที่ตอบในทุกคำถามอีกครั้งหนึ่งโดยให้แต่ละคนในกลุ่มนำคำตอบที่ตนตอบไว้นั้นมาดูร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในกลุ่มแล้วพิจารณาว่าคำตอบควรเป็นเช่นไรจึงจะถูกต้องสมบูรณ์ จะนำคำตอบของเพื่อน ๆ ที่คิดว่าต่างก็ตอบถูกต้องนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันเพื่อให้เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นได้อย่างไร โดยเรียบเรียงเข้าเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันมิใช่ นำคำตอบของแต่ละคนมาเขียนต่อ ๆ กันเป็นข้อ ๆ แต่จะประมวลเป็นความคิดรวบยอด (concept) ของคำตอบข้อนั้นได้อย่างไร จากนั้นก็ให้สมาชิกทุกคนช่วยกันเขียนเรียบเรียงเป็นใจความสมบูรณ์ก่อนส่งครู นี่ก็เป็นตัวอย่างการนำ Giraffiti Model มาใช้ในอีกลักษณะหนึ่งได้

การให้ผู้เรียนช่วยกันเขียนด้วยลายมือของแต่ละคน เป็นวิธีการเด่นของ Giraffiti Model ที่ต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนร่วมกัน ดูแลกันและกันเพราะการที่ผู้เรียนจะเขียนอะไรลงไปอย่างน้อยเขาก็จะต้องหยุดอ่านสิ่งที่เพื่อนได้เขียนไว้ก่อนหน้าเห็นว่าเพื่อนเขียนอย่างไรและเขาควรจะเขียนต่อไปอย่างไร ทำให้ผู้เรียนได้รับรู้กับงานทุกอย่างของกลุ่ม อีกประการหนึ่งการเรียนแบบร่วมมือนิยมนำมาใช้ คือการให้ผู้เรียนได้ลงนามให้ความเห็นชอบและรับรู้กับงานกลุ่ม นี่ก็เป็นวิธีการง่าย ๆ ที่สามารถฝึกความเป็นประชาธิปไตยให้กับผู้เรียน ได้เป็นการให้ผู้เรียนรู้จักการยอมรับกติกากลุ่ม การร่วมกันทำงานและร่วมกันรับผิดชอบต่อสิ่งที่ได้ร่วมกันทำนั้นโดยไม่มากกล่าวโทษกันและกันในภายหลังทั้งยังฝึกให้ผู้เรียนรู้จักการแสดงความคิดเห็น รับฟังกันและกัน ฝึกการพูดจาสื่อสารที่จะให้เพื่อน ๆ ยอมรับในความคิดเห็นของตนและตนยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อน หากมีสิ่งใดในงานนั้นที่ตนยังไม่เห็นด้วยก็ควรจะได้พูดชี้แจงให้เพื่อนได้เห็นมาพิจารณาความคิดเห็นของตนบ้าง ไม่เช่นนั้นหากความคิดเห็นยังไม่ยุติก็ยังไม่ควรที่จะลงนามให้ความเห็นชอบในงานชิ้นนั้น นี่เป็นลักษณะสำคัญของผู้ที่จะได้เติบโตไปสู่โลกของการทำงานร่วมกับผู้อื่นในสังคมและในอนาคต

### การเรียนรู้แบบร่วมมือกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Johnson and Johnson (1989: 235–237) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือใช้ได้เป็นอย่างดีกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนคิดทางคณิตศาสตร์และเข้าใจการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติและกระบวนการและสามารถที่จะประยุกต์ใช้ความรู้อย่างคล่องแคล่วและมีความหมายด้วยเหตุผลดังนี้

1. มโนคติและทักษะทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนได้ดีในกระบวนการที่เป็นพลวัต (dynamic process) ที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมอย่างแข็งขัน การเรียนคณิตศาสตร์ควรเป็นลักษณะที่ผู้เรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมมากกว่าที่จะเป็นเพียงผู้คอยรับความรู้ การสอนคณิตศาสตร์โดยปกติอยู่บนพื้นฐานที่ว่าผู้เรียนเป็นผู้คอยดูดซับข้อมูลความรู้จากการฝึกซ้ำและจากการให้แรงเสริม การมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแข็งขันเป็นการท้าทายทางสมองสำหรับผู้เรียนทุกคนและความอยากรู้อยากเห็นจะช่วยกระตุ้นให้มีการอภิปรายกับคนอื่น

2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการอาสาซึ่งกันและกัน (interpersonal enterprise) การพูดผ่านปัญหาทางคณิตศาสตร์กับเพื่อนช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างชัดเจนว่าจะแก้ปัญหาให้ถูกต้องได้อย่างไร การอธิบายยุทธวิธีการแก้ปัญหา ให้เหตุผลและวิเคราะห์ปัญหากับเพื่อนจะทำให้เกิดการหยั่งรู้ มีวิธีการให้เหตุผลระดับสูงและเกิดการเรียนรู้ระดับสูง ในกลุ่มย่อยผู้เรียนมีความสะดวกในการอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นมากกว่าการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้น

3. การเรียนเป็นกลุ่มมีโอกาสในการสร้างความร่วมมือในการสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ในโครงสร้างของการแข่งขันและการเรียนรายบุคคล ผู้เรียนไม่มีการสื่อสารแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันจะทำให้ผู้เรียนหลีกเลี่ยงการแลกเปลี่ยน การวิเคราะห์ปัญหาและเลือกยุทธวิธีร่วมกับคนอื่นในการสื่อสารแลกเปลี่ยนข้อมูลก็จะเป็นไปแบบไม่เต็มใจหรือให้ข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์

4. การเรียนรู้แบบร่วมมือส่งเสริมความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าการแข่งขันและการเรียนแบบรายบุคคล การเรียนรู้แบบร่วมมือส่งเสริมการค้นพบ การเลือกใช้ยุทธวิธีการให้เหตุผลที่มีประสิทธิภาพ การสร้างแนวคิดใหม่ การถ่ายโยงยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์และข้อเท็จจริงกับปัญหาย่อย ๆ ไปสู่รายบุคคล (นั่นคือถ่ายโยงจากกลุ่มไปสู่รายบุคคล)

5. การทำงานโดยร่วมมือกันจะทำให้ผู้เรียนเพิ่มความมั่นใจในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเองเป็นการสนับสนุนให้เกิดความพยายามในการเรียนรู้โน้มนำ กระบวนการและยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ผู้เรียนที่ทำงานร่วมกันในกลุ่มมีแนวโน้มที่จะชอบและเห็นคุณค่าของแต่ละคนและเห็นความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของคนอื่น มีความสัมพันธ์กันทางบวกระหว่างเพื่อน เกิดการเรียนรู้ในระดับสูง ตระหนักในคุณค่าของตนเอง เกิดการยอมรับความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา

6. การเลือกรายวิชาเรียนและการเลือกอาชีพ เพื่อนมีอิทธิพลสูงต่อผู้เรียน หากมีผู้เรียนบางคนในชั้นเลือกวิชาเรียนไม่เหมาะสมกับตัวเอง การช่วยเหลือให้เขาได้พัฒนาจะเกิดขึ้นในสถานการณ์การเรียนแบบร่วมมือ ผู้เรียนมีแนวโน้มที่ชอบและสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าและได้รับการกระตุ้นอย่างต่อเนื่องในการเรียน ความสำเร็จที่เกิดจากการทำงานร่วมกันของผู้เรียนในการแก้ปัญหาก็จะทำให้เกิดการเรียนรู้โน้มนำและการวิเคราะห์มากขึ้น ซึ่งเป็นความรู้ที่จำเป็นในการอภิปราย อธิบายและวางแผนในการเรียนรู้สถานการณ์ใหม่ เป็นการเพิ่มความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ การสนับสนุนกัน การช่วยเหลือกันและการเชื่อมโยงกันภายในกลุ่มแบบร่วมมือมีผลทางบวกต่อความสัมพันธ์ในกลุ่ม ต่อเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และความมั่นใจในตนเอง

### การประเมินผลการเรียนแบบร่วมมือ (นาตยา, 2543)

การเรียนแบบร่วมมือยังคงมีการประเมินผลเช่นเดียวกับการเรียนแบบอื่น ๆ ที่ครูปฏิบัติอยู่นั้นคือ การประเมินผลระหว่างเรียน การประเมินเมื่อผู้เรียนเรียนจบหน่วยการเรียนรู้แล้ว และการประเมินเมื่อสิ้นสุดการเรียนในภาคการศึกษา ผู้ประเมินคือทั้งครูและผู้เรียนที่สามารถมีส่วนร่วมในการประเมินได้หลายลักษณะ นอกจากนั้นกิจกรรมการประเมินผลของการเรียนแบบร่วมมือยังพิสูจน์ให้ผู้เรียนได้เห็นถึงคุณค่าความจำเป็นที่เขาต้องร่วมมือกัน ช่วยเหลือกันเรียนอย่างมีความรับผิดชอบและต้องพึ่งพาอาศัยกันจึงประสบความสำเร็จ ลักษณะของการประเมินผลการเรียนแบบร่วมมือที่ส่งเสริมให้เกิดพฤติกรรมการเรียนแบบร่วมมือกันสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การสุ่มถาม โดยครูเป็นผู้เลือกสุ่มตัวแทนกลุ่มออกมาตอบคำถามของครูและอธิบายผลงานที่กลุ่มร่วมกันทำหรืออธิบายกระบวนการทำงานของกลุ่ม หากจะประเมินโดยให้คะแนนก็จะให้คะแนนเท่ากันทุกคนในกลุ่มนั้น การใช้วิธีการสุ่มถามจะทำให้ผู้เรียนตื่นตัวเตรียมพร้อมและให้ความสนใจดูแลกันและกัน ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของเพื่อน ๆ ในกลุ่มให้ตรงกันเพราะไม่ทราบว่าจะเลือกใครในกลุ่มเป็นผู้ตอบ

2. การประเมินจากผลงาน ในกรณีที่กิจกรรมการเรียนรู้ให้สมาชิกทุกคนในกลุ่ม ร่วมกันทำผลงานขึ้นมาในลักษณะใดลักษณะหนึ่งและต้องการให้มีรายงานหรือผลงานเป็นงาน ของกลุ่มเพียงชิ้นเดียว หากครูไม่ต้องการใช้วิธีการประเมินผลแบบวิธีแรกด้วยการสุ่มถาม ครูอาจ นำผลงานนั้นมาประเมินให้คะแนนได้เลย วิธีนี้ดูแล้วคล้าย ๆ กับที่ครูปฏิบัติกันอยู่เป็นปกติแต่ใน กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือจะมีรายละเอียดที่แตกต่างกันออกไป นั่นคือ ในการเรียนแบบ ร่วมมือจะให้ความระมัดระวังมากกว่า ผลงานหรือรายงานนั้นเกิดจากการร่วมกันทำจริง ๆ ทุกคน รับรู้และเห็นชอบในงานนั้น ดังนั้น จึงมีการให้ผู้เรียนต้องเซ็นชื่อให้ความเห็นชอบกับงานนั้นก่อน ส่งครู โดยการให้ผู้เรียนเซ็นชื่อกำกับเพื่อเป็นการป้องกันไม่ให้นักเรียนบางคนในกลุ่มมาร้องเรียน อุทธรณ์ต่อครูในภายหลังได้ เมื่อทราบว่าคะแนนกลุ่มไม่ค่อยดี บางทีครูอาจพบกรณีที่ผู้เรียนบาง คนมาพบครูและชี้แจงทำนองแก้ตัวว่าตัวของเขาไม่รับรู้และไม่เห็นด้วยกับงานกลุ่มที่ส่งมาอย่าง นั้นเลย การใช้เทคนิคเช่นนี้จะทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ว่าเขาจะต้องยอมรับและเคารพในความเห็น ของกลุ่มที่ตกลงร่วมกันไปแล้ว เป็นการฝึกทักษะและกระบวนการประชาธิปไตยที่เขาต้องประสบ ในการดำเนินชีวิตจริงในสังคมด้วยและถ้าเขาไม่เห็นด้วยอย่างไร เขาจะต้องรู้จักที่จะโน้มน้าวชี้แจง เหตุผลให้เพื่อน ๆ ในกลุ่มมาใส่ใจในความคิดเห็นของเขาทำให้ผู้เรียนรู้จักฟังความคิดเห็นของ ทุกคนในกลุ่ม ทั้งยังฝึกให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่รู้จักรับผิดชอบ มีส่วนร่วมและรับรู้ในงานทุกขั้นตอนของ กลุ่มด้วย

ในการประเมินจากผลงานของผู้เรียน บางครั้งยังสามารถสุ่มจากงานที่ผู้เรียนแต่ละคน ทำกันในกลุ่มได้ด้วยโดยให้เป็นคะแนนกลุ่มเท่ากันทุกคน กล่าวคือครูสามารถหยิบสุ่มงานหรือ แบบฝึกหัดของผู้เรียนคนใดคนหนึ่งมาประเมินเป็นคะแนนกลุ่มหรือคะแนนของคู่นั้นได้เลย เพราะถือว่าผู้เรียนได้ช่วยกันดูแลจนเรียบร้อยแล้ว

3. การทดสอบ การประเมินผลเพื่อให้ได้คะแนนกลุ่มยังสามารถใช้การทดสอบได้ด้วย โดยการทดสอบย่อย (quiz) หรือทดสอบความรู้ สาระจากสิ่งที่ได้เรียนมาแล้วนำคะแนนของ สมาชิกทุกคนที่ได้มารวมกันเป็นคะแนนกลุ่มว่าแต่ละกลุ่มได้คะแนนรวมกันมากน้อยเท่าใดใน กรณีนี้ การเรียนแบบร่วมมือนิยมให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการออกข้อสอบข้อคำถามด้วย วิธีนี้มี คุณค่ามากในแง่ที่ทำให้ครูรับทราบว่าผู้เรียนมีความเข้าใจในเรื่องที่เรียนเป็นอย่างไรและสามารถ จับประเด็นในเรื่องที่เรียนได้ถูกต้องมากน้อยแค่ไหน จุดสนใจของเขาในเรื่องที่เรียนอยู่ตรงไหน เหล่านี้ครูจะพิจารณาได้จากคำถามที่ผู้เรียนตั้งขึ้นทั้งยังทำให้มีความมั่นใจว่าข้อทดสอบเหล่านั้น สอดคล้องกับสิ่งที่เขาได้เรียนรู้ด้วย กรณีที่ครูออกข้อสอบในสิ่งที่ผู้เรียนไม่ได้เรียนก็จะไม่เกิดขึ้น ทั้งยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ประสบความสำเร็จจากการเรียนเป็นกลุ่มเพราะเขามีโอกาสทำ ข้อทดสอบเหล่านั้นได้ การเรียนแบบร่วมมือจะให้ความใส่ใจในเรื่องนี้มากกว่าการประเมินผลกลุ่ม จะต้องให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ที่ดีจากการทำงานกลุ่มให้เขาได้เรียนรู้ว่าการร่วมมือช่วยเหลือ

กันนำมาซึ่งความสำเร็จมิใช่การทำงานกลุ่มเป็นการลงโทษหรือทำให้เขาต้องเสียประโยชน์อย่างใดอย่างหนึ่งการประเมินผลให้ได้คะแนนกลุ่มในวิธีการนี้สามารถนำมาใช้ได้กับทุกเทคนิคของกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

ส่วนในกรณีของการทดสอบผู้เรียนเป็นรายบุคคลว่าเขาได้เรียนรู้อะไรบ้างบรรลุตามจุดประสงค์ที่ครูกำหนดไว้หรือไม่ ครูมักทำหลังจากที่เรียนจบหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ แล้วหรือในภาวะปัจจุบันที่เน้นการเรียนรู้ที่ให้ผู้เรียนเรียนรู้จากการปฏิบัติจริงไม่ใช่จดจำความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริงดังในอดีต ข้อทดสอบที่จะประเมินผู้เรียนเป็นรายบุคคลก็ควรมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงเสียใหม่โดยเน้นมาทดสอบความรู้ในระดับที่เป็นความสามารถของผู้เรียนในการปฏิบัติงานจริงหรือเน้นความสามารถของผู้เรียนในการนำความรู้มาใช้ให้มากขึ้น การประเมินผลในส่วนนี้ผู้เรียนจะได้คะแนนเป็นของตนเอง

4. การใช้แบบสอบถาม วิธีนี้มุ่งที่จะประเมินความคิดเห็นของผู้เรียนว่าเขามีความรู้สึกอย่างไรต่อการทำงานกลุ่ม เขาได้เรียนรู้การทำงานกลุ่มอย่างมีประสิทธิภาพว่าเป็นอย่างไร การใช้แบบสอบถามเกี่ยวกับการทำงานกลุ่ม ครูอาจสร้างขึ้นเองหรือให้ผู้เรียนร่วมกันสร้างก็ได้ในการประเมินอาจให้ผู้เรียนประเมินตนเอง ประเมินกลุ่มและครูประเมินผู้เรียนด้วย

จากที่กล่าวทั้งหมดจะเห็นว่าในการประเมินผลผู้เรียนในการเรียนแบบร่วมมือนั้นจะมีคะแนนเกิดขึ้น 2 ส่วน คือ คะแนนของผู้เรียนแต่ละคนและคะแนนกลุ่ม ครูจะอย่างไรกับคะแนนทั้งสองส่วนนี้ เนื่องจากการเรียนแบบร่วมมือเป็นการเรียนที่ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้มาร่วมมือช่วยเหลือกันนำความสามารถของตนที่มีกันคนละด้านมาทำให้งานกลุ่มประสบความสำเร็จ ในการประเมินผลครูจะต้องระมัดระวังมิให้เด็กที่เรียนอ่อนเกิดความรู้สึกว่าเขาได้รับการดูถูกดูแคลนจากเพื่อนที่เรียนเก่งกว่าและต้องไม่让孩子ที่เรียนเก่งเกิดความรู้สึกที่เพื่อนที่เรียนอ่อนไปทำให้เขาเสียประโยชน์ ในสภาพการเรียนบางครั้งจึงไม่จำเป็นที่เด็กที่มีความสามารถต่างกันจะต้องศึกษาจากสื่อชนิดเดียวกันเขาอาจศึกษาจากสื่อต่างชนิดกันตามความสามารถของเขา รวมทั้งการประเมินก็ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีการและเกณฑ์เดียวกันก็ได้ การสอนด้วยการเรียนแบบร่วมมือควรต้องนำการประเมินแบบอิงเกณฑ์มาใช้มากกว่าอิงกลุ่ม เพราะจะช่วยส่งเสริมการร่วมมือช่วยเหลือกันในหมู่เด็กผู้เรียนได้ดีกว่า Johnson and Johnson (อ้างถึงใน นาดตา, 2543) ได้เสนอวิธีการแสดงผลคะแนนของผู้เรียนให้ปรากฏเป็น 2 ชุด ชุดหนึ่งเป็นคะแนนที่เขาสอบเองเป็นรายบุคคลและอีกชุดหนึ่งเป็นคะแนนที่มาจากเขาได้ร่วมมือกันทำงานในกลุ่มจนประสบความสำเร็จโดยครูอาจกำหนดคะแนนจากการใช้เกณฑ์ ดังนี้

1. นำคะแนนสอบของสมาชิกแต่ละคนมารวมกันแล้วหาค่าเฉลี่ยเป็นคะแนนกลุ่ม
2. การนำคะแนนสอบของผู้เรียนในกลุ่มแต่ละคนรวมกับคะแนนกลุ่มที่ได้รับเท่ากันซึ่งมักให้คะแนนกลุ่มเท่ากัน ในกรณีที่ครูสุ่มให้สมาชิกคนใดคนหนึ่งออกมานำเสนอผลงานกลุ่มและอธิบายวิธีการทำงานของกลุ่ม จากนั้นนำคะแนนทั้ง 2 ส่วนมารวมกันเป็นคะแนนของแต่ละคน และเมื่อนำคะแนนของทุกคนรวมกันก็จะเป็นคะแนนกลุ่ม
3. อีกวิธีหนึ่ง โดยการกำหนดช่วงคะแนนที่จะให้โบนัสไว้แล้วพิจารณาว่าคะแนนสอบของแต่ละคนในกลุ่มอยู่ในช่วงใดของเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสก็เพิ่มคะแนนโบนัสให้ไปจะเป็นคะแนนที่ได้ของแต่ละคน เมื่อนำมารวมกันก็เป็นคะแนนกลุ่มโดยการใช้วิธีนี้ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่าสมาชิกทุกคนจะต้องทำคะแนนสอบถึงเกณฑ์ที่จะได้คะแนนโบนัส หากมีสมาชิกคนใดคนหนึ่งคะแนนไม่ถึงเกณฑ์สมาชิกคนอื่น ๆ ก็จะไม่ได้รับคะแนนโบนัสไปด้วย แม้ว่าคะแนนของตนจะถึงเกณฑ์ก็ตาม
4. การให้คะแนนโบนัสอีกแบบหนึ่งเป็นการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสไว้เช่นกันแต่มีช่วงคะแนนกว้างขึ้น จากนั้นพิจารณาว่าคะแนนสอบของสมาชิกกลุ่มแต่ละคนเป็นเท่าไร คะแนนโบนัสที่แต่ละคนจะได้รับนั้นดูจากผู้ที่ได้คะแนนต่ำสุดในกลุ่มนั้นเป็นหลัก
5. การให้คะแนนโบนัสอีกแบบหนึ่งเป็นการเปรียบเทียบคะแนนของผู้เรียนระหว่างคะแนนครั้งก่อนกับคะแนนที่สอบได้ในครั้งนี้ว่าสูงหรือต่ำกว่าเดิมอยู่เท่าไรก็ให้คะแนนโบนัสไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ถ้าหากเป็นการสอบครั้งแรก ไม่มีคะแนนครั้งก่อนครูอาจกำหนดเป็นคะแนนฐาน ให้ผู้เรียนทุกคนได้เท่ากันแล้วให้เขาเปรียบเทียบว่าในการสอบครั้งนี้เขาสูงหรือต่ำกว่าคะแนนฐานอยู่เท่าไร การกำหนดคะแนนฐานเป็นเท่าไรขึ้นกับดุลยพินิจของครูที่จะพิจารณาโดยดูจากระดับความสามารถของผู้เรียนในชั้น
6. อีกวิธีหนึ่งซึ่งคล้ายคลึงกับแบบข้างต้นเป็นการเปรียบเทียบคะแนนครั้งก่อนหรือคะแนนฐานกับคะแนนปัจจุบันเช่นกัน แต่อาจกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสสูงสุดไม่เกิน 10 คะแนน เป็นต้น

ไม่ว่าครูจะเลือกใช้การประเมินผลและการให้โบนัสแบบใด ครูจะต้องแจ้งให้ผู้เรียนทราบล่วงหน้าก่อนเสมอ เพื่อผู้เรียนจะได้ปฏิบัติตนได้ถูกต้องและสอดคล้องกับการประเมินผลของครู จะเห็นว่าวิธีการของ Johnson and Johnson ที่เสนอไว้ที่นี่เปรียบเหมือนเป็นการให้ค่าตอบแทนหรือโบนัสแก่ผู้เรียนจากการที่เขาได้ร่วมมือช่วยเหลือกันเรียนเป็นลักษณะการเสริมแรงวิธีหนึ่ง การเรียนแบบร่วมมือยังมีวิธีการเสริมแรงในอีกลักษณะหนึ่งเพื่อกระตุ้นและส่งเสริมให้ผู้เรียนรักที่จะทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม นั่นคือ การให้รางวัลอันเป็นผลมาจากความสำเร็จของกลุ่มหลังจากที่ได้คะแนนรวมของแต่ละกลุ่มแล้ว เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับกันในช่วงแต่ละกลุ่มก็จะพบว่า บางกลุ่มทำคะแนนกลุ่มได้มากน้อยต่างกัน การเรียนแบบร่วมมือจึงจูงใจด้วยการให้รางวัลแก่กลุ่มที่มีคะแนนความสำเร็จของกลุ่มมาก เช่น อาจเลือกมา 3 อันดับแล้วมอบรางวัล การให้รางวัลในที่นี้มีจุดประสงค์ที่จะยกย่องความสำเร็จจากการทำงานกลุ่มของผู้เรียนให้ปรากฏแก่ผู้อื่นและทำให้ผู้เรียนมีความภาคภูมิใจ ผู้เรียนทุกคนล้วนมีโอกาที่จะได้รับความสำเร็จและได้รับการยกย่องในลักษณะนี้เท่า ๆ กันหมุนเวียนกันไปได้ รางวัลในที่นี้ไม่จำเป็นต้องเป็นวัตถุสิ่งของที่มีราคาแพงวอดอะไรหรือรางวัลอาจเป็นลักษณะอื่น เช่น มอบใบประกาศเกียรติคุณ เกียรติบัตร ลงข่าวในหนังสือพิมพ์หรือวารสารของโรงเรียนของสถานศึกษา ติดบอร์ดประกาศหรือให้สิทธิพิเศษบางอย่าง เช่น ให้ยืมหนังสือจากห้องสมุดหรือยืมวัสดุอุปกรณ์ไปใช้ที่บ้านได้นานกว่าเวลาที่กำหนดไว้ตามปกติ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ครูควรระมัดระวังว่ารางวัลควรอยู่ในรูปลักษณะของการยกย่องเพื่อเสริมแรงจูงใจและเป็นไปในทางสร้างสรรค์ต่อผู้เรียนอย่าปฏิบัติในลักษณะที่ทำให้ผู้เรียนยึดติดกับรางวัลมากเกินไป รางวัลเป็นเพียงแรงจูงใจภายนอก เหนือสิ่งอื่นใดรางวัลควรอยู่ในรูปของแรงจูงใจภายในให้ผู้เรียนเห็นคุณค่าที่เขาได้พิสูจน์ ได้สัมผัสด้วยตัวเองว่าการทำงานกลุ่มนั้นมีคุณค่าอย่างแท้จริงอย่างไร

ดังนั้น จากที่กล่าวมาทั้งหมด สรุปได้ว่า การประเมินผลในการเรียนแบบร่วมมือนี้ สามารถทำได้หลายวิธีทั้งการสุ่มถาม การประเมินจากผลงานกลุ่ม การทดสอบ การสอบถามและการสังเกต พร้อมทั้งมีการให้คะแนนโบนัสและรางวัลกลุ่มเพื่อสร้างแรงจูงใจและเป็นการยกย่องชมเชยแก่ผู้เรียน

## การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (e-Learning)

### ความหมายของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

สำหรับความหมายของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์นั้นได้มีผู้ให้ไว้ในหลายลักษณะ ดังนี้

Krutus (2000 cited in NECTEC COURSEWARE, 2004) กล่าวว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เป็นรูปแบบของเนื้อหาสาระที่สร้างเป็นบทเรียนสำเร็จรูปที่อาจใช้ซีดีรอม เป็นสื่อกลางในการส่งผ่านหรือใช้การส่งผ่านเครือข่ายภายในหรืออินเทอร์เน็ตทั้งนี้อาจจะอยู่ในรูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยการฝึกอบรม (Computer Based Training: CBT) และการใช้เว็บเพื่อการฝึกอบรม (Web Based Training: WBT) หรือการเรียนการสอนทางไกลผ่านดาวเทียมก็ได้

Campbell (1999 cited in NECTEC COURSEWARE, 2004) ได้ให้ความหมายว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ เป็นการใช้เทคโนโลยีที่มีอยู่ในเครือข่ายอินเทอร์เน็ต สร้างการศึกษาที่มีปฏิสัมพันธ์และการศึกษาที่มีคุณภาพสูงที่ผู้คนทั่วโลกมีความสะดวกและสามารถเข้าถึงได้อย่างรวดเร็วโดยไม่จำกัดสถานที่และเวลาเป็นการเปิดประตูการศึกษาตลอดชีวิตให้กับประชากร

สุรสิทธิ์ (2544 อ้างถึงใน NSTDA Online Learning, 2001) ได้ให้คำจำกัดความของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ว่า การเรียนรู้แบบออนไลน์หรือ e-Learning การศึกษาเรียนรู้ผ่านเครือข่ายคอมพิวเตอร์อินเทอร์เน็ต (internet) หรืออินทราเน็ต (intranet) เป็นการเรียนรู้ด้วยตนเอง ผู้เรียนจะได้เรียนตามความสามารถและความสนใจของตนโดยเนื้อหาของบทเรียนซึ่งประกอบด้วย ข้อความ รูปภาพ เสียง วิดีโอและมัลติมีเดียอื่น ๆ จะถูกส่งไปยังผู้เรียนผ่าน Web Browser โดยผู้เรียน ผู้สอน และเพื่อนร่วมชั้นเรียนทุกคน สามารถติดต่อ ปรึกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันได้เช่นเดียวกับการเรียนในชั้นเรียนปกติ โดยอาศัยเครื่องมือการติดต่อสื่อสารที่ทันสมัย (e-mail, webboard, chat room ฯลฯ) จึงเป็นการเรียนสำหรับทุกคนเรียนได้ทุกเวลาและทุกสถานที่ (learn for all: anyone, anywhere and anytime)

ครรชิต (2004) สรุปว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ คือระบบการเรียนการสอนผ่านระบบอินเทอร์เน็ตที่มีองค์ประกอบ ดังต่อไปนี้

1. เนื้อหาบทเรียนที่จัดทำขึ้นเพื่อนำเสนอเป็นตอน ๆ
2. แบบฝึกหัดให้ฝึกปฏิบัติหรือแบบทดสอบเพื่อวัดความเข้าใจในเนื้อหาและคอมพิวเตอร์สามารถโต้ตอบได้ทันที
3. ระบบโต้ตอบระหว่างผู้เรียนกับอาจารย์เจ้าของวิชารวมทั้งระบบแจ้งข่าวแก่ผู้เรียนทั้งกลุ่ม เช่น ระบบไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือระบบ chat
4. ระบบอภิปรายระหว่างผู้เรียนด้วยกันเองหรืออาจจะร่วมกับอาจารย์ เช่น ระบบ webboard หรือ forum

อีกนัยหนึ่ง การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เป็นระบบการเรียนการสอนที่มีลักษณะเหมือนห้องเรียนเสมือน (virtual classroom) นั่นคือ ผู้ที่เรียนเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ในระบบนี้จะมีความรู้สึกเหมือนกับได้เรียนร่วมกับเพื่อนในชั้น เป็นแต่เพียงไม่ได้เรียนรวมกันและไม่ได้เรียนพร้อมกันเท่านั้น อย่างไรก็ตาม การเรียนแบบ e-Learning โดยทั่วไปนั้นจะต้องเข้าสู่ห้องเรียนเสมือนในช่วงเวลาที่กำหนดเพราะอาจารย์ผู้สอนอาจจะจัดทำและส่งบทเรียนเข้าสู่ระบบที่ละบทเรียนเท่านั้นไม่ได้นำบทเรียนทั้งหมดไว้ในระบบเหมือนอย่างเวลาเราไปซื้อโปรแกรมบทเรียนในแผ่นซีดีมาใช้

ดังนั้น การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์จึงหมายถึง ระบบการเรียนการสอนยุคใหม่ที่ถูกสร้างขึ้นมาให้สามารถรับและส่งสารด้วยระบบดิจิทัลและมีระบบการสนับสนุนการเรียนการสอนยุคใหม่รองรับ เช่น ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ (Learning Content Management System: LCMS) ซึ่งจัดทำโดยมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ที่เรียกว่า M@xLearn (<http://course.ku.ac.th/>)

### ลักษณะสำคัญของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (NECTEC COURSEWARE, 2004)

ลักษณะสำคัญของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์มีดังนี้

1) **Anywhere, Anytime and Anybody** คือ ผู้เรียนจะเป็นใครก็ได้ มาจากที่ใดก็ได้ และเรียนเวลาใดก็ได้ตามความต้องการของผู้เรียนเพราะหน่วยงานได้เปิดเว็บไซต์ให้บริการตลอด 24 ชั่วโมงรวมทั้งบริการจัดทำเป็นชุด CD เพื่อใช้ในลักษณะ Offline ให้กับโรงเรียนหรือสถานศึกษาที่สนใจแต่ยังไม่พร้อมในระบบอินเทอร์เน็ต

2) **Multimedia** สื่อที่นำเสนอในเว็บประกอบด้วยข้อความ ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว และเสียงตลอดจนวีดิทัศน์อันจะช่วยกระตุ้นการเรียนรู้ของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

3) **Non-Linear** ผู้เรียนสามารถเลือกเรียนเนื้อหาที่นำเสนอได้ตามความต้องการ

4) **Interactive** ด้วยความสามารถของเอกสารเว็บที่มีจุดเชื่อมโยง (links) ย่อมทำให้เนื้อหา มีลักษณะโต้ตอบกับผู้ใช้โดยอัตโนมัติอยู่แล้วและผู้เรียนยังมีส่วนติดต่อกับผู้สอนผ่านระบบเมล์ ICQ Microsoft Messenger และสมุดเยี่ยมทำให้ผู้เรียนกับวิทยากรสามารถติดต่อกันได้อย่างรวดเร็ว

### การเรียนการสอนผ่านเครือข่ายหรือผ่านเว็บ (NECTEC COURSEWARE, 2004)

การจัดการเรียนการสอนผ่านเครือข่ายมีหลักการพื้นฐาน 5 ประการ ซึ่ง Angels ได้เสนอไว้โดยสอดคล้องกับความมุ่งหมายของการจัดการศึกษาตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ อย่างเห็นได้ชัด ได้แก่

1) การส่งเสริมให้ผู้เรียนและผู้สอนสามารถติดต่อสื่อสารกันได้ตลอดเวลา เป็นส่วนสำคัญที่ทำให้เกิดการกระตือรือร้นต่อการเรียนการสอน

2) การส่งเสริมให้เกิดความร่วมมือระหว่างผู้เรียนและกลุ่มผู้เรียน ซึ่งจะช่วยให้เกิดความรู้ความเข้าใจได้ดีกว่าการเรียนและทำงานเพียงลำพังคนเดียว เกิดการพัฒนาการแก้ไขปัญห และการยอมรับความคิดเห็นของคนอื่น

- 3) การส่งเสริมให้รู้จักการแสวงหาความรู้ด้วยตนเองเพื่อตนเอง ตลอดจนการหาคำตอบต่างๆ โดยการแนะนำแหล่งความรู้ของผู้สอนเป็นการสร้างความกระตือรือร้นในการใฝ่หาความรู้ให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน
- 4) การให้ผลการเรียนย้อนกลับทันทีแก่ผู้เรียน ช่วยให้เกิดการปรับแนวทาง วิธีการ และพฤติกรรมได้ถูกต้องได้
- 5) การจัดการเรียนการสอนที่ไม่มีข้อจำกัด โดยเฉพาะด้านเวลาและสถานที่เป็นการขยายโอกาสทางการศึกษาสำหรับบุคคลที่ใฝ่หาความรู้

ปัจจุบันการจัดการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ที่สอดคล้องกับหลักการพื้นฐานเหล่านี้ มีให้เห็นในรูปของเว็บไซต์หน่วยงาน สถานศึกษาและองค์กรต่างๆ เป็นจำนวนมาก การเรียนการสอนผ่านเว็บมีลักษณะโดดเด่น คือผู้เรียนสามารถเรียนเวลาใดก็ได้ สถานที่ใดก็ได้ที่มีความพร้อมด้านการเชื่อมต่อระบบสามารถใช้เครื่องมือต่างๆ เช่น e-mail, chatroom, webboard หรือ newsgroup สื่อสารกับเพื่อนๆ ผู้สอนหรือบุคคลอื่นๆ ที่สนใจและผู้เชี่ยวชาญต่างๆ แต่ผู้เรียนไม่ต้องเข้าชั้นเรียนหรือเข้าโรงเรียนเพราะถือว่าเว็บไซต์เป็นเสมือนห้องเรียนหรือโรงเรียน หนังสือและเนื้อหาการเรียนถูกแทนที่ด้วยเนื้อหาดิจิทัลลักษณะต่างๆ ทั้งข้อความ ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว เสียงและวีดิทัศน์ตามแต่ลักษณะของเว็บไซต์ ที่สำคัญที่สุดคือผู้เรียนที่ไม่กล้าแสดงออกในห้องเรียนปกติ จะกล้าแสดงออกและแสดงความคิดเห็นได้มากกว่าเดิม ทั้งนี้มีผู้วิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีการเรียนรู้และรูปแบบการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนผ่านเว็บไว้ดังนี้

**การเรียนรู้โดยการค้นพบ** การเรียนการสอนผ่านเว็บนับได้ว่าเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีการค้นพบของ Bruner เนื่องจากผู้เรียนจะต้องศึกษาและค้นคว้าด้วยตนเองจะต้องสร้างปฏิสัมพันธ์กับผู้สอน ผู้เรียนร่วม ผู้สนใจและบุคคลอื่นๆ ในระบบได้ทั่วโลก

**ทฤษฎีการเรียนรู้ด้วยการนำตนเอง** การเรียนการสอนผ่านเว็บนั้นผู้เรียนจะต้องรับผิดชอบตนเอง นำตัวเองและศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

**ทฤษฎีการสอนรายบุคคล** เนื่องจากผู้เรียนจะต้องศึกษาเรียนรู้ด้วยตนเองมีอิสระเลือกเนื้อหา เวลาและกิจกรรมซึ่งเป็นรูปแบบของผู้เรียนเฉพาะราย

**ทฤษฎีการสอนแบบร่วมมือ (collaborative learning)** เน้นว่าผู้เรียนมีอิสระในการเรียนแต่ด้วยเครื่องมือสื่อสารต่างๆ เช่น e-mail, webboard, chatroom หรือ newsgroup ทำให้ผู้เรียนกับผู้สอน เพื่อนร่วมเรียน ผู้เชี่ยวชาญต่างๆ มีส่วนร่วมกันและกันในการเรียนได้ เช่น ช่วยในการตั้งคำถามชี้แนะแนวทางการหาคำตอบ

**รูปแบบการสอนของกาเย่ (Gagne')** การเรียนการสอนผ่านเว็บนับได้ว่ามีรูปแบบที่สอดคล้องกับรูปแบบการสอนของกาเย่ ได้แก่

1. สร้างแรงจูงใจให้ผู้เรียนเกิดความสนใจในบทเรียน
2. แจ้งจุดประสงค์ให้ผู้เรียนทราบถึงผลการเรียนเพื่อให้เห็นประโยชน์ในการเรียนและให้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียน
3. กระตุ้นให้ผู้เรียนทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต่อการเชื่อมโยงไปหาความรู้ใหม่
4. เสนอบทเรียนใหม่ด้วยสื่อต่างๆ ที่เหมาะสม
5. ให้แนวทางการเรียนรู้ ผู้เรียนสามารถทำกิจกรรมด้วยตนเอง ผู้สอนแนะนำวิธีทำกิจกรรม แนะนำแหล่งค้นคว้าต่าง ๆ
6. กระตุ้นให้ผู้เรียนลงมือทำแบบฝึกปฏิบัติ
7. ให้ข้อมูลย้อนกลับทำให้ผู้เรียนทราบถึงผลการปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ
8. การประเมินผลการเรียนตามจุดประสงค์
9. ส่งเสริมความแม่นยำ การถ่ายโอนการเรียนรู้โดยการสรุป การย้ำและการทบทวน

ดังนั้นรูปแบบการเรียนการสอนผ่านเว็บจึงมีความยืดหยุ่นสูง ผู้เรียนจะต้องมีความรับผิดชอบ มีความกระตือรือร้นในการเรียนมากกว่าปกติ มีความตั้งใจใฝ่หาความรู้ใหม่ๆ ตรงกับระบบการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง โดยมีผู้สอนเป็นเพียงผู้แนะนำ ที่ปรึกษาและแนะนำแหล่งความรู้ใหม่ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเรียน ผู้เรียนสามารถทราบผลย้อนกลับของการเรียนรู้ ความก้าวหน้าได้จาก e-mail การประเมินผลควรแบ่งเป็นการประเมินผลย่อยโดยใช้เว็บไซต์

เป็นที่สอบและการประเมินผลรวมที่ใช้การสอบแบบปกติในห้องเรียนเพื่อเป็นการยืนยันว่าผู้เรียนเรียนจริงและทำข้อสอบจริงได้หรือไม่อย่างไร

### **ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ (Learning Content Management System: LCMS) M@xLearn** (กองบริการการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2547)

M@xLearn เป็น LCMS หรือระบบที่จัดการทั้งการเรียนการสอนและการจัดสื่อการสอน ที่ได้ถูกพัฒนาและนำมาใช้สนับสนุนการเรียนการสอนในคณะวิศวกรรมศาสตร์ก่อนเป็นลำดับแรกเมื่อปี พ.ศ. 2543 และได้ขยายการบริการสู่ระดับมหาวิทยาลัยในเวลาต่อมา ดังนั้นเพื่อความสะดวก รวดเร็วกว่าการเรียกชื่อเดิมว่า “ระบบสนับสนุนการเรียนการสอนผ่านเว็บแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์” จึงได้ให้ชื่อระบบนี้ใหม่ว่า M@xLearn (Maximum Learning) จะเห็นว่า LCMS จะเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญขององค์ประกอบของการสร้างระบบการเรียนการสอนในรูปแบบของ e-Learning โดยที่ LCMS จะเป็นระบบที่ควบคุมองค์ประกอบย่อยอื่น ๆ เช่น ระบบการจัดการสอน ระบบจัดการสื่อการสอน ระบบการจัดการผู้สอนและผู้เรียนให้ทำงานร่วมกันได้และเกิดประสิทธิภาพสูงสุด

### **มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์กับ e-Learning และ M@xLearn**

เพื่อตอบสนองนโยบายการก้าวสู่ e-University ของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ การพัฒนาการด้านหนึ่งที่อยู่บนแผนพัฒนาและมหาวิทยาลัยได้ให้ความสำคัญมากคือการนำ e-Learning เข้ามาพัฒนาการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยได้นำ e-Learning เข้ามาใช้ในหลายๆ ด้านอย่างเต็มรูปแบบโดยนำ M@xLearn มาช่วยสนับสนุนการเรียนการสอนในการเรียนการสอนแบบปกติที่มีระบบต่างๆ เช่น แผนการสอนออนไลน์ ปฏิทินกิจกรรมการสอน รับส่งการบ้านผ่านเว็บ แบบทดสอบและแบบประเมินผล ระบบจัดการเนื้อหาการสอน กระดานสนทนา กระดานข่าว และอื่น ๆ อีกมากมายซึ่งระบบเหล่านี้จะช่วยให้การถ่ายทอดแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างผู้สอนและผู้เรียนไม่ถูกจำกัดด้วยเวลาและสถานที่ อีกทั้งระบบนี้ยังช่วยสร้างวัฒนธรรมการเรียนรู้ด้วยตนเองของผู้เรียนอีกด้วย

แนวการนำ e-Learning เข้ามาใช้งานในมหาวิทยาลัย ณ ขณะนี้มีอยู่ 2 ลักษณะคือ

1. **Support System หรือ Blended System** เป็นรูปแบบที่นำมาใช้ในลักษณะที่เป็น การช่วยสนับสนุนหรือผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียนที่มีอยู่แล้ว

2. **Replace System** เป็นระบบที่ทดแทนการเรียนการสอนในห้องเรียนทั้งหมดให้ผู้เรียนเรียนผ่านคอมพิวเตอร์ทั้งหมด

ในส่วนของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์จะใช้รูปแบบของ Support System เป็นหลัก โดยจะนำ e-Learning มาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียนเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการสอนในชั้นเรียนมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อสื่อการสอนและระบบ LCMS ได้พัฒนาให้มีคุณภาพสูงขึ้นจนเพียงพอที่จะทำให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองดีเทียบเท่าหรือดีกว่าการเรียนโดยผ่านการเรียนการสอนในห้องเรียนซึ่งหลักสูตรที่จะเปิดเป็นออนไลน์แบบสมบูรณ์นั้นจะเริ่มต้นในบางรายวิชาที่มีความพร้อมที่สุดก่อนในอนาคตอันใกล้

### มีอะไรใน M@xLearn

นับตั้งแต่ปี พ.ศ. 2543 จวบจนปัจจุบัน M@xLearn 1.0 ได้ให้บริการกับมหาวิทยาลัยมาอย่างต่อเนื่องและในภาคต้นของปีการศึกษา 2547 มหาวิทยาลัยจะได้นำ M@xLearn 2.0 มารองรับการขยายตัวของความต้องการใช้งานของอาจารย์และนิสิตและเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอนมากยิ่งขึ้น ระบบย่อยภายในต่าง ๆ ของ M@xLearn ได้ปรับปรุงและพัฒนาจากที่ชนะเดิมมากกว่า 9 ระบบทำให้มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์นำมาใช้งานเพื่อสนับสนุนการเรียนการสอนในชั้นเรียนได้อย่างรวดเร็วและก่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด M@xLearn มีระบบที่ครอบคลุมเกือบทุกส่วนที่เกี่ยวข้องกับการบริหารและจัดการการสอน ซึ่งได้แก่

**M@x Profile:** สำหรับการจัดการบริการงานทะเบียนประวัติบุคคลซึ่งได้แก่ อาจารย์ นิสิตและเจ้าหน้าที่อื่น ๆ จัดโครงสร้างของสถานศึกษา เช่น วิทยาเขต คณะหรือภาควิชา รวมถึงการจัดการหลักสูตรการเรียนการสอน

**M@x Interactive:** เครื่องมือสร้างปฏิสัมพันธ์ต่าง ๆ เพื่อการแลกเปลี่ยนความรู้ เช่น Online Syllabus, Course Calendar, Web board, Chat room, Discussion Board, News Board

**M@x Content:** ระบบการจัดการและนำเสนอเนื้อหาวิชา (content) สามารถรองรับสื่อมัลติมีเดียอิเล็กทรอนิกส์ทุกประเภท เช่น HTML, MS Word, PowerPoint, Flash, 3D VRML, Java Applet, Movie, Sound และอื่น ๆ อีกมากมาย

**M@x Homework:** ระบบการส่งและส่งการบ้านผ่านเว็บพร้อมระบบเก็บคะแนนซึ่งรองรับการส่งและส่งงานแบบอัตโนมัติ รองรับการไฟล์มัลติมีเดียไฟล์ทุกประเภท เช่น ภาพ เสียง ภาพเคลื่อนไหว

**M@x Quiz:** ระบบทดสอบเพื่อวัดผลการเรียนรู้สามารถสร้างแบบทดสอบได้ในหลากหลายรูปแบบ เช่น ปรนัย จับคู่ เติมคำตอบและถูกผิด และตรวจเก็บคะแนนพร้อมด้วยระบบงานผลการทดสอบในรูปแบบตารางและแผนภูมิ

**M@x Grade:** ระบบการรวบรวมคะแนนจาก M@x Homework และ M@x Quiz แบบอัตโนมัติรวมทั้งผู้สอนสามารถใส่คะแนนจากการสอบอื่นๆ เพิ่มเติมได้เอง โดยมีระบบคิดคะแนนแบบอิงกลุ่มหรืออิงเกณฑ์อัตโนมัติ

**M@x Evaluation:** เป็นระบบประเมินหลังจากสิ้นภาคการศึกษาเพื่อนำผลการประเมินของนิสิตแต่ละวิชาสรุปและนำเสนอเพื่อให้ผู้สอนและผู้บริหารได้นำมาใช้ในการปรับปรุงการสอนให้ดียิ่งขึ้นในเทอมต่อไป

**M@x Publication:** ระบบคลังจัดเก็บและเผยแพร่เอกสารงานวิจัย หนังสือ วิทยานิพนธ์ หรือโครงการของอาจารย์และนิสิตพร้อมระบบค้นหา

**M@x DX:** ระบบการแลกเปลี่ยนข้อมูล (Data Exchange) ด้วยเทคโนโลยีของ Web Services จะทำให้ M@xLearn สามารถติดต่อสื่อสารเพื่อแลกเปลี่ยนข้อมูลที่ทำเป็นจากระบบสารสนเทศอื่นๆ ที่มีอยู่แล้วในมหาวิทยาลัย เช่น ระบบลงทะเบียนเรียน ระบบ E-mail หรือระบบอื่นๆ

ดังนั้นรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ได้ใช้ M@xLearn ในรูปแบบของ Support System เป็นหลัก โดยได้นำ e-Learning มาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียนซึ่งเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการเรียนรู้ในชั้นเรียนมากขึ้น

## งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์

#### งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอน  
วิชาคณิตศาสตร์ในต่างประเทศ มีดังนี้

Moore (1990) ได้ทำการศึกษาถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่  
เรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ ซึ่งสอนให้ผู้เรียนอ่านและทำการพิสูจน์และสอนมโนคติทางคณิตศาสตร์  
ที่จะเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนวิชาอื่น ๆ เนื้อหาในวิชานี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ เทคนิค  
การพิสูจน์ ทฤษฎีเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และระบบจำนวน การพิสูจน์ในวิชานี้เป็น  
การพิสูจน์แบบนิรนัยสั้น ๆ และอาศัยบทนิยาม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา จำนวน 16 คน  
ในจำนวนนี้เป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 8 คน นักศึกษาคูวิชาเอกคณิตศาสตร์  
จำนวน 6 คน และนักศึกษาที่เรียนคณิตศาสตร์จบแล้ว 2 คน ข้อมูลที่ศึกษาได้จากการสังเกต  
แบบไม่มีส่วนร่วม (non-participant observation) การสัมภาษณ์นักศึกษาและอาจารย์ผู้สอน  
การช่วยสอนนอกชั้นเรียน จากการศึกษาพบว่าสาเหตุหลักของปัญหาในการพิสูจน์อยู่ 3 ด้าน  
คือ ความเข้าใจในมโนคติ ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และการเริ่มต้นการพิสูจน์  
ซึ่งเป็นปัญหาดังนี้ 1) นักศึกษาไม่เข้าใจบทนิยาม นั่นคือ เขาไม่สามารถเขียนบทนิยามได้  
2) นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเชิงสัญชาตญาณ (intuitive) ในมโนคติทางคณิตศาสตร์น้อย  
3) ภาพลักษณ์มโนคติ (concept image) ของนักศึกษามีไม่เพียงพอในการเขียนการพิสูจน์  
4) นักศึกษาไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์  
5) นักศึกษาไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างของการพิสูจน์อย่างไร  
6) นักศึกษาไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และ 7) นักศึกษา  
ไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และผลการวิจัยสรุปได้ว่า มีหลายสาเหตุที่ทำให้นักศึกษา  
มีปัญหาในการพิสูจน์และทำการพิสูจน์ไม่ได้ ซึ่งสาเหตุเหล่านี้สอดคล้องกัน เมื่อมีปัญหาในด้าน  
หนึ่งก็ส่งผลให้มีปัญหาในด้านอื่นด้วย

Lock (1996) ได้ศึกษาวิธีการปรับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่มีนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อปรับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับนักเรียนทุกคนโดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ ซึ่งพบว่าครูส่วนใหญ่ไม่ได้เตรียมความพร้อมหรือเตรียมการทำงานกับนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ การจัดการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพนั้นมีความจำเป็นที่จะต้องทำการปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงการจัดการเรียนการสอนในหลายด้าน ได้แก่ แผนการสอน เทคนิคการสอน เนื้อหา การปรับสื่อการเรียนการสอนและการปรับการประเมินผลเพื่อส่งเสริมให้เกิดความสำเร็จและความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวกับความพร้อมทางการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ทักษะการคิดคำนวณ และแก้ปัญหา นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำและพบว่าเทคนิคการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนทุกคนและโดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำมี 5 ลักษณะได้แก่ 1) การเพิ่มเวลาในการเรียนการสอน 2) การสอนที่มีประสิทธิภาพโดยมีการใช้สื่อการสอน การสอนโดยครู การฝึกปฏิบัติ ฝึกแก้ปัญหาพร้อมทั้งการมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างครูและนักเรียน 3) การเปลี่ยนขนาดของกลุ่มในการเรียนการสอนโดยอาจจัดการเรียนการสอนเป็นกลุ่มที่มีขนาดใหญ่หรือกลุ่มขนาดเล็กตามกิจกรรมการเรียนรู้หรือตามวัตถุประสงค์ที่ได้กำหนดไว้ 4) การใช้ตัวอย่างจากชีวิตจริงเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและสามารถนำไปใช้ชีวิตประจำวันได้ และ 5) การปรับเปลี่ยนรูปแบบการเสริมแรงโดยครูควรให้แรงเสริมแก่นักเรียนแตกต่างกัน

Trujillo and Hadfield (1999) ได้ศึกษามูลเหตุของความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์โดยใช้การสัมภาษณ์เชิงลึกกับครูฝึกสอน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับประสบการณ์ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของครูฝึกสอนที่มีความวิตกกังวลอยู่ในระดับสูง กลุ่มตัวอย่าง คือ ครูฝึกสอนในโรงเรียนระดับประถมศึกษา จำนวน 50 คน เครื่องมือที่ใช้คือแบบวัดความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นโดยใช้มาตราส่วนประมาณค่าตามวิธีการของ Likert ที่เรียกว่า the Revised Mathematics Anxiety Rating Scale (R-MARS) โดยให้ครูฝึกสอนจำนวน 50 คน ทำแบบวัด R-MARS เพื่อระดับความวิตกกังวลเกี่ยวกับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งพบว่ามีครูฝึกสอนจำนวน 5 คนมีความวิตกกังวลเกี่ยวกับการสอนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง จากนั้นจึงได้ทำการติดต่อเพื่อขอทำการสัมภาษณ์เชิงลึกต่อไป ผลการศึกษาพบว่ามูลเหตุของความวิตกกังวลเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์สามารถแบ่งออกเป็น 5 ด้านใหญ่ๆ ได้ดังนี้ 1) ด้านความรู้สึกรู้สึกของตนเองเกี่ยวกับความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ ปัญหาด้านบุคลิกภาพที่มีต่อการสอน การขาดพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ การขาดทักษะพื้นฐานทางด้านการสอน รูปแบบการสอนที่ไม่มีประสิทธิภาพและการขาดพื้นฐานในการใช้สื่อการสอน 2) ด้านประสบการณ์ในโรงเรียนเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา ได้แก่ ผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ดี ครูสอนเร็วไป ครูสอน

ไม่เข้าใจ ครูดู ครูไม่ใส่ใจนักเรียน 3) ด้านอิทธิพลครอบครัวที่มีต่อเจตคติต่อการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ ได้แก่ ขาดการสนับสนุนจากบุคคลทางบ้าน พ่อและแม่ไม่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไม่มีเวลาสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้แก่ลูก 4) ด้านความวิตกกังวลเกี่ยวกับข้อสอบคณิตศาสตร์ ได้แก่ ลักษณะของข้อสอบ เวลาในการทำข้อสอบ คะแนนสอบและ 5) ด้านการวางแผนในอนาคต เกี่ยวกับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้แก่นักเรียน ได้แก่ ไม่เข้มงวดในการสอนจนเกินไป พยายาม ฝึกให้นักเรียนได้คิดและหาความรู้อยู่เสมอ เตรียมตัวก่อนทำการสอน ใส่ใจต่อความรู้สึกของ นักเรียนและใช้วิธีสอนที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเข้าใจ

Thompson and Geren (2002) ได้ศึกษากลยุทธ์ในชั้นเรียนในการจัดการและช่วยเหลือ นักศึกษาในมหาวิทยาลัยที่มีภาวะเสี่ยงต่อการล้มเหลวทางการศึกษา เนื่องจากในปี 1999 พบว่า อัตราการออกกลางคันของนักศึกษาชั้นปีที่ 1-3 ของมหาวิทยาลัยของรัฐอยู่ที่ 33.3% โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีในการจัดการและกลยุทธ์ในการช่วยเหลือนักศึกษาที่มีภาวะเสี่ยงต่อ การล้มเหลวทางการศึกษา ผลการศึกษาพบว่าปัญหาส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นกับนักศึกษาได้แก่ ปัญหาเกี่ยวกับการปรับตัวกับสิ่งแวดล้อมใหม่ การเรียนการสอนที่ต้องควบคุมตนเอง การวางแผนการเรียน การที่อาจารย์ผู้สอนไม่ให้ความสนใจนักศึกษา อาจารย์ผู้สอนในจำนวนมาก จนเกินไปเป็นต้น สำหรับกลยุทธ์และเทคนิคในการจัดการสำหรับนักศึกษาที่มีภาวะเสี่ยงต่อ การล้มเหลวทางการศึกษาคือ การให้ความสนใจ ใส่ใจและดูแลนักศึกษาอย่างทั่วถึงซึ่งมีอยู่หลาย ลักษณะ เช่น ในคาบแรกหรือช่วงแรกของการสอนอาจารย์ผู้สอนควรทำความรู้จักชื่อและประวัติ นักศึกษาให้ทั่วถึงก่อนเพื่อให้เกิดความเป็นกันเองและลดความตึงเครียด ส่วนในชั้นเรียนที่มี นักศึกษามากนอกจากใช้การพูดคุยกันแล้วอาจใช้การติดต่อกันทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) และในการมอบหมายงานนั้นควรอธิบายและชี้แจงการทำงานรวมถึงบอกถึงวิธีการ ในการค้นคว้า เช่น วิธีการอ่านเอกสารที่ทำให้อ่านแล้วเข้าใจง่ายและใช้เวลาน้อยเพราะนักศึกษา บางคนอาจมีปัญหาทางภาษาหรือการอ่านก็เป็นได้ รวมถึงแหล่งในการค้นคว้า เป็นต้น นอกจากนั้นอาจารย์ที่ปรึกษา (advisor) ก็เป็นอีกบุคคลหนึ่งที่จะสามารถช่วยนักศึกษากลุ่ม นี้ได้โดยให้ความเอาใจใส่และทำตัวเป็นที่ปรึกษาให้แก่ศึกษากลุ่มน้อยอย่างเต็มที่ เต็มใจและ เต็มความสามารถ

Dorman, Adams, and Ferguson (2003) ได้ศึกษาการรับรู้ของนักเรียนที่มีต่อ สิ่งแวดล้อมในชั้นเรียนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งแวดล้อมในชั้นเรียนวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 3,602 คนจากโรงเรียนระดับ มัธยมศึกษาในประเทศออสเตรเลีย อังกฤษ และแคนาดา เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบสอบถามและแบบสำรวจโดยเครื่องมือทั้งสองชนิดนี้จะเก็บข้อมูลที่ครอบคลุมการประเมิน

10 ประเด็น ได้แก่ ความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียน การสนับสนุนจากครู การเข้าร่วมกิจกรรม การสำรวจตรวจสอบ การทำความเข้าใจงาน การร่วมมือกัน ความยุติธรรม ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล การควบคุมการมีส่วนร่วม และการแสดงความคิดเห็นของนักเรียน การวิเคราะห์ข้อมูลใช้การวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่ายและแบบพหุคูณ ผลการวิจัยพบว่า การจัดสิ่งแวดล้อมในชั้นเรียนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.001 และสิ่งแวดล้อมในชั้นเรียนมีความสัมพันธ์กันในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

Müller and Louw (2003) ได้ศึกษาเงื่อนไขของแรงจูงใจและการสนใจเรียนของ นักศึกษามหาวิทยาลัยโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเงื่อนไขของแรงจูงใจและการสนใจเรียนของ นักศึกษามหาวิทยาลัยและทดสอบสมมติฐานของทฤษฎีการกำหนดตนเอง (self-determination theory) และทฤษฎีความสนใจ (theory of interest) กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักศึกษา ระดับปริญญาตรีของมหาวิทยาลัยเคปทาวน์ในแอฟริกาใต้ จำนวน 350 คน ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่เกิดแรงจูงใจภายในอยู่ในระดับที่สามารถระบุได้และแต่ละคนสนใจเรียนอยู่ใน ระดับปานกลาง และพบว่า การสนใจเรียน แรงจูงใจภายในและรูปแบบการกำหนดตนเองซึ่งเกิด จากแรงจูงใจภายนอกมีความสัมพันธ์กันโดยเกี่ยวข้องกับการสนับสนุนความต้องการทางจิตวิทยา เบื้องต้นและสิ่งแวดล้อมในการเรียนรู้ ได้แก่ การมีอิสระเป็นตัวของตัวเอง ความสามารถ ความสัมพันธ์ทางสังคม ความสนใจของอาจารย์ผู้สอน ความสอดคล้องของเนื้อหาสาระและ คุณภาพในการเรียนการสอน

### งานวิจัยภายในประเทศ

สำหรับประเทศไทยมีผู้ที่ศึกษาและทำการวิจัยเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไข ของการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนี้

สุวันเพ็ญ (2540) ได้ศึกษาสภาพและปัญหาของนิสิตคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัยในโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของประเทศ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสภาพของนิสิตคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศ (โครงการ รพค.) ในด้านสภาพของนิสิต เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาชีพครู และศึกษาปัญหาในด้านความสัมพันธ์กับผู้อื่น ในด้านการเงินและในด้านการเรียน ประชากรที่ใช้ ในการวิจัยเป็นนิสิตคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในโครงการ รพค. ปีการศึกษา 2540 จำนวน 118 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 ชุด คือ แบบสอบถามสภาพและปัญหาของนิสิต

โครงการ รพค. แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และแบบวัดเจตคติต่อวิชาชีพครู ผลการศึกษาพบว่า 1) นิสิตส่วนใหญ่เป็นนิสิตหญิง ผลการเรียนรู้โดยเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนิสิตอยู่ในช่วง 1.50 - 2.49 ผลการเรียนรู้โดยเฉลี่ยทุกวิชาอยู่ในช่วง 2.00 - 2.99 และนิสิตมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์และเจตคติที่ดีต่อวิชาชีพครูอยู่ในระดับมาก 2) นิสิตส่วนใหญ่ไม่มีปัญหาความสัมพันธ์ภายในครอบครัว แต่มีปัญหาการปรับตัวในมหาวิทยาลัย ส่วนปัญหาด้านการเรียนรายวิชาต่างๆ ในจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยนั้น นิสิตไม่มีปัญหาการเรียนในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป ยกเว้นวิชาภาษาอังกฤษ 1 และไม่มีปัญหาการเรียนในหมวดวิชาเฉพาะครูแต่ในหมวดวิชาเฉพาะวิชาเอกคณิตศาสตร์ นิสิตชั้นปีที่ 1 ส่วนใหญ่มีปัญหาในวิชาแคลคูลัส 1 ซึ่งเป็นวิชาที่นิสิตเรียนในภาคต้นปีแรก นิสิตยังปรับตัวเข้ากับการเรียนไม่ค่อยได้และอาจเป็นเพราะนิสิตเคยชินอยู่กับวิธีการเรียนที่ครูผู้สอนบอกวิธีจดบรรยายไม่ต้องค้นคว้าหาความรู้เอง ตลอดทั้งวิธีการสอบที่ใช้ข้อสอบแบบปรนัย เลือกตอบ ไม่ต้องบรรยายความรู้ จึงทำให้นิสิตยังไม่สามารถปรับตัวเข้ากับลักษณะการเรียนและการประเมินผลในระดับอุดมศึกษาได้ ส่วนนิสิตชั้นปีที่ 2 ส่วนใหญ่มีปัญหาการเรียนในวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้น 1 เนื่องจากนิสิตเรียนตามผู้สอนไม่ทันและเนื้อหาวิชาโดยรวมทั้งนิสิตอาจจะไม่ได้เตรียมตัวก่อนที่จะเรียน ไม่ได้ทบทวนหลังเรียนหรือนิสิตอาจจะไม่ได้ทำแบบฝึกหัดอย่างเพียงพอจึงไม่มีความเข้าใจทำให้เกิดปัญหาในการเรียนรายวิชานั้นได้

สัญญา (2543) ได้ศึกษาปัญหาการเรียนการสอนและการสอบวิชาคณิตศาสตร์

(ค 012) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2542 ในโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒปทุมวันเป็นการศึกษาที่ต่อเนื่องมาจากการศึกษาปัญหาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในภาคเรียนที่ 1 ที่ผ่านมา โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาปัญหาการเรียนการสอนและการสอบที่เกิดขึ้นในกระบวนการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 2 รวมทั้งเปรียบเทียบปัญหาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 012) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเพศและแผนการเรียน การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยภาคสนามโดยกลุ่มตัวอย่างได้จากการสุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และทำการเก็บข้อมูล 3 ครั้งจากแบบสอบถาม 3 ฉบับคือ แบบสอบถามเรื่องปัญหาการเรียนการสอนและสอบวิชาคณิตศาสตร์ (ค 012) เรื่องภาคตัดกรวยและฟังก์ชัน จำนวน 100 คน และเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและสถิติ จำนวน 100 คน และแบบสอบถามปัญหาการเรียนการสอนและการสอบวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 150 คน ซึ่งการวิเคราะห์ข้อมูลใช้การวิเคราะห์ด้วยการทดสอบค่าทีและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน ผลการวิจัยพบว่า 1) ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวยและฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.001 โดยลักษณะข้อสอบทั้งเรื่องภาคตัดกรวยและฟังก์ชันมีการประยุกต์หรือวิเคราะห์มากที่สุด 2) ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและสถิติเป็นไปอย่างสอดคล้องและมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.001 และ 3) ปัญหาการเรียนการสอนและการสอบวิชาคณิตศาสตร์

(ค 012) ในด้านการบริหารและการบริการ ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน และด้านการวัดผลและการประเมินผลการเรียนการสอนมีความสัมพันธ์กันในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.001 ทุกคู่ความสัมพันธ์ โดยด้านการบริหารและการบริการ ปัญหาที่พบมากที่สุดคือโรงเรียนไม่จัดให้มีห้องปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ รองลงมาคือ ปัญหาความพอใจในการเลือกแผนการเรียนและปัญหาความเหมาะสมของสภาพห้องเรียน ส่วนด้านการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ปัญหาที่พบมากที่สุดคือความสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนกับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ รองลงมาคือปัญหาการให้โอกาสแก่นักเรียนในการแสดงความคิดเห็นและปัญหาความรู้และความชำนาญในการสอนของครูผู้สอนคณิตศาสตร์และด้านการวัดผลและการประเมินผลการเรียนการสอน ปัญหาที่พบมากที่สุดคือความเหมาะสมของการสอบแก้ตัว รองลงมาคือความเหมาะสมของการแบ่งคะแนนวัดผลระหว่างภาคเรียน 60 คะแนน ปลายภาคเรียน 40 คะแนน และปัญหาควรจัดให้มีการสอนซ่อมเสริม (เสริมความรู้)

ขจรศรี (2544) ได้ศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์คณิตศาสตร์ของนิสิต เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต และศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตกับตัวแปรทางด้านเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง คือ นิสิตหลักสูตรการศึกษาระดับปริญญาตรี วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 79 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์จำนวน 20 ข้อย่อย และแบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 31 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลการวิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ในการพิสูจน์ข้อความในรูป  $p \rightarrow q$  และ  $p \leftrightarrow q$  พบว่า วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตเป็นลำดับที่หนึ่ง ปัญหารองลงมาตามลำดับ ได้แก่ การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์ วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ การเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์ การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ การพิสูจน์ข้อความในรูป  $p \leftrightarrow q$  และวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข 2) การเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่า นิสิตชายมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตหญิงที่ระดับนัยสำคัญ .05 และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 3) ผลการศึกษาระดับปัญหาใน

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยวัดทัศนคติของนิสิตที่มีต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปว่า ใน 4 ชั้น ซึ่งได้แก่ ชั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ชั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ชั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์และชั้นแสดงการพิสูจน์ พบว่า นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ชั้นดังกล่าวในระดับปานกลาง และ 4) การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาทั้ง 4 ชั้นดังกล่าว พบว่า เพศไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตทั้ง 4 ชั้นที่ระดับนัยสำคัญ .05 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ชั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

#### งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในต่างประเทศ มีดังนี้

Mevarech and Bracha (1997) ได้ศึกษาวิธีการสอนคณิตศาสตร์แบบผสมผสานที่เรียกว่า IMPROVE สำหรับชั้นเรียนที่ลดความสามารถของนักเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบนวัตกรรมวิธีการสอนคณิตศาสตร์สำหรับชั้นเรียนที่ลดความสามารถของนักเรียน และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการใช้วิธีการสอนที่พัฒนาขึ้น วิธีการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้สร้างบนพื้นฐานของทฤษฎีการรับรู้ทางสังคม (social cognition) และทฤษฎีการรู้คิด (metacognition) ซึ่งประกอบด้วย 3 องค์ประกอบคือ กิจกรรมการรู้คิด การมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพื่อน (peer interaction) และการจัดการอย่างเป็นระบบเกี่ยวกับข้อมูลป้อนกลับ วิธีการแก้ไขและการตกแต่งให้สมบูรณ์ วิธีสอนนี้มีชื่อว่า IMPROVE ซึ่งเป็นอักษรย่อของขั้นตอนการสอนที่ประกอบด้วย การแนะนำความคิดรวบยอด การถามให้คิด การฝึกหัด การพิจารณาและลดความยุ่งยาก การได้มาซึ่งความเข้าใจ การตรวจสอบความจริงและการตกแต่งให้สมบูรณ์ การวิจัยในครั้งนี้ได้ทำการทดลอง 2 ครั้งด้วยกันโดยครั้งแรกทดลองนำรูปแบบวิธีสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้กับนักเรียนเกรด 7 จำนวน 247 คนโดยมุ่งวิเคราะห์ในเชิงลึกเกี่ยวกับกระบวนการสร้างองค์ความรู้ของนักเรียนภายใต้เงื่อนไขการเรียนรู้ที่แตกต่างกันและครั้งที่ 2 ได้นำไปทดลองใช้กับนักเรียนจำนวน 265 คน เป็นระยะเวลา 1 ปีการศึกษาเพื่อศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่าเมื่อนำรูปแบบการสอน IMPROVE ไปทดลองใช้ทั้ง 2 ครั้ง พบว่า กลุ่มทดลองมีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

วิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยเฉพาะด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นักเรียนสามารถระบุเหตุผลได้ถูกต้องและเหมาะสม

Yusup and Chang (1997) ได้ศึกษาการใช้การออกแบบการเรียนการสอนด้วยแนวคิดการเรียนรู้เพื่อรู้แจ้ง (mastery learning) โดยมีจุดประสงค์เพื่อศึกษาการใช้รูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ออกแบบการเรียนการสอนด้วยแนวคิดการเรียนรู้เพื่อรู้แจ้ง โดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้ประกอบด้วย 8 ขั้นตอน ได้แก่ 1) การแจ้งเป้าหมายของการเรียนการสอน 2) การวิเคราะห์ผู้เรียน 3) การวิเคราะห์การเรียนการสอน 4) การแจ้งวัตถุประสงค์การเรียนการสอน 5) การพัฒนาประเด็นของแบบสอบ 6) การระบุกลวิธีของการเรียนรู้เพื่อรู้แจ้งอันประกอบด้วย การเลือกและการปรับปรุง 7) การจัดทำสื่อการเรียนรู้ และ 8) การประเมินผล การเรียนการสอน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีเจตคติในทางบวกต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นและครูผู้สอนมีความสุขในการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้เพราะสามารถช่วยปรับปรุงในเรื่องของพฤติกรรมของนักเรียนพร้อมทั้งเสนอแนะว่าควรจัดเวลาในการเรียนการสอนเพิ่มสำหรับการใช้รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้

Conseguera and Lopez (1998) ได้ศึกษารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของประเทศญี่ปุ่นสำหรับนักเรียนเกรด 8 และการนำไปประยุกต์ใช้ในการสอนวิชาวิทยาศาสตร์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด 8 ของประเทศญี่ปุ่นและศึกษาผลการนำรูปแบบที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้ในการสอนวิชาวิทยาศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า ครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนคิดและแก้ปัญหาโดยครูจะให้เวลานักเรียนแข่งขันกันแก้ปัญหาจากนั้นให้นักเรียนนำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาที่นักเรียนคิดขึ้น สำหรับรูปแบบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นมีองค์ประกอบและขั้นตอน คือ 1) ครูกำหนดปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา 2) นักเรียนแข่งขันคิดหาวิธีแก้ปัญหาที่ครูกำหนด 3) นักเรียนนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา 4) นักเรียนทั้งห้องร่วมกันอภิปรายในสิ่งที่เพื่อนนำเสนอ 5) ครูสรุปสิ่งสำคัญที่นักเรียนแต่ละคนนำเสนอ 6) นักเรียนทำงานที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่ครูกำหนด และ 7) ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้ในวันนี้และรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสอนวิชาวิทยาศาสตร์ได้ดีโดยมีการปรับเปลี่ยนในบางขั้นตอน

Handal and Bobis (2003) ได้ศึกษารูปแบบการเรียนการสอนสำหรับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นเนื้อหาโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษารูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้สำหรับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นเนื้อหา การวิจัยในครั้งนี้ผสมผสานเทคนิคการวิจัยทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพโดยใช้แบบสอบถามจำนวน 6 ชุดเก็บข้อมูลจากครูจำนวน 122 คนและใช้

การสัมภาษณ์ครูเกี่ยวกับรูปแบบการสอนที่ครูใช้อีกจำนวน 10 คนซึ่งได้คัดเลือกมาจากครูที่ตอบแบบสอบถาม สำหรับรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นเนื้อหา 3 รูปแบบโดยรูปแบบแรกเป็นรูปแบบที่ต้องการสอนนักเรียนให้บรรลุตามจุดประสงค์ของหน่วยหรือบทเรียนที่กำหนดเน้นกระบวนการเรียนรู้ การฝึกและการทำแบบฝึกหัดซ้ำบ่อย ๆ ไม่เน้นการประยุกต์ใช้ ส่วนรูปแบบที่ 2 เป็นรูปแบบที่คำนึงถึงการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ เน้นปัญหาที่เป็นข้อความ โดยเริ่มจากการที่ครูแนะนำความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของหน่วยให้นักเรียนทราบก่อน จากนั้นครูให้นักเรียนนำความคิดรวบยอดที่ได้ไปฝึกประยุกต์ใช้แก้ปัญหาและรูปแบบที่ 3 เป็นรูปแบบที่ยากและซับซ้อนของการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นเนื้อหาโดยเริ่มจากการนำประสบการณ์หรือสถานการณ์ในชีวิตจริงมาจัดกิจกรรมอย่างต่อเนื่องจนในที่สุดนักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้หรือได้รับความคิดรวบยอดจากกิจกรรมนั้น ผลการศึกษาพบว่ารูปแบบแรกและรูปแบบที่ 2 เป็นรูปแบบที่ครูส่วนใหญ่ยอมรับและใช้ในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนรูปแบบที่ 3 มีการสนับสนุนหรือใช้น้อยเพราะเป็นรูปแบบที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนต้องมีการเตรียมการมากและปัจจัยที่ทำให้ครูเลือกรูปแบบแต่ละรูปแบบนั้นขึ้นอยู่กับเจตคติต่อรูปแบบการสอนของครูแต่ละคน ความรู้สึกของครูและความสามารถของนักเรียน เป็นต้น

### งานวิจัยภายในประเทศ

สำหรับประเทศไทยมีผู้ที่ศึกษาและทำการวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ดังนี้

ปราณี (2539) ได้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีพฤติกรรมตามแผนเพื่อพัฒนาพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนด้อยสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีจุดประสงค์คือ 1) เพื่อศึกษาตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น 2) เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนตามทฤษฎีพฤติกรรมตามแผน สำหรับพัฒนาพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้อยสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และ 3) เพื่อตรวจสอบผลการใช้รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แบบสอบวัดความรู้สึกนึกคิดเกี่ยวกับพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียน แบบบันทึกพฤติกรรมตนเองและแบบรายงานพฤติกรรมจากผู้ปกครอง ผลการวิจัยพบว่า 1) ตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรียงตามน้ำหนักความสำคัญ ได้แก่ การรับรู้ การควบคุมพฤติกรรม การคล้อยตามกลุ่มอ้างอิงและเจตคติต่อการกระทำพฤติกรรม 2) รูปแบบ

การเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นเป็นแผนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการรับรู้การควบคุมพฤติกรรม การคล้อยตามกลุ่มอ้างอิงและเจตคติต่อการกระทำพฤติกรรม โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนา พฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนทั้งด้านพุทธิพิสัยและจิตพิสัยประกอบด้วย หลักการ วัตถุประสงค์ เนื้อหาที่ใช้ใน การวิจัย กระบวนการเรียนการสอนและการประเมินผลในส่วนของกระบวนการเรียนการสอนนั้นมี 5 ขั้นตอนหลักได้แก่ ขั้นสร้างความสนใจ ขั้นให้คิด ขั้นลงมือปฏิบัติ ขั้นเสนอผลงาน และขั้นสรุป 3) เมื่อนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้พบว่ากลุ่มทดลองมีพฤติกรรม สัมฤทธิ์ผลด้านการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในห้องเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เชิงเจตคติต่อพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลอย่างมี นัยสำคัญทางสถิติทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในห้องเรียน ด้านการทบทวนวิชาคณิตศาสตร์ และด้านการทำการบ้านวิชาคณิตศาสตร์

สมมาต (2540) ได้พัฒนาการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ช่วง อุตสาหกรรมในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ โดยใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการ มีจุดมุ่งหมายเพื่อ พัฒนาการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ช่วงอุตสาหกรรมในระดับประกาศนียบัตร วิชาชีพ โดยใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการแบบมีส่วนร่วมระหว่างผู้วิจัยและครูผู้สอนจำนวน 3 ท่าน ซึ่งในการดำเนินการวิจัยได้ดำเนินการเป็น 3 ระยะ ดังนี้ ระยะที่ 1 ศึกษาสภาพและปัญหาในการ จัดการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ช่วงอุตสาหกรรมที่เกิดขึ้นโดยวิธีการจัดกลุ่ม สันทนาการกับนักเรียนและสัมภาษณ์ระดับลึกครูผู้สอน ปัญหาที่พบได้แก่ การจัดเรียงลำดับเนื้อหา พื้นฐานความรู้ของผู้เรียน วิธีการสอนของครู ภาระการสอนของครูที่มีมากและการตรวจการบ้าน ระยะที่ 2 จัดประชุมเชิงปฏิบัติการเพื่อวางแผนระหว่างผู้วิจัยกับครูผู้สอน โดยอาศัยข้อมูลจาก ระยะที่ 1 ผู้เชี่ยวชาญและเอกสารความรู้เพื่อวางแผนและจัดทำแผนการสอน สื่อและแบบประเมิน ผลซึ่งในด้านของสื่อการเรียนการสอนได้มีการจัดทำบทเรียนทบทวนความรู้ด้วยตนเองเพื่อ แก้ปัญหาการขาดความรู้พื้นฐานของนักเรียน และระยะที่ 3 ดำเนินการสอน โดยทำการทดสอบ ก่อนเรียนและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนตามวงจรการวิจัยเชิงปฏิบัติการเป็น 4 รอบ โดยแบ่งตาม เนื้อหา 4 บทเรียน ซึ่งแต่ละวงจรประกอบด้วยขั้นตอน 4 ขั้น คือ (1) ร่วมกันวางแผนการสอนกับ ผู้วิจัย (2) ปฏิบัติการสอน (3) สังเกตการสอนโดยผู้วิจัย และ (4) สะท้อนผลการปฏิบัติการสอน โดยในแต่ละวงจรจะนำผลการสะท้อนผลการปฏิบัติมาปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนในบทเรียน ต่อไป และหลังจากเรียนจบทุกเนื้อหาได้ทำการทดสอบหลังเรียนแล้วนำผลการทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียนมาวิเคราะห์ด้วยคะแนนที่ (t-test) ในการดำเนินการในระยะที่ 3 นี้ใช้นักเรียน 6 ห้องเรียนจาก 3 สาขาวิชาช่วงจำนวนทั้งสิ้น 249 คน ใช้เวลา 11 สัปดาห์ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2539 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ช่วงอุตสาหกรรมของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ครูที่เข้าร่วมการวิจัยได้ปรับปรุงและพัฒนาพฤติกรรมการสอนไปในทางที่ดีขึ้นและรูปแบบการสอนที่ผู้ร่วมการวิจัยเลือกใช้และปรับปรุงขึ้นมีขั้นตอนและองค์ประกอบดังนี้ 1) ทบทวนความรู้พื้นฐาน โดยใช้กลุ่มกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ 2) สรุป อภิปรายและซักถามปัญหา 3) แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาและเกณฑ์การประเมิน 4) สอนเป็นกลุ่มโดยครู 5) ทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ 6) แจงผลการทดสอบและประเด็นต่าง ๆ ที่นักเรียนบกพร่องและสอนซ่อมเสริมนักเรียนที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์โดยเพื่อนและ 7) ทดสอบหลังเรียนจบครบทุกเนื้อหา

สมพร (2541) ได้พัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ โดยมีจุดมุ่งหมายในการพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติโดยเน้นการจัดการเรียนการสอนเชิงกระบวนการตามหลักการของทฤษฎีสร้างเสริมต่อขั้นตอนในการพัฒนารูปแบบมี 4 ขั้นตอนได้แก่ 1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐานสำหรับการพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ 2. การสร้างรูปแบบ 3. การหาประสิทธิภาพของรูปแบบ และ 4. การปรับปรุงรูปแบบ ซึ่งรูปแบบที่พัฒนาขึ้นอาศัยข้อมูลจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยได้รูปแบบเบื้องต้นเป็นวงจร 5 ขั้นตอนคือ 1) การศึกษาปัญหาและรวบรวมข้อมูลพื้นฐาน 2) การวางแผนและกำหนดแนวทางการแก้ปัญหา 3) การพัฒนานวัตกรรมเพื่อการแก้ปัญหา 4) การปฏิบัติงานพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอน และ 5) การประเมินผลการพัฒนาและปรับปรุงแก้ไข กลุ่มตัวอย่างซึ่งสุ่มมาแบบแบ่งกลุ่มตามเขตปฏิบัติการของสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดพระนครศรีอยุธยา จำนวน 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มควบคุม จำนวน 2 ห้องเรียนเป็นกลุ่มที่ครูสอนคณิตศาสตร์ดำเนินการสอนตามปกติ กลุ่มทดลอง 1 จำนวน 3 ห้องเรียนเป็นกลุ่มที่ทดลองใช้รูปแบบครบทุกขั้นตอนและกลุ่มทดลอง 2 จำนวน 3 ห้องเรียนเป็นกลุ่มที่ทดลองตามขั้นตอนของรูปแบบแต่ดกกิจกรรมการนิเทศในขั้นตอนการปฏิบัติงานพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอน วิเคราะห์ผลการทดลองโดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ผลการทดลองพบว่ารูปแบบที่พัฒนาขึ้นมีประโยชน์ในการพัฒนาพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนโดยที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองแต่ละกลุ่มสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และมีแนวโน้มว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ใช้รูปแบบครบทุกขั้นตอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ใช้รูปแบบแต่ดกกิจกรรมการนิเทศ

วราพร (2542) ได้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้การสอนตนเองกับการเรียนการสอนแบบรายบุคคลและแบบกลุ่มสำหรับ นักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์คือ 1) เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยการใช้การสอนตนเองกับการเรียนการสอนแบบรายบุคคลและแบบกลุ่ม สำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง 2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่ได้รับการเรียนการสอนตามรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นกับนักศึกษาที่ได้รับการเรียนการสอนตามปกติ จำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและ 3) เพื่อศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการเรียนการสอนกับระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ การวิจัยแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกเป็นการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนและเอกสารประกอบรูปแบบการเรียนการสอน ขั้นตอนที่สองเป็นการทดลองใช้รูปแบบการเรียนการสอนและเอกสารประกอบรูปแบบการเรียนการสอน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยแบบสอบถามความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบสอบถามรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ แบบวัดทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์และแบบฝึกกระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัย พบว่า

- 1) รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยกระบวนการในการสอนที่ใช้แนวคิดกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเรียนการสอนแบบกลุ่ม การสอนตนเอง การเรียนการสอนแบบรายบุคคล ทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์และความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือหรือกระบวนการในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยหลักการ จุดมุ่งหมาย เนื้อหา กระบวนการจัดการเรียนการสอนและการประเมินผลการเรียนการสอน ในส่วนของกระบวนการจัดการเรียนการสอนนั้นมี 3 ขั้นตอนหลัก ได้แก่ ขั้นเตรียมการเรียนการสอน ขั้นตอนดำเนินการเรียนการสอน ขั้นสรุปเชื่อมโยงและการประยุกต์ใช้ โดยในขั้นตอนการเรียนการสอนจะมีการตรวจสอบความรู้พื้นฐาน การสอนตนเอง การฝึกกระบวนการแก้ปัญหาและการประเมินกระบวนการแก้ปัญหา
- 2) เมื่อนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้พบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง โดยคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษากลุ่มทดลองสูงกว่านักศึกษากลุ่มควบคุมทั้งในระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลางและต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการเรียนการสอนกับระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สมยศ (2545) ได้พัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมผลการเรียนทางคณิตศาสตร์และความตระหนักรู้ในการรู้คิดของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้การผสมผสานแนวคิดการประมวลสารสนเทศและการรู้คิดโดยมีวัตถุประสงค์คือ 1) เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมผลการเรียนทางคณิตศาสตร์และความตระหนักรู้ในการรู้คิดของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้การผสมผสานแนวคิดการประมวลสารสนเทศและการรู้คิดและ 2) เพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นคือผลการเรียนทางคณิตศาสตร์และความตระหนักรู้ในการรู้คิดซึ่งผลการเรียนทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์และความคงทนของความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดำเนินการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยศึกษาข้อมูลพื้นฐาน แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง จากนั้นนำข้อมูลที่ได้จากการศึกษามาสร้างกระบวนการเรียนการสอนแล้วนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 2 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 52 คน ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง 10 สัปดาห์โดยวัดผลการทดลองใช้ทั้งก่อนและหลังการทดลองและวัดความคงทนของความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ ผลการศึกษาพบว่า 1) กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยขั้นตอนการสอน 8 ขั้นตอน ได้แก่ (1) ขั้นสร้างความสนใจและทำให้ตระหนักถึงประโยชน์ (2) ขั้นกำหนดเป้าหมายการเรียนรู้ (3) ขั้นนำเสนอสาระหรือสถานการณ์การเรียนรู้และวิเคราะห์จัดระบบ (4) ขั้นกระตุ้นความรู้เดิมและวางแผนปฏิบัติ (5) ขั้นสร้างเสริมความเข้าใจ (6) ขั้นสรุปข้อความรู้ (7) ขั้นประยุกต์ความรู้ และ (8) ขั้นให้ข้อมูลป้อนกลับ และ 2) ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนพบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ความคงทนของความรู้ทางคณิตศาสตร์และความตระหนักรู้ในการรู้คิดหลังการทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

จากการตรวจสอบเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งต่างประเทศและในประเทศเพื่อนำมาพัฒนารอบแนวคิดในการวิจัยครั้งนี้ พบว่า สภาพและปัญหาเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เกิดจากครูขาดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ขาดทักษะทางการสอน ขาดพื้นฐานในการใช้สื่อการสอน ครูใช้วิธีการสอนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ครูไม่ใส่ใจนักเรียน ครูให้ออกาสนักเรียนในการแสดงความคิดเห็นน้อยและครูยังใช้วิธีการประเมินผลการเรียนรู้ที่ไม่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ส่วนในระดับมหาวิทยาลัยปัญหาที่พบส่วนใหญ่คือ นิสิตยังไม่สามารถปรับตัวเข้ากับวิธีการเรียนและวิธีการสอบที่ใช้ข้อสอบแบบอัตนัยและนิสิตยังไม่รู้จักแบ่งเวลาในการเรียนเพื่อทบทวนและทำแบบฝึกหัด ซึ่งปัญหาเหล่านี้ส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ ดังนั้น การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์จัดว่าเป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาช่วยในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นได้โดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นส่วนใหญ่มุ่งให้ผู้เรียนมีทักษะและผลการเรียนรู้ที่สูงขึ้นรวมถึงมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ซึ่ง

มีองค์ประกอบและขั้นตอนประกอบด้วยหลักการ วัตถุประสงค์ เนื้อหา กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้และการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้โดยในส่วนของกระบวนการเรียนการสอนนั้นจะมีขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอน เช่น ขั้นนำ ขั้นสอนและลงมือปฏิบัติ ขั้นเสนอผลงาน ขั้นสรุปและขั้นประเมินผล และในแต่ละขั้นอาจใช้เทคนิคและวิธีสอนที่หลากหลาย เช่น การแจ้งวัตถุประสงค์ในการเรียนก่อนดำเนินการสอน การจูงใจและการสร้างความสนใจให้แก่ผู้เรียน การทบทวนและตรวจสอบความรู้พื้นฐานของผู้เรียน การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบโดยผู้สอน การสอนโดยใช้กระบวนการกลุ่ม การทดสอบย่อยเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนและการจัดสอนซ่อมเสริมสำหรับผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์การประเมิน

### กรอบแนวคิดในการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยใช้กระบวนการวิจัยและพัฒนาในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมุ่งเน้นให้มีการจัดการเรียนการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ รวมถึงสามารถเรียนรู้ร่วมกับผู้อื่นได้ เพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีผลการเรียนรู้ที่สูงขึ้น มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคม และมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งกรอบแนวคิดในการวิจัยสรุปได้ดังตารางที่ 1

### ตารางที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

คำถามการวิจัย	วัตถุประสงค์ของการวิจัย	แหล่งข้อมูล/ผู้ให้ข้อมูล	วิธีการ/เครื่องมือ	การวิเคราะห์
รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ทำให้นิสิตมีระดับผลการเรียนรู้สูงขึ้นมีลักษณะอย่างไร	เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสภาพปัญหาปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์  งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	การวิเคราะห์เนื้อหา/แบบสรุปผล การวิเคราะห์	วิเคราะห์เนื้อหา
		อาจารย์ผู้สอน นิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชา 158325	การสนทนากลุ่ม/แบบสนทนากลุ่ม เกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	

## ตารางที่ 1 (ต่อ)

คำถามการวิจัย	วัตถุประสงค์ของการวิจัย	แหล่งข้อมูล/ผู้ให้ข้อมูล	วิธีการ/เครื่องมือ	การวิเคราะห์
รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นเมื่อนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ส่งผลต่อนิสิตอย่างไรในแต่ละด้านต่อไปนี้	เพื่อศึกษาผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นในด้าน			
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	นิสิตระดับปริญญาตรีที่เข้าร่วมในการวิจัย	ตรวจสอบผลงานและกระบวนการทำงานตลอดภาคการศึกษา/แบบประเมินชิ้นงาน  ทดสอบความรู้ก่อนเรียนและหลังเรียน/แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนและหลัง
เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	นิสิตระดับปริญญาตรีที่เข้าร่วมในการวิจัย	วัดเจตคติที่มีต่อรายวิชาก่อนเรียนและหลังเรียน/แบบวัดเจตคติของนิสิต	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย
ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	นิสิตระดับปริญญาตรีที่เข้าร่วมในการวิจัย	ประเมินจากแบบวัดทักษะฯ/แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย
ทักษะทางสังคม	ทักษะทางสังคม	นิสิตระดับปริญญาตรีที่เข้าร่วมในการวิจัย	สังเกตและประเมินจากงานและกิจกรรมที่ได้รับมอบหมาย/แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยนิสิตและผู้สอน	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย
ความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น	ความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น	นิสิตระดับปริญญาตรีที่เข้าร่วมในการวิจัย	การสอบถาม/แบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน	ความถี่ ค่าร้อยละ วิเคราะห์เนื้อหา

### บทที่ 3

#### วิธีการวิจัย

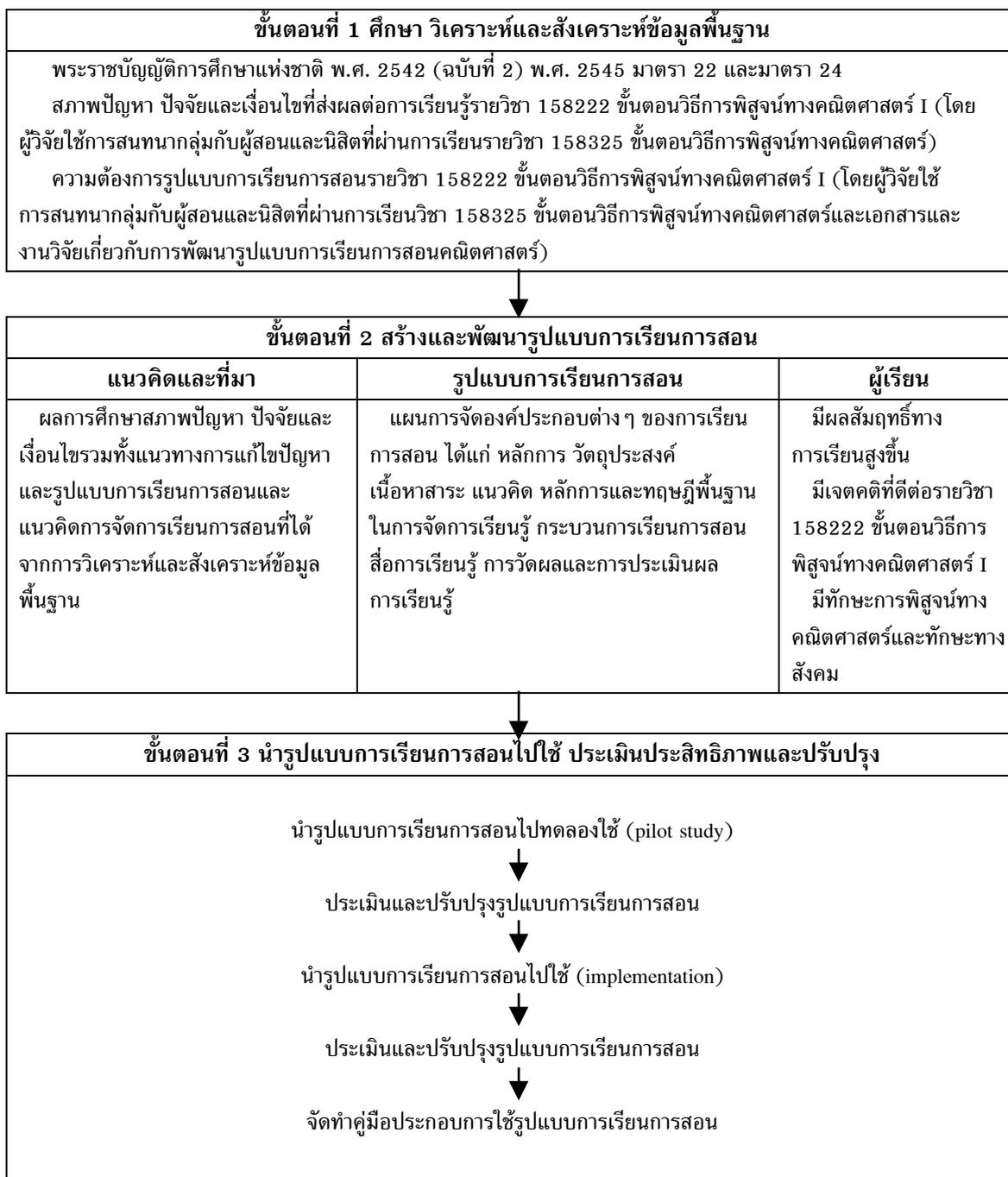
การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 1582222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการในลักษณะของการวิจัยและพัฒนา (research and development) โดยแบ่งขั้นตอนการดำเนินการออกเป็น 3 ขั้นตอนและมีรายละเอียดดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

ขั้นตอนที่ 2 สร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

ขั้นตอนที่ 3 นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ ประเมินประสิทธิภาพและปรับปรุง

สำหรับขั้นตอนการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 1582222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4



**ภาพที่ 4** ขั้นตอนการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากภาพที่ 4 ที่แสดงถึง ขั้นตอนการพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งสามารถสรุปถึงขั้นตอนของการดำเนินการวิจัย เพื่อพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนในแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

### ขั้นตอนที่ 1 ศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1.1) ผู้วิจัยทำการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ รูปแบบการเรียนการสอน การออกแบบการเรียนการสอน โครงสร้างรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ และการพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพื่อนำมากำหนดกรอบแนวคิดในการพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอน

1.2) ผู้วิจัยศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอน รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยจัดสนทนากลุ่มซึ่งแบ่งกลุ่มสนทนา ออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คนและกลุ่มนิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชานี้มาแล้ว ซึ่งเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ผู้วิจัยได้ทำการคัดเลือกโดยพิจารณาจากข้อมูลส่วนตัว ผลการเรียนและความคิดเห็นของผู้สอน ได้นิสิตจำนวน 12 คน ที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ปานกลางและค่อนข้างอ่อนชั้นปีละ 6 คน สำหรับการสนทนากลุ่ม ผู้วิจัยได้กำหนดประเด็นและแนวคำถามในการสนทนาเพื่อศึกษาหา ข้อมูลเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอน วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งได้ข้อสรุปดังนี้

1.2.1) สภาพปัญหาและแนวทางการแก้ไขปัญหาในการเรียนรายวิชา  
158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

1.2.1.1) ด้านการจัดเวลาเรียนและการสอบ

สภาพปัญหา

การจัดเวลาเรียนยังไม่เหมาะสมบางครั้งจัดแยกชั่วโมง เช่น จัดแบ่งเป็น 1 ชั่วโมงกับ 2 ชั่วโมงทำให้การเรียนการสอนขาดตอนและขาดความต่อเนื่อง

แนวทางการแก้ไขปัญหา

การจัดเวลาเรียนควรจัดเวลาเรียนให้ต่อเนื่องและอยู่ในช่วงเวลาเช้าเพราะเป็นช่วงเวลาที่นิสิตมีความพร้อมที่สุด ไม่เหนียวล้าจากการเรียนรายวิชาอื่น เช่น เวลา 9.00 น.-12.00 น.

สภาพปัญหา

การจัดแบ่งเนื้อหาเพื่อสอบกลางภาคและสอบปลายภาคยังไม่เหมาะสมโดยเนื้อหาที่ใช้สอบกลางภาคมีปริมาณน้อยแต่ปลายภาคมีปริมาณมาก

แนวทางการแก้ไขปัญหา

เนื้อหาที่ใช้ในการสอบกลางภาคและการสอบปลายภาคควรมีการแบ่งเนื้อหาให้เท่า ๆ กันหรือใกล้เคียงกัน

สภาพปัญหา

การจัดสอบเพียงกลางภาคกับปลายภาคทำให้นิสิตเกิดความเครียดเพราะผลการเรียนถูกตัดสินด้วยการสอบ 2 ครั้งนี้

### แนวทางการแก้ไขปัญหา

การจัดสอบอาจจัดสอบเมื่อจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้แทนการสอบกลางภาคเพื่อใช้ประเมินผลและตรวจสอบการเรียนรู้ของนิสิตและการสอนของผู้สอน หากนิสิตสอบตกหรือได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดก็ควรมีการเรียนซ่อมเสริมและสามารถให้นิสิตสอบแก้ตัวได้แต่คะแนนที่ได้รับหลังจากสอบแก้ตัวจะเป็นคะแนนที่กำหนดให้ผ่านเกณฑ์

#### 1.2.1.2) ด้านผู้เรียน

##### สภาพปัญหา

นิสิตมีพื้นฐานความรู้ไม่เท่ากันทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างบุคคลและนิสิตบางคนเรียนไม่ทันเพื่อนทำให้นิสิตเรียนไม่เข้าใจ

##### แนวทางการแก้ไขปัญหา

นิสิตควรมีการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนในทุก ๆ ครั้งหรือทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไปในคาบที่แล้วก่อนขึ้นเนื้อหาใหม่เพื่อตรวจสอบว่านิสิตเข้าใจหรือไม่

##### สภาพปัญหา

นิสิตยังไม่ค่อยเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ ยังเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ที่ไม่เหมาะสมกับโจทย์ที่กำหนดให้และยังเขียนการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง ไม่มีลำดับขั้นตอนในการพิสูจน์ อ้างเหตุผลไม่เหมาะสมและไม่มีการสรุปเมื่อจบการพิสูจน์

##### แนวทางการแก้ไขปัญหา

ผู้สอนควรให้ตัวอย่างการเขียนการพิสูจน์ที่แสดงขั้นตอนการพิสูจน์ที่ชัดเจนแก่นิสิตและเพิ่มการฝึกทักษะการพิสูจน์แก่นิสิตพร้อมทั้งเน้นให้นิสิตเขียนการพิสูจน์ที่มีลำดับขั้นตอนและการให้เหตุผลประกอบที่ชัดเจน

### สภาพปัญหา

นิสิตบางคนไม่ค่อยสนใจเรียน ไม่ค่อยสนใจทำแบบฝึกหัด มักลอกแบบฝึกหัดที่ทำเสร็จแล้วจากเพื่อนและแบบฝึกหัดเกี่ยวกับการพิสูจน์ที่ให้นิสิตทำ นิสิตยังเขียนการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง ไม่มีขั้นตอนและยังขาดการให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์

### แนวทางการแก้ไขปัญหา

ผู้สอนควรจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่น่าสนใจ และนิสิตทุกคนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนและผู้สอนควรมีการกำหนดคะแนนในส่วน of แบบฝึกหัดโดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนที่ชัดเจน หากนิสิตมีข้อบกพร่องในการแสดง การพิสูจน์ก็ให้มาพบผู้สอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องเป็นรายบุคคล

#### 1.2.1.3) ด้านผู้สอนและการจัดการเรียนรู้

### สภาพปัญหา

ผู้สอนบางคนไม่มีการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนและไม่บอกจุดประสงค์การเรียนรู้หรือเกณฑ์การประเมินผลในคาบนี้ให้นิสิตทราบทำให้นิสิตไม่ทราบว่าเรียนไปเพื่ออะไรและมีเกณฑ์การวัดผลและประเมินผลอย่างไร

### แนวทางการแก้ไขปัญหา

ก่อนที่ผู้สอนจะทำการสอนในแต่ละคาบผู้สอนควรบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ของหน่วยการเรียนรู้ในคาบนั้นให้แก่ นิสิตทราบก่อนเพื่อนิสิตจะได้ทราบว่าเรียนอะไร มีเกณฑ์การประเมินผลอย่างไรและมีการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนโดยอาจใช้ใบงาน ใช้การถามตอบหรือเฉลยการบ้านที่นิสิตยังไม่เข้าใจ

### สภาพปัญหา

ผู้สอนยังจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลน้อยโดยส่วนใหญ่ใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบและมีการถามตอบบ้าง ซึ่งอาจทำให้นิสิตบางคนเรียนตามไม่ทัน

### แนวทางการแก้ไขปัญหา

ผู้สอนควรจัดการเรียนการสอนในลักษณะที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลมากขึ้นโดยกิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดขึ้นอาจผสมผสานกันระหว่างผู้สอนเป็นศูนย์กลาง เช่น ใช้การบรรยายหรือใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบและผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง เช่น การแบ่งกลุ่มทำงานให้เพื่อนช่วยเพื่อน รวมถึงมีเอกสารประกอบและสื่อการเรียนรู้ที่จะช่วยให้นิสิตสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองและเกิดความเข้าใจมากขึ้น

### สภาพปัญหา

การแบ่งกลุ่มทำงานในห้องเรียนเพื่อให้นิสิตเรียนรู้ร่วมกัน ถึงแม้จะดีแต่ก็มีนิสิตบางคนไม่สนใจและไม่ให้ความร่วมมือ

### แนวทางการแก้ไขปัญหา

ในการจัดกิจกรรมกลุ่ม ผู้สอนควรจัดกลุ่มแบบละความสามารถหรือไม่ให้นิสิตจับกลุ่มกันเองเพราะหากนิสิตจับกลุ่มเอง บางกลุ่มอาจจะเป็นกลุ่มที่มีแต่นิสิตที่เรียนอ่อนหรือนิสิตที่ไม่สนใจเรียนและรูปแบบของกิจกรรมกลุ่มที่นำมาใช้ไม่ควรมีลักษณะหรือรูปแบบเดียวกันตลอดเพราะจะทำให้นิสิตเกิดความเบื่อหน่าย ไม่สนใจและควรมีวิธีการประเมินผลและเกณฑ์การประเมินการทำงานกลุ่มที่ชัดเจนซึ่งควรแจ้งให้นิสิตทุกคนทราบก่อนทำงาน

### สภาพปัญหา

การติดต่อเพื่อซักถามปัญหากับผู้สอนนอกเวลาเรียนมีความลำบากเพราะบางครั้งนิสิตกับผู้สอนว่างไม่ตรงกันหรือนิสิตมาพบแล้วผู้สอนติดสอน

## แนวทางการแก้ไขปัญหา

ผู้สอนควรบอกวันและเวลาที่ว่างให้บัณฑิตทราบในการพบกันครั้งแรกและหากบัณฑิตมาแล้วไม่พบผู้สอนก็อาจให้บัณฑิตเขียนบันทึกขอนัดวันและเวลาที่จะเข้าพบหรือติดต่อกันทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

### 1.2.2) ปัจจัยและเงื่อนไขที่มีผลต่อการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอน วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ของนิสิต

1.2.2.1) รูปแบบการเรียนการสอน ควรมีการใช้วิธีสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่หลากหลายและเหมาะสมกับหน่วยการเรียนรู้ เช่น การใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย การอธิบายและแสดงเหตุผล การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียน กิจกรรมกลุ่ม การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (e-Learning)

1.2.2.2) การสอนซ่อมเสริม ควรมีการจัดสอนซ่อมเสริมให้แก่บัณฑิตที่ยังไม่เข้าใจหรือสอบไม่ผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนด

1.2.2.3) เอกสารและแหล่งการเรียนรู้ ผู้สอนควรแนะนำแหล่งการเรียนรู้ให้บัณฑิตทราบเพื่อบัณฑิตสามารถไปศึกษาและค้นคว้าเพิ่มเติม เช่น หนังสือ เอกสารหรือเว็บไซต์ต่างๆ โดยอาจจัดสร้างเป็น Homepage รายวิชาที่รวบรวมเอกสารและเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้องกับรายวิชานี้ไว้เพื่ออำนวยความสะดวกแก่นิสิตในการเข้าไปศึกษาค้นคว้า

1.2.2.4) เวลาในการให้คำปรึกษาแก่นิสิต ผู้สอนควรแจ้งวันและเวลาที่ว่างให้บัณฑิตทราบเพื่อให้นักศึกษามีปัญหาในการเรียนเข้าพบนอกเวลาเรียนและสำหรับนิสิตที่ไม่ต้องการเดินทางมาพบผู้สอนที่ห้องทำงานหรือต้องการสอบถามหรือปรึกษาปัญหาสามารถติดต่อสื่อสารผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

1.2.2.5) การฝึกทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรให้นิสิตได้ฝึกทักษะการพิสูจน์ให้มากโดยในช่วงแรก ๆ อาจให้นิสิตฝึกทักษะด้วยการแสดงการพิสูจน์ในลักษณะที่เหมือนกับตัวอย่างที่กำหนดให้ เมื่อนิสิตเกิดความเข้าใจและสามารถแสดงการพิสูจน์ได้แล้วก็ค่อย ๆ ปรับโจทย์ให้ยากขึ้นตามลำดับ

### 1.2.3) ความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

1.2.3.1) ก่อนที่ผู้สอนจะเริ่มทำการสอนเนื้อหาในแต่ละหน่วย การเรียนรู้ ผู้สอนควรมีการเตรียมความพร้อมให้แก่ นิสิตโดยแจ้งจุดประสงค์ในการเรียนการสอนของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ บอกเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินผลในแต่ละกิจกรรมและเนื้อหาสาระ ตรวจสอบและทบทวนความรู้พื้นฐานของนิสิต เผลยการบ้านหรือโจทย์ที่นิสิตยังไม่เข้าใจในคาบที่แล้ว

1.2.3.2) รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ทำให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้นทั้งในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านทักษะทางสังคมและเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ควรมีองค์ประกอบ ได้แก่ หลักการวัตถุประสงค์ สาระการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้และการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ โดยในส่วนของกระบวนการเรียนการสอน มีขั้นตอนดังนี้

#### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ก่อนที่จะทำการสอนผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้หรือหัวข้อที่จะสอนและเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินผลในแต่ละกิจกรรมและ สาระการเรียนรู้ นำเข้าสู่บทเรียนโดยการตรวจสอบและทบทวนความรู้พื้นฐานของนิสิต ทบทวนบทเรียนที่ผ่านมา เผลยการบ้านหรือโจทย์ที่นิสิตยังไม่เข้าใจในคาบที่แล้ว

### ข้อเสนอสาระการเรียนรู้

ผู้สอนควรใช้วิธีสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด การถามตอบประกอบการอธิบาย การจัดกิจกรรมกลุ่ม การให้นิสิตออกมาทำโจทย์บนกระดานและให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็นร่วมกันและการทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn (e-Learning)

### ขั้นสรุปความรู้

นิสิตสรุปความรู้ที่ได้เป็นรายบุคคลหรือกลุ่มหรือสรุปความรู้ที่ได้ผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

นิสิตทำการฝึกทักษะจากแบบฝึกหัด ใบงาน แบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคลหรือกลุ่มหรือทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ผู้สอนควรให้นิสิตทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงเพื่อใช้ตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตพร้อมทั้งเฉลยในห้องเรียน มีการทดสอบประจำหน่วยและแจ้งผลการทดสอบพร้อมข้อบกพร่องหรือประเด็นต่าง ๆ ที่นิสิตควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบเสร็จและสำหรับนิสิตที่ไม่ผ่านเกณฑ์ให้เรียนซ่อมเสริมกับผู้สอนโดยตรงหรือเรียนผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

#### 1.2.4) ข้อเสนอแนะในการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

1.2.4.1) รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีผลต่อการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงของคณะวิทยาศาสตร์เป็นอย่างมากเพราะรายวิชานี้ให้ความรู้ หลักการและทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์รูปแบบต่าง ๆ ที่นิสิตสามารถนำไปใช้พิสูจน์เพื่อแก้ปัญหาในรายวิชา

คณิตศาสตร์ชั้นสูงของคณะวิทยาศาสตร์ได้ เช่น รายวิชาการวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้น (Introductory real analysis) พีชคณิตเบื้องต้น (Introductory algebra) ทฤษฎีเซตเบื้องต้น (Introductory set theory)

1.2.4.2) การจัดให้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เรียนในชั้นปีที่ 2 ภาคต้นนั้นมีความเหมาะสมแล้วเพราะรายวิชานี้เปิดทำการสอนพร้อมกับรายวิชาคณิตตรรกศาสตร์เบื้องต้น (Introductory mathematical logic) ของคณะวิทยาศาสตร์ซึ่งมีเนื้อหาสาระใกล้เคียงกันและสามารถนำความรู้ทางตรรกศาสตร์มาใช้เป็นพื้นฐานในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

### ขั้นตอนที่ 2 สร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนที่ 2 มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

2.1) ผู้วิจัยนำความรู้ที่ได้จากผลการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานในขั้นตอนที่ 1 มาดำเนินการสร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งมีลักษณะเป็นแผนการจัดองค์ประกอบต่างๆ ของการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย หลักการ วัตถุประสงค์ สารการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้ การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ พร้อมทั้งจัดทำประมวลการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้ตามจำนวนหน่วยการเรียนรู้ซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 16 หน่วยการเรียนรู้

2.2) กระบวนการเรียนการสอนที่ใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอนเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกัน โดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือและระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน คือ ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ชี้นำเสนอสาระการเรียนรู้ ชี้นำสรุปความรู้ ชี้นำฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และชี้นำวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สำหรับรูปแบบการเรียนแบบร่วมมือที่นำมาใช้จัดการเรียนการสอนในครั้งนี้ได้แก่ รูปแบบ STAD (Student Teams Achievement Division), Jigsaw II, TAI (Team Assisted Individualization) และ Giraffiti Model โดยรูปแบบ STAD, Jigsaw II และ Giraffiti Model มีวัตถุประสงค์ เพื่อให้มนิสิตเกิดการเรียนรู้เกี่ยวกับแนวคิด ความคิดรวบยอด กฎ ทฤษฎีบท

รูปแบบการพิสูจน์ต่าง ๆ รวมทั้งฝึกให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายแง่มุม ฝึกการแสวงหาทางเลือกต่าง ๆ เพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจและใช้รูปแบบ TAI เพื่อทบทวน ฝึกฝนหรือฝึกทักษะในสิ่งที่ได้เรียนไปซึ่งรูปแบบการเรียนแบบร่วมมือที่ได้เลือกมาใช้ในกระบวนการเรียนการสอนในครั้งนี้ได้ผ่านการศึกษาค้นคว้าและความคิดเห็นของผู้สอนและนิสิตจากการจัดสนทนากลุ่มในขั้นตอนที่ 1

2.3) ผู้วิจัยสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และได้นำแบบสอบไปทดลองใช้เพื่อนำผลที่ได้มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบสอบแบบประเมินชิ้นงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนและเกณฑ์การประเมินผลอย่างชัดเจนสำหรับแต่ละชิ้นงานที่มอบหมายให้นิสิตทำแบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน และ แบบวัดเจตคติของนิสิตต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### ขั้นตอนที่ 3 นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ ประเมินประสิทธิภาพและปรับปรุง

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนที่ 3 มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

3.1) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประมวลการสอน แผนการจัดการเรียนรู้และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไปตรวจสอบคุณภาพโดยนำไปให้ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ช่วยพิจารณาประเด็นเกี่ยวกับความสอดคล้องและความเหมาะสมของรูปแบบการเรียนการสอน และเครื่องมือที่พัฒนาขึ้น

3.2) ผู้วิจัยนำข้อเสนอแนะที่ได้รับจากอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์มาทำการปรับปรุงแก้ไข และนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองใช้ในรอบแรกกับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ขณะทำการทดลองผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้นิสิตมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น รวมทั้งมีการประเมินพัฒนาการในการเรียน คุณลักษณะและทักษะที่พึงประสงค์ของนิสิตเป็นระยะ ๆ

3.3) หลังจากที่น่ารูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้แล้วหนึ่งภาคการศึกษา ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์และประเมินผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบแรกและทำการปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนให้เหมาะสมมากยิ่งขึ้น เพื่อนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบที่สองต่อไป

3.4) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้รับการปรับปรุงแล้วไปใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 และเมื่อสิ้นภาคการศึกษา ผู้วิจัยทำการประเมินผลและปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนหากมีสิ่งที่จะต้องแก้ไขเพื่อให้รูปแบบการเรียนการสอนมีความเหมาะสมตามเป้าหมายที่วางไว้

3.5) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้ทำการปรับปรุงแก้ไขแล้วไปจัดทำคู่มือประกอบการใช้รูปแบบการเรียนการสอน

### ประชากร

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลจากประชากร ดังนี้

1. นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน

2. นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน

## เครื่องมือและการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วยเครื่องมือ 7 ชนิด คือ

### 1. แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชุดเดียวกันมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ทดสอบความรู้เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในช่วงก่อนเรียนและหลังเรียนซึ่งมีขั้นตอนการสร้างและพัฒนา ดังนี้

1.1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และจัดทำตารางวิเคราะห์ข้อสอบเพื่อกำหนดสัดส่วนและจำนวนของข้อสอบในแต่ละเนื้อหาและพฤติกรรมที่มุ่งวัด ได้แก่ ความรู้ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์

1.2) ผู้วิจัยเขียนข้อสอบตามแนวทางที่กำหนดในตารางวิเคราะห์ข้อสอบโดยเป็นข้อสอบแบบอัตนัยจำนวน 15 ข้อพร้อมทั้งจัดทำแนวการตอบและเกณฑ์การให้คะแนน

1.3) ผู้วิจัยนำแบบสอบที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ช่วยพิจารณาความเหมาะสมของแบบสอบในแง่ความครอบคลุมและความเป็นตัวแทนของเนื้อหาและระดับพฤติกรรมที่มุ่งวัดรวมทั้งความเหมาะสมและความชัดเจนของข้อคำถาม แนวการตอบและเกณฑ์การให้คะแนน จากนั้นนำแบบสอบมาทำการปรับปรุงแก้ไขให้เหมาะสม

1.4) ผู้วิจัยนำแบบสอบที่ได้ทำการปรับปรุงแก้ไขจากคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์แล้ว ไปทดลองใช้กับนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 ที่ผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกลุ่มที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มประชากร จำนวน 22 คนเพื่อหาคุณภาพของข้อสอบในด้านความง่าย อำนาจจำแนกและความเที่ยงของแบบสอบทั้งฉบับโดยใช้สูตรคำนวณค่าดัชนีความเที่ยงของ Cronbach (อ้างถึงในบุญเรียง, 2543: 168) ซึ่งผลจากการนำแบบสอบไปทดลองใช้พบว่ามีค่าเฉลี่ยความง่าย 0.58 ค่าเฉลี่ยอำนาจจำแนก 0.33 และค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยง 0.89

## 2. แบบประเมินชิ้นงาน

แบบประเมินชิ้นงานสำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบประเมินชิ้นงานชุดเดียวกันมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ประเมินชิ้นงานของนิสิตโดยมีลักษณะของแบบประเมินชิ้นงานจำนวน 5 แบบ คือ แบบประเมินชิ้นงานแบบฝึกหัด การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม กิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn ซึ่งมีจำนวนชิ้นงานทั้งหมด 22 ชิ้นงาน แต่ละแบบประเมินชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนทั้งหมด 5 ระดับ ตั้งแต่ 0 ถึง 4 และมีเกณฑ์การประเมินผลกำหนดไว้อย่างชัดเจน โดยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนา ดังนี้

2.1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ของรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และเอกสารเกี่ยวกับการสร้างเกณฑ์การประเมินทั้งด้านทฤษฎีและวิธีการสร้าง

2.2) ผู้วิจัยกำหนดเนื้อหาหรือประเด็นที่ทำการประเมินชิ้นงานจากแบบฝึกหัดและงานที่มอบหมายให้นิสิตทำทั้งแบบรายบุคคลและกลุ่มพร้อมทั้งพิจารณาเกณฑ์การให้คะแนนในแต่ละชิ้นงาน

2.3) ผู้วิจัยสร้างแบบประเมินชิ้นงานพร้อมเกณฑ์การให้คะแนนตามประเด็นที่ได้กำหนดไว้ซึ่งมีจำนวนชิ้นงานทั้งสิ้น 22 ชิ้นงานโดยมีลักษณะของแบบประเมินชิ้นงานจำนวน 5 แบบ คือ แบบประเมินชิ้นงานแบบฝึกหัด การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม กิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn แต่ละแบบประเมินชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนทั้งหมด 5 ระดับตั้งแต่ 0 ถึง 4 และมีเกณฑ์การประเมินผลกำหนดไว้อย่างชัดเจน จากนั้นนำแบบประเมินชิ้นงานไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจสอบเกี่ยวกับความครอบคลุม เหมาะสมและความชัดเจนของรายการและเกณฑ์การให้คะแนนพร้อมทั้งนำแบบประเมินชิ้นงานมาทำการปรับปรุงแก้ไขให้เหมาะสม

### 3. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดเดียวกัน มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยมีขั้นตอนในสร้างและพัฒนา ดังนี้

3.1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ของรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่างๆ เพื่อนำมาสร้างแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

3.2) ผู้วิจัยสร้างแบบวัดทักษะฯ ซึ่งมีลักษณะเป็นใบงานพร้อมทั้งเกณฑ์การให้คะแนนซึ่งแบบวัดทักษะดังกล่าวมุ่งให้นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา สถานการณ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และแสดงเหตุผล โดยอ้างอิงความรู้ ข้อมูล ข้อเท็จจริง นิยาม หรือทฤษฎีบทได้อย่างเหมาะสมรวมถึงสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุมขึ้น

3.3) ผู้วิจัยนำแบบวัดทักษะฯ ที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์พิจารณาความครอบคลุมและความเหมาะสมและนำไปทดลองใช้ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ในรอบแรก ซึ่งพบว่าแบบวัดทักษะดังกล่าวสามารถนำมาใช้ประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตได้ชัดเจน

### 4. แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม

แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มสำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบประเมินชุดเดียวกัน โดยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนา ดังนี้

4.1) ผู้วิจัยวิเคราะห์ทักษะทางสังคมจากจุดประสงค์การเรียนรู้ของรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นคุณลักษณะสำคัญที่ต้องการให้เกิดขึ้นกับนิสิตเพื่อกำหนดกรอบแนวคิดและเกณฑ์ในการประเมินผล

4.2) ผู้วิจัยสร้างแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มตามกรอบแนวคิดและเกณฑ์ในการประเมินผลที่กำหนดไว้ซึ่งแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มแบ่งออกเป็น 2 ฉบับ คือ แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยนิสิตและแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยผู้สอน โดยแบบประเมินดังกล่าวมุ่งประเมินนิสิตในด้านความสามารถในการทำงานร่วมกับผู้อื่น การแสดงความคิดเห็นร่วมกัน ความรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมายและการได้รับการยอมรับจากเพื่อนร่วมงาน จากนั้นผู้วิจัยนำแบบประเมินการทำงานกลุ่มทั้งสองฉบับไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ตรวจสอบความครอบคลุม ความเหมาะสมและความชัดเจนของรายการและเกณฑ์ในการประเมิน

4.3) ผู้วิจัยนำแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มพร้อมเกณฑ์การประเมินที่ได้ปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ไปทดลองใช้ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ในรอบแรก ซึ่งพบว่าแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มดังกล่าวสามารถนำมาใช้ประเมินพฤติกรรมที่พึงประสงค์ของนิสิตได้ชัดเจน

## 5. แบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน

แบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนสำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบสอบถามชุดเดียวกัน โดยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาดังนี้

5.1) ผู้วิจัยศึกษาองค์ประกอบและขั้นตอนของรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่พัฒนาขึ้นเพื่อนำมากำหนดประเด็นข้อคำถามเกี่ยวกับความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อรูปแบบการเรียนการสอน

5.2) ผู้วิจัยสร้างข้อคำถามให้ครอบคลุมประเด็นคำตอบที่ต้องการได้แก่ ความชอบ ความไม่ชอบ ความเหมาะสมของรูปแบบการเรียนการสอน ตลอดจนข้อเสนอแนะอื่นๆ สำหรับการปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบสอบถามที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ พิจารณาความครอบคลุมและความเหมาะสมของข้อคำถาม

5.3) ผู้วิจัยนำแบบสอบถามที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ไปทดลองใช้ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ใน รอบแรก ซึ่งพบว่าแบบสอบถามความคิดเห็นดังกล่าวสามารถนำมาใช้สอบถามความคิดเห็นของนิสิตได้อย่างชัดเจน

## 6. แบบวัดเจตคติของนิสิต

แบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นแบบวัดเจตคติชุดเดียวกัน โดยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนา ดังนี้

6.1) ผู้วิจัยศึกษาทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบวัดเจตคติตามวิธีการของ Likert (อ้างถึงในบุญเรียง, 2543: 94-104) แล้วกำหนดกรอบแนวคิดของเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

6.2) ผู้วิจัยเขียนข้อความที่แสดงความรู้สึกเกี่ยวกับการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยลักษณะของข้อความมีทั้งข้อความประเภทนิมาน (favorable statement) และข้อความประเภทนิเสธ (unfavorable statement) โดยที่ข้อความหนึ่ง ๆ มีความหมายเดียว ใช้ภาษาที่ง่ายและชัดเจน

6.3) ผู้วิจัยนำข้อความที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์พิจารณา คัดเลือกข้อความที่คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ส่วนใหญ่เห็นว่าเป็นข้อความเชิงกลาง ๆ ออกแล้วนำมาเรียบเรียงเป็นแบบวัดเจตคติที่มีค่าชี้แจงในการตอบแบบวัดอย่างชัดเจนเพื่อนำไปทดลองใช้

6.4) ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติไปทดลองใช้กับนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกลุ่มที่มีลักษณะใกล้เคียงกับประชากร จำนวน 30 คน เพื่อวิเคราะห์คุณภาพของข้อคำถามแต่ละข้อ

6.5) ผู้วิจัยคำนวณความสอดคล้องของข้อความแต่ละข้อกับคะแนนรวมทั้งฉบับโดยคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน (Pearson product moment correlation coefficient) ระหว่างคะแนนของข้อความแต่ละข้อกับคะแนนของแบบวัดเจตคติทั้งฉบับแล้วทดสอบว่าคะแนนของแต่ละข้อความมีความสัมพันธ์ทางบวกกับคะแนนรวมเจตคติหรือไม่ ถ้าข้อความใดค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สันมีนัยสำคัญทางสถิติแสดงว่าข้อความนั้นมีความสอดคล้องกับคะแนนเจตคติทั้งฉบับที่สามารถที่จะเป็นตัวบ่งชี้คะแนนรวมของเจตคติได้

6.6) ผู้วิจัยตัดข้อความที่ไม่มีคุณภาพทิ้ง (ไม่มีอำนาจจำแนกหรือไม่มีความสัมพันธ์กับคะแนนรวมเจตคติ) แล้วนำข้อความที่เหลือมาเรียบเรียงเป็นแบบวัดเจตคติขั้นสุดท้ายซึ่งประกอบด้วยข้อความเชิงนิมิตและข้อความเชิงนิเสธจำนวนใกล้เคียงกันแล้วคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยงโดยใช้สัมประสิทธิ์แอลฟาของ Cronbach (อ้างถึงในบุญเรียง, 2543: 168) ซึ่งพบว่า แบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ประกอบด้วยข้อความทั้งหมด 35 ข้อและมีค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยง 0.92

## 7. แบบสนทนากลุ่ม

แบบสนทนากลุ่มสำหรับอาจารย์ผู้สอนและนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาดังนี้

7.1) ผู้วิจัยศึกษาเอกสารเกี่ยวกับโครงสร้างของรายวิชาและประมวลการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เพื่อนำมากำหนดประเด็นที่ใช้ในการสนทนากลุ่ม

7.2) ผู้วิจัยสร้างแบบสนทนากลุ่มตามประเด็นที่กำหนดไว้ซึ่งแบบสนทนากลุ่มแบ่งออกเป็น 2 ฉบับคือ แบบสนทนากลุ่มสำหรับอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และสำหรับนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มาแล้ว โดยแบบสนทนากลุ่มจะครอบคลุมประเด็นเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนรวมทั้งแนวทางการแก้ไขในการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

7.3) ผู้วิจัยนำแบบสนทนากลุ่มที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ช่วยตรวจสอบความครอบคลุมและความเหมาะสมของข้อความ

7.4) ผู้วิจัยทำการปรับปรุงแก้ไขแบบสนทนากลุ่มตามคำแนะนำของคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เพื่อให้เป็นแบบสนทนากลุ่มฉบับสมบูรณ์พร้อมนำไปใช้

### การเก็บรวบรวมข้อมูล

การเก็บรวบรวมข้อมูลงานวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็น 3 ช่วง โดยช่วงแรกเป็นการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน (เดือนกันยายน 2547) ช่วงที่สองเป็นการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ (เดือนพฤศจิกายน 2547 ถึงเดือนกุมภาพันธ์ 2548) และช่วงที่สามเป็นการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ (เดือนมิถุนายน 2548 ถึงเดือนกันยายน 2548) ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการติดต่ออาจารย์ผู้สอนและนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ได้ผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยตรงเพื่อขอความร่วมมือและนัดหมายสำหรับการจัดสนทนากลุ่ม เพื่อศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยการจัดสนทนากลุ่ม ซึ่งแบ่งกลุ่มสนทนาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คนและกลุ่มนิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชานี้มาแล้ว ซึ่งเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ผู้วิจัยได้ทำการคัดเลือกโดยพิจารณาจากข้อมูลส่วนตัว ผลการเรียนและความคิดเห็นของผู้สอน ได้นิสิตจำนวน 12 คน ที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ปานกลางและค่อนข้างอ่อนชั้นปีละ 6 คน

2. ผู้วิจัยนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นไปใช้ โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนเอง ซึ่งในรอบแรกนำไปทดลองใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียนในช่วงต้นเดือนพฤศจิกายน 2547 ถึงปลายเดือนกุมภาพันธ์ 2548 และในรอบที่สองได้นำไปใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียนในช่วงต้นเดือนมิถุนายน 2548 ถึงปลายเดือนกันยายน 2548 โดยใช้ทดลอง 16 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง

3. ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้ผ่านการวิเคราะห์และปรับปรุงแก้ไขแล้ว จำนวน 15 ข้อ มาทำการทดสอบก่อนเรียน (pre-test) กับนิสิตโดยใช้เวลา 3 ชั่วโมง

4. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มาให้นิสิตทำก่อนดำเนินการเรียนการสอนตามรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

5. ในแต่ละสัปดาห์ที่ผู้วิจัยดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกันโดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบคำอธิบาย กระบวนการกลุ่ม (หลักการเรียนแบบร่วมมือ) และระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้วิจัยได้มอบหมายชิ้นงานให้นักเรียนทำ ทั้งที่เป็นกลุ่มและรายบุคคลและทำการประเมินผลชิ้นงานที่มอบหมายด้วยแบบประเมินชิ้นงานและแบบประเมินการทำงานกลุ่มที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. สำหรับหน่วยการเรียนรู้ที่ 9-14 วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่างๆ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อสิ้นสุดการสอนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เพื่อใช้ประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

7. ระหว่างการเรียนการสอนมีการทดสอบโดยใช้แบบทดสอบย่อยเป็นระยะๆ กล่าวคือ หลังจากทำการสอนหน่วยที่ 1 (สัปดาห์ที่ 1-2) เสร็จสิ้นลง ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 1 ด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 หลังจากเสร็จสิ้นหน่วยที่ 2 (สัปดาห์ที่ 4-7) ด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 และสำหรับหน่วยที่ 3 (สัปดาห์ที่ 9-14) แบ่งการทดสอบย่อยออกเป็น 2 ครั้ง โดยใช้แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 และ 4 ตามลำดับเพื่อดูพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด ให้นักเรียนต้องเรียนซ่อมเสริมกับผู้สอนโดยตรงหรือเรียนผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn จากนั้นให้ทำการทดสอบใหม่อีกครั้ง ด้วยแบบทดสอบที่มีลักษณะโจทย์ใกล้เคียงกับแบบทดสอบเดิมที่นักเรียนไม่ผ่านเกณฑ์และคะแนนที่นักเรียนได้รับในครั้งนี้เป็นเพียงคะแนนเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด

8. ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับเดิมจำนวน 15 ข้อมาทำการทดสอบหลังเรียน (post-test) กับนักเรียนโดยใช้เวลา 3 ชั่วโมงแล้วนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลของการทดสอบก่อนเรียนเพื่อดูพัฒนาการของนักเรียน

9. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติของนักเรียนต่อการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มาให้นักเรียนทำ หลังสิ้นสุดกระบวนการเรียนการสอนเพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลก่อนเรียน

10. ผู้วิจัยให้นักเรียนตอบแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน เพื่อรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนเกี่ยวกับความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลที่ได้จากการสนทนากลุ่มของอาจารย์ผู้สอนและนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ใช้วิธีวิเคราะห์เนื้อหา (content analysis) โดยนำข้อมูลมาเรียบเรียงและจำแนกอย่างเป็นระบบ จากนั้นนำมาตีความหมาย เชื่อมโยงความสัมพันธ์ และสร้างข้อสรุปจากข้อมูลต่างๆ ที่รวบรวมได้

2. ข้อมูลที่ได้จากแบบสอบถามวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใช้คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยและค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย

3. ข้อมูลที่ได้จากแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ใช้คำร้อยละและค่าเฉลี่ย โดยการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตพิจารณาจากคะแนนรวมของทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งประเมินทั้งหมด 6 ครั้ง ในแต่ละครั้งได้คะแนนระหว่าง 0-4 และกำหนดเกณฑ์การประเมินผล ดังนี้

ช่วงคะแนนร้อยละ 80-100 หมายถึง นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก

ช่วงคะแนนร้อยละ 70-79 หมายถึง นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับดี

ช่วงคะแนนร้อยละ 60-69 หมายถึง นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง

ช่วงคะแนนร้อยละ 50-59 หมายถึง นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับน้อย

ช่วงคะแนนร้อยละ 0-49 หมายถึง นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับน้อยมาก

4. ข้อมูลที่ได้จากแบบประเมินชิ้นงานใช้คำร้อยละและค่าเฉลี่ยน้ำหนักคะแนนของระดับพฤติกรรมและกำหนดเกณฑ์การประเมินผลดังนี้

ช่วงคะแนนร้อยละ 80-100 หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนและถูกต้องดีมาก

ช่วงคะแนนร้อยละ 70-79 หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนและถูกต้องดี

ช่วงคะแนนร้อยละ 60-69 หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนและถูกต้องปานกลาง

ช่วงคะแนนร้อยละ 50-59 หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนและถูกต้องน้อย

ช่วงคะแนนร้อยละ 0-49 หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ

5. ข้อมูลที่ได้จากแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มทั้งที่ประเมินโดยผู้สอนและนิสิตใช้คำร้อยละและค่าเฉลี่ยน้ำหนักคะแนนของระดับพฤติกรรมซึ่งแปลความหมายได้ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 3.50 - 4.00 หมายถึง มาก

ค่าเฉลี่ย 2.50 - 3.49 หมายถึง ปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.50 - 2.49 หมายถึง น้อย

ค่าเฉลี่ย 1.00 - 1.49 หมายถึง ต้องปรับปรุง

6. ข้อมูลที่ได้จากแบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนใช้วิธีวิเคราะห์เนื้อหา การแจกแจงความถี่และหาค่าร้อยละ

7. ข้อมูลที่ได้จากแบบวัดเจตคติของนิสิตใช้คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยและค่าสัมประสิทธิ์การกระจายโดยค่าเฉลี่ยน้ำหนักคะแนนของระดับเจตคติแปลความหมายได้ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.50 – 5.00 หมายถึง เห็นด้วยอย่างยิ่ง

ค่าเฉลี่ย 3.50 – 4.49 หมายถึง เห็นด้วย

ค่าเฉลี่ย 2.50 – 3.49 หมายถึง ไม่แน่ใจ

ค่าเฉลี่ย 1.50 – 2.49 หมายถึง ไม่เห็นด้วย

ค่าเฉลี่ย 1.00 – 1.49 หมายถึง ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง

## บทที่ 4

### ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์

การวิจัยเรื่องการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์มีผลการวิจัยและข้อวิจารณ์ ดังนี้

#### ผลการวิจัย

ผลการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอเป็น 5 ตอน ดังนี้

1. การพัฒนาการเรียนการสอน
2. ผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้
  - 2.1) ผลการเรียนรู้ของนิสิต
    - 2.1.1) ผลการประเมินโดยใช้แบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
    - 2.1.2) ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต
    - 2.1.3) ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต
  - 2.2) ทักษะทางสังคม
  - 2.3) ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
  - 2.4) เจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
  - 2.5) ความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอน
3. ปัญหาและแนวทางการปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากการนำไปทดลองใช้

#### 4. ผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้

##### 4.1) ผลการเรียนรู้ของนิสิต

4.1.1) ผลการประเมินโดยใช้แบบสอบถามวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

4.1.2) ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต

4.1.3) ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต

##### 4.2) ทักษะทางสังคม

##### 4.3) ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4.4) เจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

##### 4.5) ความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอน

#### 5. การปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากผลของการนำไปใช้

##### ผลการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

ผลจากการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้นำข้อมูลดังกล่าวมาสร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งมีลักษณะเป็นแผนการจัดการจัดองค์ประกอบต่างๆ ของการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย หลักการ วัตถุประสงค์ สารการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้ การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ใช้กระบวนการเรียนการสอนซึ่งเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกัน โดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือ และระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ที่ประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน คือ ช้่นนำเข้าสู่บทเรียน ช้่นเสนอสาระการเรียนรู้ ช้่นสรุปความรู้ ช้่นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้ และช้่นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ดังนี้

**ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน** เป็นขั้นตอนเพื่อสร้างแรงจูงใจหรือเร้าความสนใจของนิสิต ให้เกิดความอยากรู้ อยากรู้อะไร อยากรู้อะไรที่จะคิดแก้ปัญหา เตรียมพร้อมที่จะเรียนรู้ รวมทั้งทำให้นิสิต ได้ทราบจุดมุ่งหมายในการเรียน สิ่งที่จะเรียนและเกณฑ์การประเมินผล ซึ่งในขั้นตอนนี้ผู้สอนสามารถใช้เทคนิควิธีการที่หลากหลาย ได้แก่ ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะสอนและเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินผลในแต่ละกิจกรรมก่อนที่จะทำการสอน การตรวจสอบและทบทวนความรู้พื้นฐานของผู้เรียน ทบทวนบทเรียนที่ผ่านมา เผลยการบ้านหรือ โจทย์ที่นิสิตยังไม่เข้าใจในคาบที่แล้ว เพื่อทำให้เกิดความเชื่อมโยงระหว่างความรู้เดิมและความรู้ใหม่ของผู้เรียน ตลอดจนเตรียมความพร้อมที่จะดำเนินกิจกรรมต่อไป

**ขั้นที่ 2 ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้** เป็นขั้นตอนของการนำเสนอเนื้อหาสาระที่ต้องการ ให้นิสิตเกิดการเรียนรู้ โดยบทบาทสำคัญอยู่ที่ผู้สอน ที่จะต้องเป็นผู้ที่คอยกระตุ้นให้นิสิตเกิดการเรียนรู้หรือผู้จัดสถานการณ์ในการเรียนรู้ เพื่อให้นิสิตได้ฝึกคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหา การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยผ่านเทคนิควิธีที่หลากหลายและเหมาะสมกับเนื้อหาสาระ ซึ่งในขั้นตอนนี้ผู้สอนสามารถใช้วิธีการที่หลากหลาย ได้แก่ วิธีสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด การถามตอบประกอบการอธิบาย การจัดกิจกรรมกลุ่ม การให้นิสิตออกมาทำโจทย์บนกระดานและให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็นร่วมกัน และการทำ กิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

**ขั้นที่ 3 ขั้นสรุปความรู้** เป็นขั้นตอนที่ผู้สอนให้นิสิตช่วยกันสรุป ไม่ว่าจะป็นรายบุคคล หรือกลุ่ม รวมทั้งสรุปความรู้ที่ได้ผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อสรุปสาระสำคัญที่ได้จากการเรียนรู้หรือสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ และสามารถนำ ความรู้หรือวิธีการที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาต่อไป

**ขั้นที่ 4 ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้** ประกอบด้วยกิจกรรมที่ให้นิสิตทำเป็นกลุ่มหรือ รายบุคคลตามความเหมาะสม ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ทำให้นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาหรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ โดยทำกิจกรรมที่ได้รับ มอบหมายจากประสบการณ์ต่างๆ ที่ผู้สอนจัดให้ ซึ่งเป็นแบบฝึกหัด ใบงาน แบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หรือการทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหา ผ่านเว็บ M@xLearn

**ขั้นที่ 5 ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้** ประกอบด้วยกิจกรรมการวัดผลและประเมินผลควบคู่กับกิจกรรมทุกขั้นตอนที่กล่าวมาแล้ว เป็นการประเมินผลระหว่างเรียนเพื่อสังเกตผลการปฏิบัติกิจกรรมทุกขั้นตอนว่าเป็นไปตามที่คาดหวังหรือไม่ เพื่อจะได้นำผลที่ได้ไปปรับปรุงการเรียนการสอนในครั้งต่อไป กิจกรรมในขั้นตอนนี้มีหลายลักษณะ ได้แก่ ผู้สอนให้นิสิตทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง เพื่อใช้ตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตพร้อมทั้งเฉลยในห้องเรียน การสังเกตการทำกิจกรรมกลุ่ม การแสดงความคิดเห็นของนิสิตในกลุ่ม การตอบคำถามของนิสิต การทดสอบประจำหน่วยและแจ้งผลการทดสอบ พร้อมข้อบกพร่องต่างๆ ที่นิสิตควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบเสร็จ การเรียนซ่อมเสริมสำหรับนิสิตที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด และการตรวจผลงานหรือการบ้านของนิสิต ซึ่งกิจกรรมเหล่านี้ทำให้ผู้สอนได้รับข้อมูลป้อนกลับสำหรับนำมาปรับปรุงการเรียนการสอนให้ดียิ่งขึ้น และทำให้ทั้งผู้สอนและนิสิตมีความเข้าใจซึ่งกันและกัน ตลอดจนทำให้บรรยากาศในการเรียนการสอนเป็นไปด้วยดี

### **ผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้ในรอบที่หนึ่ง**

ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้กับนิสิตคณะศึกษาศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน ผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนิสิตมีดังต่อไปนี้

#### **ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต**

การประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตนั้น ผู้วิจัยพิจารณาจากผลการประเมินที่ได้จากการทำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียนในสัดส่วนคิดเป็นร้อยละ 25 ร้อยละ 25 ร้อยละ 40 และร้อยละ 10 ตามลำดับ ผลการประเมินมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

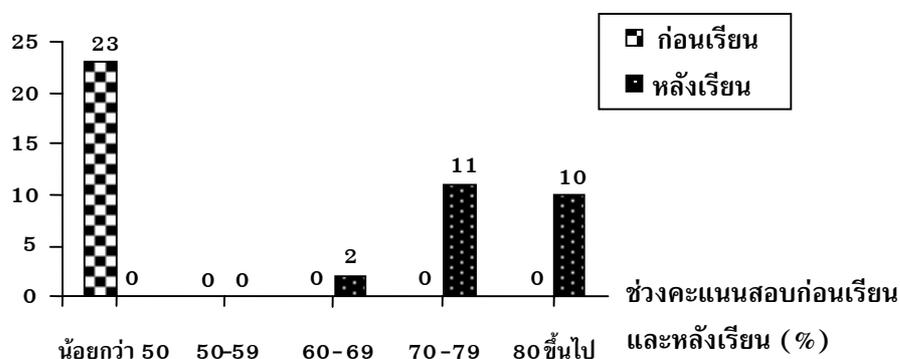
### ผลการประเมินโดยใช้แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีลักษณะเป็นแบบอัตนัย จำนวน 15 ข้อ ไปทดสอบนิสิตจำนวน 23 คน ทั้งหมด 2 ครั้ง คือ ก่อนเรียนและหลังเรียน รายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีระยะเวลาในการเรียนการสอน 1 ภาคเรียน แล้วนำคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนที่ได้มาเปรียบเทียบและคิดเป็นค่าร้อยละ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 2 และ ภาพที่ 5

ตารางที่ 2 ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

	คะแนนก่อนเรียน (100)	คะแนนหลังเรียน (100)	เพิ่มขึ้น
ค่าเฉลี่ย	24.74	80.37	55.63
ร้อยละ	24.74	80.37	55.63
สัมประสิทธิ์การกระจาย	0.36	0.11	-

จำนวนนิสิต (คน)



ภาพที่ 5 จำนวนนิสิตจำแนกตามช่วงคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

จากตารางที่ 2 ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพบว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีคะแนนสอบหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากคะแนนสอบก่อนเรียนอย่างชัดเจนโดยนิสิตมีคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนร้อยละ 24.74 และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนร้อยละ 80.37 หรือคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนเพิ่มขึ้นร้อยละ 55.63 และหากพิจารณาการกระจายของคะแนนสอบพบว่าคะแนนสอบหลังเรียนมีการกระจายน้อยกว่าคะแนนสอบก่อนเรียนมาก กล่าวคือสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนสอบหลังเรียน (0.11) มีค่า

ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนสอบก่อนเรียน (0.36) แสดงว่านิสิตมีคะแนนสอบหลังเรียนที่ใกล้เคียงกันมากขึ้นหรือคะแนนสอบหลังเรียนของนิสิตเกาะกลุ่มกันมากขึ้นนั่นเอง นอกจากนี้จากภาพที่ 5 แสดงให้เห็นว่าหากจำแนกนิสิตเป็นกลุ่มตามช่วงของคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียนพบว่านิสิตทั้งหมด (คิดเป็นร้อยละ 100) ได้คะแนนสอบก่อนเรียนต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ (คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 50) แต่คะแนนสอบของนิสิตหลังจากเรียนตามรูปแบบการเรียนการสอนแล้ว พบว่า ไม่มีนิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ ในขณะที่นิสิตทั้งหมด (23 คนหรือร้อยละ 100) ได้คะแนนสอบหลังเรียนอยู่ในระดับปานกลางขึ้นไป (คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไป) โดยนิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับปานกลาง (คะแนนร้อยละ 60-69) มีจำนวน 2 คน นิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับดี (คะแนนร้อยละ 70-79) มีจำนวน 11 คนและนิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับดีมาก (คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป) มีจำนวน 10 คน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นเวลา 1 ภาคเรียนแล้วนิสิตส่วนใหญ่มีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างชัดเจนและได้คะแนนสอบใกล้เคียงกันมากขึ้นกว่าก่อนเรียน

### ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต

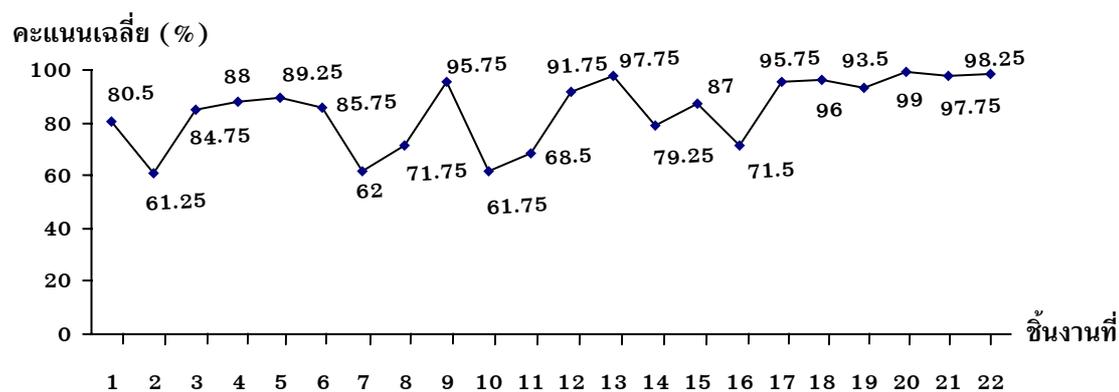
ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จำนวน 22 ชิ้นงาน โดยใช้แบบประเมินชิ้นงานจำนวน 5 แบบ คือ แบบประเมินชิ้นงานแบบฝึกหัด การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม กิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn แต่ละแบบประเมินชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนทั้งสิ้น 5 ระดับ ตั้งแต่ 0 ถึง 4 แสดงไว้ในตารางที่ 3 ภาพที่ 6 ภาพที่ 7 และภาพที่ 8

### ตารางที่ 3 ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต

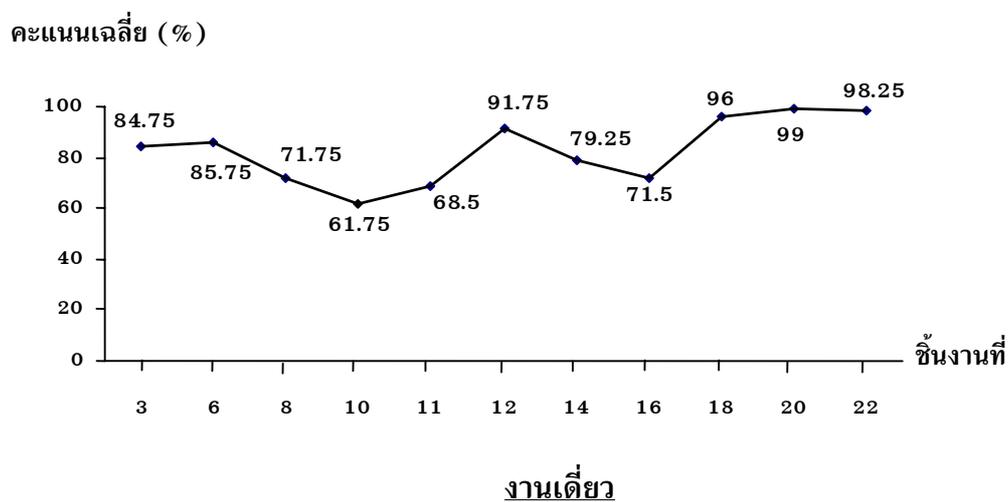
	ชิ้นงานที่										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ค่าเฉลี่ย	3.22	2.45	3.39	3.52	3.57	3.43	2.48	2.87	3.83	2.47	2.74
ร้อยละ	80.50	61.25	84.75	88.00	89.25	85.75	62.00	71.75	95.75	61.75	68.50

ตารางที่ 3 (ต่อ)

	ชิ้นงานที่											ค่าเฉลี่ย
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
ค่าเฉลี่ย	3.67	3.91	3.17	3.48	2.86	3.83	3.84	3.74	3.96	3.91	3.93	3.35
ร้อยละ	91.75	97.75	79.25	87.00	71.50	95.75	96.00	93.50	99.00	97.75	98.25	83.69

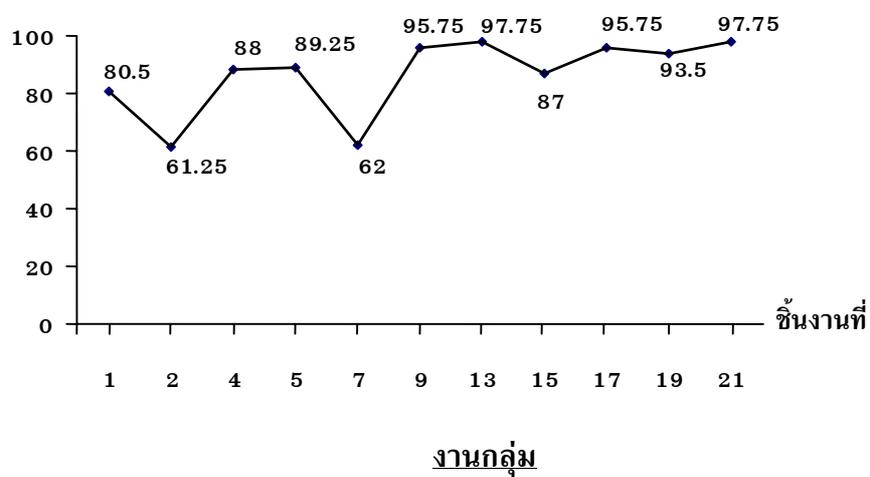


ภาพที่ 6 ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่ของชิ้นงาน



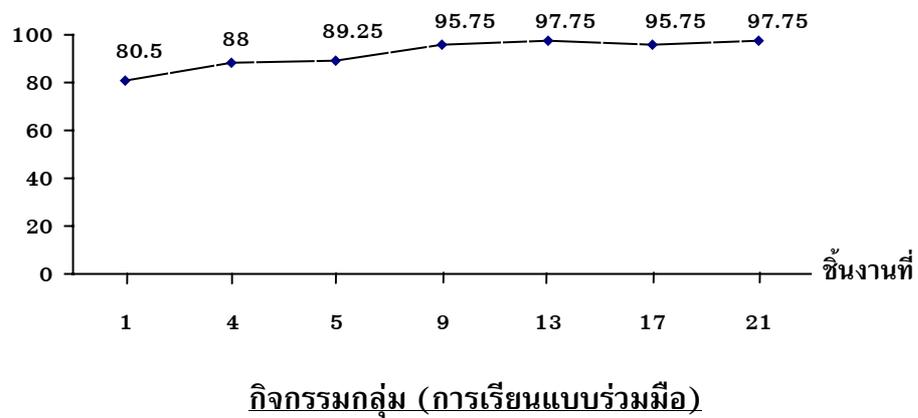
ภาพที่ 7 ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะการมอบหมายงาน

คะแนนเฉลี่ย (%)



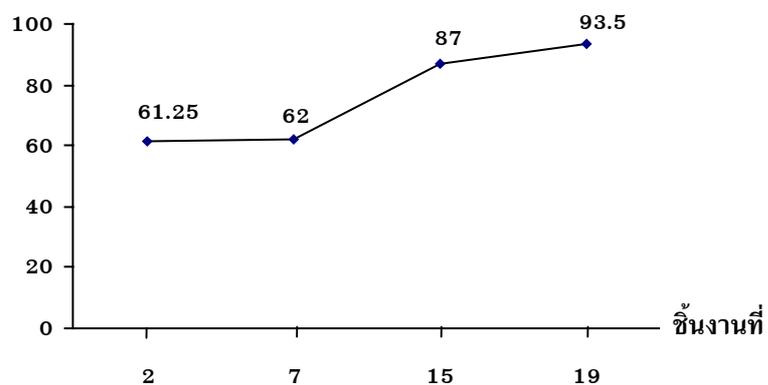
ภาพที่ 7 (ต่อ)

คะแนนเฉลี่ย (%)



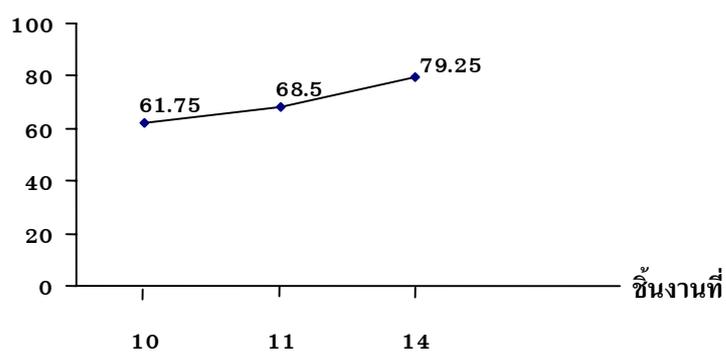
ภาพที่ 8 ผลการประเมินชั้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะของชั้นงาน

คะแนนเฉลี่ย (%)



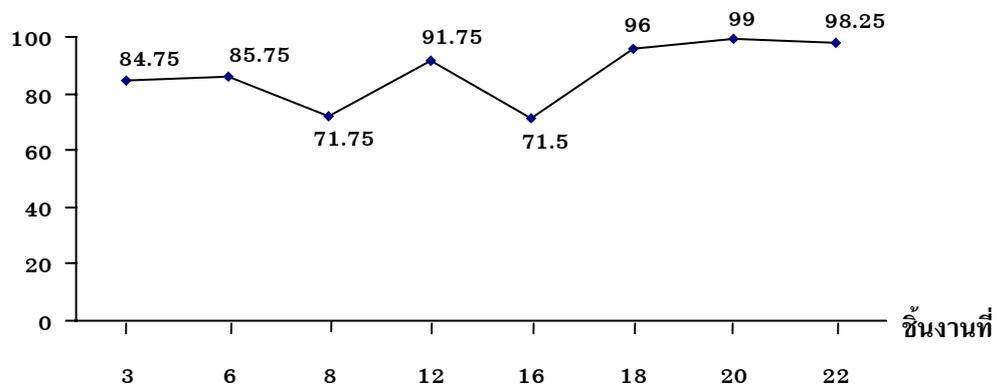
กิจกรรมกลุ่มบน M@xlearn

คะแนนเฉลี่ย (%)



กิจกรรมรายบุคคลบน M@xlearn

คะแนนเฉลี่ย (%)



แบบฝึกหัด

ภาพที่ 8 (ต่อ)

จากตารางที่ 3 ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิตแสดงว่า ชิ้นงานของนิสิตที่เรียน รายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทุกชิ้นงานได้รับการประเมินชิ้นงานว่ามีความชัดเจนและถูกต้องในระดับปานกลางขึ้นไปคือมีคะแนนเฉลี่ยที่สูงกว่าร้อยละ 60 โดยชิ้นงานที่ได้รับการประเมินว่ามีความชัดเจนและถูกต้องในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าร้อยละ 80) มีทั้งสิ้น 15 ชิ้นงานและหากพิจารณาภาพที่ 6 พบว่าในภาพรวมคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานไม่ได้เพิ่มขึ้นตามลำดับตั้งแต่ชิ้นงานที่ 1 ถึงชิ้นงานที่ 22 แต่คะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานส่วนใหญ่ยังอยู่ในระดับที่น่าพอใจคืออยู่ในระดับดีถึงดีมาก

ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานโดยจำแนกชิ้นงานเป็นกลุ่มตามลักษณะการมอบหมายงานและลักษณะของชิ้นงาน ดังแสดงในภาพที่ 7 และภาพที่ 8 ซึ่งจากภาพที่ 7 แสดงให้เห็นว่า คะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานไม่ได้เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงานทั้งในชิ้นงานเดี่ยวและชิ้นงานกลุ่ม คะแนนเฉลี่ยบางครั้งเพิ่มขึ้น บางครั้งลดลง แต่ในภาพรวมพบว่าคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานกลุ่ม (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 86.23) สูงกว่าชิ้นงานเดี่ยว (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 82.57) ทั้งนี้อาจเนื่องจากการทำงานกลุ่มนั้นมีการระดมสมองทำให้เกิดแนวคิดที่หลากหลาย ชิ้นงานที่ได้ จึงมีคุณภาพมากกว่าชิ้นงานเดี่ยวซึ่งเป็นงานที่นิสิตต้องทำงานตามลำพังและนิสิตบางคนยังขาดทักษะด้านการเขียนจึงทำให้คะแนนเฉลี่ยชิ้นงานเดี่ยวต่ำกว่าชิ้นงานกลุ่ม แต่หากนำชิ้นงานทั้งหมดมาจำแนกตามลักษณะของชิ้นงานสามารถจำแนกได้เป็น 4 ประเภท คือ ชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่ม (การเรียนแบบร่วมมือ) ประเภทกิจกรรมกลุ่ม บน M@xLearn ประเภทกิจกรรมรายบุคคล บน M@xLearn และประเภทแบบฝึกหัด ดังแสดงในภาพที่ 8 พบว่า ชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่ม บน M@xLearn และประเภทกิจกรรมรายบุคคล บน M@xLearn มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงาน สำหรับชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่ม (การเรียนแบบร่วมมือ) ส่วนใหญ่มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงาน ยกเว้นชิ้นงานที่ 17 นั้นมีคะแนนเฉลี่ยที่ลดลง แต่ก็ยังอยู่ในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 95.75) และชิ้นงานประเภทแบบฝึกหัดส่วนใหญ่มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงาน ยกเว้นชิ้นงานที่ 8 (การอ้างเหตุผล) และชิ้นงานที่ 16 (การพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  และการแจกแจง) นั้นมีคะแนนเฉลี่ยที่ลดลง แต่ก็ยังอยู่ในระดับดี (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 71.75 และ 71.50 ตามลำดับ) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากยังมีนิสิตบางคน que แสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาไม่ชัดเจนและยังขาดการสรุปคำตอบ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นิสิตส่วนใหญ่สามารถผลิตชิ้นงานที่มีคุณภาพสูงและมีพัฒนาการในการผลิตชิ้นงานที่ดีขึ้นตามลำดับ

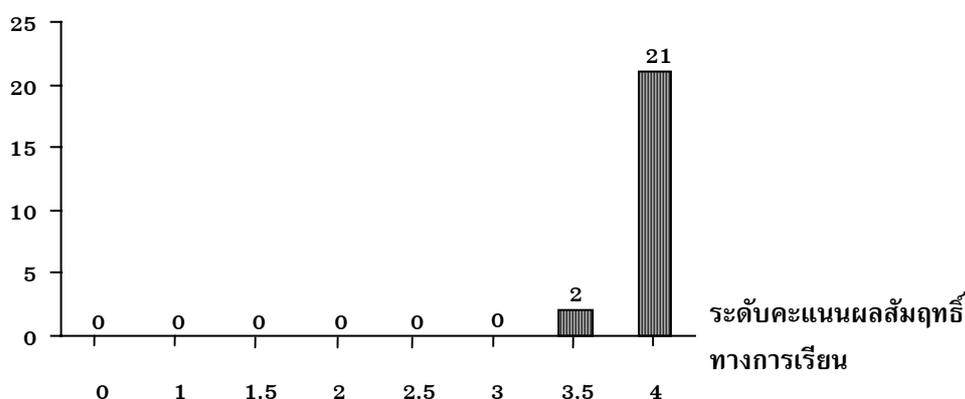
### ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พิจารณาจากผลการประเมินที่ได้จากแบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ ผลการประเมินชิ้นงานและความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียนโดยคิดสัดส่วนผลการประเมินดังกล่าวเป็นร้อยละ 25 ร้อยละ 25 ร้อยละ 40 และร้อยละ 10 ตามลำดับ ซึ่งผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตมีรายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 4 และ ภาพที่ 9

**ตารางที่ 4** ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากแบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน

	คะแนนความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน (10%)	คะแนนประเมินชิ้นงาน (40%)	คะแนนการทดสอบประจำหน่วย (25%)	คะแนนสอบ (25%)	รวม (100%)
ค่าเฉลี่ย	10	35.30	21.24	20.11	86.65
ร้อยละ	100	88.25	84.96	80.44	86.65

จำนวนนิสิต (คน)



**ภาพที่ 9** จำนวนนิสิตจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากตารางที่ 4 แสดงให้เห็นว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีเยี่ยม (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 86.65) และจากภาพที่ 9 แสดงให้เห็นว่า นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีมาก (ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับ 3.5) มีจำนวน 2 คน และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีเยี่ยม (ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับ 4) มีจำนวน 21 คน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่านิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในระดับที่ดีเยี่ยมน่าพึงพอใจ ซึ่งแสดงว่า เมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แล้ว นิสิตมีความรู้ ความเข้าใจและมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถนำความรู้และทักษะที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปได้

### **ทักษะทางสังคม**

การประเมินทักษะทางสังคมของนิสิตจากการเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พิจารณาโดยรวมคะแนนจากแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ฉบับคือ แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยนิสิตและแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยผู้สอนซึ่งมีการประเมินทั้งหมด 7 ครั้ง และการประเมินผลในแต่ละครั้งมีเกณฑ์การให้คะแนนตั้งแต่ 1 ถึง 4 ซึ่งผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตในการเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 23 คน สามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้ดังตารางที่ 5 และ ตารางที่ 6

**ตารางที่ 5** ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน

ข้อรายการ/พฤติกรรม		กิจกรรมที่							ค่าเฉลี่ย	
		1	2	3	4	5	6	7		
1) ความชัดเจนในการ										
กำหนดบทบาทหน้าที่	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2) ลักษณะการเป็น										
ผู้นำและผู้ตาม	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
3) การมีส่วนร่วมใน										
กิจกรรมกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
4) ความรับผิดชอบงานและ										
ความตั้งใจปฏิบัติงาน	ค่าเฉลี่ย	3.75	3.83	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.94
ที่ได้รับมอบหมาย	ร้อยละ	93.75	95.75	100	100	100	100	100	100	98.50
5) การช่วยเหลือเอื้อเพื่อ										
เพื่อแก่กันในกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
6) กลุ่มทำงานเสร็จและ										
ถูกต้องภายในเวลา	ค่าเฉลี่ย	3.50	3.83	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.90
ที่กำหนด	ร้อยละ	87.50	95.75	100	100	100	100	100	100	97.50
7) การร่วมกันตัดสินใจ										
และรับฟังความคิดเห็น	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
ของเพื่อนในกลุ่ม	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
8) ผลงานของกลุ่มถูกต้อง										
และสมบูรณ์	ค่าเฉลี่ย	3.75	3.50	3.83	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.87
	ร้อยละ	93.75	87.50	95.75	100	100	100	100	100	96.75
9) การนำเสนอผลงานของ										
กลุ่มหน้าชั้นเรียน	ค่าเฉลี่ย	3.25	3.50	3.83	3.83	4.00	4.00	4.00	4.00	3.77
มีความชัดเจน	ร้อยละ	81.25	87.50	95.75	95.75	100	100	100	100	94.25

จากตารางที่ 5 ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน พบว่า นิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรมและมีการพัฒนาพฤติกรรมดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับจากการประเมินครั้งที่ 1 จนถึงครั้งที่ 7 โดยพฤติกรรมที่มีคะแนนเฉลี่ยมากที่สุด (คะแนนเฉลี่ย 4.00) คือ ความชัดเจนในการกำหนดบทบาทหน้าที่ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม ลักษณะการเป็นผู้นำและผู้ตาม การมีส่วนร่วมในกิจกรรมกลุ่ม การช่วยเหลือเอื้อเพื่อแก่กันในกลุ่มและการร่วมกันตัดสินใจและรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนในกลุ่ม รองลงมาคือ ความรับผิดชอบงานและความตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย และกลุ่มทำงานเสร็จและถูกต้องภายในเวลาที่กำหนด ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกันคือ มีคะแนนเฉลี่ย 3.94 และ 3.90 ตามลำดับ

**ตารางที่ 6** ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิต

ข้อรายการ/พฤติกรรม		กิจกรรมที่							ค่าเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	
1) สมาชิกในกลุ่มรู้บทบาทหน้าที่ว่าจะทำอะไร	ค่าเฉลี่ย	3.74	3.87	3.87	3.91	3.74	3.91	3.91	3.85
	ร้อยละ	93.50	96.75	96.75	97.75	93.50	97.75	97.75	96.25
2) กลุ่มของเราพูดคุยกันเฉพาะในกลุ่มไม่เดินไปเดินมา	ค่าเฉลี่ย	3.96	3.91	3.83	3.96	3.91	3.83	3.87	3.90
	ร้อยละ	99.00	97.75	95.75	99.00	97.75	95.75	96.75	97.39
3) สมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตนและตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย	ค่าเฉลี่ย	3.91	3.91	3.87	3.87	3.87	3.87	3.87	3.88
	ร้อยละ	97.75	97.75	96.75	96.75	96.75	96.75	96.75	97.04
4) สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน	ค่าเฉลี่ย	3.83	3.87	3.87	3.91	3.96	3.91	3.96	3.90
	ร้อยละ	95.75	96.75	96.75	97.75	99.00	97.75	99.00	97.54
5) สมาชิกในกลุ่มร่วมกันแสดงความคิดเห็น	ค่าเฉลี่ย	3.70	3.78	3.83	3.87	3.91	3.91	3.91	3.84
	ร้อยละ	92.50	94.50	95.75	96.75	97.75	97.75	97.75	96.11
6) สมาชิกในกลุ่มแลกเปลี่ยนสิ่งที่เรียนต่อกัน	ค่าเฉลี่ย	3.78	3.65	3.91	3.83	3.70	3.78	3.83	3.78
	ร้อยละ	94.50	91.25	97.75	95.75	92.50	94.50	95.75	94.50
7) สมาชิกในกลุ่มช่วยกันตัดสินใจ	ค่าเฉลี่ย	3.65	3.83	3.87	3.87	3.87	3.83	3.83	3.82
	ร้อยละ	91.25	95.75	96.75	96.75	96.75	95.75	95.75	95.54
8) กลุ่มของเราใช้เวลาอย่างมีประสิทธิภาพ	ค่าเฉลี่ย	3.39	3.39	3.35	3.87	3.78	4.00	4.00	3.68
	ร้อยละ	84.75	84.75	83.75	96.75	94.50	100	100	92.07
9) สมาชิกในกลุ่มรับฟังความคิดเห็นของเพื่อน	ค่าเฉลี่ย	3.91	3.87	3.83	3.91	3.87	3.91	3.91	3.89
	ร้อยละ	97.75	96.75	95.75	97.75	96.75	97.75	97.75	97.18
10) สมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	3.87	3.87	3.91	3.91	3.96	3.96	4.00	3.93
	ร้อยละ	96.75	96.75	97.75	97.75	99.00	99.00	100	98.12
11) กลุ่มของเราช่วยเหลือเพื่อนบางคนเป็นพิเศษเมื่อเรารู้ว่าเพื่อนมีปัญหา	ค่าเฉลี่ย	3.74	3.48	3.65	3.74	3.61	3.78	3.74	3.68
	ร้อยละ	93.50	87.50	91.25	93.50	90.25	94.50	93.50	92.00
12) กลุ่มของเราตรวจสอบและซักถามจนเพื่อน ๆ ในกลุ่มเข้าใจตรงกันทุกคน	ค่าเฉลี่ย	3.70	3.83	3.87	3.83	3.65	3.87	3.78	3.79
	ร้อยละ	92.50	95.75	96.75	95.75	91.25	96.75	94.50	94.75

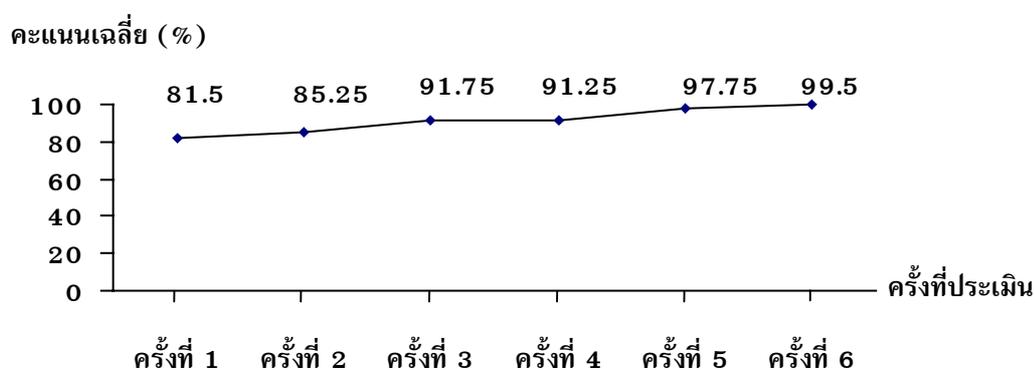
จากตารางที่ 6 ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิตพบว่า นิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรมและพฤติกรรมที่มีคะแนนเฉลี่ยมากที่สุด (คะแนนเฉลี่ย 3.93) คือ การที่สมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม รองลงมาคือ กลุ่มของเราพูดคุยกันเฉพาะในกลุ่ม ไม่เดินไปเดินมาและสมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกันมีคะแนนเฉลี่ย 3.90 และสมาชิกในกลุ่มรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนและสมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตนและตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกันคือ มีคะแนนเฉลี่ย 3.89 และ 3.88 ตามลำดับ

### ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจากการเรียนรายวิชา 158325 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พิจารณาโดยรวมคะแนนจากแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีการประเมินทั้งหมด 6 ครั้งและการประเมินแต่ละครั้งมีเกณฑ์การให้คะแนน ตั้งแต่ 0 ถึง 4 ซึ่งผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตในการเรียนรายวิชา 158325 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 23 คน แสดงไว้ในตารางที่ 7 และ ภาพที่ 10

ตารางที่ 7 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

	การประเมินผลครั้งที่						ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	4	5	6	
ค่าเฉลี่ย	3.26	3.41	3.67	3.65	3.91	3.98	3.64
ร้อยละ	81.50	85.25	91.75	91.25	97.75	99.50	91.17



ภาพที่ 10 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตตามครั้งที่ของการประเมินผล

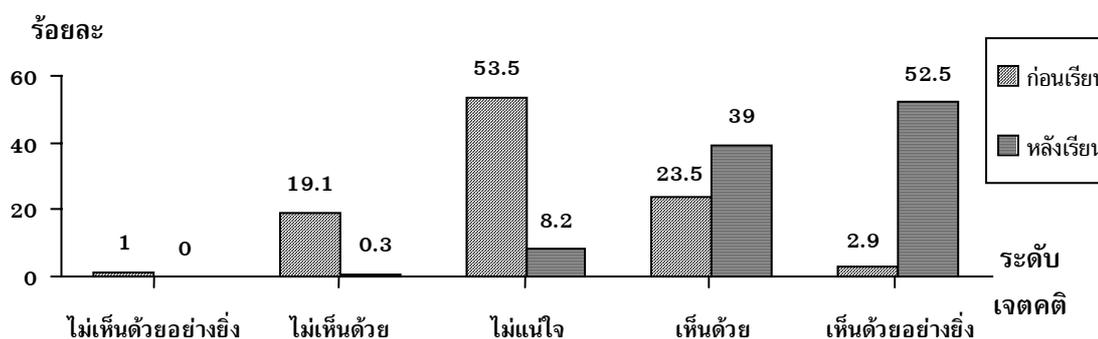
จากตารางที่ 7 และ ภาพที่ 10 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต แสดงว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 91.17) และมีการพัฒนาทักษะดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับจากการประเมินผลครั้งที่ 1 จนถึงครั้งที่ 6 ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นเวลา 1 ภาคเรียนแล้วนิสิตส่วนใหญ่มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ดีมากและมีการพัฒนาทักษะที่ดีขึ้นตามลำดับของการเรียนการสอน

### **เจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**

ผู้วิจัยศึกษาเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยนำแบบวัดเจตคติที่ประกอบด้วยข้อความทั้งหมด 35 ข้อไปวัดเจตคติของนิสิต 2 ครั้งคือ ก่อนเรียนและหลังเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียนซึ่งผลการศึกษาเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 23 คน สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 8 และ ภาพที่ 11

**ตารางที่ 8** ผลการประเมินเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

	ก่อนเรียน	หลังเรียน
ค่าเฉลี่ย	3.08	4.44
ร้อยละ	61.60	88.80
ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย	0.06	0.04



**ภาพที่ 11** ร้อยละของนิสิตจำแนกตามระดับเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325  
ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

จากตารางที่ 8 พบว่า คะแนนเจตคติของนิสิตส่วนใหญ่เพิ่มขึ้นโดยก่อนเรียนมีค่าเฉลี่ย 3.08 ซึ่งอยู่ในระดับไม่แน่ใจ แต่หลังจากได้เรียนแล้วมีค่าเฉลี่ย 4.44 ซึ่งอยู่ในระดับเห็นด้วย นอกจากนี้เมื่อพิจารณาการกระจายของคะแนน จะเห็นว่าคะแนนเจตคติของนิสิตหลังเรียนลดลงจากก่อนเรียน แสดงว่านิสิตมีเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ดีขึ้นและใกล้เคียงกันมากขึ้นและเมื่อพิจารณาภาพที่ 11 พบว่าในช่วงก่อนเรียนนิสิตส่วนใหญ่คิดเป็นร้อยละ 53.50 มีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับไม่แน่ใจมากที่สุด แต่ในช่วงหลังเรียนพบว่านิสิตส่วนใหญ่คิดเป็นร้อยละ 52.50 มีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับเห็นด้วยอย่างยิ่ง รองลงมาคือมีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับเห็นด้วยคิดเป็นร้อยละ 39.00

#### ความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอน

ผู้วิจัยได้สอบถามความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 23 คน ซึ่งสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้ดังตารางที่ 9

**ตารางที่ 9** ผลการสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้  
จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 23)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>ด้านเนื้อหาสาระ</b>						
1. เนื้อหาที่เรียนตรงตามวัตถุประสงค์ ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้	จำนวน	18	5	-	-	-
	ร้อยละ	78.26	21.74	-	-	-
2. การจัดเรียงลำดับหัวข้อของเนื้อหา มีความเหมาะสม	จำนวน	13	10	-	-	-
	ร้อยละ	56.52	43.48	-	-	-
3. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถใช้ เป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความ ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ ได้	จำนวน	11	12	-	-	-
	ร้อยละ	47.83	52.17	-	-	-
4. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถ นำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้ดี	จำนวน	12	11	-	-	-
	ร้อยละ	52.17	47.83	-	-	-
<b>ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน</b>						
5. กิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นเป็น กิจกรรมที่ส่งเสริมนิสิตให้เกิด การเรียนรู้เป็นกลุ่ม รายบุคคล และส่งเสริมทักษะทางสังคม	จำนวน	10	13	-	-	-
	ร้อยละ	43.48	56.52	-	-	-
6. ผู้สอนใช้วิธีสอนโดยการอธิบายและ แสดงเหตุผลประกอบทำให้นิสิตเกิด ความเข้าใจและชัดเจนยิ่งขึ้น	จำนวน	11	12	-	-	-
	ร้อยละ	47.83	52.17	-	-	-
7. การสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำ ให้นิสิตได้พัฒนากระบวนการคิดและ สติปัญญา	จำนวน	6	16	1	-	-
	ร้อยละ	26.09	69.57	4.34	-	-
8. กิจกรรมกลุ่มที่จัดขึ้นทำให้นิสิตได้ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับสมาชิก ภายในกลุ่มและเกิดความรู้ความเข้าใจ ในเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น	จำนวน	7	15	1	-	-
	ร้อยละ	30.43	65.23	4.34	-	-
9. ประสบการณ์ที่ได้รับจากการทำงาน ในการเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอน วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิต ได้พัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	จำนวน	6	16	1	-	-
	ร้อยละ	26.09	69.57	4.34	-	-
10. การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียน เป็นสิ่งที่จำเป็นและมีประโยชน์ สำหรับนิสิต	จำนวน	8	13	2	-	-
	ร้อยละ	34.78	56.52	8.70	-	-

## ตารางที่ 9 (ต่อ)

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 23)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>11. การทำแบบฝึกหัดและแบบวัดทักษะ</b>						
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิต	จำนวน	13	10	-	-	-
เกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ร้อยละ	56.52	43.48	-	-	-
<b>12. การทำกิจกรรมผ่านระบบสนับสนุน</b>						
การเรียนการสอน M@xLearn ทำให้	จำนวน	4	14	5	-	-
นิสิตได้รับความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์	ร้อยละ	17.39	60.87	21.74	-	-
ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น						
<b>ด้านสื่อการเรียนรู้</b>						
<b>13. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัด</b>						
การเรียนรู้รายวิชา 158325 ชั้นตอน	จำนวน	6	11	6	-	-
วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความ	ร้อยละ	26.09	47.82	26.09	-	-
หลากหลายทำให้นิสิตมองเห็นช่อง						
ทางการแสวงหาความรู้มากขึ้น						
<b>14. ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน</b>						
M@xLearn เป็นสื่อการเรียนรู้ที่มี	จำนวน	6	16	1	-	-
ความทันสมัยและเหมาะสมกับ	ร้อยละ	26.09	69.57	4.34	-	-
การเรียนรู้ในรายวิชานี้						
<b>15. เว็บไซต์รายวิชาที่ผู้สอนพัฒนาขึ้น</b>						
เป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม	จำนวน	8	12	3	-	-
เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ร้อยละ	34.78	52.17	13.05	-	-
ได้เป็นอย่างดี						
<b>ด้านการวัดผลและการประเมินผล</b>						
<b>16. เกณฑ์การประเมินผลรายวิชา 158325</b>						
ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	จำนวน	12	9	2	-	-
มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม	ร้อยละ	52.17	39.13	8.70	-	-
<b>17. การบอกเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงาน</b>						
แต่ละชิ้นงานก่อนทำให้นิสิตลงมือปฏิบัติ	จำนวน	9	14	-	-	-
ก่อให้เกิดความยุติธรรมและท้าทาย	ร้อยละ	39.13	60.87	-	-	-
ความสามารถของนิสิต						
<b>18. การทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียน</b>						
ทำให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่องต่าง ๆ	จำนวน	10	13	-	-	-
ของตนเองพร้อมทั้งนำข้อบกพร่อง	ร้อยละ	43.48	56.52	-	-	-
ไปปรับปรุงและแก้ไขเพื่อพัฒนาตนเอง						

**ตารางที่ 9 (ต่อ)**

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 23)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>19. การสอนซ่อมเสริมทำให้นิสิตสามารถ</b>						
พัฒนาตนเองและมีกำลังใจใน	จำนวน	2	18	3	-	-
การเรียนรู้มากขึ้น	ร้อยละ	8.70	78.25	13.05	-	-
<b>ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้</b>						
<b>20. รูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้ในการจัด</b>						
การเรียนรู้รายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธี						
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์						
<b>20.1) สามารถพัฒนาให้นิสิต</b>						
เกิดการเรียนรู้และ						
มีความมั่นใจในตนเอง						
เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความ	จำนวน	4	18	1	-	-
ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น	ร้อยละ	17.41	78.25	4.34	-	-
<b>20.2) สามารถพัฒนาให้นิสิต</b>						
นำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์						
ใช้ในการเรียนรายวิชา						
คณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้	จำนวน	6	16	1	-	-
	ร้อยละ	26.09	69.57	4.34	-	-
<b>ด้านผู้สอน</b>						
<b>21. ผู้สอนเอาใจใส่และให้ความเป็นกันเอง</b>						
กับนิสิตทำให้ช่วยส่งเสริมบรรยากาศ						
ในการเรียนการสอน						
	จำนวน	18	5	-	-	-
	ร้อยละ	78.26	21.74	-	-	-
<b>22. ผู้สอนเปิดโอกาสให้นิสิตได้แสดง</b>						
ความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและ						
ค้นพบความรู้ด้วยตนเอง						
	จำนวน	16	6	1	-	-
	ร้อยละ	69.57	26.09	4.34	-	-
<b>23. ผู้สอนตรวจชิ้นงานและการบ้าน</b>						
ของนิสิตอย่างสม่ำเสมอพร้อมให้						
คำแนะนำหากนิสิตมีประเด็นที่ยัง						
ไม่เข้าใจหรือมีข้อบกพร่อง						
	จำนวน	18	5	-	-	-
	ร้อยละ	78.26	21.74	-	-	-
<b>24. ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวก</b>						
และที่ปรึกษาที่ดีในการจัดกิจกรรม						
ที่เน้นกระบวนการกลุ่ม						
	จำนวน	16	7	-	-	-
	ร้อยละ	69.57	30.43	-	-	-

## ตารางที่ 9 (ต่อ)

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 23)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>ด้านการติดต่อสื่อสาร</b>						
25. การติดต่อสื่อสารระหว่างนิสิตกับผู้สอน และระหว่างนิสิตกับนิสิตผ่านทาง จดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบสนับสนุน การเรียนการสอน M@xLearn	จำนวน	9	14	-	-	-
มีความสะดวกและเป็นกันเอง	ร้อยละ	39.13	60.87	-	-	-

จากตารางที่ 9 พบว่า นิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาเป็นด้าน ๆ ได้ดังนี้

ด้านเนื้อหาสาระ พบว่า นิสิตส่วนใหญ่ร้อยละ 52.17 ถึงร้อยละ 78.26 มีความเห็นว่าเป็นเนื้อหาที่เรียนตรงตามวัตถุประสงค์ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้ การจัดเรียงลำดับหัวข้อของเนื้อหา มีความเหมาะสมและเนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่น ๆ ได้ดีในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งและนิสิตคิดเป็นร้อยละ 52.17 เห็นว่าเนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ในระดับเห็นด้วย

ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน พบว่า นิสิตคิดเป็นร้อยละ 56.52 มีความเห็นว่าการทำแบบฝึกหัดและแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งและนิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยว่าการสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำให้นิสิตได้พัฒนากระบวนการคิดและสติปัญญาและประสบการณ์ที่ได้รับจากการทำงานในการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิตได้พัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์คิดเป็นร้อยละ 69.57 รองลงมาคือ กิจกรรมกลุ่มที่จัดขึ้นทำให้นิสิตได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับสมาชิกภายในกลุ่มและเกิดความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนมากขึ้นคิดเป็นร้อยละ 65.23 และการทำกิจกรรมผ่านระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn ทำให้นิสิตได้รับความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นคิดเป็นร้อยละ 60.87

**ด้านสื่อการเรียนรู้** พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยว่าระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn เป็นสื่อการเรียนรู้ที่มีความทันสมัยและเหมาะสมกับการเรียนรู้ในรายวิชานี้คิดเป็นร้อยละ 69.57 รองลงมาคือ เว็บไซต์รายวิชาที่ผู้สอนพัฒนาขึ้นเป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดีคิดเป็นร้อยละ 52.17 และ สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความหลากหลายทำให้นิสิตมองเห็นช่องทางในการแสวงหาความรู้มากขึ้นคิดเป็นร้อยละ 47.82

**ด้านการวัดผลและการประเมินผล** พบว่า นิสิตคิดเป็นร้อยละ 52.17 มีความเห็นว่าการประเมินผลรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความชัดเจนเหมาะสมและยุติธรรมในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งและนิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยว่าการสอนซ่อมเสริมทำให้นิสิตสามารถพัฒนาตนเองและมีกำลังใจในการเรียนรู้มากขึ้นคิดเป็นร้อยละ 78.25 รองลงมาคือการบอกเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานแต่ละชิ้นงานก่อนให้นิสิตลงมือปฏิบัติก่อให้เกิดความยุติธรรมและทำลายความสามารถของนิสิตคิดเป็นร้อยละ 60.87 และการทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนทำให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่องต่าง ๆ ของตนเองพร้อมทั้งนำข้อบกพร่องไปปรับปรุงและแก้ไขเพื่อพัฒนาตนเองคิดเป็นร้อยละ 56.52

**ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้** พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยว่ารูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาให้นิสิตเกิดการเรียนรู้และมีความมั่นใจในตนเองเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์มากขึ้นคิดเป็นร้อยละ 78.25 รองลงมาคือ สามารถพัฒนาให้นิสิตนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่น ๆ ได้คิดเป็นร้อยละ 69.57

**ด้านผู้สอน** พบว่านิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่าผู้สอนเอาใจใส่และให้ความเป็นกันเองกับนิสิตทำให้ช่วยส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนการสอนและผู้สอนตรวจชิ้นงานและการบ้านของนิสิตอย่างสม่ำเสมอพร้อมให้คำแนะนำหากนิสิตมีประเด็นที่ยังไม่เข้าใจหรือมีข้อบกพร่องคิดเป็นร้อยละ 78.26 รองลงมาคือ ผู้สอนเปิดโอกาสให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วยตนเองและผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยการความสะอาดและที่ปรึกษาที่ดีในการจัดกิจกรรมที่เน้นกระบวนการกลุ่มคิดเป็นร้อยละ 69.57

ด้านการติดต่อสื่อสาร พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยว่าการติดต่อสื่อสารระหว่างนิสิตกับผู้สอนและระหว่างนิสิตกับนิสิตผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn มีความสะดวกและเป็นกันเอง คิดเป็นร้อยละ 60.87

ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่น ๆ ได้แก่

1. ผู้สอนมีเทคนิคการสอนที่ดีทำให้เข้าใจดีขึ้น สอนสนุก น่าสนใจ น่าติดตามและประทับใจผู้สอนที่สามารถอธิบายเรื่องยากให้กลายเป็นเรื่องง่ายได้และทำให้นิสิตอยากมาเรียนสม่ำเสมอ
2. ผู้สอนให้ความสนใจ เอาใจใส่นิสิตมากและมีความเป็นกันเองแก่นิสิตทำให้นิสิตกล้าซักถามปัญหาหรือประเด็นที่สงสัย
3. เมื่อนิสิตไม่เข้าใจผู้สอนก็เปิดโอกาสให้นิสิตเข้าพบเพื่อซักถามข้อสงสัยหรือเรียนซ่อมเสริมทำให้นิสิตมีกำลังใจและเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น
4. ผู้สอนให้ความสำคัญแก่นิสิตเป็นรายบุคคล สอบถามเฉพาะบุคคลพร้อมทั้งชี้แจงข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นในการทำงานแต่ละชิ้นงานจนทำให้นิสิตทราบข้อบกพร่องของตนเองแล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข
5. ผู้สอนตรงต่อเวลาในการเข้าสอนดีมากและมีความรับผิดชอบต่อการตรวจงานของนิสิตและการจัดกิจกรรมต่าง ๆ ในห้องเรียน
6. ความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับเป็นประโยชน์มากเพราะสามารถใช้เป็นพื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไปได้เป็นอย่างดี
7. กิจกรรมต่าง ๆ ที่นำมาใช้จัดการเรียนการสอนในรายวิชานี้มีความเหมาะสมมาก เพราะช่วยส่งเสริมให้นิสิตเกิดการเรียนรู้ได้ดี
8. กิจกรรมกลุ่มที่นำมาใช้เป็นกิจกรรมที่ดีมากทำให้นิสิตมีส่วนร่วมในการเรียนรู้มากขึ้น เป็นกิจกรรมที่มีความหลากหลาย สนุกสนานทำให้มีการช่วยเหลือกันในกลุ่มและมีการแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน

9. โจทย์ในแบบฝึกหัด ใบงานและแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ช่วยทำให้นิสิตเกิดความชำนาญในการพิสูจน์ได้เป็นอย่างดีและมีเกณฑ์การให้คะแนนที่ชัดเจน
10. จำนวนการบ้านที่กำหนดให้นิสิตทำมีความเหมาะสมดีแล้วโดยมีปริมาณไม่มากและไม่น้อยจนเกินไป
11. การทดสอบย่อยประจำหน่วยช่วยทำให้นิสิตไม่ปล่อยปละละเลยและไม่ลืมนเนื้อหา
12. เว็บไซต์และแหล่งความรู้ต่างๆ ที่ผู้สอนได้รวบรวมไว้ให้ดีมาก แต่น่าจะมีเว็บไซต์ที่เป็นภาษาไทยมากกว่านี้เพราะนิสิตบางคนยังมีทักษะการอ่านภาษาอังกฤษไม่ดีพอ
13. ระบบ M@xlearn ที่นำมาใช้ในรายวิชานี้มีความเหมาะสม ทันสมัย เป็นประโยชน์ต่อการเรียนและสามารถนำมาใช้ควบคู่กับการเรียนการสอนในห้องเรียนได้ดีเพราะถือว่าเป็นนวัตกรรมใหม่ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แต่อาจมีจุดอ่อนในเรื่องของการพิมพ์สัญลักษณ์บางตัวทางคณิตศาสตร์
14. webboard ใน M@xlearn ทำให้มีการติดต่อสื่อสารกันระหว่างผู้สอนกับนิสิตและนิสิตด้วยกันเองได้อย่างสะดวกรวดเร็วและนิสิตยังสามารถใช้สำหรับทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปเมื่อไม่เข้าใจเรื่องอะไรก็สามารถติดต่อสอบถามกันได้
15. การประกาศผลสอบอยากให้ผู้สอนประกาศและแจ้งข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้นจากการทดสอบให้นิสิตทราบผ่าน webboard ใน M@xlearn แทนการประกาศในชั้นเรียน เพราะมีความสะดวก รวดเร็วและชัดเจน
16. การทำงานใน M@xlearn ผู้สอนควรทำการชี้แจงให้นิสิตได้เข้าใจถึงสิ่งที่ต้องการให้นิสิตทำอย่างชัดเจนก่อนที่นิสิตจะเข้าไปทำงาน เพราะอาจมีนิสิตบางคนทำผิดพลาดเนื่องจากไม่เข้าใจคำสั่งที่กำหนด
17. บางหัวข้อที่นิสิตมีพื้นฐานความรู้หรือได้เคยเรียนผ่านมาบ้างแล้วอยากให้ผู้สอนใช้เวลาในการสอนให้น้อยลง

## ปัญหาและแนวทางการปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากการนำไปทดลองใช้

หลังจากที่ผู้วิจัยได้นำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้ในรอบแรก กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน โดยขณะทำการทดลองผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้นิสิตมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น พร้อมทั้งผู้วิจัยได้ทำการจดบันทึกเกี่ยวกับปัญหาในการเรียนการสอนต่างๆ ที่เกิดขึ้น โดยบันทึกลงในส่วนของบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งจากการรวบรวมข้อมูลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยได้ทราบถึงสภาพปัญหาที่เกิดขึ้นและแนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหา เพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอนที่มีความเหมาะสมมากยิ่งขึ้นดังแสดงไว้ในตารางที่ 10

**ตารางที่ 10** ปัญหาและแนวทางการปรับปรุง แก้ไขจากการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้

ปัญหา	แนวทางการปรับปรุง/แก้ไข
1. การทำกิจกรรมตามใบงานของกิจกรรมกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำบางกิจกรรม นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด	<p>1. ผู้สอนกระตุ้นให้นิสิตซึ่งทำหน้าที่เป็นประธานกลุ่มช่วยกำกับและควบคุมเรื่องเวลาในการทำงานของแต่ละกลุ่ม เพื่อให้สมาชิกกลุ่มรู้จักจัดสรรเวลาให้เหมาะสม</p> <p>2. ผู้สอนปรับลดจำนวนข้อของแบบฝึกหัดในใบงานที่มอบหมายให้นิสิตทำ สำหรับบางกิจกรรมกลุ่มที่นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งได้แก่กิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง ประพจน์และการหาค่าความจริงในใบงานที่ 1 ข้อ 4 โดยลดจำนวนข้อย่อยจาก 3 ข้อให้เหลือ 2 ข้อ และข้อ 6 จากจำนวนข้อย่อย 2 ข้อ ให้เหลือเพียง 1 ข้อและกิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง สัจนิรันดร์และสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ในใบงานที่ 1 ทุกข้อ โดยลดจำนวนข้อย่อยในแต่ละข้อให้เหลือเพียง 2 ข้อ</p>

### ตารางที่ 10 (ต่อ)

ปัญหา	แนวทางการปรับปรุง/แก้ไข
<p>2. นิสิตบางคนยังไม่ให้ความสนใจในการทำกิจกรรมกลุ่มเท่าที่ควร</p>	<p>1. ผู้สอนชี้แจงเกณฑ์การประเมินผลให้นิสิตทราบก่อนทำกิจกรรมกลุ่มอย่างชัดเจนและคะแนนที่นิสิตแต่ละคนได้รับในการทำกิจกรรมกลุ่มซึ่งมีทั้งคะแนนกลุ่มและคะแนนเป็นรายบุคคล</p> <p>2. ผู้สอนอธิบายถึงวิธีการประเมินผลงานของกลุ่ม โดยผู้สอนทำการสุ่มนิสิตเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มออกมา นำเสนอผลงานของแต่ละกลุ่ม ซึ่งทำให้นิสิตทุกคนในแต่ละกลุ่มให้ความสนใจและตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายและเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่มเพราะนิสิตอาจถูกสุ่มเป็นตัวแทนของกลุ่ม</p>
<p>3. นิสิตทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการ เนื่องจากนิสิตอาจไม่เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้</p>	<p>1. ก่อนที่ผู้สอนจะมอบหมายให้นิสิตเข้าไปทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้สอนต้องอธิบายคำสั่ง/โจทย์วัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการและขั้นตอนการทำงานให้นิสิตได้ทราบก่อนเพื่อนิสิตจะได้เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้อย่างชัดเจน</p>
<p>4. นิสิตบางคนเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่ได้เนื่องจากไม่เข้าใจขั้นตอนในการสมัคร</p>	<p>1. สำหรับการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn นั้น โดยปกติผู้สอนได้กำหนดให้นิสิตเริ่มเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในช่วงก่อนเปิดภาคเรียน หลังจากนิสิตได้ลงทะเบียนเรียนเป็นที่เรียบร้อยแล้วโดยผู้สอนจะส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn และในสัปดาห์แรกของการเปิดภาคเรียน หากมีนิสิตคนใดยังไม่สามารถเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนได้ ผู้สอนทำการอธิบายถึงขั้นตอนและวิธีการสมัครโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่ง</p>

## ตารางที่ 10 (ต่อ)

ปัญหา	แนวทางการปรับปรุง/แก้ไข
5. นิสิตบางคนมีปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยนิสิตยังเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่เป็น ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์น้อย แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน ไม่รู้ว่าจะนำนิยามหรือทฤษฎีบทใดมาใช้และเมื่อจบการพิสูจน์นิสิตเขียนสรุปไม่ชัดเจนหรือไม่เขียนข้อสรุปหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ผู้สอนให้นิสิตศึกษาการพิสูจน์จากตัวอย่างในเอกสารประกอบการสอนและตัวอย่างที่ผู้สอนนำมาพิสูจน์ให้นิสิตดูในชั้นเรียนอย่างค่อยเป็นค่อยไป เพื่อให้ นิสิตมองเห็นขั้นตอนและวิธีการพิสูจน์จนเกิดความชำนาญมากขึ้นในการพิสูจน์</li> <li>2. ในช่วงแรกผู้สอนให้โจทย์การบ้านที่มีลักษณะเหมือนตัวอย่างก่อน หลังจากนั้นค่อยๆ เพิ่มความซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ และในการตรวจงานของผู้สอนนั้น ผู้สอนทำการเขียนข้อบกพร่องที่พบให้นิสิตได้ทราบเป็นรายบุคคลพร้อมทั้งเรียกนิสิตมาพบเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องนั้นๆ ในทุกครั้งที่ตรวจงาน</li> </ol>
6. เมื่อผู้สอนมอบหมายงานให้แก่ นิสิตทำเป็นรายบุคคลไม่ว่าจะเป็นแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn มี นิสิตบางคนลอกงานของเพื่อนมาส่ง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ผู้สอนชี้แจงถึงวัตถุประสงค์ของการให้นิสิตทำงานเป็นรายบุคคลว่าเพื่อให้ นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ขึ้นและหากนิสิตมีข้อบกพร่องเกิดขึ้น ผู้สอนทำการแจ้งให้นิสิตทราบและหาทางช่วยเหลือต่อไป ดังนั้น หากนิสิตลอกงานจากเพื่อนมาส่งจะเกิดผลเสียต่อตัวนิสิตเอง ทำให้นิสิตไม่ได้ทราบถึงข้อบกพร่องและไม่ได้รับการพัฒนาแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้น</li> <li>2. ผู้สอนทำการตกลงและชี้แจงเกี่ยวกับขั้นตอนในการตรวจให้คะแนนและเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานต่างๆ ให้แก่นิสิตทราบอย่างชัดเจน</li> </ol>
7. การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคน ให้นิสิตทราบในคาบเรียนถัดไปถือว่าค่อนข้างช้าและเสียเวลามาก เพราะนอกจากผู้สอนบอกคะแนนแล้วยังชี้แจงถึงข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้นของนิสิตแต่ละคน	1. การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคน ให้นิสิตทราบ ผู้สอนได้ประกาศผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ webboard ซึ่งทำให้เกิดความสะดวกและรวดเร็วแก่นิสิต เพราะนิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบได้ทุกเวลา โดยผู้สอนได้ประกาศให้นิสิตทราบก่อนการเรียนการสอนในครั้งถัดไป

จากตารางที่ 10 แสดงให้เห็นว่าการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้ในรอบแรกนั้นมีปัญหาที่ไม่ร้ายแรงเพราะเป็นปัญหาที่สามารถแก้ไขได้ ซึ่งจากการที่นำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้ในรอบแรก ทำให้ผู้วิจัยมองเห็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนที่ชัดเจนมากขึ้นและช่วยทำให้มองเห็นแนวทางในการป้องกันและแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้ โดยปัญหาที่เกิดขึ้นจากการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ในรอบแรกนั้นเป็นปัญหาเกี่ยวกับ 1) การทำกิจกรรมตามใบงานของกิจกรรมกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำบางกิจกรรมนิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด 2) นิสิตบางคนยังไม่ให้ความสนใจในการทำกิจกรรมกลุ่มเท่าที่ควร 3) นิสิตทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการเนื่องจากนิสิตอาจไม่เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้ 4) นิสิตบางคนเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่ได้เนื่องจากไม่เข้าใจขั้นตอนในการสมัคร 5) นิสิตบางคนมีปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยนิสิตยังเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่เป็น ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์น้อย แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน ไม่รู้ว่าจะนำนิยามหรือทฤษฎีบทใดมาใช้ และเมื่อจบการพิสูจน์นิสิตเขียนสรุปไม่ชัดเจนหรือไม่เขียนข้อสรุปหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ 6) เมื่อผู้สอนมอบหมายงานให้แก่ นิสิตทำเป็นรายบุคคลไม่ว่าจะเป็นแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn มีนิสิตบางคนลอกงานของเพื่อนมาส่ง และ 7) การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนให้นิสิตทราบในคาบเรียนถัดไปถือว่าค่อนข้างช้าและเสียเวลามากเพราะนอกจากผู้สอนจะต้องบอกคะแนนแล้วยังต้องชี้แจงถึงข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้นของนิสิตแต่ละคน

### ผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้ในรอบที่สอง

ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้กับนิสิตคณะศึกษาศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน ผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนิสิตมีดังต่อไปนี้

#### ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต

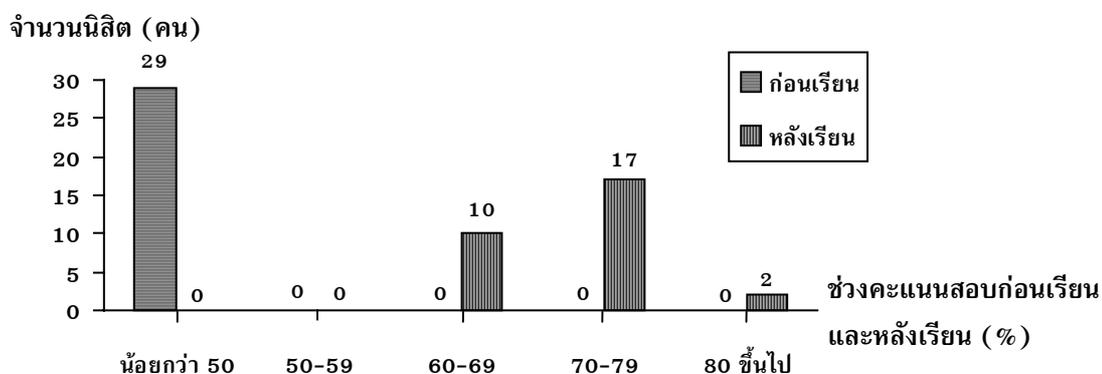
การประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตนั้น ผู้วิจัยพิจารณาจากผลการประเมินที่ได้จากการทำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียนในสัดส่วนคิดเป็นร้อยละ 25 ร้อยละ 25 ร้อยละ 40 และร้อยละ 10 ตามลำดับ ผลการประเมินมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### ผลการประเมินโดยใช้แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีลักษณะเป็นแบบอัตนัย จำนวน 15 ข้อ ไปทดสอบนิสิตจำนวน 29 คน ทั้งหมด 2 ครั้ง คือ ก่อนเรียนและหลังเรียน รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยมีระยะเวลาในการเรียนการสอน 1 ภาคเรียนแล้วนำคะแนน ก่อนเรียนและหลังเรียนที่ได้มาเปรียบเทียบและคิดเป็นค่าร้อยละ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 11 และ ภาพที่ 12

ตารางที่ 11 ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

	คะแนนก่อนเรียน (100)	คะแนนหลังเรียน (100)	เพิ่มขึ้น
ค่าเฉลี่ย	14.66	71.10	56.44
ร้อยละ	14.66	71.10	56.44
สัมประสิทธิ์การกระจาย	0.25	0.10	-



ภาพที่ 12 จำนวนนิสิตจำแนกตามช่วงคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

จากตารางที่ 11 ผลการประเมินจากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพบว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีคะแนนสอบหลังเรียน เพิ่มขึ้นจากคะแนนสอบก่อนเรียนอย่างชัดเจน โดยนิสิตมีคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนร้อยละ 14.66 และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนร้อยละ 71.10 หรือคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนเพิ่มขึ้นร้อยละ 56.44 และหากพิจารณาการกระจายของคะแนนสอบ พบว่า คะแนนสอบหลังเรียนมีการกระจายน้อยกว่า คะแนนสอบก่อนเรียนมาก กล่าวคือ สัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนสอบหลังเรียน (0.10)

มีค่าต่ำกว่าสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนสอบก่อนเรียน (0.25) แสดงว่า นิสิตมีคะแนนสอบหลังเรียนที่ใกล้เคียงกันมากขึ้นหรือคะแนนสอบหลังเรียนของนิสิตเกาะกลุ่มกันมากขึ้นนั่นเอง นอกจากนี้จากภาพที่ 12 แสดงให้เห็นว่า หากจำแนกนิสิตเป็นกลุ่มตามช่วงของคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน พบว่านิสิตทั้งหมด (คิดเป็นร้อยละ 100) ได้คะแนนสอบก่อนเรียนต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ (คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 50) แต่คะแนนสอบของนิสิตหลังจากเรียนตามรูปแบบการเรียนการสอนแล้ว พบว่าไม่มีนิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ ในขณะที่นิสิตทั้งหมด (29 คนหรือร้อยละ 100) ได้คะแนนสอบหลังเรียนอยู่ในระดับปานกลางขึ้นไป (คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไป) โดยนิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับปานกลาง (คะแนนร้อยละ 60-69) มีจำนวน 10 คน นิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับดี (คะแนนร้อยละ 70-79) มีจำนวน 17 คนและนิสิตที่ได้คะแนนสอบอยู่ในระดับดีมาก (คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป) มีจำนวน 2 คน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าเมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นเวลา 1 ภาคเรียนแล้ว นิสิตส่วนใหญ่มีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างชัดเจนและได้คะแนนสอบใกล้เคียงกันมากขึ้นกว่าก่อนเรียน

### ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต

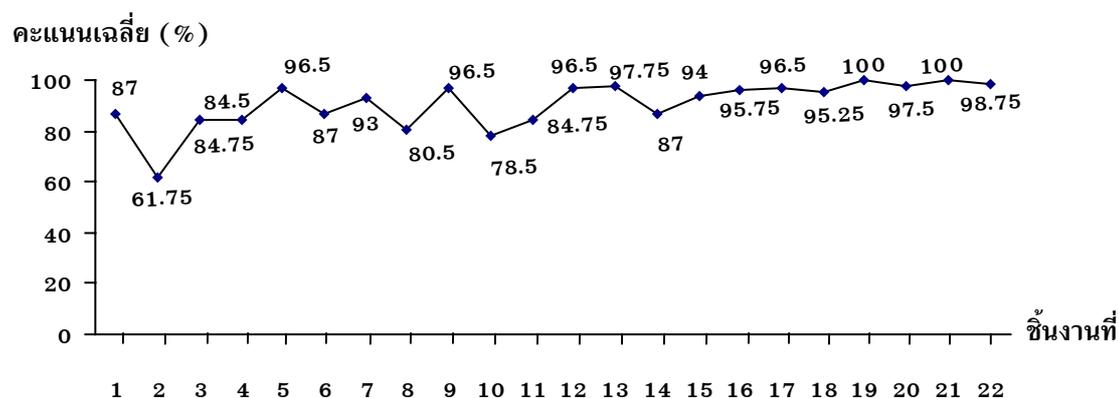
ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จำนวน 22 ชิ้นงาน โดยใช้แบบประเมินชิ้นงานจำนวน 5 แบบ คือ แบบประเมินชิ้นงานแบบฝึกหัด การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม กิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และกิจกรรมรายบุคคล บน M@xLearn แต่ละแบบประเมินชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนทั้งหมด 5 ระดับ ตั้งแต่ 0 ถึง 4 แสดงไว้ในตารางที่ 12 ภาพที่ 13 ภาพที่ 14 และ ภาพที่ 15

### ตารางที่ 12 ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิต

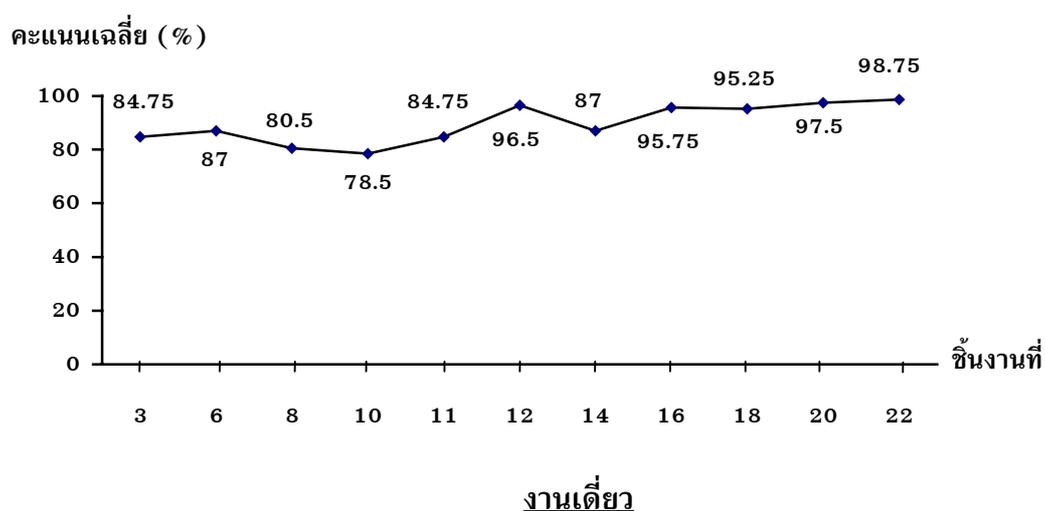
	ชิ้นงานที่										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ค่าเฉลี่ย	3.48	2.47	3.39	3.38	3.86	3.48	3.72	3.22	3.86	3.39	3.14
ร้อยละ	87.00	61.75	84.75	84.50	96.50	87.00	93.00	80.50	96.50	78.50	84.75

ตารางที่ 12 (ต่อ)

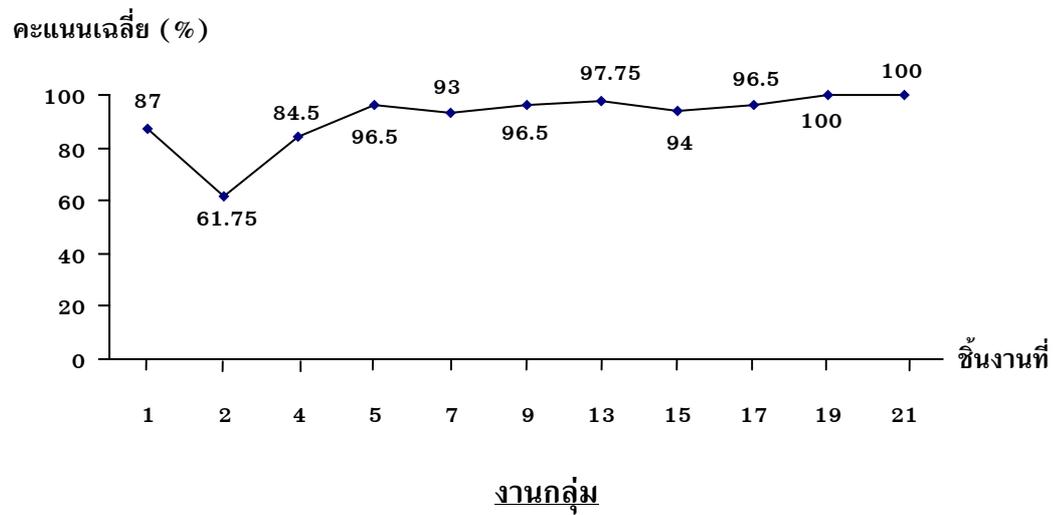
	ชิ้นงานที่											ค่าเฉลี่ย
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
ค่าเฉลี่ย	3.86	3.91	3.48	3.76	3.83	3.86	3.81	4.00	3.90	4.00	3.95	3.63
ร้อยละ	96.50	97.75	87.00	94.00	95.75	96.50	95.25	100	97.50	100	98.75	90.75



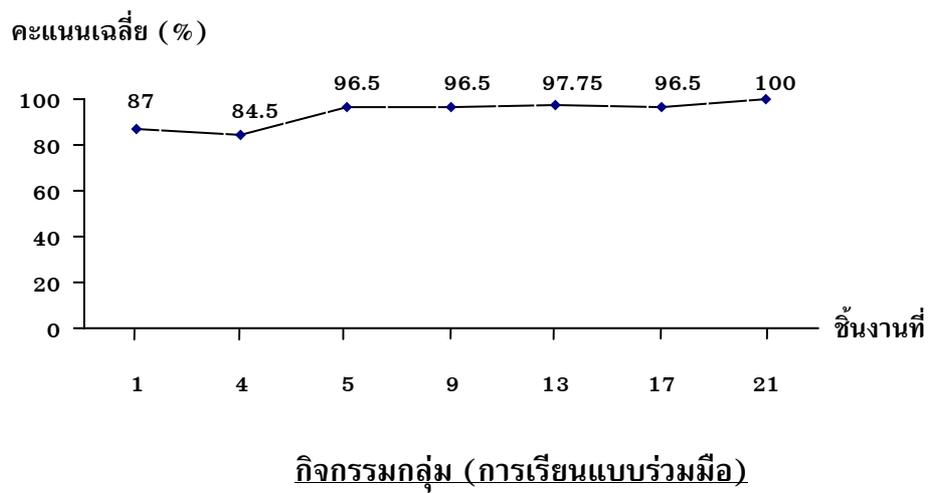
ภาพที่ 13 ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่ของชิ้นงาน



ภาพที่ 14 ผลการประเมินชิ้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะการมอบหมายงาน

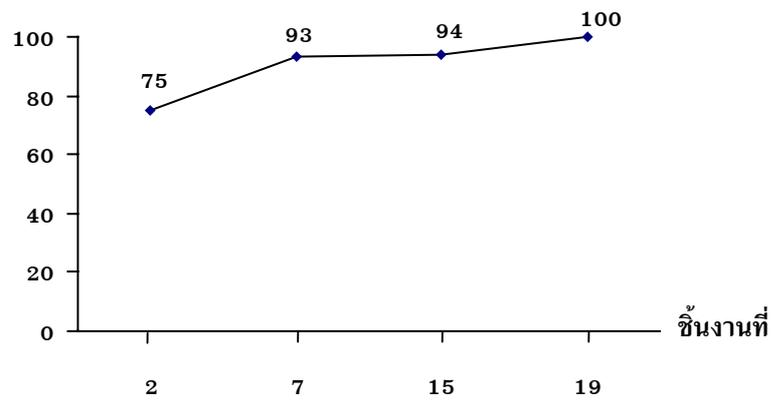


ภาพที่ 14 (ต่อ)



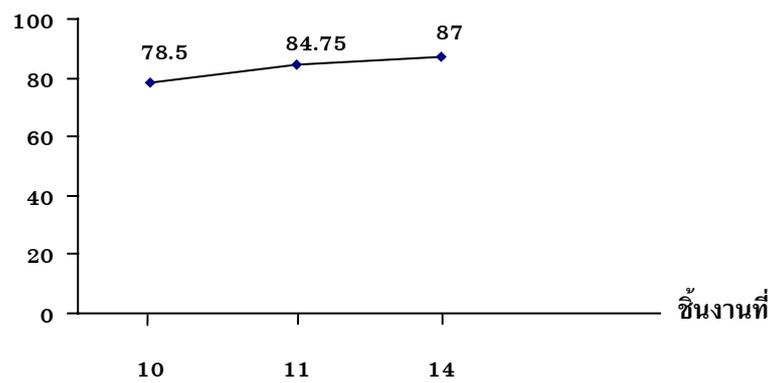
ภาพที่ 15 ผลการประเมินชั้นงานจำแนกตามลำดับที่และลักษณะของชั้นงาน

คะแนนเฉลี่ย (%)



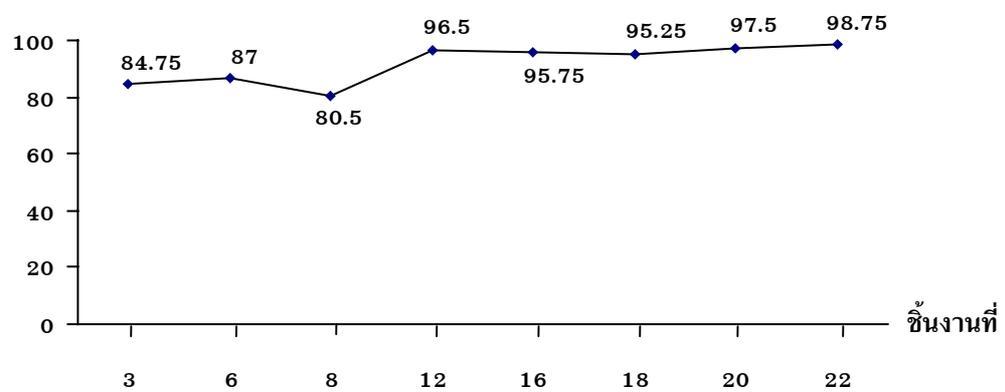
กิจกรรมกลุ่มบน M@xlearn

คะแนนเฉลี่ย (%)



กิจกรรมรายบุคคลบน M@xlearn

คะแนนเฉลี่ย (%)



แบบฝึกหัด

ภาพที่ 15 (ต่อ)

จากตารางที่ 12 ผลการประเมินชิ้นงานของนิสิตแสดงว่า ชิ้นงานของนิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทุกชิ้นงานได้รับการประเมินชิ้นงานว่ามีความชัดเจนและถูกต้องในระดับปานกลางขึ้นไปคือ มีคะแนนเฉลี่ยที่สูงกว่าร้อยละ 60 โดยชิ้นงานที่ได้รับการประเมินว่ามีความชัดเจนและถูกต้องในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าร้อยละ 80) มีทั้งสิ้น 20 ชิ้นงานและหากพิจารณาภาพที่ 13 พบว่า ในภาพรวมคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานไม่ได้เพิ่มขึ้นตามลำดับ ตั้งแต่ชิ้นงานที่ 1 ถึงชิ้นงานที่ 22 และคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานส่วนใหญ่อยู่ในระดับที่น่าพอใจมากคืออยู่ในระดับดีมาก

ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานโดยจำแนกชิ้นงานออกเป็นกลุ่มตามลักษณะการมอบหมายงานและลักษณะของชิ้นงาน ดังแสดงในภาพที่ 14 และ ภาพที่ 15 ซึ่งจากภาพที่ 14 แสดงให้เห็นว่า คะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานไม่ได้เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงานทั้งในชิ้นงานเดี่ยวและชิ้นงานกลุ่ม คะแนนเฉลี่ยบางครั้งเพิ่มขึ้น บางครั้งลดลง แต่ในภาพรวมพบว่า คะแนนเฉลี่ยของชิ้นงานกลุ่ม (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 91.59) สูงกว่าชิ้นงานเดี่ยว (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 89.66) ทั้งนี้เนื่องจากในการทำงานกลุ่มนั้น มีการระดมสมองทำให้เกิดแนวคิดที่หลากหลาย ชิ้นงานที่ได้จึงมีคุณภาพมากกว่าชิ้นงานเดี่ยวซึ่งเป็นงานที่นิสิตต้องทำงานตามลำพัง และนิสิตบางคนยังขาดทักษะด้านการเขียนจึงทำให้คะแนนเฉลี่ยชิ้นงานเดี่ยวต่ำกว่าชิ้นงานกลุ่ม แต่หากนำชิ้นงานทั้งหมดมาจำแนกตามลักษณะของชิ้นงานสามารถจำแนกได้เป็น 4 ประเภท คือ ชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่ม (การเรียนรู้แบบร่วมมือ) ประเภทกิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn ประเภทกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn และประเภทแบบฝึกหัด ดังแสดงในภาพที่ 15 พบว่า ชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และประเภทกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงาน สำหรับชิ้นงานประเภทกิจกรรมกลุ่ม (การเรียนรู้แบบร่วมมือ) ส่วนใหญ่มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงาน ยกเว้นชิ้นงานที่ 4 และชิ้นงานที่ 17 นั้นมีคะแนนเฉลี่ยที่ลดลง แต่ก็ยังอยู่ในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 84.50 และ 96.50 ตามลำดับ) และชิ้นงานประเภทแบบฝึกหัดส่วนใหญ่มีคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นตามลำดับการสั่งงานยกเว้นชิ้นงานที่ 8 (การอ้างเหตุผล) ชิ้นงานที่ 16 (การพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  และการแจกกรณี) และชิ้นงานที่ 18 (การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จและมีอย่างน้อยหนึ่ง) นั้นมีคะแนนเฉลี่ยที่ลดลง แต่ก็ยังอยู่ในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 80.50 95.75 และ 95.25 ตามลำดับ) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นิสิตส่วนใหญ่สามารถผลิตชิ้นงานที่มีคุณภาพสูงและมีพัฒนาการในการผลิตชิ้นงานที่ดีขึ้นตามลำดับ

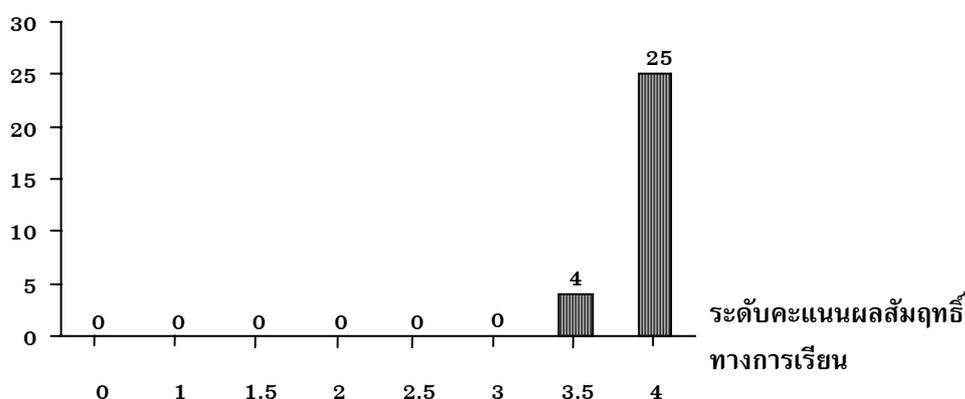
### ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พิจารณาจากผลการประเมินที่ได้จากแบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ ผลการประเมินชิ้นงานและความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียนโดยคิดสัดส่วนผลการประเมินดังกล่าวเป็นร้อยละ 25 ร้อยละ 25 ร้อยละ 40 และร้อยละ 10 ตามลำดับ ซึ่งผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตมีรายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 13 และ ภาพที่ 16

**ตารางที่ 13** ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากแบบสอบถามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการประเมินชิ้นงาน ผลการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้และความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน

	คะแนนความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน (10%)		คะแนนการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ (25%)		รวม (100%)
	คะแนนประเมิน	คะแนนสอบ	คะแนนประเมินชิ้นงาน (40%)	คะแนนสอบ (25%)	
ค่าเฉลี่ย	9.66	36.69	22.38	17.86	86.55
ร้อยละ	96.66	91.73	89.52	71.44	86.55

จำนวนนิสิต (คน)



**ภาพที่ 16** จำนวนนิสิตจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากตารางที่ 13 แสดงให้เห็นว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีเยี่ยม (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 86.55) และจากภาพที่ 16 แสดงให้เห็นว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีมาก (ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับ 3.5) มีจำนวน 4 คนและนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับดีเยี่ยม (ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับ 4) มีจำนวน 25 คน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในระดับที่ดีเยี่ยมน่าพึงพอใจ ซึ่งแสดงว่า เมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้วนิสิตมีความรู้ ความเข้าใจและมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถนำความรู้และทักษะที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปได้

### **ทักษะทางสังคม**

การประเมินทักษะทางสังคมของนิสิตจากการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พิจารณาโดยรวมคะแนนจากแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ฉบับ คือ แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยนิสิตและแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยผู้สอนซึ่งมีการประเมินทั้งหมด 7 ครั้ง และการประเมินผลในแต่ละครั้งมีเกณฑ์การให้คะแนนตั้งแต่ 1 ถึง 4 ซึ่งผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตในการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จำนวน 29 คน สามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้ดังตารางที่ 14 และตารางที่ 15

**ตารางที่ 14** ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน

ข้อรายการ/พฤติกรรม		กิจกรรมที่							ค่าเฉลี่ย	
		1	2	3	4	5	6	7		
1) ความชัดเจนในการ										
กำหนดบทบาทหน้าที่	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2) ลักษณะการเป็น										
ผู้นำและผู้ตาม	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
3) การมีส่วนร่วมใน										
กิจกรรมกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	3.86	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.98
	ร้อยละ	96.50	100	100	100	100	100	100	100	99.50
4) ความรับผิดชอบงานและ										
ความตั้งใจปฏิบัติงาน	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
ที่ได้รับมอบหมาย	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
5) การช่วยเหลือเอื้อเพื่อ										
เพื่อเผื่อแผ่กันในกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	3.86	3.86	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.96
	ร้อยละ	96.50	96.50	100	100	100	100	100	100	99.00
6) กลุ่มทำงานเสร็จและ										
ถูกต้องภายในเวลาที่กำหนด	ค่าเฉลี่ย	3.50	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.93
	ร้อยละ	87.50	100	100	100	100	100	100	100	98.25
7) การร่วมกันตัดสินใจ										
และรับฟังความคิดเห็น	ค่าเฉลี่ย	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
ของเพื่อนในกลุ่ม	ร้อยละ	100	100	100	100	100	100	100	100	100
8) ผลงานของกลุ่มถูกต้อง										
และสมบูรณ์	ค่าเฉลี่ย	3.50	3.50	3.71	3.71	4.00	4.00	4.00	4.00	3.77
	ร้อยละ	87.50	87.50	92.75	92.75	100	100	100	100	94.25
9) การนำเสนอผลงานของ										
กลุ่มหน้าชั้นเรียน	ค่าเฉลี่ย	3.25	3.50	3.71	3.86	4.00	4.00	4.00	4.00	3.76
มีความชัดเจน	ร้อยละ	81.25	87.50	92.75	96.50	100	100	100	100	94.00

จากตารางที่ 14 ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยผู้สอน พบว่านิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรมและมีการพัฒนาพฤติกรรมดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับ จากการประเมินครั้งที่ 1 จนถึงครั้งที่ 7 โดยพฤติกรรมที่มีคะแนนเฉลี่ยมากที่สุด (คะแนนเฉลี่ย 4.00) คือ ความชัดเจนในการกำหนดบทบาทหน้าที่ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม ลักษณะการเป็นผู้นำและผู้ตาม ความรับผิดชอบงานและความตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย และการร่วมกันตัดสินใจและรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนในกลุ่ม รองลงมาคือ การมีส่วนร่วมในกิจกรรมกลุ่มและการช่วยเหลือเอื้อเพื่อเผื่อแผ่กันในกลุ่ม ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกันคือ มีคะแนนเฉลี่ย 3.98 และ 3.96 ตามลำดับ

**ตารางที่ 15** ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิต

ข้อรายการ/พฤติกรรม		กิจกรรมที่							ค่าเฉลี่ย
		1	2	3	4	5	6	7	
1) สมาชิกในกลุ่มรู้บทบาทหน้าที่ว่าจะทำอะไร	ค่าเฉลี่ย	3.83	4.00	3.93	3.90	3.74	4.00	4.00	3.91
	ร้อยละ	95.75	100	98.25	97.50	93.50	100	100	97.75
2) กลุ่มของเราพูดคุยกันเฉพาะในกลุ่มไม่เดินไปเดินมา	ค่าเฉลี่ย	3.97	3.86	3.90	3.96	4.00	3.92	4.00	3.94
	ร้อยละ	99.25	96.50	97.50	99.00	100	98.00	100	98.50
3) สมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตนและตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย	ค่าเฉลี่ย	3.86	3.90	3.93	3.87	3.87	4.00	4.00	3.92
	ร้อยละ	96.50	97.50	98.25	96.75	96.75	100	100	98.00
4) สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน	ค่าเฉลี่ย	3.90	4.00	4.00	3.91	4.00	3.92	4.00	3.96
	ร้อยละ	97.50	100	100	97.75	100	98.00	100	99.00
5) สมาชิกในกลุ่มร่วมกันแสดงความคิดเห็น	ค่าเฉลี่ย	3.83	3.83	3.76	3.87	3.91	3.67	3.91	3.83
	ร้อยละ	95.75	95.75	94.00	96.75	97.75	91.75	97.75	95.75
6) สมาชิกในกลุ่มแลกเปลี่ยนสิ่งที่เรียนต่อกัน	ค่าเฉลี่ย	3.76	3.72	3.66	3.78	3.70	3.67	3.83	3.73
	ร้อยละ	94.00	93.00	91.50	94.50	92.50	91.75	95.75	93.25
7) สมาชิกในกลุ่มช่วยกันตัดสินใจ	ค่าเฉลี่ย	3.76	3.79	3.83	3.87	3.87	3.92	3.83	3.84
	ร้อยละ	94.00	94.75	95.75	96.75	96.75	98.00	95.75	96.00
8) กลุ่มของเราใช้เวลาอย่างมีประสิทธิภาพ	ค่าเฉลี่ย	3.59	3.79	3.72	3.87	3.78	3.83	4.00	3.80
	ร้อยละ	89.75	94.75	93.00	96.75	94.50	95.75	100	95.00
9) สมาชิกในกลุ่มรับฟังความคิดเห็นของเพื่อน	ค่าเฉลี่ย	3.97	3.93	3.76	3.91	3.87	4.00	3.91	3.91
	ร้อยละ	99.25	98.25	94.00	97.75	96.75	100	97.75	97.75
10) สมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม	ค่าเฉลี่ย	3.90	3.93	3.79	3.96	3.96	3.92	4.00	3.92
	ร้อยละ	97.50	98.25	94.75	98.00	99.00	98.00	100	98.00
11) กลุ่มของเราช่วยเหลือเพื่อนบางคนเป็นพิเศษเมื่อเรารู้ว่าเพื่อนมีปัญหา	ค่าเฉลี่ย	3.48	3.58	3.62	3.78	3.74	3.58	3.87	3.66
	ร้อยละ	87.50	89.50	90.50	94.50	93.50	89.50	96.75	91.50
12) กลุ่มของเราตรวจสอบและซักถามจนเพื่อน ๆ ในกลุ่มเข้าใจตรงกันทุกคน	ค่าเฉลี่ย	3.76	3.86	3.62	3.83	3.65	3.83	3.78	3.76
	ร้อยละ	94.00	96.50	90.50	95.75	91.25	95.75	94.50	94.00

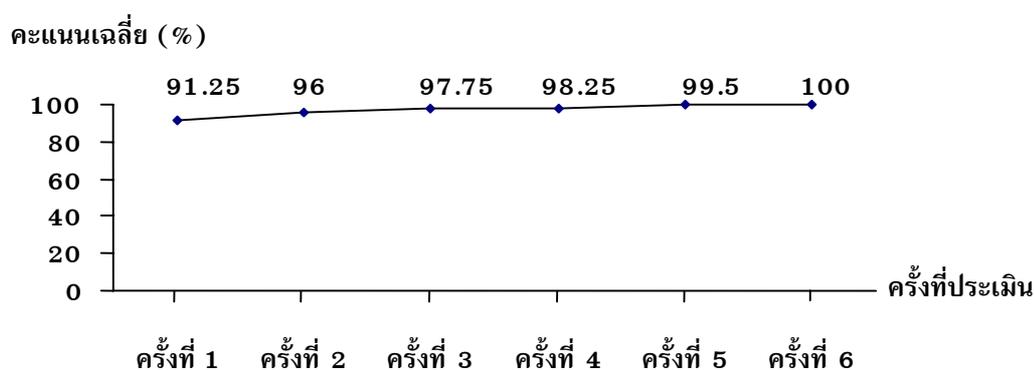
จากตารางที่ 15 ผลการประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนิสิตโดยนิสิต พบว่านิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรมและพฤติกรรมที่มีคะแนนเฉลี่ยมากที่สุด (คะแนนเฉลี่ย 3.96) คือ การที่สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน รองลงมาคือ กลุ่มของเราพูดคุยกัน เฉพาะในกลุ่ม ไม่เดินไปเดินมา มีคะแนนเฉลี่ย 3.94 และสมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตน และตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายและสมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ย 3.92

### ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจากการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พิจารณาโดยรวมคะแนนจากแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีการประเมินทั้งหมด 6 ครั้งและการประเมินแต่ละครั้งมีเกณฑ์การให้คะแนน ตั้งแต่ 0 ถึง 4 ซึ่งผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จำนวน 29 คน แสดงไว้ในตารางที่ 16 และภาพที่ 17

ตารางที่ 16 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

	การประเมินผลครั้งที่						ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	4	5	6	
ค่าเฉลี่ย	3.65	3.84	3.91	3.93	3.98	4.00	3.89
ร้อยละ	91.25	96.00	97.75	98.25	99.50	100	97.25



ภาพที่ 17 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตตามครั้งที่ของการประเมินผล

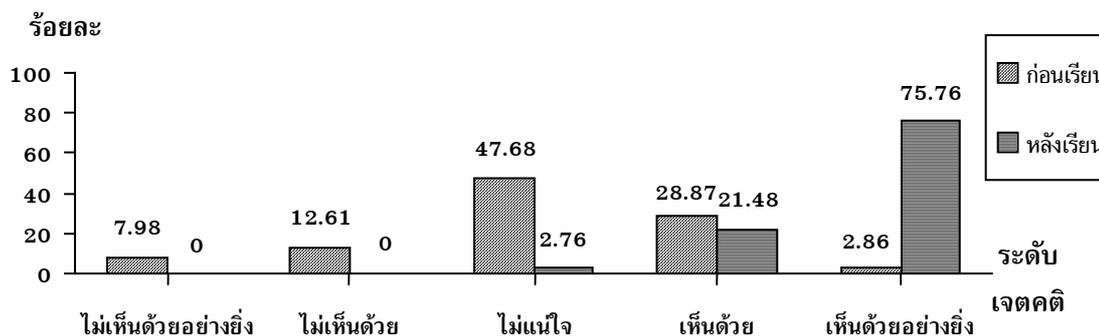
จากตารางที่ 16 และ ภาพที่ 17 ผลการประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของ นิสิตแสดงว่า นิสิตที่เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก (คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 97.25) และมีการพัฒนาทักษะ ดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับ จากการประเมินผลครั้งที่ 1 จนถึงครั้งที่ 6 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นเวลา 1 ภาคเรียน แล้วนิสิตส่วนใหญ่มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ดีมากและมีการพัฒนาทักษะที่ ดีขึ้นตามลำดับของการเรียนการสอน

### **เจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ I**

ผู้วิจัยศึกษาเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ I โดยนำแบบวัดเจตคติที่ประกอบด้วยข้อความทั้งหมด 35 ข้อไปวัดเจตคติของนิสิต 2 ครั้ง คือ ก่อนเรียนและหลังเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ซึ่งผลการศึกษาเจตคติของนิสิตต่อ การเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จำนวน 29 คน สามารถ แสดงได้ดังตารางที่ 17 และ ภาพที่ 18

**ตารางที่ 17** ผลการประเมินเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ I ก่อนเรียนและหลังเรียน

	ก่อนเรียน	หลังเรียน
ค่าเฉลี่ย	2.94	4.73
ร้อยละ	58.80	94.60
ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย	0.05	0.03



**ภาพที่ 18** ร้อยละของนิสิตจำแนกตามระดับเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222  
ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ก่อนเรียนและหลังเรียน

จากตารางที่ 17 พบว่า คะแนนเจตคติของนิสิตส่วนใหญ่เพิ่มขึ้น โดยก่อนเรียนมีค่าเฉลี่ย 2.94 ซึ่งอยู่ในระดับไม่แน่ใจ แต่หลังจากได้เรียนแล้วมีค่าเฉลี่ย 4.73 ซึ่งอยู่ในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่ง นอกจากนี้เมื่อพิจารณาการกระจายของคะแนน จะเห็นว่าคะแนนเจตคติของนิสิตหลังเรียนลดลงจากก่อนเรียน แสดงว่า นิสิตมีเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ดีขึ้นและใกล้เคียงกันมากขึ้นและเมื่อพิจารณาภาพที่ 18 พบว่า ในช่วงก่อนเรียน นิสิตส่วนใหญ่คิดเป็นร้อยละ 47.68 มีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับไม่แน่ใจมากที่สุด แต่ในช่วงหลังเรียนพบว่านิสิตส่วนใหญ่คิดเป็นร้อยละ 75.76 มีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับเห็นด้วยอย่างยิ่ง รองลงมา คือ มีระดับเจตคติอยู่ที่ระดับเห็นด้วยคิดเป็นร้อยละ 21.48

#### ความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอน

ผู้วิจัยได้สอบถามความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จำนวน 29 คน ซึ่งสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้ดังตารางที่ 18

**ตารางที่ 18** ผลการสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 29)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>ด้านเนื้อหาสาระ</b>						
1. เนื้อหาที่เรียนตรงตามวัตถุประสงค์ ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้	จำนวน	21	8	-	-	-
	ร้อยละ	72.41	27.59	-	-	-
2. การจัดเรียงลำดับหัวข้อของเนื้อหา มีความเหมาะสม	จำนวน	16	13	-	-	-
	ร้อยละ	55.17	44.83	-	-	-
3. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถใช้ เป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความ ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ ได้	จำนวน	22	7	-	-	-
	ร้อยละ	75.86	24.14	-	-	-
4. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถ นำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้ดี	จำนวน	23	6	-	-	-
	ร้อยละ	79.31	20.61	-	-	-
<b>ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน</b>						
5. กิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นเป็น กิจกรรมที่ส่งเสริมให้เกิด การเรียนรู้เป็นกลุ่ม รายบุคคล และส่งเสริมทักษะทางสังคม	จำนวน	17	12	-	-	-
	ร้อยละ	58.62	41.38	-	-	-
6. ผู้สอนใช้วิธีสอนโดยการอธิบายและ แสดงเหตุผลประกอบทำให้นิสิตเกิด ความเข้าใจและชัดเจนยิ่งขึ้น	จำนวน	16	13	-	-	-
	ร้อยละ	55.17	44.83	-	-	-
7. การสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำ ให้นิสิตได้พัฒนากระบวนการคิดและ สติปัญญา	จำนวน	20	8	1	-	-
	ร้อยละ	68.97	27.59	3.44	-	-
8. กิจกรรมกลุ่มที่จัดขึ้นทำให้นิสิตได้ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับสมาชิก ภายในกลุ่มและเกิดความรู้ความเข้าใจ ในเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น	จำนวน	17	12	-	-	-
	ร้อยละ	58.62	41.38	-	-	-
9. ประสบการณ์ที่ได้รับจากการทำงาน ในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธี การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทำให้นิสิต ได้พัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	จำนวน	17	12	-	-	-
	ร้อยละ	58.62	41.38	-	-	-
10. การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียน เป็นสิ่งที่จำเป็นและมีประโยชน์ สำหรับนิสิต	จำนวน	18	11	-	-	-
	ร้อยละ	62.07	37.93	-	-	-

**ตารางที่ 18 (ต่อ)**

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น (N = 29)				
	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
11. การทำแบบฝึกหัดและแบบวัดทักษะ					
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิต	จำนวน	22	7	-	-
เกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ร้อยละ	75.86	24.14	-	-
12. การทำกิจกรรมผ่านระบบสนับสนุน					
การเรียนการสอน M@xLearn ทำให้					
นิสิตได้รับความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์	จำนวน	15	13	1	-
ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น	ร้อยละ	51.73	44.83	3.44	-
<b>ด้านสื่อการเรียนรู้</b>					
13. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัด					
การเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอน					
วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มี					
ความหลากหลายทำให้นิสิตมองเห็น	จำนวน	11	16	2	-
ช่องทางในการแสวงหาความรู้มากขึ้น	ร้อยละ	37.93	55.17	6.90	-
14. ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน					
M@xLearn เป็นสื่อการเรียนรู้ที่มี					
ความทันสมัยและเหมาะสมกับ	จำนวน	16	12	1	-
การเรียนรู้ในรายวิชานี้	ร้อยละ	55.17	41.39	3.44	-
15. เว็บไซต์รายวิชาที่ผู้สอนพัฒนาขึ้น					
เป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม					
เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	จำนวน	17	10	2	-
ได้เป็นอย่างดี	ร้อยละ	58.62	34.48	6.90	-
<b>ด้านการวัดผลและการประเมินผล</b>					
16. เกณฑ์การประเมินผลรายวิชา 158222					
ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I	จำนวน	19	10	-	-
มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม	ร้อยละ	65.52	34.48	-	-
17. การบอกเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงาน					
แต่ละชิ้นงานก่อนทำให้นิสิตลงมือปฏิบัติ					
ก่อให้เกิดความยุติธรรมและทำทนาย	จำนวน	20	9	-	-
ความสามารถของนิสิต	ร้อยละ	68.97	31.03	-	-
18. การทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนรู้					
ทำให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่องต่างๆ					
ของตนเองพร้อมทั้งนำข้อบกพร่อง	จำนวน	19	10	-	-
ไปปรับปรุงและแก้ไขเพื่อพัฒนาตนเอง	ร้อยละ	65.52	34.48	-	-

**ตารางที่ 18 (ต่อ)**

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 29)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
19. การสอนซ่อมเสริมทำให้นักเรียนสามารถ						
พัฒนาตนเองและมีกำลังใจใน	จำนวน	8	19	2	-	-
การเรียนรู้มากขึ้น	ร้อยละ	27.58	65.52	6.90	-	-
<b>ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้</b>						
20. รูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้ในการจัด						
การเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธี						
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I						
20.1) สามารถพัฒนาให้นักเรียน						
เกิดการเรียนรู้และ						
มีความมั่นใจในตนเอง						
เกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความ	จำนวน	16	13	-	-	-
ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น	ร้อยละ	55.17	44.83	-	-	-
20.2) สามารถพัฒนาให้นักเรียน						
นำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์						
ใช้ในการเรียนรายวิชา	จำนวน	24	5	-	-	-
คณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้	ร้อยละ	82.76	17.24	-	-	-
<b>ด้านผู้สอน</b>						
21. ผู้สอนเอาใจใส่และให้ความเป็น						
กันเองกับนักเรียนทำให้นักเรียน	จำนวน	26	3	-	-	-
บรรยากาศในการเรียนการสอน	ร้อยละ	89.66	10.34	-	-	-
22. ผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดง						
ความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและ	จำนวน	22	7	-	-	-
ค้นพบความรู้ด้วยตนเอง	ร้อยละ	75.86	24.14	-	-	-
23. ผู้สอนตรวจชิ้นงานและการบ้าน						
ของนักเรียนอย่างสม่ำเสมอพร้อมให้						
คำแนะนำหากนักเรียนมีประเด็นที่ยัง	จำนวน	27	2	-	-	-
ไม่เข้าใจหรือมีข้อบกพร่อง	ร้อยละ	93.10	6.90	-	-	-
24. ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวก						
และที่ปรึกษาที่ดีใน	จำนวน	24	5	-	-	-
การจัดกิจกรรมที่เน้นกระบวนการกลุ่ม	ร้อยละ	82.76	17.24	-	-	-

### ตารางที่ 18 (ต่อ)

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (N = 29)				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
<b>ด้านการติดต่อสื่อสาร</b>						
25. การติดต่อสื่อสารระหว่างนิสิตกับผู้สอน และระหว่างนิสิตกับนิสิตผ่านทาง จดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบสนับสนุน การเรียนการสอน M@xLearn	จำนวน	19	10	-	-	-
มีความสะดวกและเป็นกันเอง	ร้อยละ	65.52	34.48	-	-	-

จากตารางที่ 18 พบว่า นิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยพิจารณาเป็นด้าน ๆ ได้ดังนี้

ด้านเนื้อหาสาระ พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่าเนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่น ๆ ได้ คิดเป็นร้อยละ 79.31 รองลงมาคือ เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ คิดเป็นร้อยละ 75.86 และเนื้อหาที่เรียนตรงตามวัตถุประสงค์ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้ คิดเป็นร้อยละ 72.41

ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การทำแบบฝึกหัดและแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 75.86 รองลงมาคือ การสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำให้นิสิตได้พัฒนากระบวนการคิดและสติปัญญา คิดเป็นร้อยละ 68.97 และการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเป็นสิ่งจำเป็นและมีประโยชน์สำหรับนิสิต คิดเป็นร้อยละ 62.07

ด้านสื่อการเรียนรู พบว่า นิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า เว็บไซต์รายวิชาที่ผู้สอนพัฒนาขึ้นเป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี คิดเป็นร้อยละ 58.62 รองลงมาคือ ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn เป็นสื่อการเรียนรูที่มีความทันสมัยและเหมาะสมกับการเรียนรู้ในรายวิชานี้ คิดเป็นร้อยละ 55.17 และนิสิตมีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยว่าสื่อการเรียนรูที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้

รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีความหลากหลายทำให้นิสิตมองเห็นช่องทางในการแสวงหาความรู้มากขึ้น คิดเป็นร้อยละ 55.17

ด้านการวัดผลและการประเมินผล พบว่า นิสิตส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การบอกเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานแต่ละชิ้นงานก่อนให้นิสิตลงมือปฏิบัติ ก่อให้เกิดความยุติธรรมและท้าทายความสามารถของนิสิต คิดเป็นร้อยละ 68.97 รองลงมาคือ เกณฑ์การประเมินผลรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม และการทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนทำให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่องต่าง ๆ ของตนเอง พร้อมทั้งนำข้อบกพร่องไปปรับปรุงและแก้ไขเพื่อพัฒนาตนเอง คิดเป็นร้อยละ 65.52 และ นิสิตมีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยว่าการสอนซ่อมเสริมทำให้นิสิตสามารถพัฒนาตนเองและมีกำลังใจในการเรียนรู้อีกมากขึ้น คิดเป็นร้อยละ 65.52

ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้ พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สามารถพัฒนาให้นิสิตนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงอื่น ๆ ได้ คิดเป็นร้อยละ 82.76 รองลงมาคือ สามารถพัฒนาให้นิสิตเกิดการเรียนรู้และมีความมั่นใจในตนเองเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์มากขึ้น คิดเป็นร้อยละ 55.17

ด้านผู้สอน พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่าผู้สอนตรวจชิ้นงานและการบ้านของนิสิตอย่างสม่ำเสมอพร้อมให้คำแนะนำ หากนิสิตมีประเด็นที่ยังไม่เข้าใจหรือมีข้อบกพร่อง คิดเป็นร้อยละ 93.10 รองลงมาคือ ผู้สอนเอาใจใส่และให้ความเป็นกันเองกับนิสิตทำให้ช่วยส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนการสอน คิดเป็นร้อยละ 89.66 และผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวกและที่ปรึกษาที่ดีในการจัดกิจกรรมที่เน้นกระบวนการกลุ่ม คิดเป็นร้อยละ 82.76

ด้านการติดต่อสื่อสาร พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีความคิดเห็นในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การติดต่อสื่อสารระหว่างนิสิตกับผู้สอนและระหว่างนิสิตกับนิสิตผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn มีความสะดวกและเป็นกันเอง คิดเป็นร้อยละ 65.52

ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่น ๆ ได้แก่

1. ผู้สอนจัดการเรียนการสอนอย่างเป็นระบบ มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่ทำให้บัณฑิตเกิดความเข้าใจได้เป็นอย่างดี น่าสนใจและรู้สึกสนุกกับการเรียน ทำให้สามารถอธิบายเรื่องยากให้กลายเป็นเรื่องง่ายได้
2. ผู้สอนอธิบายและตอบข้อซักถามของนิสิตได้อย่างชัดเจน มีแบบฝึกหัดให้บัณฑิตได้ฝึกทำมาก ทำให้บัณฑิตเกิดความชำนาญในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์และมีเจตคติที่ดีขึ้นต่อรายวิชานี้
3. กิจกรรมกลุ่มที่นำมาใช้เป็นกิจกรรมที่ทำให้บัณฑิตได้เรียนรู้ร่วมกัน ช่วยเหลือซึ่งกันและกันและเป็นกิจกรรมที่มีความหลากหลายทำให้ไม่รู้สึกเบื่อในขณะที่เรียน
4. ชิ้นงานที่ผู้สอนมอบหมายให้บัณฑิตทำแต่ละชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนที่ชัดเจนดีมาก
5. webboard ในระบบ M@xlearn มีประโยชน์มาก ทำให้สามารถติดต่อสื่อสารระหว่างผู้สอนกับนิสิตและนิสิตด้วยกันเองได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว
6. ระบบ M@xlearn ที่นำมาใช้ในรายวิชานี้มีความเหมาะสมและทันสมัย สามารถนำมาใช้สนับสนุนการเรียนการสอนในห้องเรียนได้ดี แต่ยังมีปัญหาในเรื่องการพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บางตัวที่ไม่สามารถพิมพ์เข้าไปได้โดยตรงยังต้องใช้ภาษาเขียนแทนสัญลักษณ์นั้น ๆ

#### การปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากผลของการนำไปใช้

ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้ผ่านการปรับปรุงแก้ไขแล้วในรอบแรกไปใช้ในรอบที่สองกับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ปรากฏว่าประเด็นปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นในรอบแรกได้รับการแก้ไขปัญหาดตามแนวทางที่ได้วางไว้ดังนี้

ในส่วนของปัญหาด้านเวลา พบว่า ในรอบแรกการทำกิจกรรมตามใบงานของกิจกรรมกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำบางกิจกรรม นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด สำหรับในรอบที่สองไม่เกิดปัญหาด้านเวลาในการทำกิจกรรม เนื่องจากผู้สอนได้กระตุ้นให้นิสิตที่ทำหน้าเป็นประธานกลุ่มช่วยกำกับและควบคุมเรื่องเวลาในการทำงานของแต่ละกลุ่ม เพื่อให้สมาชิกกลุ่มรู้จักจัดสรรเวลาให้เหมาะสมและผู้สอนได้ปรับลดจำนวนข้อของแบบฝึกหัดในใบงานที่มอบหมายให้นิสิตทำ สำหรับบางกิจกรรมกลุ่มที่นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งได้แก่ กิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง ประพจน์และการหาค่าความจริงในใบงานที่ 1 ข้อ 4 โดยลดจำนวนข้อย่อยจาก 3 ข้อให้เหลือ 2 ข้อ และข้อ 6 จากจำนวนข้อย่อย 2 ข้อให้เหลือเพียง 1 ข้อ และกิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง สัจนิรันดร์และสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ในใบงานที่ 1 ทุกข้อโดยลดจำนวนข้อย่อยในแต่ละข้อให้เหลือเพียง 2 ข้อ แล้วพบว่า นิสิตสามารถทำงานได้เสร็จตามเวลาที่ได้กำหนดไว้ทุกกิจกรรม

ในส่วนของปัญหาความสนใจของนิสิต พบว่าในรอบแรกนิสิตบางคนยังไม่ให้ความสนใจในการทำกิจกรรมกลุ่มเท่าที่ควร เพราะอาจจะยังไม่เห็นความสำคัญหรือประโยชน์ที่ได้รับจากกิจกรรมกลุ่ม สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อยๆ ลดลง เมื่อผู้สอนได้ทำการชี้แจงถึงเกณฑ์ในการประเมินผลให้นิสิตได้ทราบก่อนทำกิจกรรมกลุ่มอย่างชัดเจน พร้อมทั้งคะแนนที่นิสิตแต่ละคนจะได้รับในการทำกิจกรรมกลุ่ม ซึ่งมีทั้งคะแนนกลุ่มและคะแนนเป็นรายบุคคล นอกจากนี้ผู้สอนยังได้อธิบายถึงวิธีการประเมินผลงานของกลุ่ม โดยผู้สอนจะทำการสุ่มนิสิตเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอผลงานของแต่ละกลุ่ม ซึ่งทำให้นิสิตทุกคนในแต่ละกลุ่มต้องให้ความสนใจและตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายและเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม เพราะนิสิตแต่ละคนอาจถูกสุ่มออกมาเป็นตัวแทนของกลุ่ม

ในส่วนของปัญหาการทำกิจกรรมในระบบ M@xLearn พบว่า ในรอบแรกนิสิตทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการ เนื่องจากนิสิตอาจไม่เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้จึงทำให้ผลงานที่เกิดขึ้นไม่เป็นไปตามที่ต้องการ สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น เพราะก่อนที่ผู้สอนจะมอบหมายให้นิสิตเข้าไปทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้สอนได้อธิบายคำสั่งหรือโจทย์ รวมถึงวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการและขั้นตอนในการทำงานให้นิสิตได้ทราบอย่างชัดเจนก่อน เพื่อนิสิตจะได้เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้อย่างชัดเจน ซึ่งพบว่าทำให้นิสิตสามารถทำกิจกรรมได้ตรงตามคำสั่งและวัตถุประสงค์มากยิ่งขึ้น

ในส่วนของปัญหาการสมัครเรียนในระบบ M@xLearn พบว่า ในรอบแรกยังมีนิสิตบางคนเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่ได้ เนื่องจากไม่เข้าใจขั้นตอนในการสมัคร โดยผู้สอนได้กำหนดให้นิสิตเริ่มเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในช่วงก่อนเปิดภาคเรียน หลังจากนั้นนิสิตได้ลงทะเบียนเรียนเป็นที่เรียบร้อยแล้ว โดยผู้สอนจะส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น เนื่องจากผู้สอนได้เรียกตัวแทนนิสิตมาพบ เพื่อชี้แจงวิธีการเรียนการสอนและขั้นตอนการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อให้ตัวแทนนำข้อมูลที่ได้รับไปบอกนิสิตคนอื่นๆ ต่อไป พร้อมทั้งได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn อีกครั้งหนึ่งและในสัปดาห์แรกของการเปิดภาคเรียน หากมีนิสิตคนใดยังไม่สามารถเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนได้ ผู้สอนทำการอธิบายถึงขั้นตอนและวิธีการสมัครโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

ในส่วนของปัญหาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ในรอบแรกนิสิตบางคนมีปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยนิสิตยังเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่เป็น ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์น้อย แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน ไม่รู้ว่าจะนำนิยามหรือทฤษฎีบทใดมาใช้และเมื่อจบการพิสูจน์นิสิตเขียนสรุปไม่ชัดเจนหรือไม่เขียนข้อสรุปหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อย ๆ ลดลง เมื่อผู้สอนให้นิสิตทำการศึกษาการพิสูจน์จากตัวอย่างในเอกสารประกอบการสอนและตัวอย่างที่ผู้สอนนำมาพิสูจน์ให้นิสิตดูในชั้นเรียนอย่างค่อยเป็นค่อยไป เพื่อให้นิสิตมองเห็นขั้นตอนและวิธีการพิสูจน์จนเกิดความชำนาญมากขึ้น ในการพิสูจน์ และในช่วงแรกผู้สอนได้ให้โจทย์การบ้านที่มีลักษณะเหมือนกับตัวอย่างก่อน หลังจากนั้น ค่อย ๆ เพิ่มความซับซ้อนขึ้นเรื่อย ๆ และในการตรวจงานผู้สอนได้บันทึกข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่พบให้นิสิตได้ทราบเป็นรายบุคคล พร้อมทั้งเรียกนิสิตมาพบ เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องนั้นในทุกครั้งที่ตรวจงาน

ในส่วนของปัญหาการลอกงานของนิสิต พบว่า ในรอบแรกเมื่อผู้สอนมอบหมายงานให้แก่นิสิตทำเป็นรายบุคคล ไม่ว่าจะเป็นแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn มีนิสิตบางคนลอกงานของเพื่อนมาส่ง สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อย ๆ ลดลง เมื่อผู้สอนได้ทำการชี้แจงถึงวัตถุประสงค์ของการให้นิสิตทำงานเป็นรายบุคคลว่า เพื่อให้นิสิตสามารถพัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้นและหากนิสิตมีข้อบกพร่องเกิดขึ้น ผู้สอนก็จะแจ้งให้นิสิตได้ทราบและหาทางช่วยเหลือเป็นรายบุคคลต่อไป

นอกจากนี้ ผู้สอนยังได้ทำการตกลงและชี้แจงเกี่ยวกับขั้นตอนในการตรวจให้คะแนนและเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานต่าง ๆ ให้แก่นิสิตทราบอย่างชัดเจน ดังนั้น หากนิสิตลอกงานจากเพื่อนมาส่งจะเกิดผลเสียต่อตัวนิสิตเอง ทำให้นิสิตไม่ได้ทราบถึงข้อบกพร่องและไม่ได้รับการพัฒนาแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

ในส่วนของปัญหาการประกาศผลและแจ้งข้อบกพร่องจากการสอบ พบว่า ในรอบแรก การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนในคาบเรียนถัดไปถือว่าค่อนข้างช้าและเสียเวลามาก เนื่องจากผู้สอนจะต้องบอกคะแนนแล้วยังต้องชี้แจงถึงข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นของนิสิตแต่ละคน สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น เนื่องจากการประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนนั้น ผู้สอนได้ประกาศผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ webboard ซึ่งทำให้นิสิตมีความพึงพอใจมาก เพราะมีความสะดวกและรวดเร็ว และนิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบได้ทุกเวลา โดยผู้สอนได้ประกาศให้นิสิตทราบก่อนการเรียนการสอนในครั้งถัดไป

ดังนั้น ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบที่สอง ปรากฏว่าประเด็นปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในรอบแรกได้รับการแก้ไขเป็นที่เรียบร้อย ซึ่งส่งผลให้ผู้สอนทำงานด้วยความสบายใจและสนุกกับการทำงาน เนื่องจากผู้สอนมองเห็นแนวทางและเข้าใจปัญหาต่าง ๆ ในการจัดการเรียนการสอนที่ชัดเจนมากขึ้น แต่พบว่ามีปัญหาใหม่เกิดขึ้นคือ ปัญหาเกี่ยวกับการพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บางตัวที่ไม่สามารถพิมพ์เข้าไปได้โดยตรงในการทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เฉพาะบางกิจกรรมที่ต้องพิมพ์เข้าไปโดยตรงในกล่องข้อความของระบบ ส่วนกิจกรรมที่ให้แนบเป็นไฟล์ ซึ่งนิสิตพิมพ์ในโปรแกรม Microsoft Word ส่งนั้นไม่มีปัญหา นิสิตสามารถพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้าไปได้ สำหรับการแก้ปัญหาในระยะสั้น ผู้สอนอนุญาตให้นิสิตพิมพ์เป็นภาษาเขียนหรือใช้สัญลักษณ์ที่ใกล้เคียงแทนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ ได้ และในระยะยาวผู้สอนได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) เพื่อแจ้งปัญหาที่เกิดขึ้นให้แก่ผู้ดูแลระบบ M@xLearn ทราบเพื่อหาวิธีแก้ไขและปรับปรุงระบบต่อไป

## ข้อวิจารณ์

จากผลการวิจัย เรื่อง การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ พบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมีความเหมาะสม สามารถพัฒนาผลการเรียนรู้ในด้านต่าง ๆ ของนิสิตได้ดี ผู้วิจัยได้นำมาวิจารณ์เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปและข้อเสนอแนะของการวิจัยดังนี้

1. รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่พัฒนาขึ้น ได้ดำเนินการตามขั้นตอน 3 ขั้นตอน ซึ่งเป็นขั้นตอนที่มีระบบตามแนวคิดและหลักการในลักษณะของการวิจัยและพัฒนา ได้แก่ การศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน การสร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน และการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ ประเมินประสิทธิภาพและปรับปรุง พบว่าในการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานเพื่อนำข้อมูลที่ได้รับ มาพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนต่อไปนั้น นอกจากทำการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องแล้ว สิ่งที่จะขาดไม่ได้ก็คือ การศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนรายวิชาที่ผู้วิจัยจะนำมาพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เพื่อนำมากำหนดกรอบแนวคิดในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน ผลการศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I จากการจัดสนทนากลุ่ม ทั้งกลุ่มอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และกลุ่มนิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชานี้มาแล้วพบว่า

สภาพปัญหาที่เกิดขึ้นในการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ด้าน ได้แก่ ด้านการจัดเวลาเรียนและการสอบ ที่พบว่าการจัดเวลาเรียนยังไม่เหมาะสมบางครั้งจัดแยกชั่วโมง การจัดแบ่งเนื้อหาเพื่อสอบกลางภาคและสอบปลายภาคยังไม่เหมาะสม และการจัดสอบเพียงกลางภาคกับปลายภาคทำให้นิสิตเกิดความเครียด เพราะผลการเรียนถูกตัดสินด้วยการสอบ 2 ครั้งนี้ ด้านผู้เรียน พบว่า นิสิตมีพื้นฐานความรู้ไม่เท่ากันทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างบุคคล นิสิตยังไม่ค่อยเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ ยังเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ที่ไม่เหมาะสมกับโจทย์ที่กำหนดให้ และยังไม่มีการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง ไม่มีลำดับขั้นตอนในการพิสูจน์ อ้างเหตุผลไม่เหมาะสมและไม่มีการสรุปเมื่อจบการพิสูจน์ นิสิตบางคนไม่สนใจเรียน ไม่ทำแบบฝึกหัด มักลอกงานจากเพื่อน สำหรับด้านผู้สอนและการจัดการเรียนรู้ พบว่าผู้สอนไม่มีการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนและไม่บอกจุดประสงค์การเรียนรู้หรือเกณฑ์การประเมินผลในแต่ละคาบให้นิสิตได้ทราบก่อน ทำให้นิสิตไม่ทราบว่าเรียนไปเพื่อ

อะไร และมีเกณฑ์การวัดผลและประเมินผลอย่างไร ผู้สอนยังจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลน้อย การแบ่งกลุ่มทำงานในห้องเรียนเพื่อให้บัณฑิตเรียนรู้ร่วมกัน ถึงแม้จะดีแต่ก็มีนิสิตบางคนไม่สนใจและไม่ให้ความร่วมมือ และการติดต่อเพื่อซักถามปัญหากับผู้สอนนอกเวลาเรียนมีความลำบากเพราะบางครั้งนิสิตกับผู้สอนว่างไม่ตรงกันหรือนิสิตมาพบแล้วผู้สอนไม่อยู่ ซึ่งสภาพปัญหาดังกล่าวมีความสอดคล้องกับ ยุพิน (2539) ที่ได้กล่าวถึง ปัญหาในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งพอสรุปได้ว่า ในการจัดการเรียนการสอนนั้นมิใช่ว่าปัญหาจะขึ้นอยู่กับตัวผู้เรียนแต่ฝ่ายเดียว องค์ประกอบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวผู้เรียนย่อมทำให้เกิดปัญหาได้ ซึ่งได้แก่ ครูบางคนมีพื้นฐานความรู้ไม่เพียงพอที่จะสอนเนื้อหาเหล่านั้น ๆ ดำเนินการสอนโดยยังใช้วิธีสอนแบบเก่า ไม่นำให้ผู้เรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ ขาดการมีอารมณ์ขันและไม่มีมนุษยสัมพันธ์ หลักสูตรเปลี่ยนแปลงบ่อยอาจจะทำให้ครูปรับตัวไม่ทัน ผู้เรียนขาดความพร้อม ขาดความเชื่อมั่นในตนเอง มีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ รวมทั้งวิธีการเรียนของผู้เรียนที่บางคนยังเรียนโดยการท่องจำแต่ไม่มีความเข้าใจ จำสูตรหรือกฎได้ทุกสูตรแต่ทำโจทย์ไม่ได้ บางคนจำทฤษฎีได้แต่พิสูจน์ไม่ได้ เมื่อไม่เข้าใจก็ไม่กล้าถามและการไม่ทำแบบฝึกหัด เป็นต้น และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Moore (1990) ที่พบว่า ปัญหาที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ คือ ผู้เรียนไม่ทราบบทนิยามทำให้ไม่สามารถเขียนบทนิยามได้ ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์น้อยไม่เพียงพอในการเขียนพิสูจน์ ผู้เรียนไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างของการพิสูจน์อย่างไร ผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร เช่นเดียวกับผลการวิจัยของ สุวันเพ็ญ (2540) ที่พบว่า ปัญหาการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัยของนิสิตนั้น ส่วนใหญ่เป็นปัญหาเกี่ยวกับการปรับตัว เข้ากับการเรียนไม่ค่อยได้ของนิสิต ไม่ว่าจะเป็นลักษณะการเรียนหรือลักษณะของการประเมินผล รวมถึงนิสิตไม่ได้เตรียมตัวก่อนที่จะเรียน ไม่ได้ทบทวนหลังเรียนหรือนิสิตอาจจะไม่ได้ทำแบบฝึกหัดอย่างเพียงพอจึงไม่มีความเข้าใจทำให้เกิดปัญหาในรายวิชานั้น ๆ

ส่วนปัจจัยและเงื่อนไขที่มีผลต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ของนิสิตประกอบด้วย ด้านรูปแบบการเรียนการสอน พบว่า ควรมีการใช้วิธีสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่หลากหลายและเหมาะสมกับหน่วยการเรียนรู้ ด้านการสอนซ่อมเสริม พบว่า ควรมีการจัดสอนซ่อมเสริมให้แก่นิสิตที่ยังไม่เข้าใจหรือสอบไม่ผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนด ด้านเอกสารและแหล่งการเรียนรู้ พบว่า ผู้สอนควรแนะนำแหล่งการเรียนรู้ให้นิสิตทราบเพื่อนิสิตสามารถไปศึกษาและค้นคว้าเพิ่มเติม เช่น หนังสือ เอกสารหรือเว็บไซต์ต่างๆ โดยอาจจัดสร้างเป็น Homepage รายวิชาที่รวบรวมเอกสารและเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้องกับรายวิชานี้ไว้เพื่ออำนวยความสะดวกแก่นิสิตในการเข้าไปศึกษาค้นคว้า ด้านเวลาในการให้คำปรึกษาแก่นิสิต พบว่า

ผู้สอนควรแจ้งวันและเวลาที่ว่างให้นิสิตทราบ เพื่อให้นิสิตที่มีปัญหาในการเรียนสามารถเข้าพบ นอกเวลาเรียนได้ หรือหากไม่ต้องการเดินทางมาพบผู้สอนโดยตรงสามารถติดต่อสื่อสารผ่านทาง จดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหา ผ่านเว็บ M@xLearn สำหรับด้านการฝึกทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ผู้สอนควรให้ นิสิตได้ฝึกทักษะการพิสูจน์ให้มากโดยในช่วงแรก ๆ อาจให้นิสิตฝึกทักษะด้วยการแสดงการพิสูจน์ ในลักษณะที่เหมือนกับตัวอย่างที่กำหนดให้ก่อน เมื่อนิสิตเกิดความเข้าใจและสามารถแสดง การพิสูจน์ได้แล้วก็ค่อย ๆ ปรับโจทย์ให้ยากขึ้นตามลำดับ ซึ่งปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลดังกล่าว มีความสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Thompson and Geren (2002) ที่พบว่า กลยุทธ์และเทคนิค ในการจัดการสำหรับนักศึกษาที่มีภาวะเสี่ยงต่อการล้มเหลวทางการศึกษาคือ การให้ความสนใจ ใส่ใจและดูแลนักศึกษาอย่างทั่วถึงซึ่งมีอยู่หลายลักษณะ เช่น ในคาบแรกหรือช่วงแรกของการสอน อาจารย์ผู้สอนควรทำความรู้จักชื่อและประวัตินักศึกษาให้ทั่วถึงก่อน เพื่อให้เกิดความเป็นกันเอง และลดความตึงเครียด ส่วนในชั้นเรียนที่มีนักศึกษามาก นอกจากใช้การพูดคุยกันแล้วอาจใช้ การติดต่อกันทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) และในการมอบหมายงานนั้นควรอธิบายและ ชี้แจงการทำงานรวมถึงบอกถึงวิธีการในการค้นคว้าอย่างชัดเจน เช่นเดียวกับผลการวิจัยของ Müller and Louw (2003) ที่พบว่า การมีอิสระเป็นตัวของตัวเอง ความสามารถ ความสัมพันธ์ ทางสังคม ความสนใจของอาจารย์ผู้สอน ความสอดคล้องของเนื้อหาสาระและคุณภาพในการเรียน การสอน เป็นเงื่อนไขของแรงจูงใจและการสนใจเรียนของนักศึกษามหาวิทยาลัย

จากการศึกษาเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นว่า รูปแบบการเรียน การสอนที่พัฒนาขึ้นสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ มีความสอดคล้องกับความต้องการของผู้สอนและ นิสิต นั่นคือการพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนใด ๆ ก็ตามควรมีการศึกษาถึงสภาพ ความพร้อม และความต้องการของนิสิตก่อน เพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอนที่เหมาะสมกับรายวิชาอย่าง แท้จริง และควรเปิดโอกาสให้ผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องไม่ว่าจะเป็นผู้สอนหรือนิสิตได้ร่วมคิด ร่วมทำ และร่วมวางแผนในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน และการจัดการเรียนการสอนตั้งแต่เริ่ม ดำเนินการ

2. จากผลการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน นำไปสู่การสร้างและพัฒนา รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งมีลักษณะ เป็นแผนการจัดองค์ประกอบต่าง ๆ ของการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย หลักการ วัตถุประสงค์ สาระการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียน การสอน สื่อการเรียนรู้ การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ สำหรับในส่วนของกระบวนการเรียน การสอนที่ใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอนนั้น เป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้น

ผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกัน โดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบ ประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือ และระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ที่ประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน คือ ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ชี้นำเสนอสาระการเรียนรู้ ขั้นสรุปความรู้ ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ โดยมีเหตุผลสนับสนุนในแต่ละขั้นตอน ดังนี้

2.1) ชี้นำเข้าสู่บทเรียน เป็นขั้นตอนเพื่อสร้างแรงจูงใจหรือเร้าความสนใจของนิสิต ให้เกิดความอยากรู้ อยากรู้อะไร อยากรู้อะไรที่จะคิดแก้ปัญหา เตรียมพร้อมที่จะเรียนรู้ รวมทั้งทำให้นิสิตได้ทราบจุดมุ่งหมายในการเรียน สิ่งที่จะเรียนและเกณฑ์การประเมินผล ซึ่งในขั้นตอนนี้ผู้สอนสามารถใช้เทคนิควิธีการที่หลากหลาย ได้แก่ ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะสอนและเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินผลในแต่ละกิจกรรมก่อนที่จะทำการสอน หรือ การตรวจสอบและทบทวนความรู้พื้นฐานของผู้เรียน ทบทวนบทเรียนที่ผ่านมา เฉลยการบ้านหรือ โจทย์ที่นิสิตยังไม่เข้าใจในคาบที่แล้ว เพื่อทำให้เกิดความเชื่อมโยงระหว่างความรู้เดิมและความรู้ใหม่ของผู้เรียน ตลอดจนเตรียมความพร้อมที่จะดำเนินกิจกรรมต่อไป

2.2) ชี้นำเสนอสาระการเรียนรู้ เป็นขั้นตอนของการนำเสนอเนื้อหาสาระที่ต้องการให้นิสิตเกิดการเรียนรู้ โดยบทบาทสำคัญอยู่ที่ผู้สอน ที่จะต้องเป็นผู้ที่คอยกระตุ้นให้นิสิตเกิดการเรียนรู้หรือผู้จัดสถานการณ์ในการเรียนรู้ เพื่อให้นิสิตได้ฝึกคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหา การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยผ่านเทคนิควิธีการที่หลากหลายและเหมาะสมกับเนื้อหาสาระ ซึ่งพบว่า ในขั้นตอนนี้ผู้สอนได้ใช้วิธีการที่หลากหลาย ได้แก่ วิธีสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด การถามตอบประกอบการอธิบาย การจัดกิจกรรมกลุ่ม การให้นิสิตออกมาทำโจทย์บนกระดานและให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็นร่วมกัน และการทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

สำหรับกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยได้นำมาใช้ในขั้นเสนอสาระการเรียนรู้ มีลักษณะการผสมผสานที่แตกต่างกันไปตามแต่ละหน่วยการเรียนรู้ หรือแต่ละสาระการเรียนรู้ ซึ่งจากการสังเกตการทำงานและพฤติกรรมของนิสิต พบว่า กิจกรรมดังกล่าวเป็นกิจกรรมที่ทำให้ นิสิตเกิดการเรียนรู้ได้ดี โดยนิสิตได้ลงมือปฏิบัติ แสดงความคิดเห็น อธิบายแนวคิด แสดงเหตุผล แก้ปัญหาร่วมกันและแลกเปลี่ยนแนวคิดซึ่งกันและกัน

2.3) **ขั้นสรุปความรู้** เป็นขั้นตอนที่ผู้สอนให้ผลิตช่วยกันสรุป ไม่ว่าจะเป็นรายบุคคลหรือกลุ่ม รวมทั้งสรุปความรู้ที่ได้ผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อสรุปสาระสำคัญที่ได้จากการเรียนรู้หรือสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ เพื่อนำความรู้หรือวิธีการที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาต่อไป

2.4) **ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้** ประกอบด้วยกิจกรรมที่ผลิตทำเป็นกลุ่มหรือรายบุคคลตามความเหมาะสม ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ทำให้ผลิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาหรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ โดยทำกิจกรรมที่ได้รับมอบหมายจากประสบการณ์ต่างๆ ที่ผู้สอนจัดให้ ซึ่งอาจเป็นแบบฝึกหัด ใบงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หรือทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

2.5) **ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้** ประกอบด้วยกิจกรรมการวัดผลและประเมินผลควบคู่กับกิจกรรมทุกขั้นตอนที่กล่าวมาแล้ว เป็นการประเมินผลระหว่างเรียนเพื่อสังเกตผลการปฏิบัติกิจกรรมทุกขั้นตอน ว่าเป็นไปตามที่คาดหวังหรือไม่ เพื่อจะได้นำผลที่ได้ไปปรับปรุงการเรียนการสอนในครั้งต่อไป กิจกรรมในขั้นนี้มีหลายลักษณะ ได้แก่ ผู้สอนให้ผลิตทำโจทย์พิเศษท้าทายชั่วโมงเพื่อใช้ตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตพร้อมทั้งเฉลยในห้องเรียน การสังเกตการทำกิจกรรมกลุ่ม การแสดงความคิดเห็นของนิสิตในกลุ่ม การตอบคำถามของนิสิต การทดสอบประจำหน่วยและแจ้งผลการทดสอบ พร้อมข้อบกพร่องต่างๆ ที่นิสิตควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบเสร็จ การเรียนซ่อมเสริมสำหรับนิสิตที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด และการตรวจผลงานหรือการบ้านของนิสิต เป็นต้น ซึ่งกิจกรรมเหล่านี้ทำให้ผู้สอนได้รับข้อมูลย้อนกลับสำหรับนำมาปรับปรุงการเรียนการสอนให้ดียิ่งขึ้น และทำให้ทั้งผู้สอนและนิสิตมีความเข้าใจซึ่งกันและกัน ตลอดจนทำให้บรรยากาศในการเรียนการสอนเป็นไปด้วยดี ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะการประเมินผลทางคณิตศาสตร์ของ ยุพิน (2545) ที่ได้กล่าวว่า การประเมินผลระหว่างเรียนมีหลายลักษณะ ได้แก่ การประเมินด้วยการสื่อสารส่วนบุคคล เป็นวิธีการประเมินที่เน้นการใช้ทักษะการสื่อสารระหว่างบุคคล ซึ่งประกอบด้วยคำถามตอบระหว่างทำกิจกรรมการเรียน การสนทนาพบปะพูดคุยกับผู้เรียน การสอบปากเปล่าเพื่อประเมินความรู้ ความเข้าใจและทัศนคติ และการตรวจแบบฝึกหัดและการบ้านพร้อมให้ข้อมูลย้อนกลับ และสำหรับการประเมินจากการปฏิบัติเป็นวิธีการประเมินที่ผู้สอนมอบหมายงานหรือกิจกรรมให้ โดยภาระงานที่ผู้สอนกำหนดให้ผู้เรียนทำเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มจะประเมินวิธีการทำงานตามขั้นตอนและผลงานของผู้เรียน ส่วนภาระงานหรือกิจกรรมที่ผู้เรียนปฏิบัติเป็นปกติในชีวิตประจำวันจะประเมินด้วยวิธีสังเกต จดบันทึก เหตุการณ์ที่เกี่ยวกับผู้เรียน

จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามกระบวนการเรียนการสอนทั้ง 5 ขั้นตอน พบว่า สามารถพัฒนานิสิตให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และนิสิตมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Yusup and Chang (1997); ปราณี (2539); สมมาต (2540); วราพร (2542); สมยศ (2545) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ที่มีการแบ่งขั้นตอนของกระบวนการจัดการเรียนการสอนในลักษณะต่างๆ โดยพบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น สามารถพัฒนาผู้เรียนให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นและมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชาคณิตศาสตร์

3. การเรียนแบบร่วมมือ เป็นการจัดการเรียนการสอนในลักษณะหนึ่งที่ได้นำมาใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ โดยมุ่งให้นิสิตเกิดทักษะทางสังคม เรียนรู้ร่วมกัน ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน เนื่องจากสมาชิกแต่ละคนในกลุ่ม นอกจากจะรับผิดชอบงานและการเรียนรู้ของตนเองแล้ว ยังต้องช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มให้เกิดการเรียนรู้เช่นเดียวกัน การเรียนแบบร่วมมือยังเปิดโอกาสให้นิสิตได้พูดแสดงความคิดเห็นและแสดงเหตุผลได้มากขึ้น และนิสิตได้มีโอกาสสื่อสารกันในกลุ่มของนิสิตด้วยภาษาเดียวกัน ซึ่งอาจช่วยสร้างความเข้าใจและความน่าสนใจได้ดีกว่าการฟังจากการอธิบายของผู้สอนเพียงฝ่ายเดียว เพราะในการแก้ปัญหาด้วยกันในกลุ่ม สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มอาจเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์แต่เพียงลำพัง แต่เมื่อบูรณาการแนวคิดของหลายคนเข้าด้วยกันแล้ว ทำให้ได้แนวคิดที่สมบูรณ์มีประสิทธิภาพมากขึ้น และสามารถแก้ปัญหาก็ได้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ วราพร (2542) ที่ได้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้การสอนตนเองกับการเรียนการสอนแบบรายบุคคลและแบบกลุ่ม ซึ่งพบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษาให้สูงขึ้น

สำหรับรูปแบบการเรียนแบบร่วมมือที่นำมาใช้จัดการเรียนการสอนในครั้งนี้ ได้แก่ รูปแบบ STAD (Student Teams Achievement Division), Jigsaw II, TAI (Team Assisted Individualization) และ Giraffiti Model โดยรูปแบบ STAD, Jigsaw II และ Giraffiti Model นำมาใช้เพื่อให้นิสิตเกิดการเรียนรู้เกี่ยวกับแนวคิด ความคิดรวบยอด กฎ ทฤษฎีบท รูปแบบการพิสูจน์ต่างๆ รวมทั้งฝึกให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายแง่มุม ฝึกการแสวงหาทางเลือกต่างๆ เพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจ ส่วนรูปแบบ TAI ใช้เพื่อทบทวน ฝึกฝนหรือฝึกทักษะในสิ่งที่ได้เรียนไป ซึ่งลักษณะของการนำรูปแบบการเรียนแบบร่วมมือทั้ง 4 รูปแบบมาใช้ในครั้งนี้ พบว่า สอดคล้องกับการจัดการเรียนการสอนแบบร่วมมือในลักษณะต่างๆ ที่ นาดตยา (2543) และ สิริพร (2545) ได้กล่าวไว้ และจากการสังเกตพฤติกรรมการทำงาน

ร่วมกันของนิสิต ที่ผู้สอนจัดกลุ่มแบบคละโดยใช้เกณฑ์ในการแบ่งกลุ่มหลายลักษณะ ขึ้นอยู่กับรูปแบบการเรียนแบบร่วมมือที่นำมาใช้ในกิจกรรมนั้น ๆ เช่น พิจารณาจากผลการเรียนที่ผ่านมา คะแนนการทดสอบก่อนเรียน เป็นต้น ในระยะแรก พบว่า นิสิตบางคนยังไม่คุ้นเคยกับกิจกรรมการเรียนการสอนในลักษณะนี้ เมื่อให้แก้ปัญหาร่วมกันกับสมาชิกซึ่งอาจไม่ใช่เพื่อนที่สนิทกันหรือกลุ่มเดียวกันทำให้นิสิตไม่กล้าแสดงออก ไม่กล้าที่จะซักถามหรืออภิปรายปัญหา ร่วมกัน มุ่งที่จะคิดแก้ปัญหาหรือหาคำตอบตามลำพัง แต่เมื่อนิสิตคุ้นเคยและเข้าใจถึงเป้าหมายของกิจกรรมการเรียนการสอนแล้ว นิสิตร่วมมือกันในการแก้ปัญหามากขึ้น มีการอธิบาย แสดงแนวคิด ชี้แจงเหตุผลกันในกลุ่ม และหลังจากอภิปรายผลการแก้ปัญหาและสรุปผลการแก้ปัญหา แล้ว แต่ละกลุ่มปรับปรุงงานของกลุ่มตนเองให้ถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งผลจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนดังกล่าว พอสรุปได้ดังนี้

3.1) ช่วยพัฒนานิสิตให้เกิดทักษะทางสังคม สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข แสดงความคิดเห็นร่วมกัน มีความรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมายและการได้รับการยอมรับจากเพื่อนร่วมงาน

3.2) ช่วยพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนิสิตได้ ทั้งนี้เพราะทุกคนต้องปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมกัน เกิดการเรียนรู้และประสบผลสำเร็จร่วมกันในกลุ่ม

3.3) การช่วยเหลือกันในกลุ่ม ช่วยทำให้นิสิตที่เรียนอ่อนเกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาและสามารถแก้ปัญหาได้ดีขึ้น

3.4) จากการแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มที่มีการช่วยเหลือและรับผิดชอบร่วมกันในการเรียนรู้ ทำให้นิสิตเกิดความเห็นอกเห็นใจกัน มีความเข้าใจถึงความสามารถของแต่ละบุคคลว่าแตกต่างกัน และมีความรู้สึกที่ดีต่อกัน

3.5) ผลจากความสำเร็จในการแก้ปัญหาร่วมกัน ทำให้นิสิตมีความรู้สึกที่ดีต่อรายวิชาโดยเฉพาะนิสิตที่เรียนอ่อน

3.6) การแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มย่อย ทำให้นิสิตรู้สึกสบายใจ ไม่เครียดและลดความวิตกกังวลว่าจะทำไม่ได้ เพราะมีเพื่อนช่วยกันคิดหลายคน แต่ทั้งนี้ผู้สอนต้องไม่ลืมว่านิสิตต้องทำกิจกรรมทั้งร่วมกันและรายบุคคล

3.7) การใช้การเรียนแบบร่วมมือกันในหลายหน่วยการเรียน ทำให้นักเรียนบางคน โดยเฉพาะนิสิตที่เรียนดี อาจมีความรู้สึกว่าเป็นภาระที่ต้องรับผิดชอบและต้องช่วยเหลือคนอื่น แทนที่จะใช้เวลานั้นแก้ปัญหาที่ทำหยาอื่น ๆ นับว่าเป็นการฝึกให้นักเรียนที่เรียนดี รู้จักเอื้อเฟื้อเผื่อแผ่ต่อผู้อื่น ดังนั้นผู้สอนต้องช่วยสร้างให้เกิดความรู้สึกที่ดีนี้ด้วย

4. ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn รายวิชา 158222 เป็นระบบสนับสนุนการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย syllabus, course members, calendar, problems, resources, webboard, groupworks และ homeworks โดยผู้วิจัยได้นำมาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียน ซึ่งเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการเรียนรู้ในชั้นเรียนมากขึ้น เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ทุกที่ ทุกเวลา ใช้เป็นแหล่งค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปของเว็บไซต์ ใช้ติดต่อสื่อสารกันระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน และระหว่างผู้เรียนด้วยกัน และใช้สรุปความรู้ที่ได้รับ ฝึกวิเคราะห์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยผ่านการทำกิจกรรมกลุ่มและรายบุคคล ซึ่งผลจากการใช้ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ดังกล่าวพอสรุปได้ดังนี้

4.1) นิสิตมีความกระตือรือร้นและให้ความสนใจในการทำกิจกรรมที่มอบหมายมากขึ้น เพราะระบบมีความทันสมัย สะดวกสบาย สามารถทำงานได้ทุกที่ ทุกเวลาและนิสิตสามารถส่งงานในรูปของข้อความหรือไฟล์ได้ในทันทีโดยไม่ต้องเสียเวลาส่งงานกับผู้สอน

4.2) webboard หรือกระดานสนทนาของระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสื่อสารเกี่ยวกับ การนัดหมาย การส่งงาน การให้คำปรึกษา การแจ้งผลการเรียนและข้อมูลข่าวสารอื่น ๆ ระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน และระหว่างผู้เรียนด้วยกันได้เป็นอย่างดี เพราะมีความสะดวก รวดเร็ว สามารถทำการติดต่อสื่อสารกันได้ตลอดเวลา

4.3) ในช่วงแรกของการเรียนการสอน ผู้สอนจะทำการประกาศผลคะแนนสอบพร้อมข้อบกพร่องของนิสิตในคาบเรียนถัดไปหลังจากสอบเสร็จ ทำให้นักเรียนล่าช้าและเสียเวลาในการเรียนการสอน แต่หลังจากที่ผู้สอนได้ประกาศผลคะแนนสอบ พร้อมข้อบกพร่องของนิสิตแต่ละคน ผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ webboard ทำให้นักเรียนเกิดความพึงพอใจเป็นอย่างมาก เพราะมีความสะดวก รวดเร็ว และนิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบได้ทุกเวลา โดยผู้สอนได้ประกาศให้นักเรียนทราบก่อนการเรียนการสอนในครั้งต่อไป

4.4) ระบบการจัดส่งและจัดเก็บงานที่นิสิตทำส่งผู้สอนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ช่วยให้ผู้สอนสามารถตรวจสอบวันและเวลาที่นิสิตส่งงานได้อย่างแม่นยำ และสามารถใช้เป็นหลักฐานในการประเมินนิสิตได้เป็นอย่างดี

4.5) กิจกรรมกลุ่มและกิจกรรมรายบุคคลที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น สามารถใช้สรุปความรู้และวิเคราะห์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดี โดยหลังจากที่ผู้สอนตรวจงานที่นิสิตได้ทำส่งแล้ว นิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบคะแนนที่ได้รับด้วยตนเอง พร้อมทั้งข้อมูลย้อนกลับจากผู้สอนซึ่งอาจจะเป็นข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขให้ดียิ่งขึ้นหรือคำชม

4.6) ผู้สอนได้รวบรวมเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้องกับรายวิชา แล้วนำมาจัดเก็บไว้ในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อให้นิสิตใช้เป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพบว่า นิสิตสามารถเข้าไปสืบค้นได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว

ดังนั้น ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn รายวิชา 158222 ที่นำมาใช้เป็นระบบสนับสนุนการเรียนการสอนในรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น พบว่า สอดคล้องกับแนวคิดของ Angels (อ้างถึงใน NECTEC COURSEWARE, 2004) ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนและผู้สอนสามารถติดต่อสื่อสารกันได้ตลอดเวลา เกิดการเรียนรู้ได้ทุกที่ ทุกเวลา สามารถใช้เป็นแหล่งการเรียนรู้สำหรับค้นคว้าข้อมูล และการให้ผลการเรียนป้อนกลับทันทีแก่ผู้เรียน

5. ในการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้น ไปทดลองใช้ในรอบแรกกับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ซึ่งขณะที่ทำการทดลองผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้นิสิตมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น โดยรูปแบบการเรียนการสอนประกอบด้วย กระบวนการเรียนการสอน 5 ขั้นตอน คือ ชี้แนะเข้าสู่บทเรียน ชี้เสนอสาระการเรียนรู้ ช้สรุปความรู้ ช้ฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และชี้วัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ซึ่งพบว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมีความเหมาะสม สามารถนำไปใช้เพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้น ไม่ว่าจะเป็นผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และทักษะทางสังคม

ถึงแม้ว่า ผลจากการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ในรอบแรก พบว่ามีความเหมาะสม แต่ผู้วิจัยก็พบว่า มีปัญหาบางอย่างเกิดขึ้นและผู้วิจัยได้วางแนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหาเพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอนที่เหมาะสม สำหรับนำไปใช้ในรอบสองต่อไป ดังนี้

5.1) ปัญหาด้านเวลา พบว่า การทำกิจกรรมตามใบงานของกิจกรรมกลุ่มที่ได้มอบหมายให้นิสิตทำบางกิจกรรม นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ผู้สอนกระตุ้นให้นิสิตที่ทำหน้าเป็นประธานกลุ่มช่วยกำกับและควบคุมเรื่องเวลาในการทำงานของแต่ละกลุ่ม เพื่อให้สมาชิกกลุ่มรู้จักจัดสรรเวลาให้เหมาะสม และผู้สอนได้ปรับลดจำนวนข้อของแบบฝึกหัดในใบงานที่มอบหมายให้นิสิตทำ สำหรับบางกิจกรรมกลุ่มที่นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งได้แก่ กิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง ประพจน์และการหาค่าความจริงในใบงานที่ 1 ข้อ 4 โดยลดจำนวนข้อย่อยจาก 3 ข้อให้เหลือ 2 ข้อ และข้อ 6 จากจำนวนข้อย่อย 2 ข้อให้เหลือเพียง 1 ข้อ และกิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง สัจนิรันดร์และสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ในใบงานที่ 1 ทุกข้อโดยลดจำนวนข้อย่อยในแต่ละข้อให้เหลือเพียง 2 ข้อ

5.2) ปัญหาความสนใจของนิสิต พบว่า นิสิตบางคนยังไม่ให้ความสนใจในการทำกิจกรรมกลุ่มเท่าที่ควร เพราะอาจจะยังไม่เห็นความสำคัญหรือประโยชน์ที่ได้รับจากกิจกรรมกลุ่มและผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ผู้สอนทำการชี้แจงถึงเกณฑ์ในการประเมินผลให้นิสิตได้ทราบก่อนทำกิจกรรมกลุ่มอย่างชัดเจน พร้อมทั้งคะแนนที่นิสิตแต่ละคนจะได้รับในการทำกิจกรรมกลุ่ม ซึ่งมีทั้งคะแนนกลุ่มและคะแนนเป็นรายบุคคล นอกจากนี้ ผู้สอนต้องอธิบายถึงวิธีการประเมินผลงานของกลุ่ม โดยผู้สอนได้ทำการสุ่มนิสิตเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอผลงานของแต่ละกลุ่ม ซึ่งทำให้นิสิตทุกคนในแต่ละกลุ่มต้องให้ความสนใจและตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายและเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม เพราะนิสิตแต่ละคนอาจถูกสุ่มออกมาเป็นตัวแทนของกลุ่ม

5.3) ปัญหาการทำกิจกรรมในระบบ M@xLearn พบว่า นิสิตทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการ เนื่องจากนิสิตอาจไม่เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้จึงทำให้ผลงานที่เกิดขึ้น ไม่เป็นไปตามที่ต้องการ และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ก่อนที่ผู้สอนจะมอบหมายให้นิสิตเข้าไปทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้สอนต้องอธิบายคำสั่งหรือโจทย์ รวมถึงวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการและขั้นตอนในการทำงานให้นิสิตได้ทราบอย่างชัดเจนก่อน เพื่อนิสิตจะได้เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้อย่างชัดเจน

5.4) ปัญหาการสมัครเรียนในระบบ M@xLearn พบว่า มีนิสิตบางคนเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่ได้ เนื่องจากไม่เข้าใจขั้นตอนในการสมัคร โดยผู้สอนได้กำหนดให้นิสิตเริ่มเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในช่วงก่อนเปิดภาคเรียน หลังจากที่นิสิตได้ลงทะเบียนเรียนเป็นที่เรียบร้อยแล้ว โดยผู้สอนจะส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ผู้สอนเรียกตัวแทนนิสิตมาพบ เพื่อชี้แจงถึงวิธีการเรียนการสอนและขั้นตอนการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อให้ตัวแทนนำข้อมูลที่ได้รับไปบอกนิสิตคนอื่นๆ ต่อไป พร้อมทั้งผู้สอนได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn อีกครั้งหนึ่งและในสัปดาห์แรกของการเปิดภาคเรียน หากมีนิสิตคนใดยังไม่สามารถเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนได้ ผู้สอนได้อธิบายถึงขั้นตอนและวิธีการสมัครโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

5.5) ปัญหาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า นิสิตบางคนมีปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยนิสิตยังเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่เป็น ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์น้อย แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน ไม่รู้ว่าจะนำนิยามหรือทฤษฎีบทใดมาใช้ และเมื่อจบการพิสูจน์นิสิตเขียนสรุปไม่ชัดเจนหรือไม่เขียนข้อสรุปหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ผู้สอนให้นิสิตศึกษาการพิสูจน์จากตัวอย่างในเอกสารประกอบการสอนและตัวอย่างที่ผู้สอนนำมาพิสูจน์ให้นิสิตดูในชั้นเรียนอย่างค่อยเป็นค่อยไป เพื่อให้นิสิตมองเห็นขั้นตอนและวิธีการพิสูจน์จนเกิดความชำนาญมากขึ้นในการพิสูจน์ และในช่วงแรกผู้สอนควรให้โจทย์การบ้านที่มีลักษณะเหมือนกับตัวอย่างก่อน หลังจากนั้นค่อยๆ เพิ่มความซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ และในการตรวจงาน ผู้สอนควรบันทึกข้อบกพร่องต่างๆ ที่พบให้นิสิตได้ทราบเป็นรายบุคคล พร้อมทั้งเรียกนิสิตมาพบ เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องนั้นในทุกครั้งที่ตรวจงาน

5.6) ปัญหาการลอกงานของนิสิต พบว่า เมื่อผู้สอนมอบหมายงานให้แก่นิสิตทำเป็นรายบุคคล ไม่ว่าจะแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn มีนิสิตบางคนลอกงานของเพื่อนมาส่ง และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ ผู้สอนควรชี้แจงถึงวัตถุประสงค์ของการให้นิสิตทำงานเป็นรายบุคคลว่า เพื่อให้นิสิตสามารถพัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น และหากนิสิตมีข้อบกพร่องเกิดขึ้น ผู้สอนก็จะแจ้งให้นิสิตได้ทราบและหาทางช่วยเหลือเป็นรายบุคคลต่อไป เพราะหากนิสิตลอกงานจากเพื่อนมาส่ง ก็จะเกิดผลเสียต่อตัวนิสิตเอง ทำให้นิสิตไม่ได้ทราบถึงข้อบกพร่องและไม่ได้รับการพัฒนาแก้ไข

ข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น และผู้สอนควรทำการตกลงและชี้แจงเกี่ยวกับขั้นตอนในการตรวจให้คะแนน และเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานต่าง ๆ ให้แก่นิสิตทราบอย่างชัดเจน

5.7) ปัญหาการประกาศผลและแจ้งข้อบกพร่องจากการสอบ พบว่า การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนในคาบเรียนถัดไป ถือว่าค่อนข้างช้าและเสียเวลามาก เพราะนอกจากผู้สอนจะต้องบอกคะแนนแล้วยังต้องชี้แจงถึงข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นของนิสิตแต่ละคน และผู้วิจัยได้วางแนวทางในการแก้ปัญหา คือ การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนนั้น ผู้สอนควรประกาศผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ webboard เพราะมีความสะดวกและรวดเร็ว และนิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบได้ตลอดเวลา

6. ผลจากการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้ในรอบที่สองกับนิสิต คณะศึกษาศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เพื่อประเมินประสิทธิภาพ และปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอน ผู้วิจัยขอเสนอการอภิปรายผลการวิจัยตามประเด็นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

### 6.1) ผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนิสิต

จากการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้ พบว่า นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น กล่าวคือ นิสิตมีความรู้เพิ่มขึ้น หลังจากที่ยังเรียนตามรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยพิจารณาผลสัมฤทธิ์จากคะแนนรวมทั้งได้จากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และคะแนนจากแบบประเมินชิ้นงาน ซึ่งพบว่า นิสิตมีคะแนนสอบหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากคะแนนสอบก่อนเรียนอย่างชัดเจน และจากการประเมินชิ้นงาน พบว่า นิสิตส่วนใหญ่สามารถผลิตชิ้นงานที่มีคุณภาพสูงและมีพัฒนาการในการผลิตชิ้นงานที่ดีขึ้นตามลำดับ แสดงให้เห็นว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามรูปแบบการเรียนการสอนที่กำหนดเป็นเวลา 1 ภาคเรียนแล้ว นิสิตมีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน ทั้งนี้เป็นเพราะว่ารูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนั้น กระบวนการเรียนการสอนมีขั้นตอนอย่างเป็นระบบ ซึ่งได้แก่ ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้ ขั้นสรุปความรู้ ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ทำให้นิสิตเกิดความชัดเจนในการรับรู้ข้อมูลที่ได้รับ และพบว่า กระบวนการเรียนการสอนที่ใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอนนั้น ทำให้นิสิตไม่เกิดความเบื่อหน่าย เพราะเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกัน โดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือ และระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ทำให้นิสิตเกิดการเรียนรู้

จากการได้คิด ลงมือปฏิบัติ แสดงความคิดเห็น อธิบายแนวคิด แสดงเหตุผล แก้ปัญหาพร้อมกัน แลกเปลี่ยนแนวคิดซึ่งกันและกัน และสามารถเกิดการเรียนรู้ได้ทุกที่ ทุกเวลาจากการนำเทคโนโลยีทางการศึกษาเข้ามาใช้ นอกจากนี้ยังพบว่า การที่ผู้สอนมีเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานในแต่ละชิ้นงานที่ชัดเจน ทำให้นิสิตเกิดความชัดเจนในการปฏิบัติงานและสามารถวางแผนการทำงานของตนเองเพื่อไปให้ถึงเกณฑ์ที่กำหนดได้ และการที่ผู้สอนตรวจการบ้านหรือชิ้นงานของนิสิตและได้ทำการบันทึกข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่พบให้นิสิตได้ทราบเป็นรายบุคคล พร้อมทั้งเรียกนิสิตมาพบเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องนั้นในทุกครั้งที่ตรวจงาน ซึ่งสิ่งเหล่านี้ล้วนส่งผลให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

สำหรับด้านทักษะทางสังคมของนิสิต พบว่า หลังจากที่นิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรม ทั้งพฤติกรรมที่ประเมินโดยผู้สอนและพฤติกรรมที่ประเมินโดยนิสิต ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนิสิตต้องเรียนรู้ร่วมกันและแก้ปัญหาพร้อมกันในกลุ่มที่มีการช่วยเหลือและรับผิดชอบร่วมกันในการเรียนรู้ ทำให้นิสิตเกิดความเห็นอกเห็นใจกัน มีความเข้าใจถึงความสามารถของแต่ละบุคคลว่าแตกต่างกันและมีความรู้สึกที่ดีต่อกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่ารูปแบบการเรียนแบบร่วมมือที่นำมาใช้จัดการเรียนการสอนในครั้งนี้ ทำให้นิสิตเกิดทักษะทางสังคมได้ดี

ด้านทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต พบว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ดีมากและมีการพัฒนาทักษะดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับของการเรียนการสอน ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นได้ใช้วิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นิสิตได้ฝึกคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยผ่านเทคนิควิธีที่หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นแบบฝึกหัด แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม และกิจกรรมบนระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

สำหรับด้านเจตคติและความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พบว่า หลังจากที่นิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขึ้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีเจตคติต่อรายวิชาไปในทิศทางที่ดีขึ้นจากก่อนเรียนอย่างเห็นได้ชัด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่า หลังจากที่นิสิตได้เรียนตามกระบวนการจัดการเรียนการสอนที่ใช้เทคนิค วิธีการและสื่อการเรียนรู้ที่หลากหลายแล้ว นิสิตไม่รู้สึกเบื่อเกิดความสนใจ อยากที่จะเรียนรู้ มองเห็นคุณค่าและประโยชน์จากการเรียนรายวิชานี้ จากผลของกระบวนการเรียนการสอนโดยรวมที่กล่าวข้างต้น มีผลทำให้นิสิตที่เรียนตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น มีระดับเจตคติต่อการเรียนรายวิชานี้เปลี่ยนจากระดับไม่แน่ใจเป็นระดับ

เห็นด้วยอย่างยิ่ง และนิสิตเห็นด้วยอย่างยิ่งกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในทุก ๆ ด้านไม่ว่าจะเป็นด้านเนื้อหาสาระ ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน ด้านสื่อการเรียนรู้ ด้านการวัดผล และการประเมินผล ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้ ด้านผู้สอนและด้านการติดต่อสื่อสาร

## 6.2) การปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากผลของการนำไปใช้

ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบที่สอง ปรากฏว่า ประเด็นปัญหาต่าง ๆ ที่เคยเกิดขึ้นในรอบแรก ผู้สอนได้ทำการแก้ปัญหาตามแนวทางที่ได้วางไว้ ซึ่งพบว่า แนวทางการแก้ปัญหาที่ได้วางไว้สามารถใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นได้เป็นอย่างดี ส่งผลให้ผู้สอนทำงานด้วยความสบายใจและสนุกกับการทำงาน แต่ในรอบที่สองพบว่า มีปัญหาใหม่เกิดขึ้นคือ ปัญหาเกี่ยวกับการพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บางตัวที่ไม่สามารถพิมพ์เข้าไปโดยตรงในการทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เฉพาะบางกิจกรรมที่ต้องพิมพ์เข้าไปโดยตรงในกล่องข้อความของระบบ ส่วนกิจกรรมที่ให้แนบเป็นไฟล์ (ซึ่งนิสิตพิมพ์ในโปรแกรม Microsoft Word) ส่งนั้นไม่มีปัญหา นิสิตสามารถพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้าไปได้ สำหรับการแก้ปัญหาในระยะสั้น ผู้สอนอนุญาตให้นิสิตพิมพ์เป็นภาษาเขียนหรือใช้สัญลักษณ์ที่ใกล้เคียงแทนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ ได้ และในระยะยาวผู้สอนได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) เพื่อแจ้งปัญหาที่เกิดขึ้นให้แก่ผู้ดูแลระบบ M@xLearn ทราบเพื่อหาวิธีแก้ไขและปรับปรุงระบบต่อไป

ดังนั้น จากผลของรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ได้กล่าวมาทั้งหมด พบว่า สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์แก่นิสิตระดับปริญญาตรี เพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และมีผลการเรียนรู้สูงขึ้นได้เป็นอย่างดี

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

#### สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่องการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ สามารถสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะได้ดังนี้

#### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. ศึกษาผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคมและความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

#### ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย
  - 1.1) นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547
  - 1.2) นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548

2. เนื้อหาที่ใช้สอนสำหรับการวิจัยคือ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ กระบวนการให้เหตุผล ตรรกศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ จากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรี สาขาวิชา คณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ที่ได้จากการวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

4. ตัวแปรที่ต้องการศึกษาในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทักษะการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ ทักษะทางสังคมและความคิดเห็นของนิสิตต่อรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

### ประชากร

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลจากประชากร ดังนี้

1. นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียน เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน

2. นิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ลงทะเบียน เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน

## เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วย เครื่องมือ 7 ชนิด คือ

1. แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชุดเดียวกัน มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ทดสอบความรู้เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในช่วงก่อนเรียนและหลังเรียน โดยเป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 15 ข้อ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยความง่าย 0.58 ค่าเฉลี่ยอำนาจจำแนก 0.33 และค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยง 0.89

2. แบบประเมินชิ้นงาน สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบประเมินชิ้นงานชุดเดียวกัน มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ประเมินชิ้นงานของนิสิต ประกอบด้วยแบบประเมินชิ้นงานจำนวน 5 แบบ คือ แบบประเมินชิ้นงานแบบฝึกหัด การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมกลุ่ม (การเรียนรู้แบบร่วมมือ) กิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn และกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn ซึ่งมีจำนวนชิ้นงานทั้งหมด 22 ชิ้นงาน แต่ละแบบประเมินชิ้นงานมีเกณฑ์การให้คะแนนทั้งหมด 5 ระดับ ตั้งแต่ 0 ถึง 4 และมีเกณฑ์การประเมินผลกำหนดไว้อย่างชัดเจน

3. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดเดียวกัน มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

4. แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบประเมินชุดเดียวกันประกอบด้วย แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม 2 ฉบับ คือ แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยนิสิตและแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มที่ประเมินโดยผู้สอน โดยแบบประเมินดังกล่าวมุ่งประเมินนิสิตในด้านความสามารถในการทำงานร่วมกับผู้อื่น การแสดงความคิดเห็นร่วมกัน ความรับผิดชอบในงานของตนในกลุ่มมอบหมายและการได้รับการยอมรับจากเพื่อนร่วมงาน

5. แบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน สำหรับนิสิตที่เรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบสอบถามชุดเดียวกัน ที่ประกอบด้วยข้อความทั้งหมด 25 ข้อ

6. แบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งเป็นแบบวัดเจตคติชุดเดียวกัน ที่ประกอบด้วยข้อความทั้งหมด 35 ข้อ

7. แบบสนทนากลุ่ม สำหรับอาจารย์ผู้สอนและนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งออกเป็น 2 ฉบับคือ แบบสนทนากลุ่มสำหรับอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และแบบสนทนากลุ่มสำหรับนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มาแล้ว ซึ่งครอบคลุมประเด็นเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอน รวมทั้งแนวทางการแก้ไขในการจัดการเรียนการสอนและการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### วิธีดำเนินการวิจัย

การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการในลักษณะของการวิจัยและพัฒนา (research and development) โดยแบ่งขั้นตอนการดำเนินการออกเป็น 3 ขั้นตอนและมีรายละเอียดดังนี้

#### ขั้นตอนที่ 1 ศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1.1) ผู้วิจัยทำการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ รูปแบบการเรียนการสอน การออกแบบการเรียนการสอน โครงสร้างรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขของการจัดการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์

และการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อนำมากำหนดกรอบแนวคิดในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

1.2) ผู้วิจัยศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยการจัดสนทนากลุ่มซึ่งแบ่งกลุ่มสนทนาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คนและกลุ่มนิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชานี้มาแล้ว ซึ่งเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ผู้วิจัยได้ทำการคัดเลือกโดยพิจารณาจากข้อมูลส่วนตัว ผลการเรียนรู้และความคิดเห็นของผู้สอน ได้นิสิตจำนวน 12 คน ที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ปานกลางและค่อนข้างอ่อนชั้นปีละ 6 คน สำหรับในการสนทนากลุ่ม ผู้วิจัยได้กำหนดประเด็นและแนวคำถามในการสนทนาเพื่อศึกษาหาข้อมูลเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

## ขั้นตอนที่ 2 สร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนที่ 2 มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

2.1) ผู้วิจัยนำความรู้ที่ได้จากผลการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานในขั้นตอนที่ 1 มาดำเนินการสร้างและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งมีลักษณะเป็นแผนการจัดองค์ประกอบต่างๆ ของการเรียนการสอนที่ประกอบด้วย หลักการ วัตถุประสงค์ สารการเรียนรู้ แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้ การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ พร้อมทั้งจัดทำประมวลการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้ตามจำนวนหน่วยการเรียนรู้ซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 16 หน่วยการเรียนรู้

2.2) กระบวนการเรียนการสอนที่ใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอนเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกัน โดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือและระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอน 5 ขั้นตอน คือ ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ขั้นเสนอสารการเรียนรู้ ขั้นสรุปความรู้ ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้ และขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สำหรับรูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือที่นำมาใช้จัดการเรียนการสอนในครั้งนี้ ได้แก่ รูปแบบ STAD (Student Teams Achievement Division), Jigsaw II, TAI (Team Assisted Individualization) และ Giraffiti Model โดยรูปแบบ STAD, Jigsaw II และ Giraffiti Model มีวัตถุประสงค์เพื่อให้มนิสิตเกิดการเรียนรู้เกี่ยวกับแนวคิด ความคิดรวบยอด กฎ ทฤษฎี บทรูปแบบการพิสูจน์ต่างๆ รวมทั้งฝึกให้มนิสิตได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายแง่มุม ฝึกการแสวงหาทางเลือกต่างๆ เพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจและใช้รูปแบบ TAI เพื่อทบทวน ฝึกฝนหรือฝึกทักษะในสิ่งที่ได้เรียนไป ซึ่งรูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ได้เลือกมาใช้ในกระบวนการเรียนการสอนในครั้งนี้ ได้ผ่านการศึกษาค้นคว้าและความคิดเห็นของอาจารย์ผู้สอนและมนิสิต จากการจัดสนทนากลุ่มในขั้นตอนที่ 1

2.3) ผู้วิจัยสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และได้นำแบบสอบไปทดลองใช้เพื่อนำผลที่ได้มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบสอบ แบบประเมินชิ้นงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนและเกณฑ์การประเมินผลอย่างชัดเจนสำหรับแต่ละชิ้นงานที่มอบหมายให้มนิสิตทำ แบบสอบถามความคิดเห็นของมนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน และ แบบวัดเจตคติของมนิสิตต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### ขั้นตอนที่ 3 นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ ประเมินประสิทธิภาพและปรับปรุง

การดำเนินการวิจัยในขั้นตอนที่ 3 มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

3.1) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประมวลการสอน แผนการจัดการเรียนรู้และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไปตรวจสอบคุณภาพโดยนำไปให้อาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ช่วยพิจารณาในประเด็นที่เกี่ยวกับความสอดคล้องและความเหมาะสมของรูปแบบการเรียนการสอน และเครื่องมือที่พัฒนาขึ้น

3.2) ผู้วิจัยนำข้อเสนอแนะที่ได้รับจากอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์มาทำการปรับปรุงแก้ไข และนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองใช้ในรอบแรกกับมนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ขณะทำการทดลองผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้มนิสิต

มีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น รวมทั้งมีการประเมินพัฒนาการในการเรียน คุณลักษณะและทักษะที่พึงประสงค์ของนิสิตเป็นระยะ ๆ

3.3) หลังจากที่น่ารูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้แล้วหนึ่งภาคการศึกษา ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์และประเมินผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบแรกและทำการปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนให้เหมาะสมมากยิ่งขึ้นเพื่อนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบที่สองต่อไป

3.4) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้รับการปรับปรุงแล้วไปใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 และเมื่อสิ้นภาคการศึกษา ผู้วิจัยทำการประเมินผลและปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนหากมีสิ่งที่จะต้องแก้ไขเพื่อให้รูปแบบการเรียนการสอนมีความเหมาะสมตามเป้าหมายที่วางไว้

3.5) ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้ทำการปรับปรุงแก้ไขแล้วไปจัดทำคู่มือประกอบการใช้รูปแบบการเรียนการสอน

### **การเก็บรวบรวมข้อมูล**

การเก็บรวบรวมข้อมูลงานวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็น 3 ช่วง โดยช่วงแรกเป็นการศึกษา วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน (เดือนกันยายน 2547) ช่วงที่สองเป็นการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปทดลองใช้ (เดือนพฤศจิกายน 2547 ถึงเดือนกุมภาพันธ์ 2548) และช่วงที่สามเป็นการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ (เดือนมิถุนายน 2548 ถึงเดือนกันยายน 2548) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการติดต่ออาจารย์ผู้สอนและนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ได้ผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยตรงเพื่อขอความร่วมมือและนัดหมายสำหรับการจัดสนทนากลุ่ม เพื่อศึกษาสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พร้อมแนวทางการแก้ปัญหาและรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยการจัดสนทนากลุ่ม ซึ่งแบ่งกลุ่มสนทนาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มอาจารย์ผู้สอนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คนและกลุ่มนิสิตที่ผ่านการเรียนรายวิชานี้มาแล้ว ซึ่งเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 ที่ผู้วิจัยได้ทำการคัดเลือกโดยพิจารณาจากข้อมูลส่วนตัว ผลการเรียนและความคิดเห็นของผู้สอนรายวิชา 158325 ชั้นตอน

วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้นิสิตจำนวน 12 คน ที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ปานกลาง และค่อนข้างอ่อนชั้นปีละ 6 คน

2. ผู้วิจัยนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นไปใช้ โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนเอง ซึ่งในรอบแรกนำไปทดลองใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคปลาย ปีการศึกษา 2547 จำนวน 23 คน เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ในช่วงต้นเดือนพฤศจิกายน 2547 ถึงปลายเดือนกุมภาพันธ์ 2548 และในรอบที่สองได้นำไปใช้กับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ในช่วงต้นเดือนมิถุนายน 2548 ถึงปลายเดือนกันยายน 2548 โดยใช้ทดลอง 16 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง

3. ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้ผ่านการวิเคราะห์และปรับปรุงแก้ไขแล้ว จำนวน 15 ข้อ มาทำการทดสอบก่อนเรียน (pre-test) กับนิสิตโดยใช้เวลา 3 ชั่วโมง

4. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มาให้นิสิตทำก่อนดำเนินการเรียนการสอนตามรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

5. ในแต่ละสัปดาห์ที่ผู้วิจัยดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอนอย่างผสมผสานกันโดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย กระบวนการกลุ่ม (หลักการเรียนแบบร่วมมือ) และระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้วิจัยได้มอบหมายชิ้นงานให้นิสิตทำ ทั้งที่เป็นกลุ่มและรายบุคคลและทำการประเมินผลชิ้นงานที่มอบหมายด้วยแบบประเมินชิ้นงานและแบบประเมินการทำงานกลุ่มที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. สำหรับหน่วยการเรียนรู้ที่ 9-14 วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบบต่างๆ ผู้วิจัยให้นิสิตทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อสิ้นสุดการสอนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เพื่อใช้ประเมินทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

7. ระหว่างการเรียนการสอนมีการทดสอบโดยใช้แบบทดสอบย่อยเป็นระยะ ๆ กล่าวคือ หลังจากทำการสอนหน่วยที่ 1 (สัปดาห์ที่ 1-2) เสร็จสิ้นลง นิสิตทำการสอบย่อยครั้งที่ 1 ด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 หลังจากเสร็จสิ้นหน่วยที่ 2 (สัปดาห์ที่ 4-7) ด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 และสำหรับหน่วยที่ 3 (สัปดาห์ที่ 9-14) แบ่งการทดสอบย่อยออกเป็น 2 ครั้งโดยใช้แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3 และ 4 ตามลำดับ เพื่อดูพัฒนาการของนิสิตแต่ละคน สำหรับนิสิตที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด ให้นิสิตต้องเรียนซ่อมเสริมกับผู้สอนโดยตรงหรือเรียนผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn จากนั้นให้ทำการทดสอบใหม่อีกครั้งด้วยแบบทดสอบที่มีลักษณะโจทย์ใกล้เคียงกับแบบทดสอบเดิมที่นิสิตไม่ผ่านเกณฑ์และคะแนนที่นิสิตได้รับในครั้งนี้เป็นเพียงคะแนนเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด

8. ผู้วิจัยนำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับเดิมจำนวน 15 ข้อมาทำการทดสอบหลังเรียน (post-test) กับนิสิตโดยใช้เวลา 3 ชั่วโมงแล้วนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลของการทดสอบก่อนเรียนเพื่อดูพัฒนาการของนิสิต

9. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มาให้นิสิตทำ หลังสิ้นสุดกระบวนการเรียนการสอนเพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลของการทดสอบก่อนเรียน

10. ผู้วิจัยให้นิสิตตอบแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนเพื่อรวบรวมข้อมูลจากนิสิตเกี่ยวกับความคิดเห็นต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลที่ได้จากการสนทนากลุ่มของอาจารย์ผู้สอนและนิสิตที่เคยผ่านการเรียนรายวิชา 158325 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ใช้วิธีวิเคราะห์เนื้อหา (content analysis)
2. ข้อมูลที่ได้จากแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนใช้คำร้อยละ ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย

3. ข้อมูลที่ได้จากแบบประเมินชิ้นงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มใช้คำร้อยละและค่าเฉลี่ย
4. ข้อมูลที่ได้จากแบบสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนใช้วิธีวิเคราะห์เนื้อหา การแจกแจงความถี่และหาค่าร้อยละ
5. ข้อมูลที่ได้จากแบบวัดเจตคติของนิสิตใช้คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยและค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย

### ผลการวิจัย

#### ผลของการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้

ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้กับนิสิตคณะศึกษาศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 จำนวน 29 คน ผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนิสิตมีดังต่อไปนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต พบว่า นิสิตมีความรู้เพิ่มขึ้นหลังจากที่เรียนตามรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยพิจารณาผลสัมฤทธิ์จากคะแนนรวมที่ได้จากการทำแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและคะแนนจากแบบประเมินชิ้นงาน ซึ่งพบว่านิสิตมีคะแนนสอบหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากคะแนนสอบก่อนเรียนอย่างชัดเจน แสดงให้เห็นว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามรูปแบบการเรียนการสอนที่กำหนดเป็นเวลา 1 ภาคเรียนแล้ว นิสิตมีความสามารถในการพิสูจน์และมีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน นอกจากนี้ จากการประเมินชิ้นงาน พบว่า นิสิตส่วนใหญ่สามารถผลิตชิ้นงานที่มีคุณภาพสูงและมีพัฒนาการในการผลิตชิ้นงานที่ดีขึ้นตามลำดับ
2. ทักษะทางสังคมของนิสิต พบว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มในระดับมากทุกพฤติกรรม ทั้งพฤติกรรมที่ประเมินโดยผู้สอน ได้แก่ ความชัดเจนในการกำหนดบทบาทหน้าที่ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม ลักษณะการเป็นผู้นำและผู้ตาม ความรับผิดชอบงานและความตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย การร่วมกันตัดสินใจและรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนในกลุ่ม การมีส่วนร่วมในกิจกรรมกลุ่มและการช่วยเหลือเอื้อเฟื้อเผื่อแผ่กันในกลุ่ม และพฤติกรรมที่ประเมินโดยนิสิต ได้แก่ การที่สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน สมาชิกของกลุ่มพูดคุยกันเฉพาะในกลุ่ม ไม่เดินไป

เดินมา สมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตนและตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย และสมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม นอกจากนี้ยังพบว่าพฤติกรรมดังกล่าวมีการพัฒนาไปในทางที่ดีขึ้น

3. ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต พบว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ดีมากและมีการพัฒนาทักษะดังกล่าวไปในทางที่ดีขึ้นตามลำดับของการเรียนการสอน

4. เจตคติของนิสิตต่อรายวิชา พบว่า หลังจากนิสิตได้เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I แล้ว นิสิตมีเจตคติต่อรายวิชาไปในทิศทางที่ดีขึ้นจากก่อนเรียน โดยก่อนเรียนนิสิตมีเจตคติต่อรายวิชาอยู่ในระดับไม่แน่ใจ แต่หลังจากได้เรียนแล้วนิสิตมีเจตคติต่อรายวิชาอยู่ในระดับเห็นด้วยอย่างยิ่ง

5. ความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I พบว่า นิสิตเห็นด้วยอย่างยิ่งกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในทุก ๆ ด้าน ไม่ว่าจะเป็นด้านเนื้อหาสาระ ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน ด้านสื่อการเรียนรู้ ด้านการวัดผล และการประเมินผล ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้ ด้านผู้สอนและด้านการติดต่อสื่อสาร

### การปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนจากผลของการนำไปใช้

ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนที่ได้ผ่านการปรับปรุงแก้ไขแล้วในรอบแรกไปใช้ในรอบที่สองกับนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในภาคต้น ปีการศึกษา 2548 เป็นระยะเวลา 1 ภาคเรียน ปรากฏว่าประเด็นปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในรอบแรกได้รับการแก้ไขปัญหามาตามแนวทางที่ได้วางไว้ดังนี้

ในส่วนของปัญหาด้านเวลา พบว่า ในรอบแรกการทำกิจกรรมตามใบงานของกิจกรรมกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำบางกิจกรรม นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่กำหนด สำหรับในรอบที่สองไม่เกิดปัญหาด้านเวลาในการทำกิจกรรม เนื่องจากผู้สอนได้กระตุ้นให้นิสิตที่ทำหน้าเป็นประธานกลุ่มช่วยกำกับและควบคุมเรื่องเวลาในการทำงานของแต่ละกลุ่ม เพื่อให้สมาชิกกลุ่มรู้จักจัดสรรเวลาให้เหมาะสมและผู้สอนได้ปรับลดจำนวนข้อของแบบฝึกหัดในใบงานที่มอบหมายให้นิสิตทำ สำหรับบางกิจกรรมกลุ่มที่นิสิตไม่สามารถทำได้เสร็จภายในระยะเวลาที่

กำหนด ซึ่งได้แก่ กิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง ประพจน์และการหาค่าความจริงในใบงานที่ 1 ข้อ 4 โดยลดจำนวนข้อย่อยจาก 3 ข้อให้เหลือ 2 ข้อ และข้อ 6 จากจำนวนข้อย่อย 2 ข้อให้เหลือเพียง 1 ข้อ และกิจกรรมกลุ่มหน่วยการเรียนรู้เรื่อง สัจนิรันดร์และสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ในใบงานที่ 1 ทุกข้อโดยลดจำนวนข้อย่อยในแต่ละข้อให้เหลือเพียง 2 ข้อ แล้วพบว่า นิสิตสามารถทำงานได้เสร็จตามเวลาที่ได้กำหนดไว้ทุกกิจกรรม

ในส่วนของปัญหาความสนใจของนิสิต พบว่าในรอบแรกนิสิตบางคนยังไม่ให้ความสนใจในการทำกิจกรรมกลุ่มเท่าที่ควร เพราะอาจจะยังไม่เห็นความสำคัญหรือประโยชน์ที่ได้รับจากกิจกรรมกลุ่ม สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อยๆ ลดลง เมื่อผู้สอนได้ทำการชี้แจงถึงเกณฑ์ในการประเมินผลให้นิสิตได้ทราบก่อนทำกิจกรรมกลุ่มอย่างชัดเจน พร้อมทั้งคะแนนที่นิสิตแต่ละคนจะได้รับในการทำกิจกรรมกลุ่ม ซึ่งมีทั้งคะแนนกลุ่มและคะแนนเป็นรายบุคคล นอกจากนี้ผู้สอนยังได้อธิบายถึงวิธีการประเมินผลงานของกลุ่ม โดยผู้สอนได้ทำการสุ่มนิสิตเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอผลงานของแต่ละกลุ่ม ซึ่งทำให้นิสิตทุกคนในแต่ละกลุ่มต้องให้ความสนใจและตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายและเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม เพราะนิสิตแต่ละคนอาจถูกสุ่มออกมาเป็นตัวแทนของกลุ่ม

ในส่วนของปัญหาการทำกิจกรรมในระบบ M@xLearn พบว่า ในรอบแรกนิสิตทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการ เนื่องจากนิสิตอาจไม่เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้จึงทำให้ผลงานที่เกิดขึ้นไม่เป็นไปตามที่ต้องการ สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น เพราะก่อนที่ผู้สอนจะมอบหมายให้นิสิตเข้าไปทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผู้สอนได้อธิบายคำสั่งหรือโจทย์ รวมถึงวัตถุประสงค์ที่ผู้สอนต้องการและขั้นตอนในการทำงานให้นิสิตได้ทราบอย่างชัดเจนก่อน เพื่อนิสิตจะได้เข้าใจคำสั่งหรือโจทย์ที่กำหนดให้อย่างชัดเจน และพบว่าทำให้นิสิตสามารถทำกิจกรรมได้ตรงตามคำสั่งและวัตถุประสงค์มากยิ่งขึ้น

ในส่วนของปัญหาการสมัครเรียนในระบบ M@xLearn พบว่า ในรอบแรกยังมีนิสิตบางคนเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ไม่ได้ เนื่องจากไม่เข้าใจขั้นตอนในการสมัคร โดยผู้สอนได้กำหนดให้นิสิตเริ่มเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในช่วงก่อนเปิดภาคเรียน หลังจากที่นิสิตได้ลงทะเบียนเรียนเป็นที่เรียบร้อยแล้ว โดยผู้สอนจะส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น

เนื่องจากผู้สอนได้เรียกตัวแทนนิสิตมาพบ เพื่อชี้แจงวิธีการเรียนการสอนและขั้นตอนการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เพื่อให้ตัวแทนนำข้อมูลที่ได้รับไปบอกนิสิตคนอื่น ๆ ต่อไป พร้อมทั้งได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) ไปถึงนิสิตทุกคนเพื่อชี้แจงและอธิบายถึงวิธีการเรียนและขั้นตอนวิธีการเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn อีกครั้งหนึ่งและในสัปดาห์แรกของการเปิดภาคเรียน หากมีนิสิตคนใดยังไม่สามารถเข้าไปลงทะเบียนหรือสมัครเรียนได้ ผู้สอนทำการอธิบายถึงขั้นตอนและวิธีการสมัครโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

ในส่วนของปัญหาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ในรอบแรกนิสิตบางคนมีปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยนิสิตยังเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่เป็น ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์น้อย แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน ไม่รู้ว่าจะนำนิยามหรือทฤษฎีบทใดมาใช้และเมื่อจบการพิสูจน์นิสิตเขียนสรุปไม่ชัดเจนหรือไม่เขียนข้อสรุปหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อย ๆ ลดลง เมื่อผู้สอนให้นิสิตทำการศึกษาคณิตศาสตร์จากตัวอย่างในเอกสารประกอบการสอนและตัวอย่างที่ผู้สอนนำมาพิสูจน์ให้นิสิตดูในชั้นเรียนอย่างค่อยเป็นค่อยไป เพื่อให้นิสิตมองเห็นขั้นตอนและวิธีการพิสูจน์จนเกิดความชำนาญมากขึ้นในการพิสูจน์ และในช่วงแรกผู้สอนได้ให้โจทย์การบ้านที่มีลักษณะเหมือนกับตัวอย่างก่อน หลังจากนั้น ค่อย ๆ เพิ่มความซับซ้อนขึ้นเรื่อย ๆ และในการตรวจงานผู้สอนได้บันทึกข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่พบให้นิสิตได้ทราบเป็นรายบุคคลพร้อมทั้งเรียกนิสิตมาพบ เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องนั้นในทุกครั้งที่ตรวจงาน

ในส่วนของปัญหาการลอกงานของนิสิต พบว่า ในรอบแรกเมื่อผู้สอนมอบหมายงานให้นักนิสิตทำเป็นรายบุคคล ไม่ว่าจะแบบฝึกหัดหรือกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn มีนิสิตบางคนลอกงานของเพื่อนมาส่ง สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ได้ค่อย ๆ ลดลง เมื่อผู้สอนได้ทำการชี้แจงถึงวัตถุประสงค์ของการให้นักนิสิตทำงานเป็นรายบุคคลว่า เพื่อให้นิสิตได้พัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้นและหากนิสิตมีข้อบกพร่องเกิดขึ้น ผู้สอนก็จะแจ้งให้นักนิสิตทราบและหาทางช่วยเหลือเป็นรายบุคคลต่อไป นอกจากนี้ ผู้สอนยังได้ทำการตกลงและชี้แจงเกี่ยวกับขั้นตอนในการตรวจให้คะแนนและเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานต่าง ๆ ให้นักนิสิตทราบอย่างชัดเจน ดังนั้น หากนิสิตลอกงานจากเพื่อนมาส่งจะเกิดผลเสียต่อตัวนิสิตเอง ทำให้นักนิสิตไม่ได้ทราบถึงข้อบกพร่องและไม่ได้รับการพัฒนาแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

ในส่วนของปัญหาการประกาศผลและแจ้งข้อบกพร่องจากการสอบ พบว่า ในรอบแรก การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนในคาบเรียนถัดไปถือว่าค่อนข้างช้าและเสียเวลามาก เนื่องจากผู้สอนจะต้องบอกคะแนนแล้วยังต้องชี้แจงถึงข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้นของนิสิตแต่ละคน สำหรับในรอบที่สองปัญหานี้ไม่เกิดขึ้น เนื่องจาก การประกาศผลสอบและแจ้งข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการทำข้อสอบของนิสิตแต่ละคนนั้น ผู้สอนได้ประกาศผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ webboard ซึ่งทำให้นิสิตมีความพึงพอใจมาก เพราะมีความสะดวกและรวดเร็ว และนิสิตสามารถเข้าไปตรวจสอบได้ทุกเวลา โดยผู้สอนได้ประกาศให้นิสิตทราบก่อนการเรียนการสอนในครั้งต่อไป

ดังนั้น ในช่วงของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในรอบที่สอง ปรากฏว่าประเด็นปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นในรอบแรกได้รับการแก้ไขเป็นที่เรียบร้อย ซึ่งส่งผลให้ผู้สอนทำงานด้วยความสบายใจและสนุกกับการทำงาน เนื่องจากผู้สอนมองเห็นแนวทางและเข้าใจปัญหาต่างๆ ในการจัดการเรียนการสอนที่ชัดเจนมากขึ้น แต่พบว่ามีปัญหาใหม่เกิดขึ้นคือ ปัญหาเกี่ยวกับการพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์บางตัวที่ไม่สามารถพิมพ์เข้าไปได้โดยตรงในการทำกิจกรรมในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เฉพาะบางกิจกรรมที่ต้องพิมพ์เข้าไปโดยตรงในกล่องข้อความของระบบ ส่วนกิจกรรมที่ให้แนบเป็นไฟล์ ซึ่งนิสิตพิมพ์ในโปรแกรม Microsoft Word ส่งนั้นไม่มีปัญหา นิสิตสามารถพิมพ์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้าไปได้ สำหรับการแก้ปัญหาในระยะสั้น ผู้สอนอนุญาตให้นิสิตพิมพ์เป็นภาษาเขียนหรือใช้สัญลักษณ์ที่ใกล้เคียงแทนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้นๆ ได้ และในระยะยาวผู้สอนได้ส่งจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) เพื่อแจ้งปัญหาที่เกิดขึ้นให้แก่ผู้ดูแลระบบ M@xLearn ทราบเพื่อหาวิธีแก้ไขและปรับปรุงระบบต่อไป

#### ข้อเสนอแนะ

การพัฒนาารูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ มีข้อเสนอแนะดังนี้

#### ข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัย

การนำรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ไปใช้ให้เกิดประโยชน์มากที่สุดนั้น ผู้สอนหรือผู้ที่สนใจควรมีความรู้ ความเข้าใจและเตรียมตัวในเรื่องต่างๆ ดังนี้

1. การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนใดๆ ก็ตาม ควรมีการศึกษาถึงสภาพความพร้อมและความต้องการของนิสิตก่อน เพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอนที่เหมาะสมกับรายวิชานั้นๆ อย่างแท้จริง และควรเปิดโอกาสให้ผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องไม่ว่าจะเป็นผู้สอนหรือนิสิตได้ร่วมคิด ร่วมทำและร่วมวางแผนในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน และการจัดการเรียนการสอนตั้งแต่เริ่มดำเนินการ
2. รูปแบบการเรียนการสอนที่ได้จากผลการวิจัยและพัฒนาในครั้งนี้ เป็นแนวทางเลือกหนึ่งสำหรับนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน ซึ่งอาจมีการปรับปรุงให้เหมาะสมกับสภาพการจัดการเรียนการสอนของผู้สอนแต่ละคนก่อนนำไปใช้ ดังนั้นไม่ควรนำรูปแบบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นในครั้งนี้ไปใช้ในทันที โดยไม่ได้พิจารณาถึงบริบทของรายวิชา และควรนำกระบวนการไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับสภาพความพร้อมและความต้องการของนิสิต ตลอดจนความต้องการของผู้สอน
3. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน ผู้สอนสามารถเลือกใช้เทคนิคและวิธีการจัดการเรียนรู้ได้หลากหลาย และควรปรับให้เหมาะสมกับแนวการจัดกิจกรรมตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน เนื้อหาสาระที่สอน และธรรมชาติของนิสิต
4. ในการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรให้นิสิตได้ฝึกอ่าน ทำความเข้าใจ วิเคราะห์การพิสูจน์ แสดงความคิดเห็น และเขียนแสดงการพิสูจน์บ่อยๆ ซึ่งจะทำให้นิสิตมีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการพิสูจน์ได้ ทำให้นิสิตได้เห็นความสำคัญของการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์และมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป
5. ในการตรวจแบบฝึกหัดหรือการตรวจชิ้นงานของนิสิต ผู้สอนควรมีแบบบันทึกการตรวจงานของนิสิตอย่างเป็นระบบและชัดเจน ผู้สอนควรตรวจแบบฝึกหัดหรือชิ้นงานของนิสิต และส่งคืนในทันทีหรือในคาบเรียนถัดไป นอกจากนี้ผู้สอนควรเขียนข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นให้นิสิตได้ทราบเพื่อนิสิตจะได้ปรับปรุงแก้ไขต่อไป หรือข้อความชมเชยเพื่อเป็นการสร้างแรงจูงใจในการทำงาน ซึ่งล้วนมีผลต่อพฤติกรรมการเรียนของนิสิตเกี่ยวกับคุณลักษณะที่พึงประสงค์ในด้านความสนใจและความรับผิดชอบ

### ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษา วิจัยและติดตามการดำเนินงานการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ในการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ต่อไป เพื่อนำผลที่ได้ไปปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนและเพื่อให้นิสิตได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง

2. การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาผลการเรียนรู้ทั้งด้านพุทธิพิสัยหรือสติปัญญา ด้านจิตพิสัย และด้านทักษะพิสัย และพบว่ารูปแบบการเรียนการสอนนี้จะมุ่งเน้นพัฒนาผลการเรียนรู้ในด้านสติปัญญาเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้น จึงควรทำการวิจัยเพื่อหาแนวทางในการพัฒนาผลการเรียนรู้ในด้านจิตพิสัยหรือทักษะพิสัยต่อไป

3. ควรมีการศึกษาว่ารูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น สามารถนำไปใช้ในการพัฒนาผลการเรียนรู้ในรายวิชาอื่น ๆ และใช้กับผู้เรียนในระดับอื่น ๆ

## เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- กองบริการการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2547. คู่มือแนะนำการใช้งาน M@xLearn 1.0 [<http://course.ku.ac.th>]. กรุงเทพมหานคร: บริษัท เท็กซ์ แอนด์ เจอร์นัล พับลิเคชั่น จำกัด.
- กิดานันท์ มลิทอง. 2543. เทคโนโลยีทางการศึกษาและนวัตกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ขจรศรี วรรณสถิตย์. 2544. ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2547. คู่มือการศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานระดับปริญญาตรี (หลักสูตร 5 ปี). พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร: พี.เอส.พรินท์.
- ครรชิต มาลัยวงศ์. 2004. การเขียนกับ E-Learning (Online). Available: <http://www.drkanchit.com>.
- จันทร์ชลี มาพุทธ. 2542. ทางเลือกการลดความสูญเปล่าทางการศึกษาของโปรแกรมวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษาในมหาวิทยาลัยของรัฐ: การพัฒนาและการวางนโยบายการศึกษา. วารสารครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 28: 38-42.
- ชานนท์ จันทรา. 2545. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ทิตนา แชมมณี. 2537. กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานเป็นทีมและการจัดการเรียนการสอน. กรุงเทพมหานคร: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- นตยา ปิลันธนานนท์. 2543. การเรียนแบบร่วมมือ. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

น้อมศรี เดท. 2547. คุณภาพหลากหลายที่ได้จากการเรียนรู้คณิตศาสตร์. วารสารครุศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 32: 18-28.

บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2544. การประเมินการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ แนวคิด  
และวิธีการ. กรุงเทพมหานคร: สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ.

บุญเรียง ขจรศิลป์. 2543. วิธีวิจัยทางการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร:  
หจก. พี.เอ็น. การพิมพ์.

ประมาณ สะกิมิ. 2535. สื่อการเรียนการสอน. สารานุกรมศึกษาศาสตร์ฉบับเฉลิม  
พระเกียรติ. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ  
ประสานมิตร.

ปราณี คิวพรพิทักษ์. 2539. การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎี  
พฤติกรรมตามแผน เพื่อพัฒนาพฤติกรรมสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนคณิตศาสตร์และ  
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนด้อยสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก,  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุพิน พิพิธกุล. 2539. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

\_\_\_\_\_. 2545. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพมหานคร:  
บพิธการพิมพ์.

รุ่ง แก้วแดง. 2542. ปฏิวัติการศึกษาไทย. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพมหานคร: มติชน.

วราพร ขาวสุทธิ. 2542. การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทาง  
คณิตศาสตร์โดยใช้การสอนตนเองกับการเรียนการสอนแบบรายบุคคลและแบบกลุ่ม  
สำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก,  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วารินทร์ รัศมีพรหม. 2542. การออกแบบและพัฒนาการระบบการสอน. กรุงเทพมหานคร:  
ภาควิชาเทคโนโลยี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- วิชัย วงษ์ใหญ่. 2543. วิสัยทัศน์การศึกษา. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ศิริยุภา พูลสุวรรณ. 2530. การศึกษาประสิทธิภาพของสื่อการสอนโดยวิธีการวิเคราะห์ห่อภิมาณ. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- \_\_\_\_\_. 2542. รายงานการสังเคราะห์งานวิจัยตามโครงการการศึกษาวิธีการเรียนและการสอนที่ส่งผลต่อกระบวนการเรียนรู้ที่ยั่งยืนของเด็กไทยระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สมบุรณ์ สงวนญาติ. 2534. เทคโนโลยีทางการเรียนการสอน. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์การศาสนา.
- สมพร แผลงภู. 2541. การพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- สมยศ ชิตมงคล. 2545. การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมผลการเรียนทางคณิตศาสตร์และความตระหนักรู้ในการรู้คิดของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยการใช้การผสมผสานแนวคิดการประมวลสารสนเทศและการรู้คิด. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมมาต บรรจงรัตน์. 2540. การพัฒนาการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ข้างอุตสาหกรรม ในระดับประกาศนียบัตร โดยใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการ. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- สิริพร ทิพย์คง. 2545. หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

- สุวันเพ็ญ สิริทรัพย์ไพบูลย์. 2540. สภาพและปัญหาของนิสิตคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศ. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สัณญา รัตนวรารักษ์. 2543. รายงานการศึกษาปัญหาการเรียนการสอนและการสอบวิชาคณิตศาสตร์ (ค 012) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2542 ในโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน. โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ สำนักนายกรัฐมนตรี. 2545. พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545. กรุงเทพมหานคร: บริษัทพริกหวานกราฟฟิค จำกัด.
- อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม. 2546. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังการใช้กิจกรรมเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง “ปริมาตรและพื้นที่ผิว”. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- Artzt, A.F. and M.N. Claire. 1990. Cooperative Learning. *The Mathematics Teacher* 83 (6): 448–452.
- Benjafield, J.G. 1992. *Cognition*. New Jersey: Prince Hall.
- Conseguera, G.F. and R. Lopez. 1998. *Japanese Mathematics Instructional Model and Implications for Science Instruction* (Online).  
Available: [http://lsc-net.terc.edu/do.cfm/report/11091/show/use\\_set-1\\_case\\_study](http://lsc-net.terc.edu/do.cfm/report/11091/show/use_set-1_case_study)
- Dick, W. and L. Carey. 1997. *The Systematic Design of Instruction*. 4<sup>th</sup> ed. New York: Longman.
- Dorman, J.P., J.E. Adams, and J.M. Ferguson. 2003. *A Cross-National Investigation of Students' Perceptions of Mathematics Classroom Environment and Academic Efficiency in Secondary Schools* (Online).  
Available: <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/dormanj.pdf>

- Gagne', R.M. and L.J. Briggs. 1974. **Principals of Instructional Design**.  
New York: Hoth Rinehart and Winston.
- Handal, B. and J. Bobis. 2003. **Instructional Styles in the Teaching of Mathematics Thematically** (Online). Available: <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/handalbobis.pdf>
- Hersh, R. 1993. Proving is Convincing and Explaining. **Educational Studies in Mathematics** 24 (4): 389-399.
- Johnson, D.W. and R.T. Johnson. 1989. **Cooperative Learning in Mathematics Education in New Direction for Elementary School Mathematics 1989 yearbook**.  
Reston, Virginia: The Nation Council of Teachers of Mathematics.
- Kemp, J.E., G.R. Morrison, and S.M. Ross. 1994. **Designing Effective Instruction**.  
New York: Macmillan College.
- Lock, R.H. 1996. **Adapting Mathematics Instruction in the General Education Classroom for Students with Mathematics Disabilities** (Online).  
Available: [http://www.ldonline.org/ld\\_indepth/math\\_skills/adapt\\_cld.html](http://www.ldonline.org/ld_indepth/math_skills/adapt_cld.html)
- Markel, W.D. 1994. The Role of Proof in Mathematics Education. **School Science and Mathematics** 94 (6): 291-295.
- Mevarech, Z.R. and K. Bracha. 1997. IMPROVE: a Multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. **American Educational Research Journal** 34: 365-394.
- Moore, R.C. 1990. **College Students' difficulties in learning to do Mathematical Proofs**.  
Athens: The University of Georgia.
- Müller, F.H. and J. Louw. 2003. **Conditions of university students' motivation and study interest** (Online). Available: <http://www.leeds.ac.uk/educol/documents/00003572.htm>

- NECTEC COURSEWARE. 2004. **e-Learning** (Online). Available:  
<http://www.nectec.or.th/courseware/cai/0018.html>
- NSTDA Online Learning. 2001. **e-Learning** (Online). Available:  
<http://www.thai2learn.com/elearning/index.php>
- Reiser, R.A. and W. Dick. 1996. **Instructional Planing A Guide for Teachers**. 2<sup>nd</sup> ed.  
Boston: Allyn and Bacon.
- Saeed, R.M. 1997. **An Exploratory Study of College Students' Understanding of Mathematical Proof and the Relationship of this Understanding to their Attitude toward Mathematics**. Dissertation abstracts 57 (10): 4300-A.
- Slavin, R.E. 1987. Cooperative Learning and Cooperative School.  
**Educational Leadership** 50 (11): 8-11.
- Smith, P.L. and T.J. Ragan. 1999. **Instructional design**. 2<sup>nd</sup> ed.  
Upper Saddle River, N.J.: Merrill.
- Snow, R.E., L. Corno, and D. Jackson. 1996. **Handbook of Educational Psychology**.  
USA: Simon and Schuster Macmillan.
- Thompson, B.R. and P.R. Geren. 2002. Classroom strategies for identifying and helping college students at risk for academic failure. **College Student Journal** (Online).  
Available: [http://www.findarticles.com/p/articles/mi\\_m0FCR/is\\_3\\_36/ai\\_95356591](http://www.findarticles.com/p/articles/mi_m0FCR/is_3_36/ai_95356591)
- Trujillo, K.M. and O.D. Hadfield. 1999. Tracing the Roots of Mathematics Anxiety Through In-Depth Interviews With Preservice Elementary Teachers.  
**College Student Journal** (Online).  
Available: [http://www.findarticles.com/p/articles/mi\\_m0FCR/is\\_2\\_33/ai\\_62839422](http://www.findarticles.com/p/articles/mi_m0FCR/is_2_33/ai_62839422)
- Yusup, H. and T.C. Chang. 1997. Use of instructional design with mastery learning.  
**Educational Technology** 37: 61-63.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

คู่มือประกอบการใช้รูปแบบการเรียนการสอน

รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

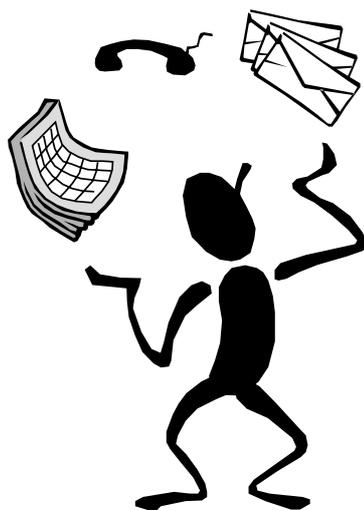
สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คู่มือประกอบการใช้รูปแบบการเรียนการสอน  
รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I  
สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



โดย  
นายชานนท์ จันทร์ธา  
นิสิตปริญญาเอกสาขาวิชาหลักสูตรและการสอน  
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ส่วนที่ 1  
องค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอน



รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I  
สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

รูปแบบการเรียนการสอน 158222 รายวิชาขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีสาระสำคัญของแต่ละองค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอน ดังนี้

หลักการ

รูปแบบการเรียนการสอนมีหลักการที่สำคัญประกอบด้วย

1. เน้นการจัดกระบวนการเรียนการสอนที่เป็นลำดับขั้นตอนและจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่สอดคล้องและเหมาะสมกับหน่วยการเรียนรู้ซึ่งจะช่วยให้การจัดการเรียนการสอนบรรลุตามวัตถุประสงค์ที่ได้กำหนดไว้
2. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยให้ผู้เรียนเป็นผู้ปฏิบัติ ส่งเสริมการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อยนั้น เป็นการร่วมมือกันในการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพและยังช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดทักษะทางสังคมอีกด้วย
3. การที่ผู้เรียนได้ฝึกแสดงการพิสูจน์อย่างมีลำดับขั้นตอนและมีการอ้างเหตุผลประกอบการพิสูจน์ที่ชัดเจน โดยผู้เรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล การสื่อสารสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอไปใช้ในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ได้จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นทักษะที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูง
4. การนำเทคโนโลยีมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนหรือใช้เป็นแหล่งการเรียนรู้ เช่น การเรียนรู้แบบออนไลน์หรือการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (e-Learning) จะช่วยให้ผู้สอนผู้เรียนและเพื่อนร่วมชั้นเรียนทุกคนสามารถติดต่อ ปรีกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันได้เช่นเดียวกับการเรียนในชั้นเรียนปกติโดยอาศัยเครื่องมือการติดต่อสื่อสารที่ทันสมัย (e-mail, webboard, chatroom ฯลฯ) และส่งเสริมให้เกิดความร่วมมือระหว่างผู้เรียนและกลุ่มผู้เรียนรวมทั้งส่งเสริมให้รู้จักการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง

### วัตถุประสงค์

รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีวัตถุประสงค์เพื่อส่งเสริมให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น มีทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีทักษะทางสังคมและมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

### สาระการเรียนรู้

สาระการเรียนรู้หรือเนื้อหาของรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นเนื้อหาที่ปรากฏในเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย

#### หน่วยที่ 1 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผล

- 1.1) โครงสร้างทางคณิตศาสตร์
- 1.2) กระบวนการให้เหตุผล

#### หน่วยที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ

- 2.1) ประพจน์และตัวเชื่อมประพจน์
- 2.2) ตารางค่าความจริงและการหาค่าความจริงของประพจน์
- 2.3) สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง
- 2.4) สมมูลเชิงตรรกศาสตร์
- 2.5) ประโยคเปิด
- 2.6) การอ้างเหตุผล
- 2.7) ตัวบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ  
ตัวแปรเดียวและสองตัวแปร

### หน่วยที่ 3 วิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ

- 3.1) วิธีตรง
- 3.2) วิธีเดินหน้าถอยหลัง
- 3.3) วิธีการแย้งสลับที่
- 3.4) วิธีการหาข้อขัดแย้ง
- 3.5) การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \leftrightarrow q$
- 3.6) วิธีการแจกกรณี
- 3.7) วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
- 3.8) วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว
- 3.9) วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

#### แนวคิด หลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้

รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ได้ใช้แนวคิดหลักการและทฤษฎีพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย

#### 1. แนวคิดการเรียนรู้แบบกลุ่ม

##### ความหมายการเรียนรู้แบบกลุ่ม

การเรียนรู้แบบกลุ่ม หมายถึง การที่ผู้เรียนเข้ามาทำกิจกรรมร่วมกันและได้มีโอกาสรับรู้ แลกเปลี่ยนข้อมูล ความคิดเห็นและประสบการณ์ซึ่งกันและกัน จนค้นพบเป้าหมายที่ต้องการและสามารถนำไปใช้ได้ ดังที่ Gale (1969 อ้างถึงใน วราพร, 2542) ได้กล่าวถึง จุดประสงค์ของการเรียนรู้แบบกลุ่ม ดังนี้

1. เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความร่วมมือในการเรียนมากกว่าเกิดการแข่งขัน
2. เพื่อให้ผู้เรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็นร่วมกันและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมภายในกลุ่ม

3. เพื่อให้กลุ่มมีการอภิปราย ผู้เรียนที่เป็นสมาชิกทุกคนในกลุ่มได้มีโอกาสปรับปรุงทักษะการพูดและการฟัง

4. เพื่อให้เกิดแหล่งรวมของความคิดอย่างหลากหลายและโครงการต่าง ๆ ซึ่งเกิดจากการร่วมมือกันของสมาชิกในกลุ่ม

5. เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มได้เรียนรู้ความคิดเห็นของสมาชิกคนอื่นและเป็นการฝึกการยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น การเป็นคนใจกว้างมีเหตุผลและสมาชิกทุกคนในกลุ่มสามารถได้รับประสบการณ์ของการเป็นทั้งผู้นำและผู้ตามที่ดี

6. เพื่อให้ผู้สอนได้กระตุ้นผู้เรียนทุกคนให้ช่วยกันคิด ช่วยกันทำกิจกรรมและแสดงความคิดเห็นได้สะดวกกว่าการเรียนเป็นห้องใหญ่ห้อง

### **หลักการเรียนรู้แบบกลุ่ม**

การเรียนรู้แบบกลุ่มมีหลักการพื้นฐาน (ทิตนา, 2537: 146) ดังนี้

1. การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่ควรเป็นไปอย่างมีชีวิตชีวา ดังนั้น ผู้เรียนจึงควรมีบทบาทรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตนเองและมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

2. การเรียนรู้เกิดขึ้นจากแหล่งต่าง ๆ กันมิใช่เกิดจากแหล่งใดแหล่งหนึ่งเพียงแหล่งเดียว ประสบการณ์ความรู้สึกริ่กคิดของแต่ละบุคคลถือว่าเป็นแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญ

3. การเรียนรู้ที่ดีต้องเป็นการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นจากความเข้าใจจึงจะช่วยให้ผู้เรียนจดจำและสามารถใช้การเรียนรู้ให้เป็นประโยชน์ได้ การเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นผู้ค้นพบด้วยตนเองมีส่วนช่วยให้ผู้เรียนเกิดความลึกซึ้งและจดจำได้ดี

4. กระบวนการเรียนรู้มีความสำคัญหากผู้เรียนเข้าใจและมีทักษะในเรื่องนี้แล้วจะสามารถใช้เป็นเครื่องมือแสวงหาความรู้และคำตอบต่าง ๆ ที่ตนเองต้องการ

5. การเรียนรู้ที่มีความหมายแก่ผู้เรียน คือการเรียนรู้ที่สามารถนำไปใช้ได้จะช่วยให้ผู้เรียนได้ใช้ความรู้จนเกิดความเข้าใจในสิ่งนั้นมากขึ้นและเกิดการเรียนรู้เพิ่มขึ้น

แนวคิดการเรียนรู้แบบกลุ่มจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดความร่วมมือในการเรียน สนใจการทำงานของตนเองเท่ากับการทำงานของสมาชิกกลุ่ม ผู้เรียนมีการให้คำแนะนำชมเชย เสนอแนะกันและกันและสมาชิกทุกคนใช้ความสามารถเต็มที่ในการทำงานกลุ่ม ด้วยเหตุผลดังกล่าวการเรียนรู้แบบกลุ่มจึงเป็นแนวคิดหนึ่งที่ผู้วิจัยสนใจต้องการนำมาใช้ในการฝึกให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเพื่อให้ได้ผลตามที่ผู้สอนต้องการให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนอย่างสมบูรณ์และถูกต้อง

## 2. การเรียนแบบร่วมมือ (cooperative learning)

### ความหมายและองค์ประกอบสำคัญของการเรียนแบบร่วมมือ

การเรียนแบบร่วมมือสามารถใช้ได้กับทุกรายวิชาและใช้กับกลุ่มเล็ก ๆ โดยมีเป้าหมายเพื่อพัฒนาและใช้ทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณและการทำงานร่วมกันของสมาชิกในกลุ่ม รวมทั้งสนับสนุนให้เกิดการร่วมมือ ความสัมพันธ์ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน อันจะนำไปสู่ผลสำเร็จของกลุ่ม

Slavin (1987) ได้ให้ความหมายไว้ว่าการเรียนแบบร่วมมือเป็นการสอนแบบหนึ่งโดยให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก (ปกติกลุ่มละประมาณ 4 คน) และการจัดกลุ่มต้องคำนึงถึงความสามารถของผู้เรียน (เช่น ผู้เรียนที่มีความสามารถสูง 1 คน ความสามารถปานกลาง 2 คน และความสามารถต่ำ 1 คน) หน้าที่ของผู้เรียนทุกคนในกลุ่มจะต้องช่วยกันทำงาน รับผิดชอบและช่วยเหลือการเรียนซึ่งกันและกัน

Artzt and Claire (1990) ได้ให้ความหมายไว้ว่า การเรียนแบบร่วมมือเป็นแนวทางที่จัดให้ผู้เรียนทำการแก้ปัญหาาร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ สมาชิกทุกคนร่วมกันทำงานในกลุ่มเพื่อให้ประสบความสำเร็จหรือบรรลุเป้าหมายร่วมกัน สมาชิกในกลุ่มทุกคนต้องระลึกเสมอว่าเขาเป็นส่วนสำคัญของกลุ่ม ความสำเร็จหรือความล้มเหลวของกลุ่มเป็นความสำเร็จหรือความล้มเหลวของทุกคนในกลุ่มเพื่อให้บรรลุเป้าหมายสมาชิกทุกคนต้องพูด อธิบายแนวคิดและช่วยเหลือกันให้เกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหา ครูไม่ใช่เป็นแหล่งความรู้ที่คอยป้อนแก่ผู้เรียน แต่จะมีบทบาทเป็นผู้คอยให้ความช่วยเหลือหรืออำนวยความสะดวก จัดหาและชี้แนะแหล่งข้อมูลในการเรียนรู้แก่ผู้เรียนและตัวผู้เรียนเองจะเป็นแหล่งความรู้ซึ่งกันและกันในกระบวนการเรียนรู้

Johnson and Johnson (อ้างถึงใน สิริพร, 2545) ได้กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือมีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ประการ ถ้าขาดองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งจะเป็นการทำงานกลุ่ม (group work) จะไม่ใช้การเรียนแบบร่วมมือ และองค์ประกอบทั้ง 5 ประการสรุปได้ ดังนี้

1. การพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกันในทางบวก (positive interdependence) นักเรียนจะต้องเข้าใจว่าความสำเร็จของแต่ละคนในกลุ่มขึ้นอยู่กับความสำเร็จของกลุ่ม งานของกลุ่มจะประสบความสำเร็จบรรลุจุดประสงค์หรือไม่ ขึ้นอยู่กับสมาชิกทุกคนในกลุ่มที่จะต้องช่วยเหลือพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกัน โดยครูผู้สอนต้องกำหนดวัตถุประสงค์ของงานให้ชัดเจน ตลอดจนกำหนดบทบาทการทำงานของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มให้ชัดเจนว่าสมาชิกคนใดมีหน้าที่และความรับผิดชอบอะไรกับงานของกลุ่ม เช่น ประธานกลุ่มทำหน้าที่เป็นผู้จัดบันทึกผู้คอยดูแลให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นและผู้ตรวจสอบผลงาน

2. การรับผิดชอบของกลุ่ม (individual accountability) นักเรียนแต่ละคนต้องมีความรับผิดชอบร่วมกันในการทำงานของกลุ่ม เพื่อให้งานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีจึงเป็นหน้าที่ของสมาชิกในแต่ละกลุ่มที่จะต้องคอยตรวจสอบดูว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มเกิดการเรียนรู้หรือไม่ ทุกคนช่วยกันรับผิดชอบการเรียนรู้ในงานทุกขั้นตอนของสมาชิกในกลุ่ม โดยมีการประเมินว่าทุกคนเข้าใจ รู้เรื่อง เห็นด้วยหรือไม่กับงานของกลุ่ม ให้แต่ละคนนำผลงานของตนมาอธิบาย มีการอภิปรายและลงสรุปความเห็นร่วมกันเพื่อให้มั่นใจว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มเกิดการเรียนรู้สามารถที่จะอธิบายคำถามหรืออธิบายงานของกลุ่มได้ทุกขั้นตอน โดยเฉพาะในงานส่วนที่ตนเองรับผิดชอบเท่านั้น ทั้งนี้เพื่อให้ทุกคนอยู่ในสภาพที่พร้อมที่จะนำเสนอผลงาน เมื่อมีการสุ่มถามให้นักเรียนคนใดคนหนึ่งรายงานผลงานของกลุ่มว่าเป็นอย่างไรในการรายงานหน้าชั้นเรียน

3. การติดต่อปฏิสัมพันธ์กันโดยตรง (face-to-face promotive interaction) การปฏิสัมพันธ์จะเกิดขึ้นได้เมื่อสมาชิกทุกคนในกลุ่มช่วยเหลือซึ่งกันและกัน มีการส่งเสริมสนับสนุนความคิด ผลงานซึ่งกันและกัน มีการอธิบาย การทำความเข้าใจและการให้เหตุผลต่าง ๆ ร่วมกันทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน มีความเข้าใจและเรียนรู้การรู้จักอยู่ร่วมกันในสังคมมากขึ้น

4. ทักษะความสัมพันธ์กันในกลุ่มเล็กและผู้อื่น (interpersonal and small group skills) การทำงานเป็นกลุ่มเล็กจะต้องได้รับการฝึกฝนเป็นอย่างดี เพื่อให้งานบรรลุผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายทำให้งานของกลุ่มมีประสิทธิภาพสูง สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องไว้วางใจซึ่งกันและกัน ต้องยอมรับฟังความคิดเห็นซึ่งกันและกัน สนับสนุนกัน มีวิธีการสื่อสารและสื่อความหมายที่ชัดเจน

5. กระบวนการกลุ่ม (group processing) สมาชิกทุกคนในกลุ่มช่วยกันทำงาน แสดงความคิดเห็น เมื่อทำงานเสร็จแล้วสมาชิกในกลุ่มสามารถตอบคำถาม อธิบายงาน บอกที่มาของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้ สมาชิกต้องช่วยกันประเมินประสิทธิภาพการทำงานของกลุ่มและประเมินได้ว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มสามารถปรับปรุงการทำงานของตนให้ดีขึ้นได้อย่างไร สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องช่วยกันแสดงความคิดเห็นและตัดสินใจได้ว่างานครั้งต่อไปจะมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ ควรปฏิบัติเช่นเดิมอีกหรือควรปรับปรุงเปลี่ยนแปลงขั้นตอนการทำงาน ขั้นตอนใดที่ยังขาดตกบกพร่องต้องการแก้ไขปรับปรุงอะไรและอย่างไรให้ดีขึ้น

นอกจากนี้การเรียนแบบร่วมมือยังเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้มีปฏิสัมพันธ์ร่วมกันในการเรียนและการทำงาน คอยช่วยเหลือ แนะนำ สนับสนุนความคิด ความสำเร็จซึ่งกันและกันโดยให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ผู้เรียนแต่ละคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบในงานของตนและมีการตรวจสอบงานที่ได้รับมอบหมาย มีการนำเสนอผลการทำงานของแต่ละคน มีการอภิปรายและสรุปร่วมกัน มีการช่วยเหลือกันในกลุ่ม คนเก่งช่วยคนอ่อน เพื่อให้มั่นใจว่าสมาชิกในกลุ่มทุกคนเกิดการเรียนรู้สามารถที่จะตอบคำถามได้และความสำเร็จของแต่ละบุคคลในกลุ่มคือความสำเร็จของกลุ่ม

ดังนั้นการเรียนแบบร่วมมือจึงเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ต้องการเน้นให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้เรียนรู้ร่วมกัน มีความรับผิดชอบและช่วยเหลือกัน มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ตลอดจนการฝึกการทำงานร่วมกับผู้อื่นและเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่มุ่งพัฒนาทั้งเจตคติและค่านิยมในตัวของผู้เรียน มีการนำเสนอและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและแนวคิดที่หลากหลายระหว่างสมาชิกในกลุ่ม พัฒนาพฤติกรรม การแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์และการคิดอย่างมีเหตุผลรวมทั้งพัฒนาคุณลักษณะของผู้เรียนให้รู้จักตนเองและเพิ่มคุณค่าของตนเอง ซึ่งกิจกรรมดังกล่าวจะมีผลต่อผู้เรียน 3 ประการ คือ

1. มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชา (academic learning)
2. มีทักษะทางสังคมโดยเฉพาะทักษะการทำงานร่วมกัน (social skills)
3. รู้จักตนเองและตระหนักในคุณค่าของตนเอง (self-esteem)

## รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ (นาตยา, 2543; สิริพร, 2545)

รูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ได้นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ประกอบด้วย

### 1) STAD (Student Teams Achievement Division)

ในปี ค.ศ. 1980 Robert Slavin แห่งมหาวิทยาลัย John Hopkins เป็นผู้พัฒนา STAD ขึ้นซึ่งสามารถนำ STAD มาใช้ในการเรียนการสอนในปัจจุบันได้ โดยครูผู้สอนเพียงแค่เตรียม กิจกรรม ใบงาน สื่อการเรียนรู้และแบบทดสอบย่อยเท่านั้น ซึ่ง STAD มีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ประการคือ

1.1) การนำเสนอสิ่งที่ต้องเรียน (class presentation) ครูเป็นผู้นำเสนอสิ่งที่ผู้เรียน ต้องเรียนไม่ว่าจะเป็นมโนคติ ทักษะการคิด กระบวนการ โดยครูอาจใช้วิธีการสอนแบบบรรยาย สาธิต อธิบายและแสดงเหตุผล ใช้คำถาม ทดลอง อุปนัย เป็นต้น

1.2) การทำงานเป็นกลุ่ม (teams) ครูแบ่งผู้เรียนออกเป็นกลุ่ม โดยจำนวนสมาชิก ในแต่ละกลุ่มขึ้นอยู่กับจำนวนหัวข้อที่จะให้ผู้เรียนศึกษา ลักษณะกลุ่มเป็นแบบคละเพศ คละความสามารถและจากงานวิจัยของ Davidson ในปี ค.ศ. 1990 พบว่า การเรียนคณิตศาสตร์เป็นกลุ่มจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อในแต่ละกลุ่มมีจำนวนสมาชิก 3-4 คน หลังจากที่ครูจัดกลุ่มเสร็จ เรียบร้อยแล้ว ครูต้องชี้แจงให้ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มทราบบทบาทและหน้าที่ของสมาชิกในกลุ่มว่า ผู้เรียนต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน เรียนร่วมกัน อภิปรายปัญหาาร่วมกัน ตรวจสอบคำตอบของงานที่ได้รับมอบหมายและแก้ไขคำตอบร่วมกัน สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องทำงานให้ดีที่สุดเพื่อให้เกิด การเรียนรู้ ต้องให้กำลังใจซึ่งกันและกันตลอดจนสามารถทำงานร่วมกันได้ จากนั้นสมาชิกแต่ละ คนศึกษากันคนละหัวข้อจากสื่อที่ครูเตรียมไว้ให้แล้วนำมาอธิบาย อภิปรายให้กันและกันฟังจน เข้าใจและร่วมกันทำงานอื่นๆ ตามที่ครูกำหนด

สำหรับการกระตุ้นให้สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบซึ่งกันและกันนั้นมีข้อควร ปฏิบัติดังนี้

(1) สมาชิกในกลุ่มต้องแน่ใจว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มสามารถตอบคำถามแต่ละข้อได้อย่างถูกต้อง

(2) สมาชิกในกลุ่มต้องช่วยกันตอบคำถามทุกข้อให้ได้ โดยไม่ต้องขอความช่วยเหลือจากเพื่อนนอกกลุ่ม หรือถ้าจำเป็นต้องขอความช่วยเหลือจากครูก็ให้ขอความช่วยเหลืออย่างน้อยที่สุด

(3) สมาชิกในกลุ่มต้องแน่ใจว่าสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มต้องอธิบายคำตอบแต่ละข้อได้

1.3) การทดสอบย่อย (quizzes) หลังจากที่ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มทำงานเสร็จเรียบร้อยแล้วครูก็ทำการทดสอบย่อย โดยให้ผู้เรียนต่างคนต่างทำแบบทดสอบ เพื่อเป็นการประเมินความรู้ที่ผู้เรียนได้เรียนมา วิธีการนี้จะช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนมีความรับผิดชอบต่อตนเอง

1.4) คะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคน (individual improvement score) คะแนนพัฒนาการของผู้เรียนจะเป็นตัวกระตุ้นให้ผู้เรียนทำงานหนักมากขึ้น ในการทดสอบแต่ละครั้ง ครูจะมีคะแนนฐาน (base score) ซึ่งเป็นคะแนนเฉลี่ยของผู้เรียนที่ได้จากการทดสอบย่อยที่ผ่านมา ก่อนการใช้ STAD และคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคนหาได้จากความแตกต่างระหว่างคะแนนฐาน (คะแนนเฉลี่ยในการทดสอบย่อยที่ผ่านมา ก่อนการใช้ STAD) กับคะแนนที่ผู้เรียนสอบได้จากการทดสอบย่อยหลังจากการเรียนรู้แบบร่วมมือ (STAD) ส่วนคะแนนของกลุ่ม (team scores) หาได้จากการหาคะแนนเฉลี่ยโดยการรวมคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนทุกคนในกลุ่มแล้วหารด้วยจำนวนสมาชิกในกลุ่มแต่ละกลุ่ม

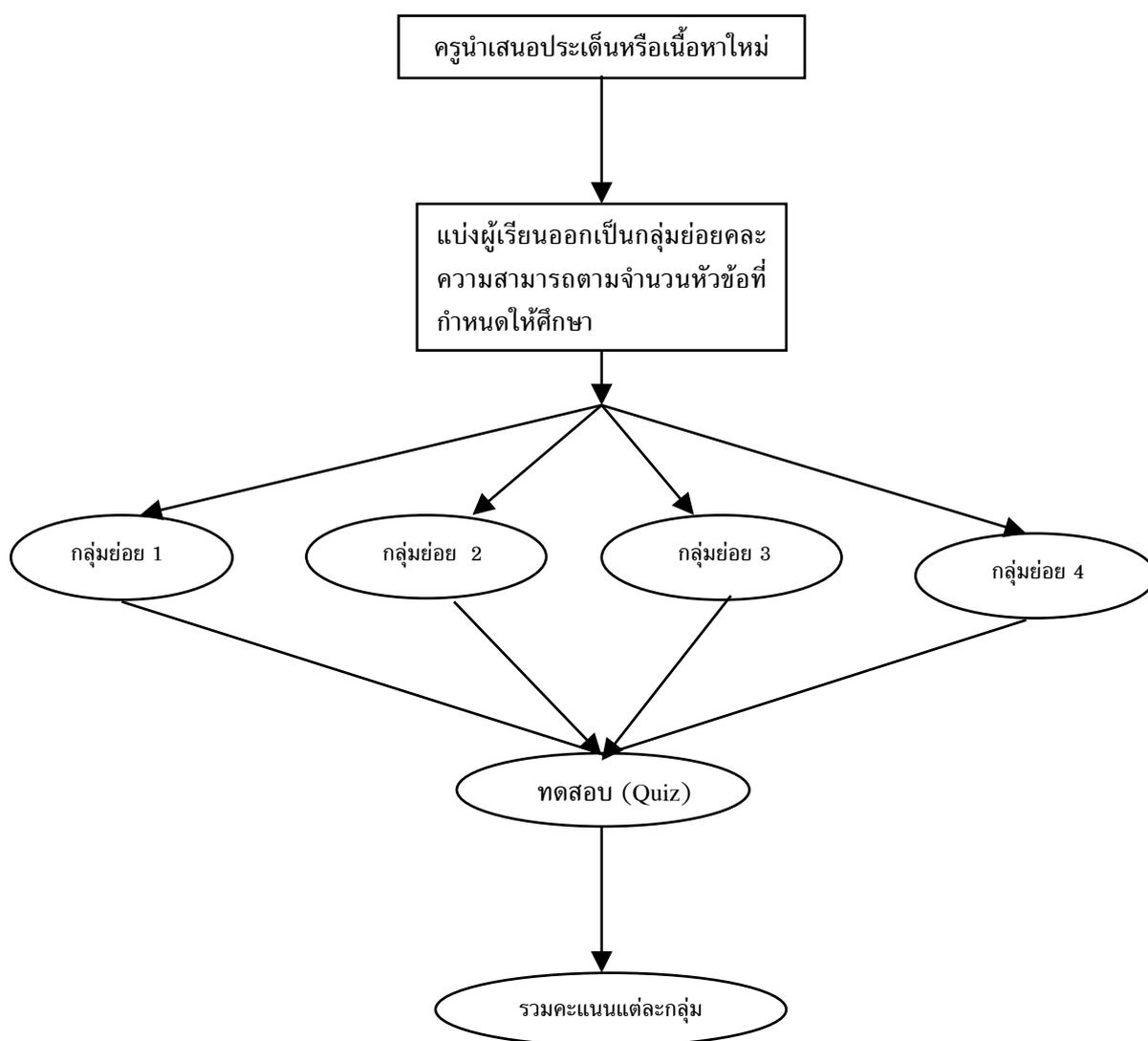
1.5) การรับรองผลงานของกลุ่ม (team recognition) เป็นการประกาศคะแนนกลุ่มให้แต่ละกลุ่มทราบพร้อมกับให้คำชมเชยหรือให้ประกาศนียบัตรหรือให้รางวัลกับกลุ่มที่มีคะแนนพัฒนาการของกลุ่มสูงสุดและครูควรชี้แจงกับผู้เรียนว่าคะแนนพัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคนมีความสำคัญเท่าเทียมกับคะแนนที่ผู้เรียนแต่ละคนได้รับจากการทดสอบ

ดังนั้น STAD (Student Teams Achievement Division) จึงเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่กำหนดให้ผู้เรียนที่มีระดับความสามารถทางการเรียนแตกต่างกันมาทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ โดยครูเป็นผู้กำหนดบทเรียนและงานของกลุ่มหรือครูอาจเป็นผู้สอนบทเรียนให้กับผู้เรียนทั้งชั้นและให้กลุ่มทำงานตามที่ครูกำหนด นักเรียนในกลุ่มช่วยเหลือกัน คนที่เรียนเก่งช่วยเหลือเพื่อน ๆ เวลาสอบทุกคนต่างทำข้อสอบของตนแล้วครูนำคะแนนของสมาชิกทุกคนภายในกลุ่มมาคิดเป็นคะแนนของกลุ่มและอาจจัดลำดับคะแนนของกลุ่มและปิดประกาศให้ทุกคนทราบ

## STAD ใช้เมื่อไร

1. ใช้ร่วมกับกิจกรรมการเรียนการสอนแบบอื่น ๆ หรือหลังจากที่ครูได้สอนผู้เรียน ทั้งชั้นไปแล้วและต้องการให้ผู้เรียนได้ค้นคว้า ศึกษาร่วมกันเองภายในกลุ่มสืบเนื่องจากสิ่งที่ ครูได้สอนไป

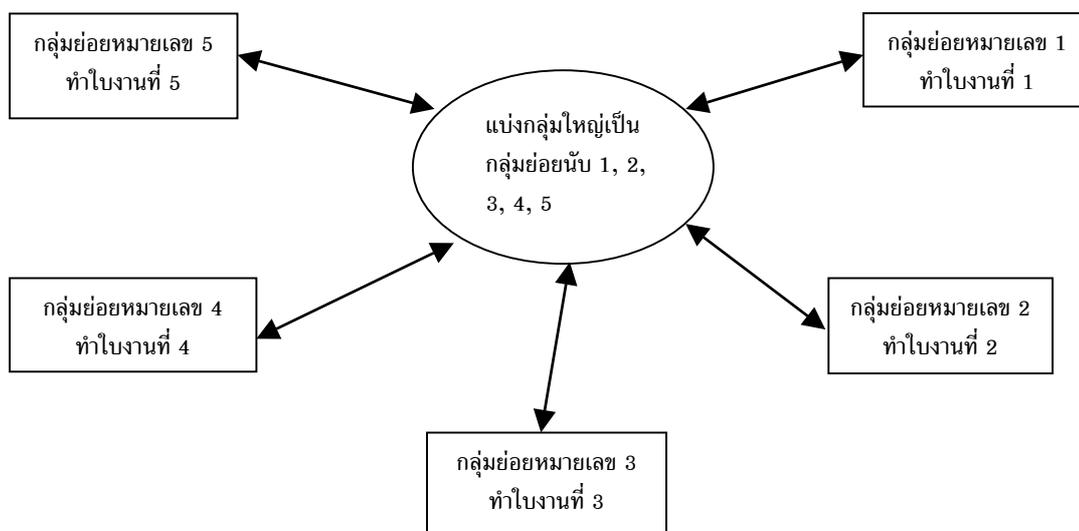
2. STAD ใช้ได้กับทุกวิชาที่ต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในสิ่งที่ เป็น ข้อเท็จจริง เกิดความคิดรวบยอด ค้นหาคำตอบที่มีคำตอบแน่นอนชัดเจน



**แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบ STAD**

## 2) ปริศนาความคิด (Jigsaw II)

Jigsaw II เป็นการเรียนแบบร่วมมือที่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มจะเป็นผู้เชี่ยวชาญในแต่ละส่วนของกิจกรรมที่เขาเรียน โดยครูจะอธิบายให้ผู้เรียนเข้าใจในงานและลักษณะการเรียนภายในกลุ่มเช่นเดียวกับการเรียนด้วยวิธี STAD และจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มขึ้นอยู่กับจำนวนหัวข้อที่จะให้ผู้เรียนศึกษา เช่น ถ้าศึกษา 3 หัวข้อ ก็แบ่งกลุ่มละ 3 คน เป็นต้น ในกรณีที่อาจมีบางกลุ่มมีเรียน 4 คน แทนที่จะเป็น 3 คน ก็อาจให้มีบางหัวข้อให้ผู้เรียนศึกษากัน 2 คน ก็ได้ ผู้เรียนที่เป็นสมาชิกในกลุ่มและเชี่ยวชาญในเนื้อหาส่วนใดก็จะสอนส่วนนั้นให้กับสมาชิกคนอื่น ๆ ในกลุ่มที่ไม่ได้เชี่ยวชาญในส่วนนั้น ๆ การเป็นผู้เชี่ยวชาญของผู้เรียนไม่ใช่เพียงแค่การอ่านและค้นคว้าหาข้อมูลเท่านั้น แต่ผู้เรียนอาจจะใช้วิธีการอื่น ๆ ที่ทำให้ตนเองเป็นผู้เชี่ยวชาญได้ เช่น การสัมภาษณ์ การศึกษาจาก วิดีทัศน์ การลงมือปฏิบัติกิจกรรมหรือการค้นคว้า สืบหาข้อมูลจากคอมพิวเตอร์ (internet) เป็นต้น ในรูปแบบ Jigsaw II ครูต้องเตรียมใบงานให้กับผู้เรียนซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญแต่ละคนของกลุ่มและสร้างแบบทดสอบแต่ละหน่วยการเรียนด้วย เมื่อครูแบ่งผู้เรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ซึ่งเรียกว่า Home Group ในแต่ละกลุ่มจะมีผู้เชี่ยวชาญซึ่งจะได้รับแจกใบงานแล้วผู้เชี่ยวชาญของแต่ละกลุ่มจะแยกย้ายกันไปทำงานตามใบงานที่ตนได้รับมอบหมาย โดยผู้เชี่ยวชาญที่ได้ใบงานที่เหมือนกันจะมารวมอยู่เป็นกลุ่มเดียวกันที่เรียกว่า Expert Group ซึ่งจะช่วยกันทำงานตามที่ได้รับมอบหมาย เมื่อเสร็จแล้วก็นำกลับไปสอนสมาชิกคนอื่น ๆ ในกลุ่ม Home Group ของตนที่ไม่ได้ศึกษาหัวข้อนั้น แล้วครูกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มได้รายงาน อภิปราย ชักถาม และให้มีการอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเรียนอีกครั้งหนึ่งโดยมีการถามตอบในหัวข้อเรื่องที่คุณเชี่ยวชาญแต่ละคนได้ศึกษามา แล้วครูจึงทำการทดสอบย่อยอีกครั้งหนึ่งเกณฑ์การประเมินผลเกี่ยวกับการให้คะแนนก็ทำวิธีการเดียวกับวิธีการของ STAD แต่วิธีการของ Jigsaw II จะดีกว่า STAD ตรงที่ Jigsaw II ฝึกให้นักเรียนแต่ละคนมีความรับผิดชอบในการเรียนมากขึ้นเพราะต้องใช้ความรู้ที่ตนได้ศึกษามา และนำความรู้เหล่านั้นไปสอนสมาชิกคนอื่น ๆ ของกลุ่มด้วย



### แผนภูมิแสดงการจัดกิจกรรมแบบปริศนาความคิด (Jigsaw II)

#### Jigsaw II ใช้เมื่อไร

1. ใช้ควบคู่กับกิจกรรมการเรียนการสอนแบบอื่นๆ หรือกรณีที่ครูกำลังสอนผู้เรียนทั้งชั้นแล้วต้องการให้ผู้เรียนทำงานกันในกลุ่มเพื่อศึกษาหัวข้อที่สับสนเนื่องจากสิ่งที่ครูได้สอนไป
2. Jigsaw II สามารถนำไปใช้ได้กับทุกวิชาที่มีจุดประสงค์ให้ผู้เรียนศึกษาความรู้ข้อเท็จจริงที่มีคำตอบเฉพาะแน่นอน เพื่อให้เกิดความคิดรวบยอดในเรื่องนั้น เช่นเดียวกับ STAD
3. หน่วยที่จะนำมาใช้สอนอาจใช้เวลาเรียนให้เสร็จใน 1 คาบ หรือใช้เวลา 2-3 คาบ ก็ได้ขึ้นอยู่กับภาระงานหรือเรื่องที่จะให้ผู้เรียนเรียนว่ามีสาระมากน้อยแค่ไหน ในกรณีที่เรียนหัวข้อหรือเรื่องที่มีสาระมากพอควร อาจให้ผู้เรียนไปอ่านเป็นการบ้านมาก่อนแล้วค่อยให้มารวมกลุ่มกับเพื่อนที่ศึกษาหัวข้อหรือเรื่องเดียวกันในคาบต่อไป
4. เอกสารหรือใบความรู้ที่จะให้ผู้เรียนศึกษาในแต่ละหัวข้อหรือแต่ละเรื่องควรบอกกรอบ ประเด็นที่สำคัญ ๆ ของหัวข้อหรือเรื่องนั้น ที่ผู้เรียนจะต้องให้ความสนใจหรือแนวทางที่กลุ่มจะต้องศึกษาว่ามีอะไรบ้างเพื่อผู้เรียนจะได้นำไปอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มได้เข้าใจตรงกัน

Robert Slavin ได้ดัดแปลงวิธีการเรียนแบบ Jigsaw II มาจาก Jigsaw ของ Elliot Aronson ซึ่งวิธีการแบบ Jigsaw มีความยุ่งยากกว่าโดยฝึกให้ผู้เรียนต้องช่วยเหลือพึ่งพากันมากกว่า Jigsaw II เพราะในการเรียนแบบ Jigsaw II ผู้เรียนที่ศึกษาหัวข้อเดียวกันจะศึกษาจากเอกสารชุดเดียวกันเหมือนกันทุกกลุ่ม แต่สำหรับ Jigsaw ผู้เรียนที่ศึกษาหัวข้อเดียวกันจะได้รับเอกสารที่ไม่เหมือนกัน และ/หรือได้รับเอกสารที่เกี่ยวกับหัวข้อนั้นไม่สมบูรณ์ จึงต้องไปศึกษาร่วมกับเพื่อนต่างกลุ่มที่ศึกษาหัวข้อเดียวกับตน การเรียนแบบ Jigsaw จึงดีในแง่ที่ผู้เรียนได้เรียนจากสื่อที่หลากหลายและมีการช่วยเหลือพึ่งพากันในกลุ่มมากกว่า Jigsaw II ทั้ง Jigsaw และ Jigsaw II มีความคล้ายคลึงกับ STAD มาก ทั้งในแง่จุดประสงค์ของการเรียนและลักษณะกิจกรรมการเรียน ต่างกันตรงที่แทนที่ผู้เรียนแต่ละคนจะศึกษาหัวข้อของตนตามลำพังก่อน เช่นในการเรียนแบบ STAD แต่ผู้เรียนจะนำหัวข้อที่ศึกษานั้นมาศึกษาร่วมกันกับเพื่อนต่างกลุ่มก่อน ผู้เรียนจึงมีโอกาสปรึกษาหารือทำความเข้าใจกันได้ดีขึ้นก่อนจะนำไปสอนหรืออธิบายให้เพื่อนในกลุ่มเดิมของตน

### 3) TAI (Team Assisted Individualization)

TAI เป็นการจัดกิจกรรมที่ใช้กับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ แต่วิชาอื่น ๆ ก็สามารถนำไปปรับใช้ได้โดยเฉพาะในเรื่องที่ต้องการเน้นการพัฒนาทักษะให้กับผู้เรียน ครูจะใช้การจัดกิจกรรมการสอนแบบต่าง ๆ ให้ผู้เรียนเข้าใจเรื่องที่เรียน โดยอาจทำการสอนผู้เรียนรวมกันทั้งชั้นแล้วทำการทดสอบว่าผู้เรียนคนใดเข้าใจหรือไม่เข้าใจอย่างไร แล้วครูจึงจัดกลุ่มผู้เรียนตามระดับความสามารถ การจัดกิจกรรมการเรียนแบบ TAI จะมีการจัดกลุ่มผู้เรียนเป็น 2 ลักษณะ คือ จัดผู้เรียนเป็นกลุ่มที่ละความสามารถ (heterogeneous group) กลุ่มละ 4 คน และจัดผู้เรียนเป็นกลุ่มที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกัน (homogeneous group) สำหรับการทำงานกลุ่มแบบ TAI ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มจับคู่กันทำงานและผลัดกันตรวจงานในคู่ของตนเมื่อทำงานที่ได้รับมอบหมาย เช่น แบบฝึกหัด ครบหมดทุกชุดแล้ว ให้สมาชิกในกลุ่มทั้ง 4 คนต่างคนต่างทำแบบฝึกหัดชุดรวมแล้วแลกเปลี่ยนกันตรวจและตรวจดูเฉลยที่ครูจัดเตรียมไว้ หากผู้เรียนคนใดทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ เช่น กำหนดเกณฑ์ 75 % ก็ต้องทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม สำหรับผู้เรียนที่สอบได้ถึงเกณฑ์ หลังจากมารับการทดลองจากครูแล้วครูจะจัดให้ผู้เรียนที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกันมาจัดกลุ่มอยู่ด้วยกัน ครูอธิบายในเรื่องที่ได้สอนไปแล้ว โดยใช้เวลา 5-10 นาที แล้วให้ผู้เรียนแยกย้ายกลับเข้ากลุ่มของตนแล้วไปอธิบายชี้แจงให้เพื่อนในกลุ่มเข้าใจอีกครั้งหนึ่งและทำงานกับคู่ของตนต่อไปตามเดิม

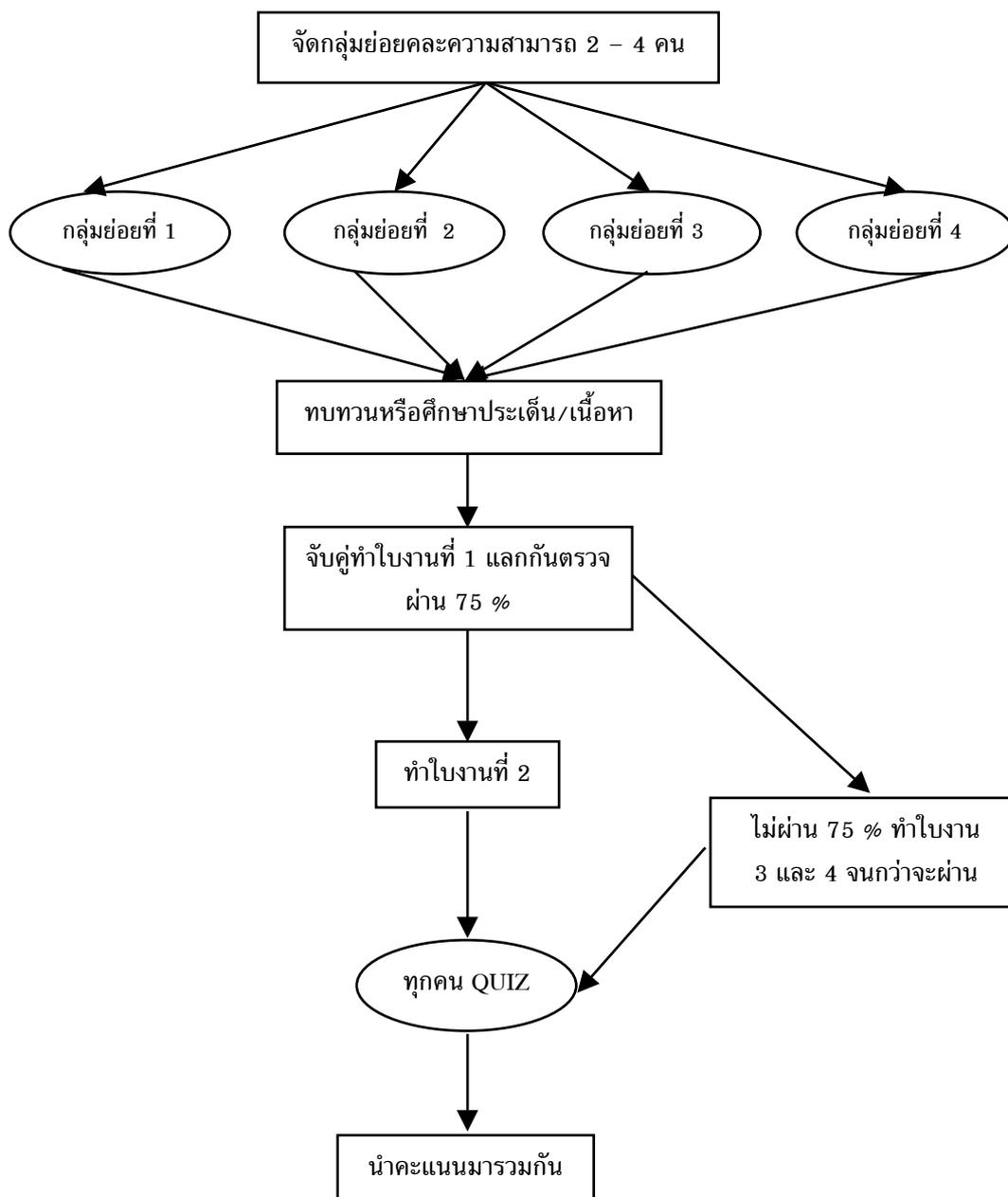
## TAI ใช้เมื่อไร

1. แนวคิดดั้งเดิมของ TAI มีการนำมาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์กันมาก ต่อมาก็ได้มีการนำวิธีการนี้ไปใช้ในวิชาอื่น ๆ อีก เช่น ภาษา พลศึกษา ศิลปะ ที่มีจุดประสงค์คล้ายคลึงกับการเรียนคณิตศาสตร์ นั่นคือ การเรียนที่มีจุดประสงค์เน้นการพัฒนาทักษะ ฝึกปฏิบัติ เพราะการเรียนวิชาใด ๆ ที่มีจุดประสงค์เช่นนี้จะมาสอนผู้เรียนรวมกันทั้งชั้นเป็นกลุ่มใหญ่ย่อมไม่ได้ผล ปัญหาที่มักพบกันก็คือ เมื่อครูสอนไป เด็กอ่อนก็ตามไม่ทัน เด็กเก่งก็อาจเบื่อเพราะรู้หมดแล้ว การเรียนและฝึกฝนฝึกหัดเป็นกลุ่มเล็ก ๆ เป็นคู่และฝึกด้วยตนเองจะเป็นวิธีที่เหมาะสมมากกว่า ตอบสนองความแตกต่างในความสามารถของผู้เรียนแต่ละคนได้ดีกว่า

2. การเลือกหัวข้อหรือเรื่องที่จะให้ผู้เรียนเรียนด้วย TAI ในกลุ่ม ควรย่อยออกมาเป็นหัวข้อหรือเรื่องเล็ก ๆ ที่ไม่สลับซับซ้อนมากนัก ไม่ยากเกินกว่าที่ผู้เรียนจะศึกษาด้วยตนเองและเรียนร่วมกันกับเพื่อนได้ หากพบว่าผู้เรียนบางคนในคู่หรือในกลุ่มไม่สามารถทำงานที่กำหนดนั้นได้ เช่น อาจเป็นวิชาคณิตศาสตร์ทำโจทย์หลายข้อไม่ได้ ครูก็อาจเข้าไปดูแลช่วยเหลือได้ว่าเขามีปัญหาที่ตรงไหน

3. ในการเรียกผู้เรียนที่มีระดับความสามารถใกล้เคียงกันมาพบครูเป็นระยะ ๆ นั้นครูอาจเรียกผู้เรียนให้ทยอยมาพบ ก่อนหรือระหว่างที่ผู้เรียนเข้าไปทำงานกันในกลุ่มย่อยหรือในคู่ของตนก็ได้หรือครูอาจเรียกผู้เรียนบางคนมาพบครูเป็นรายคนเป็นการส่วนตัวก็ได้ หากเห็นว่าผู้เรียนบางคนต้องการความช่วยเหลือเป็นพิเศษ

4. เวลาที่ใช้ในการเรียนด้วย TAI อาจแตกต่างกันไปในแต่ละวิชาเนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้กับการเรียนเพื่อฝึกทักษะ เช่น คณิตศาสตร์หรือภาษาที่ครูอาจมีแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนทำมาก ๆ ในกรณีเช่นนี้ระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนอาจติดต่อกันหลายคาบ ดังนั้น ครูอาจจัดเวลาให้ผู้เรียนที่มีความสามารถใกล้เคียงกันทยอยมาพบครูทุกครั้งก่อนไปศึกษาด้วยตนเองหรือไปทำงานกันในกลุ่มของตนเช่นนี้ก็ได้



**แผนภูมิการจัดกิจกรรมแบบ Team Assisted Individualization (TAI)**

#### 4) Giraffiti Model

Giraffiti Model เป็นกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่มีลักษณะดังนี้ คือ

1. แบ่งกลุ่มผู้เรียนแบบละความสามารถกลุ่มละ 4 คน จากนั้นให้ผู้เรียนจับคู่กัน
2. ครูกำหนดประเด็นที่จะให้ผู้เรียนอภิปรายกันในลักษณะเห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วยหรืออาจเป็นการอภิปรายในลักษณะอื่น ๆ ที่ความคิดเห็นในเรื่องนั้นมีหลากหลายไม่มีคำตอบที่แน่นอนเฉพาะเจาะจง
3. เริ่มต้นให้แต่ละคู่อภิปรายในลักษณะเห็นด้วยก่อน โดยคนหนึ่งเป็นคนแสดงความคิดเห็นและอีกคนหนึ่งเป็นคนจับบันทึกแล้วสลับหน้าที่กัน ต่อมาให้ทั้งคู่อภิปรายกันในลักษณะไม่เห็นด้วยบ้าง โดยคนหนึ่งเป็นคนแสดงความคิดเห็นและอีกคนหนึ่งเป็นคนจับบันทึกแล้วสลับหน้าที่กัน
4. เมื่อเสร็จสิ้นการอภิปรายในแต่ละคู่แล้วให้สมาชิกทุกคนมารวมกันนำความคิดเห็นทั้งที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วยของแต่ละคู่มาประมวลเข้าเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันโดยจะต้องมีความคิดเห็นทั้งที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วย และต้องคงความคิดเห็นของสมาชิกทุกคนเอาไว้ด้วย จากนั้นทุกคนในกลุ่มช่วยกันเขียนผลสรุปขั้นสุดท้ายก่อนส่งครูเป็นผลงานที่มีลายมือของสมาชิกทุกคนปรากฏอยู่ จากนั้นครูนำสิ่งที่ผู้เรียนอภิปรายกันในกลุ่มมาอภิปรายรวมในชั้น

#### Giraffiti Model ใช้เมื่อไร

1. วิธีการนี้มักนำมาใช้ต่อเนื่องจากการที่ผู้เรียนได้เรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่งจนมีความรู้ความเข้าใจในระดับหนึ่งมาแล้วและต้องการให้ผู้เรียนได้อภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับเรื่องนั้น
2. สิ่งที่จะนำมาให้ผู้เรียนอภิปรายกันควรมีลักษณะที่ไม่มีคำตอบที่ถูกต้องเฉพาะเจาะจง มีจุดประสงค์ที่จะให้ผู้เรียนมีทักษะในการแสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายทุกแง่มุม ฝึกการแสวงหาทางเลือกต่าง ๆ เพื่อการตัดสินใจ ด้วยจุดประสงค์เช่นนี้จึงเห็นได้ว่า Giraffiti Model สามารถแก้ไขข้อบกพร่องบางอย่างที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนได้อภิปรายกลุ่มซึ่งมักจะพบปัญหาอุปสรรคหลายประการ เช่น ผู้เรียนบางคนไม่แสดงความคิดเห็น นั่งคุยกันนำงานอื่นมาทำหรือไม่ก็ไปคุยเล่นกับเพื่อนกลุ่มอื่นปล่อยให้เพื่อนบางคนพูดกันไปแล้วตนเองก็

มาร่วมเขียนชื่อส่งงานกลุ่ม หรือไม่ก็ปรากฏว่ามีเพื่อนบางคนผูกขาดการพูดอยู่คนเดียว ไม่รับฟังความคิดเห็นของเพื่อน ๆ ในกลุ่ม บางครั้งก็จะพบว่าการอภิปรายกลุ่มของผู้เรียนไม่สะท้อนให้เห็นความคิดเห็นที่หลากหลาย ผู้เรียนตัดสินใจมองอะไรเพียงด้านเดียว ความคิดเห็นไม่กว้างขวาง เราจะพบปัญหาลักษณะเช่นนี้อยู่เสมอ ๆ เวลาที่ให้ผู้เรียนได้อภิปรายกลุ่มร่วมกัน ปัญหาดังกล่าวจะพบว่า Giraffiti Model สามารถแก้ไขปัญหาเหล่านี้ได้ดีทีเดียว

3. วิธีการ Giraffiti Model นอกจากจะนิยมนำมาใช้ในการฝึกให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลายแล้วยังสามารถนำมาใช้ในการเรียนการสอนที่เป็นเนื้อหาวิชาได้ด้วยเช่นกัน เช่น ครูอาจจัดกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนช่วยกันค้นหาคำตอบจากคำถามที่ครูถามโดยให้แต่ละกลุ่มตอบทีละคำถาม สมาชิกในกลุ่มจะช่วยกันค้นหาคำตอบ โดยแต่ละคนเขียนตอบลงในกระดาษคำตอบ จากนั้นครูก็จะถามคำถามใหม่ให้แต่ละคนในกลุ่มค้นหาคำตอบ ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนหมดทุกคำถามที่ครูเตรียมไว้แล้ว จากนั้นครูก็จะให้แต่ละกลุ่มทบทวนสิ่งที่ตอบในทุกคำถามอีกครั้งหนึ่งโดยให้แต่ละคนในกลุ่มนำคำตอบที่ตนตอบไว้นั้นมาดูร่วมกันกับเพื่อน ๆ ในกลุ่มแล้วพิจารณาว่าคำตอบควรเป็นเช่นไรจึงจะถูกต้องสมบูรณ์ จะนำคำตอบของเพื่อน ๆ ที่คิดว่าต่างก็ตอบถูกต้องนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันเพื่อให้เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นได้อย่างไร โดยเรียบเรียงเข้าเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันมิใช่ นำคำตอบของแต่ละคนมาเขียนต่อ ๆ กันเป็นข้อ ๆ แต่จะประมวลเป็นความคิดรวบยอด (concept) ของคำตอบข้อนั้นได้อย่างไร จากนั้นก็ให้สมาชิกทุกคนช่วยกันเขียนเรียบเรียงเป็นใจความสมบูรณ์ก่อนส่งครู นี่ก็เป็นตัวอย่างการนำ Giraffiti Model มาใช้ในอีกลักษณะหนึ่งได้

การให้ผู้เรียนช่วยกันเขียนด้วยลายมือของแต่ละคน เป็นวิธีการเด่นของ Giraffiti Model ที่ต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนร่วมกัน ดูแลกันและกันเพราะการที่ผู้เรียนจะเขียนอะไรลงไปอย่างน้อยเขาก็จะต้องหยุดอ่านสิ่งที่เพื่อนได้เขียนไว้ก่อนหน้าเห็นว่าเพื่อนเขียนอย่างไรและเขาควรจะเขียนต่อไปอย่างไร ทำให้ผู้เรียนได้รับรู้กับงานทุกอย่างของกลุ่ม อีกประการหนึ่งว่าการเรียนแบบร่วมมือนิยมนำมาใช้ คือการให้ผู้เรียนได้ลงนามให้ความเห็นชอบและรับรู้กับงานกลุ่ม นี่ก็เป็นวิธีการง่าย ๆ ที่สามารถฝึกความเป็นประชาธิปไตยให้กับผู้เรียน ได้เป็นการให้ผู้เรียนรู้จักการยอมรับกติกากลุ่ม การร่วมกันทำงานและร่วมกันรับผิดชอบต่อสิ่งที่ได้ร่วมกันทำนั้นโดยไม่มากกล่าวโทษกันและกันในภายหลังทั้งยังฝึกให้ผู้เรียนรู้จักการแสดงความคิดเห็น รับฟังกันและกัน ฝึกการพูดจาสื่อสารที่จะให้เพื่อน ๆ ยอมรับในความคิดเห็นของตนและตนยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อน หากมีสิ่งใดในงานนั้นที่ตนยังไม่เห็นด้วยก็ควรจะได้พูดชี้แจงให้เพื่อนได้เห็นมาพิจารณาความคิดเห็นของตนบ้าง ไม่เช่นนั้นหากความคิดเห็นยังไม่ยุติก็ยังไม่ควรที่จะลงนามให้ความเห็นชอบในงานชิ้นนั้น นี่เป็นลักษณะสำคัญของผู้ที่จะเติบโตไปสู่โลกของการทำงานร่วมกับผู้อื่นในสังคมและในอนาคต

### การเรียนรู้แบบร่วมมือกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Johnson and Johnson (1989: 235–237) กล่าวว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือใช้ได้เป็นอย่างดีกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนคิดทางคณิตศาสตร์และเข้าใจการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติและกระบวนการและสามารถที่จะประยุกต์ใช้ความรู้อย่างคล่องแคล่วและมีความหมายด้วยเหตุผลดังนี้

1. มโนคติและทักษะทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนได้ดีในกระบวนการที่เป็นพลวัต (dynamic process) ที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมอย่างแข็งขัน การเรียนคณิตศาสตร์ควรเป็นลักษณะที่ผู้เรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมมากกว่าที่จะเป็นเพียงผู้คอยรับความรู้ การสอนคณิตศาสตร์โดยปกติอยู่บนพื้นฐานที่ว่าผู้เรียนเป็นผู้คอยดูดซับข้อมูลความรู้จากการฝึกซ้ำและจากการให้แรงเสริม การมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแข็งขันเป็นการท้าทายทางสมองสำหรับผู้เรียนทุกคนและความอยากรู้อยากเห็นจะช่วยกระตุ้นให้มีการอภิปรายกับคนอื่น
2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการอาสาซึ่งกันและกัน (interpersonal enterprise) การพูดผ่านปัญหาทางคณิตศาสตร์กับเพื่อนช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างชัดเจนว่าจะแก้ปัญหาให้ถูกต้องได้อย่างไร การอธิบายยุทธวิธีการแก้ปัญหา ให้เหตุผลและวิเคราะห์ปัญหากับเพื่อนจะทำให้เกิดการหยั่งรู้ มีวิธีการให้เหตุผลระดับสูงและเกิดการเรียนรู้ระดับสูง ในกลุ่มย่อยผู้เรียนมีความสะดวกในการอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นมากกว่าการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้น
3. การเรียนเป็นกลุ่มมีโอกาสในการสร้างความร่วมมือในการสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ในโครงสร้างของการแข่งขันและการเรียนรายบุคคล ผู้เรียนไม่มีการสื่อสารแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันจะทำให้ผู้เรียนหลีกเลี่ยงการแลกเปลี่ยน การวิเคราะห์ปัญหาและเลือกยุทธวิธีร่วมกับคนอื่นในการสื่อสารแลกเปลี่ยนข้อมูลก็จะเป็นไปแบบไม่เต็มใจหรือให้ข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์
4. การเรียนรู้แบบร่วมมือส่งเสริมความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าการแข่งขันและการเรียนแบบรายบุคคล การเรียนรู้แบบร่วมมือส่งเสริมการค้นพบ การเลือกใช้ยุทธวิธีการให้เหตุผลที่มีประสิทธิภาพ การสร้างแนวคิดใหม่ การถ่ายโยงยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์และข้อเท็จจริงกับปัญหาย่อย ๆ ไปสู่รายบุคคล (นั่นคือถ่ายโยงจากกลุ่มไปสู่รายบุคคล)

5. การทำงานโดยร่วมมือกันจะทำให้ผู้เรียนเพิ่มความมั่นใจในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเองเป็นการสนับสนุนให้เกิดความพยายามในการเรียนรู้โน้มนำ กระบวนการและยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ผู้เรียนที่ทำงานร่วมกันในกลุ่มมีแนวโน้มที่จะชอบและเห็นคุณค่าของแต่ละคนและเห็นความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของคนอื่น มีความสัมพันธ์กันทางบวกระหว่างเพื่อน เกิดการเรียนรู้ในระดับสูง ตระหนักในคุณค่าของตนเอง เกิดการยอมรับความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา

6. การเลือกรายวิชาเรียนและการเลือกอาชีพ เพื่อนมีอิทธิพลสูงต่อผู้เรียน หากมีผู้เรียนบางคนในชั้นเลือกวิชาเรียนไม่เหมาะสมกับตัวเอง การช่วยเหลือให้เขาได้พัฒนาจะเกิดขึ้นในสถานการณ์การเรียนแบบร่วมมือ ผู้เรียนมีแนวโน้มที่ชอบและสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าและได้รับการกระตุ้นอย่างต่อเนื่องในการเรียน ความสำเร็จที่เกิดจากการทำงานร่วมกันของผู้เรียนในการแก้ปัญหาก็จะทำให้เกิดการเรียนรู้โน้มนำและการวิเคราะห์มากขึ้น ซึ่งเป็นความรู้ที่จำเป็นในการอภิปราย อธิบายและวางแผนในการเรียนรู้สถานการณ์ใหม่ เป็นการเพิ่มความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ การสนับสนุนกัน การช่วยเหลือกันและการเชื่อมโยงกันภายในกลุ่มแบบร่วมมือมีผลทางบวกต่อความสัมพันธ์ในกลุ่ม ต่อเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และความมั่นใจในตนเอง

#### การประเมินผลการเรียนแบบร่วมมือ (นาตยา, 2543)

การเรียนแบบร่วมมือยังคงมีการประเมินผลเช่นเดียวกับการเรียนแบบอื่น ๆ ที่ครูปฏิบัติอยู่นั้นคือการประเมินผลระหว่างเรียน การประเมินเมื่อผู้เรียนเรียนจบหน่วยการเรียนนั้นแล้ว และการประเมินเมื่อสิ้นสุดการเรียนในภาคการศึกษา ผู้ประเมินคือทั้งครูและผู้เรียนที่สามารถมีส่วนร่วมในการประเมินได้หลายลักษณะ นอกจากนั้นกิจกรรมการประเมินผลของการเรียนแบบร่วมมือยังพิสูจน์ให้ผู้เรียนได้เห็นถึงคุณค่าความจำเป็นที่เขาต้องร่วมมือกันช่วยเหลือกันเรียนอย่างมีความรับผิดชอบและต้องพึ่งพาอาศัยกันจึงประสบความสำเร็จ ลักษณะของการประเมินผลการเรียนแบบร่วมมือที่ส่งเสริมให้เกิดพฤติกรรมการเรียนแบบร่วมมือกันสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การสุ่มถาม โดยครูเป็นผู้เลือกสุ่มตัวแทนกลุ่มออกมาตอบคำถามของครูและอธิบายผลงานที่กลุ่มร่วมกันทำหรืออธิบายกระบวนการทำงานของกลุ่ม หากจะประเมินโดยให้คะแนนก็จะให้คะแนนเท่ากันทุกคนในกลุ่มนั้น การใช้วิธีการสุ่มถามจะทำให้ผู้เรียนตื่นตัวเตรียมพร้อมและให้ความสนใจดูแลกันและกัน ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของเพื่อน ๆ ในกลุ่มให้ตรงกันเพราะไม่ทราบว่าจะเลือกใครในกลุ่มเป็นผู้ตอบ

2. การประเมินจากผลงาน ในกรณีที่กิจกรรมการเรียนรู้ให้สมาชิกทุกคนในกลุ่ม ร่วมกันทำผลงานขึ้นมาในลักษณะใดลักษณะหนึ่งและต้องการให้มีรายงานหรือผลงานเป็นงาน ของกลุ่มเพียงชิ้นเดียว หากครูไม่ต้องการใช้วิธีการประเมินผลแบบวิธีแรกด้วยการสุ่มถาม ครูอาจ นำผลงานนั้นมาประเมินให้คะแนนได้เลย วิธีนี้ดูแล้วคล้าย ๆ กับที่ครูปฏิบัติกันอยู่เป็นปกติแต่ใน กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือจะมีรายละเอียดที่แตกต่างกันออกไป นั่นคือในการเรียนแบบ ร่วมมือจะให้ความระมัดระวังมากกว่าผลงานหรือรายงานนั้นเกิดจากการร่วมกันทำจริง ๆ ทุกคน รับรู้และเห็นชอบในงานนั้น ดังนั้นจึงมีการให้ผู้เรียนต้องเซ็นชื่อให้ความเห็นชอบกับงานนั้นก่อน ส่งครู โดยการให้ผู้เรียนเซ็นชื่อกำกับเพื่อเป็นการป้องกันไม่ให้นักเรียนบางคนในกลุ่มมาร้องเรียน อุทธรณ์ต่อครูในภายหลังได้ เมื่อทราบว่าคะแนนกลุ่มไม่ค่อยดี บางทีครูอาจพบกรณีที่ผู้เรียนบาง คนมาพบครูและชี้แจงทำนองแก้ตัวว่าตัวของเขาไม่รับรู้และไม่เห็นด้วยกับงานกลุ่มที่ส่งมาอย่าง นั้นเลย การใช้เทคนิคเช่นนี้จะทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ว่าเขาจะต้องยอมรับและเคารพในความเห็น ของกลุ่มที่ตกลงร่วมกันไปแล้ว เป็นการฝึกทักษะและกระบวนการประชาธิปไตยที่เขาต้องประสบ ในการดำเนินชีวิตจริงในสังคมด้วยและถ้าเขาไม่เห็นด้วยอย่างไร เขาจะต้องรู้จักที่จะโน้มน้าวชี้แจง เหตุผลให้เพื่อน ๆ ในกลุ่มมาใส่ใจในความคิดเห็นของเขาทำให้ผู้เรียนรู้จักฟังความคิดเห็นของ ทุกคนในกลุ่ม ทั้งยังฝึกให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่รู้จักรับผิดชอบ มีส่วนร่วมและรับรู้ในงานทุกขั้นตอนของ กลุ่มด้วย

ในการประเมินจากผลงานของผู้เรียน บางครั้งยังสามารถสุ่มจากงานที่ผู้เรียนแต่ละคน ทำกันในกลุ่มได้ด้วยโดยให้เป็นคะแนนกลุ่มเท่ากันทุกคน กล่าวคือครูสามารถหยิบสุ่มงานหรือ แบบฝึกหัดของผู้เรียนคนใดคนหนึ่งมาประเมินเป็นคะแนนกลุ่มหรือคะแนนของคู่นั้นได้เลย เพราะถือว่าผู้เรียนได้ช่วยกันดูแลจนเรียบร้อยแล้ว

3. การทดสอบ การประเมินผลเพื่อให้ได้คะแนนกลุ่มยังสามารถใช้การทดสอบได้ด้วย โดยการทดสอบย่อย (quiz) หรือทดสอบความรู้ สาระจากสิ่งที่ได้เรียนมาแล้วนำคะแนนของ สมาชิกทุกคนที่ได้มารวมกันเป็นคะแนนกลุ่มว่าแต่ละกลุ่มได้คะแนนรวมกันมากน้อยเท่าใดใน กรณีนี้ การเรียนแบบร่วมมือนิยมให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการออกข้อสอบข้อคำถามด้วย วิธีนี้มี คุณค่ามากในแง่ที่ทำให้ครูรับทราบว่าผู้เรียนมีความเข้าใจในเรื่องที่เรียนเป็นอย่างไรและสามารถ จับประเด็นในเรื่องที่เรียนได้ถูกต้องมากน้อยแค่ไหน จุดสนใจของเขาในเรื่องที่เรียนอยู่ตรงไหน เหล่านี้ครูจะพิจารณาได้จากคำถามที่ผู้เรียนตั้งขึ้นทั้งยังทำให้มีความมั่นใจว่าข้อทดสอบเหล่านั้น สอดคล้องกับสิ่งที่เขาได้เรียนรู้ด้วย กรณีที่ครูออกข้อสอบในสิ่งที่ผู้เรียนไม่ได้เรียนก็จะไม่เกิดขึ้น ทั้งยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ประสบความสำเร็จจากการเรียนเป็นกลุ่มเพราะเขามีโอกาสทำ ข้อทดสอบเหล่านั้นได้ การเรียนแบบร่วมมือจะให้ความใส่ใจในเรื่องนี้มากกว่าการประเมินผลกลุ่ม จะต้องให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ที่ดีจากการทำงานกลุ่มให้เขาได้เรียนรู้ว่าการร่วมมือช่วยเหลือ

กันนำมาซึ่งความสำเร็จมิใช่การทำงานกลุ่มเป็นการลงโทษหรือทำให้เขาต้องเสียประโยชน์อย่างใดอย่างหนึ่งการประเมินผลให้ได้คะแนนกลุ่มในวิธีการนี้สามารถนำมาใช้ได้กับทุกเทคนิคของกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

ส่วนในกรณีของการทดสอบผู้เรียนเป็นรายบุคคลว่าเขาได้เรียนรู้อะไรบ้างบรรลุตามจุดประสงค์ที่ครูกำหนดไว้หรือไม่ ครูมักทำหลังจากที่เรียนจบหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ แล้วหรือในภาวะปัจจุบันที่เน้นการเรียนรู้ที่ให้ผู้เรียนเรียนรู้จากการปฏิบัติจริงไม่ใช่จดจำความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริงดังในอดีต ข้อทดสอบที่จะประเมินผู้เรียนเป็นรายบุคคลก็ควรมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงเสียใหม่โดยเน้นมาทดสอบความรู้ในระดับที่เป็นความสามารถของผู้เรียนในการปฏิบัติงานจริงหรือเน้นความสามารถของผู้เรียนในการนำความรู้มาใช้ให้มากขึ้น การประเมินผลในส่วนนี้ผู้เรียนจะได้คะแนนเป็นของตนเอง

4. การใช้แบบสอบถาม วิธีนี้มุ่งที่จะประเมินความคิดเห็นของผู้เรียนว่าเขามีความรู้สึกอย่างไรต่อการทำงานกลุ่ม เขาได้เรียนรู้การทำงานกลุ่มอย่างมีประสิทธิภาพว่าเป็นอย่างไร การใช้แบบสอบถามเกี่ยวกับการทำงานกลุ่ม ครูอาจสร้างขึ้นเองหรือให้ผู้เรียนร่วมกันสร้างก็ได้ ในการประเมินอาจให้ผู้เรียนประเมินตนเอง ประเมินกลุ่มและครูประเมินผู้เรียนด้วย

จากที่กล่าวทั้งหมดจะเห็นว่าในการประเมินผลผู้เรียนในการเรียนแบบร่วมมือนั้นจะมีคะแนนเกิดขึ้น 2 ส่วน คือคะแนนของผู้เรียนแต่ละคนและคะแนนกลุ่ม ครูจะอย่างไรกับคะแนนทั้งสองส่วนนี้ เนื่องจากการเรียนแบบร่วมมือเป็นการเรียนที่ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้มาร่วมมือช่วยเหลือกันนำความสามารถของตนที่มีกันคนละด้านมาทำให้งานกลุ่มประสบความสำเร็จ ในการประเมินผลครูจะต้องระมัดระวังมิให้เด็กที่เรียนอ่อนเกิดความรู้สึกว่าเขาได้รับการดูถูกดูแคลนจากเพื่อนที่เรียนเก่งกว่าและต้องไม่让孩子ที่เรียนเก่งเกิดความรู้สึกที่เพื่อนที่เรียนอ่อนไปทำให้เขาเสียประโยชน์ ในสภาพการเรียนบางครั้งจึงไม่จำเป็นที่เด็กที่มีความสามารถต่างกันจะต้องศึกษาจากสื่อชนิดเดียวกันเขาอาจศึกษาจากสื่อต่างชนิดกันตามความสามารถของเขา รวมทั้งการประเมินก็ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีการและเกณฑ์เดียวกันก็ได้ การสอนด้วยการเรียนแบบร่วมมือควรต้องนำการประเมินแบบอิงเกณฑ์มาใช้มากกว่าอิงกลุ่ม เพราะจะช่วยส่งเสริมการร่วมมือช่วยเหลือกันในหมู่เด็กผู้เรียนได้ดีกว่า Johnson and Johnson (อ้างถึงใน นาดตา, 2543) ได้เสนอวิธีการแสดงผลคะแนนของผู้เรียนให้ปรากฏเป็น 2 ชุด ชุดหนึ่งเป็นคะแนนที่เขาสอบเองเป็นรายบุคคลและอีกชุดหนึ่งเป็นคะแนนที่มาจากเขาได้ร่วมมือกันทำงานในกลุ่มจนประสบความสำเร็จโดยครูอาจกำหนดคะแนนจากการใช้เกณฑ์ ดังนี้

1. นำคะแนนสอบของสมาชิกแต่ละคนมารวมกันแล้วหาค่าเฉลี่ยเป็นคะแนนกลุ่ม
2. การนำคะแนนสอบของผู้เรียนในกลุ่มแต่ละคนรวมกับคะแนนกลุ่มที่ได้รับเท่ากันซึ่งมักให้คะแนนกลุ่มเท่ากัน ในกรณีที่ครูสุ่มให้สมาชิกคนใดคนหนึ่งออกมานำเสนอผลงานกลุ่มและอธิบายวิธีการทำงานของกลุ่ม จากนั้นนำคะแนนทั้ง 2 ส่วนมารวมกันเป็นคะแนนของแต่ละคน และเมื่อนำคะแนนของทุกคนรวมกันก็จะเป็นคะแนนกลุ่ม
3. อีกวิธีหนึ่ง โดยการกำหนดช่วงคะแนนที่จะให้โบนัสไว้แล้วพิจารณาว่าคะแนนสอบของแต่ละคนในกลุ่มอยู่ในช่วงใดของเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสก็เพิ่มคะแนนโบนัสให้ไปจะเป็นคะแนนที่ได้ของแต่ละคน เมื่อนำมารวมกันก็เป็นคะแนนกลุ่มโดยการใช้วิธีนี้ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่าสมาชิกทุกคนจะต้องทำคะแนนสอบถึงเกณฑ์ที่จะได้คะแนนโบนัส หากมีสมาชิกคนใดคนหนึ่งคะแนนไม่ถึงเกณฑ์สมาชิกคนอื่น ๆ ก็จะไม่ได้รับคะแนนโบนัสไปด้วย แม้ว่าคะแนนของตนจะถึงเกณฑ์ก็ตาม
4. การให้คะแนนโบนัสอีกแบบหนึ่งเป็นการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสไว้เช่นกันแต่มีช่วงคะแนนกว้างขึ้น จากนั้นพิจารณาว่าคะแนนสอบของสมาชิกกลุ่มแต่ละคนเป็นเท่าไร คะแนนโบนัสที่แต่ละคนจะได้รับนั้นดูจากผู้ที่ได้คะแนนต่ำสุดในกลุ่มนั้นเป็นหลัก
5. การให้คะแนนโบนัสอีกแบบหนึ่งเป็นการเปรียบเทียบคะแนนของผู้เรียนระหว่างคะแนนครั้งก่อนกับคะแนนที่สอบได้ในครั้งนี้ว่าสูงหรือต่ำกว่าเดิมอยู่เท่าไรก็ให้คะแนนโบนัสไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ถ้าหากเป็นการสอบครั้งแรก ไม่มีคะแนนครั้งก่อนครูอาจกำหนดเป็นคะแนนฐาน ให้ผู้เรียนทุกคนได้เท่ากันแล้วให้เขาเปรียบเทียบว่าในการสอบครั้งนี้เขาสูงหรือต่ำกว่าคะแนนฐานอยู่เท่าไร การกำหนดคะแนนฐานเป็นเท่าไรขึ้นกับดุลยพินิจของครูที่จะพิจารณาโดยดูจากระดับความสามารถของผู้เรียนในชั้น
6. อีกวิธีหนึ่งซึ่งคล้ายคลึงกับแบบข้างต้นเป็นการเปรียบเทียบคะแนนครั้งก่อนหรือคะแนนฐานกับคะแนนปัจจุบันเช่นกัน แต่อาจกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนโบนัสสูงสุดไม่เกิน 10 คะแนน เป็นต้น

ไม่ว่าครูจะเลือกใช้การประเมินผลและการให้โบนัสแบบใด ครูจะต้องแจ้งให้ผู้เรียนทราบล่วงหน้าก่อนเสมอ เพื่อผู้เรียนจะได้ปฏิบัติตนได้ถูกต้องและสอดคล้องกับการประเมินผลของครู จะเห็นว่าวิธีการของ Johnson and Johnson ที่เสนอไว้ที่นี่เปรียบเหมือนเป็นการให้ค่าตอบแทนหรือโบนัสแก่ผู้เรียนจากการที่เขาได้ร่วมมือช่วยเหลือกันเรียนเป็นลักษณะการเสริมแรงวิธีหนึ่ง การเรียนแบบร่วมมือยังมีวิธีการเสริมแรงในอีกลักษณะหนึ่งเพื่อกระตุ้นและส่งเสริมให้ผู้เรียนรักที่จะทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม นั่นคือ การให้รางวัลอันเป็นผลมาจากความสำเร็จของกลุ่มหลังจากที่ได้คะแนนรวมของแต่ละกลุ่มแล้ว เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับในระหว่างแต่ละกลุ่มก็จะพบว่าบางกลุ่มทำคะแนนกลุ่มได้มากน้อยต่างกัน การเรียนแบบร่วมมือจึงจูงใจด้วยการให้รางวัลแก่กลุ่มที่มีคะแนนความสำเร็จของกลุ่มมาก เช่น อาจเลือกมา 3 อันดับแล้วมอบรางวัล การให้รางวัลในที่นี้มีจุดประสงค์ที่จะยกย่องความสำเร็จจากการทำงานกลุ่มของผู้เรียนให้ปรากฏแก่ผู้อื่นและทำให้ผู้เรียนมีความภาคภูมิใจ ผู้เรียนทุกคนล้วนมีโอกาที่จะได้รับความสำเร็จและได้รับการยกย่องในลักษณะนี้เท่า ๆ กันหมุนเวียนกันไปได้ รางวัลในที่นี้ไม่จำเป็นต้องเป็นวัตถุสิ่งของที่มีราคาแพงวดอะไรหรือรางวัลอาจเป็นลักษณะอื่น เช่น มอบใบประกาศเกียรติคุณ เกียรติบัตร ลงข่าวในหนังสือพิมพ์หรือวารสารของโรงเรียนของสถานศึกษา ติดบอร์ดประกาศหรือให้สิทธิพิเศษบางอย่าง เช่น ให้ยืมหนังสือจากห้องสมุดหรือยืมวัสดุอุปกรณ์ไปใช้ที่บ้านได้นานกว่าเวลาที่กำหนดไว้ตามปกติ เป็นต้นอย่างไรก็ตาม ครูควรระมัดระวังว่ารางวัลควรอยู่ในรูปลักษณะของการยกย่องเพื่อเสริมแรงจูงใจและเป็นไปในทางสร้างสรรค์ต่อผู้เรียนอย่าปฏิบัติในลักษณะที่จะทำให้ผู้เรียนยึดติดกับรางวัลมากเกินไป รางวัลเป็นเพียงแรงจูงใจภายนอก เหนือสิ่งอื่นใดรางวัลควรอยู่ในรูปของแรงจูงใจภายในให้ผู้เรียนเห็นคุณค่าที่เขาได้พิสูจน์ได้สัมผัสด้วยตัวเองว่าการทำงานกลุ่มนั้นมีคุณค่าอย่างแท้จริงอย่างไร

ดังนั้น จากที่กล่าวมาทั้งหมด พบว่าการประเมินผลในการเรียนแบบร่วมมือนั้นสามารถทำได้หลายวิธีทั้งการสุ่มถาม การประเมินจากผลงานกลุ่ม การทดสอบ การสอบถามและการสังเกต พร้อมทั้งมีการให้คะแนนโบนัสและรางวัลกลุ่มเพื่อสร้างแรงจูงใจและเป็นการยกย่องชมเชยผู้เรียน

### 3. การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (e-Learning)

#### ความหมายของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

สำหรับความหมายของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์นั้นได้มีผู้ให้ไว้ในหลายลักษณะ ดังนี้

Krutus (2000 cited in NECTEC COURSEWARE, 2004) กล่าวว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เป็นรูปแบบของเนื้อหาสาระที่สร้างเป็นบทเรียนสำเร็จรูปที่อาจใช้ซีดีรอม เป็นสื่อกลางในการส่งผ่านหรือใช้การส่งผ่านเครือข่ายภายในหรืออินเทอร์เน็ตทั้งนี้อาจจะอยู่ในรูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยการฝึกอบรม (Computer Based Training: CBT) และการใช้เว็บเพื่อการฝึกอบรม (Web Based Training: WBT) หรือการเรียนการสอนทางไกลผ่านดาวเทียมก็ได้

Campbell (1999 cited in NECTEC COURSEWARE, 2004) ได้ให้ความหมายว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ เป็นการใช้เทคโนโลยีที่มีอยู่ในเครือข่ายอินเทอร์เน็ต สร้างการศึกษาที่มีปฏิสัมพันธ์และการศึกษาที่มีคุณภาพสูงที่ผู้คนทั่วโลกมีความสะดวกและสามารถเข้าถึงได้อย่างรวดเร็วโดยไม่จำกัดสถานที่และเวลาเป็นการเปิดประตูการศึกษาตลอดชีวิตให้กับประชากร

สุรสิทธิ์ (2544 อ้างถึงใน NSTDA Online Learning, 2001) ได้ให้คำจำกัดความของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ว่า การเรียนรู้แบบออนไลน์หรือ e-Learning การศึกษา เรียนรู้ผ่านเครือข่ายคอมพิวเตอร์อินเทอร์เน็ต (internet) หรืออินทราเน็ต (intranet) เป็นการเรียนรู้ด้วยตนเอง ผู้เรียนจะได้เรียนตามความสามารถและความสนใจของตนโดยเนื้อหาของบทเรียนซึ่งประกอบด้วย ข้อความ รูปภาพ เสียง วิดีโอและมัลติมีเดียอื่น ๆ จะถูกส่งไปยังผู้เรียนผ่าน Web Browser โดยผู้เรียน ผู้สอน และเพื่อนร่วมชั้นเรียนทุกคน สามารถติดต่อ ปรึกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันได้เช่นเดียวกับการเรียนในชั้นเรียนปกติ โดยอาศัยเครื่องมือการติดต่อ สื่อสารที่ทันสมัย (e-mail, webboard, chat room ฯลฯ) จึงเป็นการเรียนสำหรับทุกคนเรียนได้ ทุกเวลาและทุกสถานที่ (learn for all: anyone, anywhere and anytime)

ครรชิต (2004) สรุปว่า การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ คือระบบการเรียนการสอนผ่านระบบอินเทอร์เน็ตที่มีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

1. เนื้อหาบทเรียนที่จัดทำขึ้นเพื่อนำเสนอเป็นตอน ๆ
2. แบบฝึกหัดให้ฝึกปฏิบัติหรือแบบทดสอบเพื่อวัดความเข้าใจในเนื้อหาและคอมพิวเตอร์สามารถโต้ตอบได้ทันที
3. ระบบโต้ตอบระหว่างผู้เรียนกับอาจารย์เจ้าของวิชารวมทั้งระบบแจ้งข่าวแก่ผู้เรียนทั้งกลุ่ม เช่น ระบบไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือระบบ chat
4. ระบบอภิปรายระหว่างผู้เรียนด้วยกันเองหรืออาจจะร่วมกับอาจารย์ เช่น ระบบ webboard หรือ forum

อีกนัยหนึ่งการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เป็นระบบการเรียนการสอนที่มีลักษณะเหมือนห้องเรียนเสมือน (virtual classroom) นั่นคือผู้ที่เรียนเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ในระบบนี้จะมีความรู้สึกเหมือนกับได้เรียนร่วมกับเพื่อนในชั้น เป็นแต่เพียงไม่ได้เรียนรวมกันและไม่ได้เรียนพร้อมกันเท่านั้น อย่างไรก็ตามการเรียนแบบ e-Learning โดยทั่วไปนั้นจะต้องเข้าสู่ห้องเรียนเสมือนในช่วงเวลาที่กำหนดเพราะอาจารย์ผู้สอนอาจจะจัดทำและส่งบทเรียนเข้าสู่ระบบที่ละบทเรียนเท่านั้นไม่ได้นำบทเรียนทั้งหมดไว้ในระบบเหมือนอย่างเวลาเราไปซื้อโปรแกรมบทเรียนในแผ่นซีดีมาใช้

ดังนั้น การเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์จึงหมายถึงระบบการเรียนการสอนยุคใหม่ที่ถูกสร้างขึ้นมาให้สามารถรับและส่งสารด้วยระบบดิจิทัลและมีระบบการสนับสนุนการเรียนการสอนยุคใหม่รองรับ เช่น ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ (Learning Content Management System: LCMS) ซึ่งจัดทำโดยมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ที่เรียกว่า M@xLearn (<http://course.ku.ac.th/>)

### ลักษณะสำคัญของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (NECTEC COURSEWARE, 2004)

ลักษณะสำคัญของการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์มีดังนี้

1) **Anywhere, Anytime and Anybody** คือผู้เรียนจะเป็นใครก็ได้ มาจากที่ใดก็ได้ และเรียนเวลาใดก็ได้ตามความต้องการของผู้เรียนเพราะหน่วยงานได้เปิดเว็บไซต์ให้บริการตลอด 24 ชั่วโมงรวมทั้งบริการจัดทำเป็นชุด CD เพื่อใช้ในลักษณะ Offline ให้กับโรงเรียนหรือสถานศึกษาที่สนใจแต่ยังไม่พร้อมในระบบอินเทอร์เน็ต

2) **Multimedia** สื่อที่นำเสนอในเว็บประกอบด้วยข้อความ ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว และเสียงตลอดจนวีดิทัศน์อันจะช่วยกระตุ้นการเรียนรู้ของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

3) **Non-Linear** ผู้เรียนสามารถเลือกเรียนเนื้อหาที่นำเสนอได้ตามความต้องการ

4) **Interactive** ด้วยความสามารถของเอกสารเว็บที่มีจุดเชื่อมโยง (links) ย่อมทำให้เนื้อหา มีลักษณะโต้ตอบกับผู้ใช้โดยอัตโนมัติอยู่แล้วและผู้เรียนยังมีส่วนติดต่อกับผู้สอนผ่านระบบเมล ICQ Microsoft Messenger และสมุดเยี่ยมทำให้ผู้เรียนกับวิทยากรสามารถติดต่อกันได้อย่างรวดเร็ว

### การเรียนการสอนผ่านเครือข่ายหรือผ่านเว็บ (NECTEC COURSEWARE, 2004)

การจัดการเรียนการสอนผ่านเครือข่ายมีหลักการพื้นฐาน 5 ประการ ซึ่ง Angels ได้เสนอไว้โดยสอดคล้องกับความมุ่งหมายของการจัดการศึกษาตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ อย่างเห็นได้ชัด ได้แก่

1) การส่งเสริมให้ผู้เรียนและผู้สอนสามารถติดต่อสื่อสารกันได้ตลอดเวลา เป็นส่วนสำคัญที่ทำให้เกิดการกระตือรือร้นต่อการเรียนการสอน

2) การส่งเสริมให้เกิดความร่วมมือระหว่างผู้เรียนและกลุ่มผู้เรียน ซึ่งจะช่วยให้เกิดความรู้ความเข้าใจได้ดีกว่าการเรียนและทำงานเพียงลำพังคนเดียว เกิดการพัฒนาการแก้ไขปัญห และการยอมรับความคิดเห็นของคนอื่น

- 3) การส่งเสริมให้รู้จักการแสวงหาความรู้ด้วยตนเองเพื่อตนเอง ตลอดจนการหาคำตอบต่างๆ โดยการแนะนำแหล่งความรู้ของผู้สอนเป็นการสร้างความกระตือรือร้นในการใฝ่หาความรู้ให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน
- 4) การให้ผลการเรียนย้อนกลับทันทีแก่ผู้เรียน ช่วยให้เกิดการปรับแนวทาง วิธีการ และพฤติกรรมได้ถูกต้องได้
- 5) การจัดการเรียนการสอนที่ไม่มีข้อจำกัด โดยเฉพาะด้านเวลาและสถานที่เป็นการขยายโอกาสทางการศึกษาสำหรับบุคคลที่ใฝ่หาความรู้

ปัจจุบันการจัดการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ที่สอดคล้องกับหลักการพื้นฐานเหล่านี้ มีให้เห็นในรูปของเว็บไซต์หน่วยงาน สถานศึกษาและองค์กรต่างๆ เป็นจำนวนมาก การเรียนการสอนผ่านเว็บมีลักษณะโดดเด่น โดยผู้เรียนสามารถเรียนเวลาใดก็ได้ สถานที่ใดก็ได้ที่มีความพร้อมด้านการเชื่อมต่อระบบสามารถใช้เครื่องมือต่างๆ เช่น e-mail, chatroom, webboard หรือ newsgroup สื่อสารกับเพื่อนๆ ผู้สอนหรือบุคคลอื่นๆ ที่สนใจและผู้เชี่ยวชาญต่างๆ แต่ผู้เรียนไม่ต้องเข้าชั้นเรียนหรือเข้าโรงเรียนเพราะถือว่าเว็บไซต์เป็นเสมือนห้องเรียนหรือโรงเรียน หนังสือและเนื้อหาการเรียนถูกแทนที่ด้วยเนื้อหาดิจิทัลลักษณะต่างๆ ทั้งข้อความ ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว เสียงและวีดิทัศน์ตามแต่ลักษณะของเว็บไซต์ ที่สำคัญที่สุดคือ ผู้เรียนที่ไม่กล้าแสดงออกในห้องเรียนปกติ จะกล้าแสดงออกและแสดงความคิดเห็นได้มากกว่าเดิม ทั้งนี้มีผู้วิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีการเรียนรู้และรูปแบบการเรียนการสอนที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนผ่านเว็บไว้ดังนี้

**การเรียนรู้โดยการค้นพบ** การเรียนการสอนผ่านเว็บนับได้ว่าเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีการค้นพบของ Bruner เนื่องจากผู้เรียนจะต้องศึกษาและค้นคว้าด้วยตนเองจะต้องสร้างปฏิสัมพันธ์กับผู้สอน ผู้เรียนร่วม ผู้สนใจและบุคคลอื่นๆ ในระบบได้ทั่วโลก

**ทฤษฎีการเรียนรู้ด้วยการนำตนเอง** การเรียนการสอนผ่านเว็บนั้นผู้เรียนจะต้องรับผิดชอบตนเอง นำตัวเองและศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

**ทฤษฎีการสอนรายบุคคล** เนื่องจากผู้เรียนจะต้องศึกษาเรียนรู้ด้วยตนเองมีอิสระเลือกเนื้อหา เวลาและกิจกรรมซึ่งเป็นรูปแบบของผู้เรียนเฉพาะราย

**ทฤษฎีการสอนแบบร่วมมือ (collaborative learning)** เน้นว่าผู้เรียนมีอิสระในการเรียนแต่ด้วยเครื่องมือสื่อสารต่างๆ เช่น e-mail, webboard, chatroom หรือ newsgroup ทำให้ผู้เรียนกับผู้สอน เพื่อนร่วมเรียน ผู้เชี่ยวชาญต่างๆ มีส่วนร่วมกันและกันในการเรียนได้ เช่น ช่วยในการตั้งคำถามชี้แนะแนวทางการหาคำตอบ

**รูปแบบการสอนของกาเย่ (Gagne')** การเรียนการสอนผ่านเว็บนับได้ว่ามีรูปแบบที่สอดคล้องกับรูปแบบการสอนของกาเย่ ได้แก่

1. สร้างแรงจูงใจให้ผู้เรียนเกิดความสนใจในบทเรียน
2. แจ้งจุดประสงค์ให้ผู้เรียนทราบถึงผลการเรียนเพื่อให้เห็นประโยชน์ในการเรียนและให้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียน
3. กระตุ้นให้ผู้เรียนทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต่อการเชื่อมโยงไปหาความรู้ใหม่
4. เสนอบทเรียนใหม่ด้วยสื่อต่างๆ ที่เหมาะสม
5. ให้แนวทางการเรียนรู้ ผู้เรียนสามารถทำกิจกรรมด้วยตนเอง ผู้สอนแนะนำวิธีทำกิจกรรม แนะนำแหล่งค้นคว้าต่าง ๆ
6. กระตุ้นให้ผู้เรียนลงมือทำแบบฝึกปฏิบัติ
7. ให้ข้อมูลย้อนกลับทำให้ผู้เรียนทราบถึงผลการปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ
8. การประเมินผลการเรียนตามจุดประสงค์
9. ส่งเสริมความแม่นยำ การถ่ายโอนการเรียนรู้โดยการสรุป การย้ำและการทบทวน

ดังนั้นรูปแบบการเรียนการสอนผ่านเว็บจึงมีความยืดหยุ่นสูง ผู้เรียนจะต้องมีความรับผิดชอบ มีความกระตือรือร้นในการเรียนมากกว่าปกติ มีความตั้งใจใฝ่หาความรู้ใหม่ๆ ตรงกับระบบการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง โดยมีผู้สอนเป็นเพียงผู้แนะนำ ที่ปรึกษาและแนะนำแหล่งความรู้ใหม่ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเรียน ผู้เรียนสามารถทราบผลย้อนกลับของการเรียนรู้ ความก้าวหน้าได้จาก e-mail การประเมินผลควรแบ่งเป็นการประเมินผลย่อยโดยใช้เว็บไซต์

เป็นที่สอบและการประเมินผลรวมที่ใช้การสอบแบบปกติในห้องเรียนเพื่อเป็นการยืนยันว่าผู้เรียนเรียนจริงและทำข้อสอบจริงได้หรือไม่อย่างไร

### **ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ (Learning Content Management System: LCMS) M@xLearn** (กองบริการการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2547)

M@xLearn เป็น LCMS หรือระบบที่จัดการทั้งการเรียนการสอนและการจัดสื่อการสอน ที่ได้ถูกพัฒนาและนำมาใช้สนับสนุนการเรียนการสอนในคณะวิศวกรรมศาสตร์ก่อนเป็นลำดับแรกเมื่อปี พ.ศ. 2543 และได้ขยายการบริการสู่ระดับมหาวิทยาลัยในเวลาต่อมา ดังนั้นเพื่อความสะดวก รวดเร็วกว่าการเรียกชื่อเดิมว่า “ระบบสนับสนุนการเรียนการสอนผ่านเว็บแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์” จึงได้ให้ชื่อระบบนี้ใหม่ว่า **M@xLearn (Maximum Learning)** จะเห็นว่า LCMS จะเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญขององค์ประกอบของการสร้างระบบการเรียนการสอนในรูปแบบของ e-Learning โดยที่ LCMS จะเป็นระบบที่ควบคุมองค์ประกอบย่อยอื่น ๆ เช่น ระบบการจัดการสอน ระบบจัดการสื่อการสอน ระบบการจัดการผู้สอนและผู้เรียนให้ทำงานร่วมกันได้และเกิดประสิทธิภาพสูงสุด

### **มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์กับ e-Learning และ M@xLearn**

เพื่อตอบสนองนโยบายการก้าวสู่ e-University ของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ การพัฒนาการด้านหนึ่งที่อยู่บนแผนพัฒนาและมหาวิทยาลัยได้ให้ความสำคัญมากคือการนำ e-Learning เข้ามาพัฒนาการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยได้นำ e-Learning เข้ามาใช้ในหลายๆ ด้านอย่างเต็มรูปแบบโดยนำ M@xLearn มาช่วยสนับสนุนการเรียนการสอนในการเรียนการสอนแบบปกติที่มีระบบต่างๆ เช่น แผนการสอนออนไลน์ ปฏิทินกิจกรรมการสอน รับส่งการบ้านผ่านเว็บ แบบทดสอบและแบบประเมินผล ระบบจัดการเนื้อหาการสอน กระดานสนทนา กระดานข่าว และอื่น ๆ อีกมากมายซึ่งระบบเหล่านี้จะช่วยให้การถ่ายทอดแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างผู้สอนและผู้เรียนไม่ถูกจำกัดด้วยเวลาและสถานที่ อีกทั้งระบบนี้ยังช่วยสร้างวัฒนธรรมการเรียนรู้ด้วยตนเองของผู้เรียนอีกด้วย

แนวการนำ e-Learning เข้ามาใช้งานในมหาวิทยาลัย ณ ขณะนี้มีอยู่ 2 ลักษณะคือ

1. **Support System หรือ Blended System** เป็นรูปแบบที่นำมาใช้ในลักษณะที่เป็น การช่วยสนับสนุนหรือผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียนที่มีอยู่แล้ว

2. **Replace System** หรือระบบที่ทดแทนการเรียนการสอนในห้องเรียนทั้งหมดให้ผู้เรียนเรียนผ่านคอมพิวเตอร์ทั้งหมด

ในส่วนของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์จะใช้รูปแบบของ Support System เป็นหลักคือจะนำ e-Learning มาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียนเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการสอนในชั้นเรียนมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อสื่อการสอนและระบบ LCMS ได้พัฒนาให้มีคุณภาพสูงขึ้นจนเพียงพอที่จะทำให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองดีเทียบเท่าหรือดีกว่าการเรียนโดยผ่านการเรียนการสอนในห้องเรียนซึ่งหลักสูตรที่จะเปิดเป็นออนไลน์แบบสมบูรณ์นั้นจะเริ่มต้นในบางรายวิชาที่มีความพร้อมที่สุดก่อนในอนาคตอันใกล้

### มีอะไรใน M@xLearn

นับตั้งแต่ปี พ.ศ. 2543 จวบจนปัจจุบัน M@xLearn 1.0 ได้ให้บริการกับมหาวิทยาลัยมาอย่างต่อเนื่องและในภาคต้นของปีการศึกษา 2547 มหาวิทยาลัยจะได้นำ M@xLearn 2.0 มารองรับการขยายตัวของความต้องการใช้งานของอาจารย์และนิสิตและเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอนมากยิ่งขึ้น ระบบย่อยภายในต่าง ๆ ของ M@xLearn ได้ปรับปรุงและพัฒนาจากที่คณะเดิมมากกว่า 9 ระบบทำให้มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์นำมาใช้งานเพื่อสนับสนุนการเรียนการสอนในชั้นเรียนได้อย่างรวดเร็วและก่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด M@xLearn มีระบบที่ครอบคลุมเกือบทุกส่วนที่เกี่ยวข้องกับการบริหารและจัดการการสอน ซึ่งได้แก่

**M@x Profile:** สำหรับการจัดการบริการงานทะเบียนประวัติบุคคลซึ่งได้แก่ อาจารย์ นิสิตและเจ้าหน้าที่อื่น ๆ จัดโครงสร้างของสถานศึกษา เช่น วิทยาเขต คณะหรือภาควิชา รวมถึงการจัดการหลักสูตรการเรียนการสอน

**M@x Interactive:** เครื่องมือสร้างปฏิสัมพันธ์ต่าง ๆ เพื่อการแลกเปลี่ยนความรู้ เช่น Online Syllabus, Course Calendar, Web board, Chat room, Discussion Board, News Board

**M@x Content:** ระบบการจัดการและนำเสนอเนื้อหาวิชา (content) สามารถรองรับสื่อมัลติมีเดียอิเล็กทรอนิกส์ทุกประเภท เช่น HTML, MS Word, PowerPoint, Flash, 3D VRML, Java Applet, Movie, Sound และอื่น ๆ อีกมากมาย

**M@x Homework:** ระบบการส่งและส่งการบ้านผ่านเว็บพร้อมระบบเก็บคะแนนซึ่งรองรับการส่งและส่งงานแบบอัตโนมัติ รองรับการไฟล์มัลติมีเดียไฟล์ทุกประเภท เช่น ภาพ เสียง ภาพเคลื่อนไหว

**M@x Quiz:** ระบบทดสอบเพื่อวัดผลการเรียนรู้สามารถสร้างแบบทดสอบได้ในหลากหลายรูปแบบ เช่น ปรนัย จับคู่ เติมคำและถูกผิด และตรวจเก็บคะแนนพร้อมด้วยระบบงานผลการทดสอบในรูปแบบตารางและแผนภูมิ

**M@x Grade:** ระบบการรวบรวมคะแนนจาก M@x Homework และ M@x Quiz แบบอัตโนมัติรวมทั้งผู้สอนสามารถใส่คะแนนจากการสอบอื่นๆ เพิ่มเติมได้เอง โดยมีระบบคิดคะแนนแบบอิงกลุ่มหรืออิงเกณฑ์อัตโนมัติ

**M@x Evaluation:** เป็นระบบประเมินหลังจากสิ้นภาคการศึกษาเพื่อนำผลการประเมินของนิสิตแต่ละวิชาสรุปและนำเสนอเพื่อให้ผู้สอนและผู้บริหารได้นำมาใช้ในการปรับปรุงการสอนให้ดียิ่งขึ้นในเทอมต่อไป

**M@x Publication:** ระบบคลังจัดเก็บและเผยแพร่เอกสารงานวิจัย หนังสือ วิทยานิพนธ์ หรือโครงการของอาจารย์และนิสิตพร้อมระบบค้นหา

**M@x DX:** ระบบการแลกเปลี่ยนข้อมูล (Data Exchange) ด้วยเทคโนโลยีของ Web Services จะทำให้ M@xLearn สามารถติดต่อสื่อสารเพื่อแลกเปลี่ยนข้อมูลที่จำเป็นจากระบบสารสนเทศอื่นๆ ที่มีอยู่แล้วในมหาวิทยาลัย เช่น ระบบลงทะเบียนเรียน ระบบ E-mail หรือระบบอื่นๆ

ดังนั้นรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ได้ใช้ M@xLearn ในรูปแบบของ Support System เป็นหลัก คือ จะนำ e-Learning มาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียน ซึ่งเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการเรียนรู้ในชั้นเรียนมากขึ้น

### กระบวนการเรียนการสอน

สำหรับกระบวนการเรียนการสอนที่ใช้ในรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222  
ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนและผู้สอน  
อย่างผสมผสานกันโดยใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย  
หลักการเรียนแบบร่วมมือและระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn  
ซึ่งประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังแสดงในตาราง

ตาราง แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
ก้าวแรกสู่การพิสูจน์	การปฐมนิเทศ รายวิชา การทดสอบก่อน เรียน	ชี้แจงลักษณะการเรียน การสอน วัตถุประสงค์ของ รายวิชา กิจกรรม งานที่ มอบหมายให้ทำ การประเมินผลและ เกณฑ์การให้คะแนน ทดสอบก่อนเรียน	-	-	-	-
โครงสร้างและ กระบวนการ ให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์	โครงสร้างทาง คณิตศาสตร์ กระบวนการให้ เหตุผลทาง คณิตศาสตร์	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ตรวจสอบและทบทวน ความรู้พื้นฐานของผู้เรียน โดยใช้การถามตอบและ ยกตัวอย่างประกอบ	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: Jigsaw II	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้ การถามตอบ การทำกิจกรรมกลุ่มผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำโจทย์ตรวจสอบ ความเข้าใจ

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การประเมินผล เพื่อพัฒนา	การทดสอบย่อย ครั้งที่ 1  การสรุปประเด็น ความรู้ที่ได้รับจาก หน่วยการเรียนรู้ที่ 1	สรุปแนวคิด หลักการ และประเด็นสำคัญที่ได้รับ จากหน่วยการเรียนรู้ ตรวจสอบและร่วมกัน อภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับ จากการทำกิจกรรมผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่าน เว็บ M@xLearn	-	-	-	การทดสอบประจำหน่วย และเฉลยแบบทดสอบเพื่อ ให้นักเรียนได้ทราบข้อบกพร่อง หรือประเด็นต่างๆ ที่ผลิต ควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบ เสร็จ  หลังจากแจ้งผลการ ทดสอบ นิสิตที่สอบไม่ผ่าน เกณฑ์ให้เรียนซ่อมเสริมกับ ผู้สอนโดยตรงหรือเรียน ผ่านระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในกรณีที่ผลิต มีข้อบกพร่องเล็กน้อย

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
ประพจน์และ ค่าความจริง	ประพจน์และ ตัวเชื่อมประพจน์ ตารางค่าความ จริงและการหาค่า ความจริงของ ประพจน์	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ทดสอบความรู้พื้นฐาน ของผู้เรียนโดยใช้แบบ ทดสอบความรู้พื้นฐาน	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: TAI	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำโจทย์ตรวจสอบ ความเข้าใจ
สัจนิรันดร์และ สมมูลเชิง ตรรกศาสตร์	สัจนิรันดร์และ ข้อขัดแย้ง สมมูลเชิง ตรรกศาสตร์	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ทดสอบความรู้พื้นฐาน ของผู้เรียนโดยใช้แบบ ทดสอบความรู้พื้นฐาน	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: TAI	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำโจทย์ตรวจสอบ ความเข้าใจ

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนแบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ชั้นสรุปความรู้	ชั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ชั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การอ้างเหตุผล	ประโยคเปิด การอ้างเหตุผล	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ตรวจสอบและทบทวน ความรู้พื้นฐานของผู้เรียน โดยใช้การถามตอบ เฉลยโจทย์การบ้านที่นิสิต ส่วนใหญ่ยังไม่เข้าใจใน การเรียนคาบที่ผ่านมา	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล การทำกิจกรรมกลุ่มผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่าน เว็บ M@xLearn	การทำโจทย์ตรวจสอบ ความเข้าใจ

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
ตัวบ่งปริมาณ	ตัวบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียวและสองตัวแปร	บอกจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินผล เฉลยโจทย์การบ้านที่นิสิตส่วนใหญ่ยังไม่เข้าใจในคาบที่ผ่านมา ตรวจสอบและร่วมกันอภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับจากการทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: STAD	การสรุปความรู้ที่ได้เป็นรายบุคคลโดยใช้การถามตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์แบบฝึกหัดโดยทำเป็นรายบุคคล การทำกิจกรรมเป็นรายบุคคลผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ชั้นสรุปความรู้	ชั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ชั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การประเมินผล เพื่อพัฒนา	การทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 การสรุปประเด็น ความรู้ที่ได้รับจาก หน่วยการเรียนรู้ที่ 2	สรุปแนวคิด หลักการ และประเด็นสำคัญที่ได้รับ จากหน่วยการเรียนรู้ ตรวจสอบและร่วมกัน อภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับ จากการทำกิจกรรมผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่าน เว็บ M@xLearn	-	-	-	การทดสอบประจำหน่วย และเฉลยแบบทดสอบเพื่อ ให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่อง หรือประเด็นต่างๆ ที่นิสิต ควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบ เสร็จ หลังจากแจ้งผลการ ทดสอบ นิสิตที่สอบไม่ผ่าน เกณฑ์ให้เรียนซ่อมเสริมกับ ผู้สอนโดยตรงหรือเรียน ผ่านระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในกรณีที่นิสิต มีข้อบกพร่องเล็กน้อย

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$	การพิสูจน์โดย วิธีตรง การพิสูจน์โดย วิธีเดินหน้าถอยหลัง	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ตรวจสอบและทบทวน ความรู้พื้นฐานของผู้เรียน โดยใช้การถามตอบ	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล การทำกิจกรรมเป็น รายบุคคลผ่านระบบ การจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การพิสูจน์ ข้อความ $p \rightarrow q$	วิธีการแย้งสลับที่ วิธีการหาข้อขัดแย้ง	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล เฉลยโจทย์การบ้านที่นิสิต ส่วนใหญ่ยังไม่เข้าใจในคาบ ที่ผ่านมา ตรวจสอบและร่วมกัน อภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับ จากการทำกิจกรรมผ่าน ระบบจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: Jigsaw II	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ การทำกิจกรรมกลุ่มผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่าน เว็บ M@xLearn	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล การทำกิจกรรมเป็น รายบุคคลผ่านระบบการจัด การเรียนการสอนและ เนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn	การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ชั้นสรุปความรู้	ชั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ชั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ และ การแจกกรณี	การทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 การพิสูจน์ ข้อความ $p \leftrightarrow q$ วิธีการแจกกรณี	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล ตรวจสอบและร่วมกัน อภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับ จากการทำกิจกรรมผ่าน ระบบจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ตรวจสอบความรู้พื้นฐาน ของผู้เรียนโดยใช้ แบบทดสอบย่อย	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทดสอบประจำหน่วย และเฉลยแบบทดสอบเพื่อ ให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่อง หรือประเด็นต่างๆ ที่นิสิต ควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบ เสร็จ หลังจากแจ้งผลการ ทดสอบ นิสิตที่สอบไม่ผ่าน เกณฑ์ให้เรียน ซ่อมเสริมกับ ผู้สอนโดยตรงหรือเรียน ผ่านระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในกรณีนี้นิสิต มีข้อบกพร่องเล็กน้อย การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การพิสูจน์ว่าเป็น เท็จและมีอย่างน้อย หนึ่ง	วิธีการพิสูจน์ว่า เป็นเท็จโดยการยก ตัวอย่างค้าน วิธีการพิสูจน์ว่ามี อย่างน้อยหนึ่งและ มีเพียงหนึ่งเดียว	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล เจลยโจทย์การบ้านที่นิสิต ส่วนใหญ่ยังไม่เข้าใจในคาบ ที่ผ่านมา	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: Giraffiti Model	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
วิธีอุปนัยเชิง คณิตศาสตร์	หลักการอุปนัย เชิงคณิตศาสตร์ วิธีที่ 1	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล เฉลยโจทย์การบ้านที่นิสิต ส่วนใหญ่ยังไม่เข้าใจในคาบ ที่ผ่านมา ตรวจสอบและทบทวน ความรู้พื้นฐานของผู้เรียน โดยใช้การถามตอบ	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ การทำกิจกรรมกลุ่มผ่าน ระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่าน เว็บ M@xLearn	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนแบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ชั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
วิธีอุปนัยเชิง คณิตศาสตร์	หลักการอุปนัย เชิงคณิตศาสตร์ วิธีที่ 2	บอกจุดประสงค์ การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ หรือหัวข้อที่จะเรียน และเกณฑ์ที่ใช้ใน การประเมินผล  ตรวจสอบและร่วมกัน อภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับ จากการทำกิจกรรมผ่าน ระบบจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn  ทดสอบความรู้พื้นฐาน ของผู้เรียนโดยใช้แบบ ทดสอบความรู้พื้นฐาน	การสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบ การอธิบาย กิจกรรมกลุ่ม: TAI	การสรุปความรู้ที่ได้เป็น รายบุคคลโดยใช้การถาม ตอบ	การฝึกทักษะจากโจทย์ แบบฝึกหัดโดยทำเป็น รายบุคคล	การทำแบบวัดทักษะ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง (ต่อ) แสดงกระบวนการจัดการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กระบวนการเรียนการสอน				
		การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล/การถามตอบประกอบการอธิบาย/ การเรียนรู้แบบร่วมมือ/ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn				
		ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน	ขั้นเสนอ สาระการเรียนรู้	ขั้นสรุปความรู้	ขั้นฝึกปฏิบัติ และนำไปใช้	ขั้นวัดผลและ ประเมินผลการเรียนรู้
การประเมินผล เพื่อพัฒนา	การทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 การสรุปประเด็น ความรู้ที่ได้รับจาก หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	สรุปแนวคิด หลักการ และประเด็นสำคัญที่ได้รับ จากหน่วยการเรียนรู้	-	-	-	การทดสอบประจำหน่วย และเฉลยแบบทดสอบเพื่อ ให้นักเรียนได้ทราบข้อบกพร่อง หรือประเด็นต่าง ๆ ที่ผลิต ควรปรับปรุงแก้ไขหลังสอบ เสร็จ หลังจากแจ้งผลการ ทดสอบ นิสิตที่สอบไม่ผ่าน เกณฑ์ให้เรียนซ่อมเสริมกับ ผู้สอนโดยตรงหรือเรียน ผ่านระบบการจัดการเรียน การสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในกรณีที่มีนิสิต มีข้อบกพร่องเล็กน้อย
การประเมินผล รวมยอด	การสอบปลายภาค	-	-	-	-	การสอบข้อเขียนเพื่อ ประเมินผลการเรียนรู้

## สื่อการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ประกอบรูปแบบการเรียนการสอน ได้แก่

- 1) เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
- 2) ใบงาน
- 3) แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
- 4) เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นใส
- 5) เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์
- 6) เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
 เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
 ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ ประกอบด้วย

1. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน
2. การประเมินผลระหว่างเรียนโดยประเมินผลจากชิ้นงานหรือการทำกิจกรรมที่มอบหมายให้นิสิตปฏิบัติทั้งในและนอกชั้นเรียน

## เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- กองบริการการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2547. **คู่มือแนะนำการใช้งาน M@xLearn 1.0** [<http://course.ku.ac.th/>]. กรุงเทพมหานคร: บริษัทเท็กซ์ แอนด์ เจอร์นัล พับลิเคชั่น จำกัด.
- ครรชิต มาลัยวงศ์. 2004. การเขียนกับ E-Learning (Online). Available: <http://www.drkanchit.com>.
- ทศนา แชมมณี. 2537. **กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานเป็นทีมและการจัดการเรียนการสอน**. กรุงเทพมหานคร: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- นาดยา ปิรันธนานนท์. 2543. **การเรียนรู้แบบร่วมมือ**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.
- วราพร ขาวสุทธิ. 2542. **การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้การสอนตนเองกับการเรียนการสอนแบบรายบุคคลและแบบกลุ่ม สำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง**. วิทยานิพนธ์ปริญญาเอก, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สิริพร ทิพย์คง. 2545. **หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.
- Artzt, A.F. and M.N. Claire. 1990. Cooperative Learning. **The Mathematics Teacher** 83: 448-452.
- Johnson, D.W. and R.T. Johnson. 1989. Cooperative Learning in Mathematics Education. **New Direction for Elementary School Mathematics 1989 yearbook**. Virginia: The Nation Council of Teachers of Mathematics, pp. 234-245.

NECTEC COURSEWARE. 2004. **e-Learning** (Online). Available:  
<http://www.nectec.or.th/courseware/cai/0018.html>.

NSTDA Online Learning. 2001. **e-Learning** (Online). Available:  
<http://www.thai2learn.com/elearning/index.php>.

Slavin, R.E. 1987. Cooperative Learning and Cooperative School.  
**Educational Leadership** 50: 8-11.

ส่วนที่ 2  
การนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้



## การนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้

การจัดการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ภายใต้รูปแบบการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาขึ้นมีกระบวนการดังนี้

1) ก่อนเปิดภาคเรียนประมาณ 2 สัปดาห์ ผู้สอนจะดำเนินการส่ง e-mail ถึงนิสิตที่จะลงทะเบียนเรียนในรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในประเด็นดังต่อไปนี้

1.1) การแนะนำตัวผู้สอนพร้อมชี้แจงถึงหัวข้อที่จะเรียนและวิธีการเรียนอย่างคร่าว ๆ

1.2) การแนะนำนิสิตเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานที่นิสิตควรเตรียมความพร้อมก่อนที่จะเรียนในรายวิชานี้

1.3) ให้นิสิตแต่ละคนเข้าไปลงทะเบียนเพื่อขอเข้าใช้ในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn (<http://course.ku.ac.th/>) รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ให้แล้วเสร็จก่อนเปิดภาคเรียน พร้อมทั้งให้นิสิตเข้าไปศึกษาประมวลการสอน (course syllabus) ที่อยู่ใน M@xLearn เพื่อทำความเข้าใจก่อนเรียน หากนิสิตคนใดมีปัญหาหรือข้อสงสัยประการใดนิสิตสามารถมาพบผู้สอนได้โดยตรงหรือส่ง e-mail มาถึงผู้สอนก็ได้

2) ระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn รายวิชา 158222 เป็นระบบสนับสนุนการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยได้นำมาผสมผสานกับการเรียนการสอนในชั้นเรียน ซึ่งเป็นลักษณะของการสนับสนุนให้มีความสมบูรณ์ของการเรียนรู้ในชั้นเรียนมากขึ้นเพื่อส่งเสริมให้นิสิตเกิดการเรียนรู้ได้ทุกที่ ทุกเวลา ใช้เป็นแหล่งค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปของเว็บไซต์ สรุปความรู้ที่ได้รับและฝึกวิเคราะห์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยผ่านการทำกิจกรรมกลุ่มและรายบุคคลซึ่งระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn รายวิชา 158222 ประกอบด้วย syllabus, course members, calendar, problems, resources, webboard, groupworks และ homeworks ดังภาพประกอบ

### ภาพแสดงหน้าจอ M@xLearn รายวิชา 158222

**syllabus** (แผนการสอน) เป็นประมวลการสอนออนไลน์ (online syllabus)

**course members** (สมาชิกรายวิชา) เป็นรายชื่ออีเมลที่ลงทะเบียนในรายวิชา 158222 พร้อมทั้งแสดง e-mail address ของอีเมลแต่ละคน

**calendar** (ปฏิทินรายวิชา) เป็นปฏิทินแสดงกิจกรรมการเรียนการสอนของรายวิชา 158222

**problems** เป็นแหล่งข้อมูลที่ให้นักศึกษาเข้ามาศึกษาเพื่อทำงานตามคำสั่งใน Homeworks ซึ่งเป็นงานรายบุคคล

**resources** เป็นแหล่งข้อมูลสำหรับนิสิตใช้ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์

**webboard** เป็นกระดานสนทนาระหว่างผู้สอนกับนิสิตและระหว่างนิสิตกับนิสิตเพื่อใช้ติดต่อสื่อสารและถ่ายทอดแลกเปลี่ยนความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอน การนัดหมาย การลา การแจ้งผลการเรียน การปรึกษาปัญหาเกี่ยวกับการเรียน เป็นต้น

**groupworks** เป็นกิจกรรมกลุ่มเพื่อใช้สรุปและแลกเปลี่ยนความรู้เกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์

**homeworks** เป็นระบบการสั่งและส่งการบ้านผ่านเว็บโดยเป็นกิจกรรมรายบุคคลที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์

3) ในส่วนของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ดำเนินการดังนี้

3.1) ในช่วงแรกผู้สอนทำการประเมินนิสิตก่อนเรียนโดยใช้แบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจดูว่านิสิตมีพื้นฐานความรู้ในเรื่องที่จะเรียนเพียงใด

3.2) ก่อนที่จะทำการสอนในแต่ละครั้งผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ หัวข้อที่จะสอนและเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินในแต่ละกิจกรรมและมีการนำเข้าสู่บทเรียนในลักษณะที่แตกต่างกันในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้แก่ การตรวจสอบและทบทวนความรู้พื้นฐานของนิสิต การทบทวนบทเรียนที่ผ่านมาในคาบที่แล้ว การเฉลยการบ้านหรือโจทย์ที่นิสิตยังไม่เข้าใจในคาบที่แล้ว เป็นต้น

3.3) ผู้สอนใช้การสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล การใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิด การถามตอบประกอบการอธิบาย การเรียนแบบร่วมมือและระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ผสมผสานกันอย่างสอดคล้องและเหมาะสมกับหน่วยการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

3.4) ผู้สอนให้นิสิตสรุปความรู้ที่ได้เป็นรายบุคคลหรือกลุ่มหรือสรุปความรู้ที่ได้ผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn และให้นิสิตทำการฝึกทักษะเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนรู้จากแบบฝึกหัด ใบงาน แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หรือทำกิจกรรมผ่านระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn เป็นรายบุคคลหรือกลุ่ม

3.5) ก่อนสิ้นสุดการเรียนการสอนในแต่ละครั้ง ผู้สอนให้นิสิตทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงเพื่อใช้ตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตพร้อมทั้งเฉลยในห้องเรียน

3.6) ผู้สอนทำการทดสอบย่อยนิสิตเมื่อเรียนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้เพื่อนำผลการประเมินมาใช้ในการปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนและทำให้ผู้สอนได้ทราบถึงข้อบกพร่องทั้งของตนเองและนิสิตพร้อมทั้งทำการแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น สำหรับนิสิตที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดให้เรียนซ่อมเสริมกับผู้สอนโดยตรงหรือเรียนผ่านระบบจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

3.7) เมื่อสิ้นสุดการเรียนการสอนผู้สอนทำการทดสอบนิสิตเพื่อประเมินผลการเรียนรู้ตลอดภาคเรียนของนิสิตเป็นรายบุคคลโดยใช้แบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

4) การติดต่อสื่อสารกันนอกชั้นเรียนระหว่างผู้สอนกับนิสิตและระหว่างนิสิตซึ่งอาจจะเป็นเรื่องเกี่ยวกับการนัดหมาย การลาจิก การแจ้งผลการสอบและบกพร่องที่นิสิตต้องปรับปรุงแก้ไข การปรึกษาปัญหาเกี่ยวกับการเรียนสามารถใช้ e-mail หรือ webboard ใน M@xLearn เพื่อความสะดวก รวดเร็วและสามารถติดต่อกันได้ตลอดเวลา

#####

ส่วนที่ 3  
ประมวลการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I



**158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**  
**(Algorithms in Mathematics Proofs I)**  
**ประมวลการสอน (Course Syllabus)**

**1. คณะศึกษาศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา**

**2. รหัสวิชา 158222 ชื่อวิชา (ไทย) ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**  
**จำนวน 3 หน่วยกิต (อังกฤษ) Algorithms in Mathematics Proofs I**

**3. เนื้อหารายวิชา (Course Description)**

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผล นิยาม ความหมายของภาษาคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ ขั้นตอนวิธีในการพิสูจน์ วิธีตรง วิธีเดินหน้า ถอยหลัง วิธีการแย้งสลับที่ วิธีการหาข้อขัดแย้ง วิธีการแจกกรณี วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการฝึกทักษะการใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

**4. วัตถุประสงค์ของรายวิชา**

เมื่อเรียนจบรายวิชานี้แล้วนิสิตสามารถ

1. เข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผลรวมถึงมองเห็นความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์
2. รู้จักและเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ ได้เหมาะสมกับโจทย์และสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. อ่านและเข้าใจการพิสูจน์ที่เป็นลายลักษณ์อักษรโดยชี้ให้เห็นถึงเทคนิคที่ช่วยย่อยได้ตลอดจนสื่อสารและพัฒนาการพิสูจน์ของตนเองกับผู้ที่เรียนหรือผู้ใช้คณิตศาสตร์ได้
4. นำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไปได้

## 5. หัวข้อรายวิชา (Course Outline)

### หน่วยที่ 1 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผล

- 1.1) โครงสร้างทางคณิตศาสตร์
- 1.2) กระบวนการให้เหตุผล

### หน่วยที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ

- 2.1) ประพจน์และตัวเชื่อมประพจน์
- 2.2) ตารางค่าความจริงและการหาค่าความจริงของประพจน์
- 2.3) สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง
- 2.4) สมมูลเชิงตรรกศาสตร์
- 2.5) ประโยคเปิด
- 2.6) การอ้างเหตุผล
- 2.7) ตัวบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ  
ตัวแปรเดียวและสองตัวแปร

### หน่วยที่ 3 วิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ

- 3.1) วิธีตรง
- 3.2) วิธีเดินหน้าถอยหลัง
- 3.3) วิธีการแย้งสลับที่
- 3.4) วิธีการหาข้อขัดแย้ง
- 3.5) การพิสูจน์ข้อความในแบบ  $p \leftrightarrow q$
- 3.6) วิธีการแจกกรณี
- 3.7) วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
- 3.8) วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว
- 3.9) วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

## 6. แนวการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนให้เกิดจินตนาการตามแนวคิดผู้เรียนเป็นสำคัญ

1. การอธิบายและแสดงเหตุผล การถามตอบประกอบการอธิบาย

2. การจัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการกลุ่มที่มีการอภิปรายซักถามปัญหาและข้อสงสัยในการเรียนระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนด้วยกันและระหว่างผู้เรียนกับผู้สอน เพื่อส่งเสริมทักษะทางสังคม

3. การสื่อสารกันระหว่างผู้สอนและผู้เรียนในด้านการเรียนการสอน เช่น การนัดหมาย การส่งงาน การให้คำปรึกษา การแจ้งผลการเรียนและข้อมูลข่าวสารอื่นๆ โดยผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

4. การทำกิจกรรม ศึกษาและค้นคว้างานที่ได้รับมอบหมายเป็นกลุ่มและรายบุคคลจากแหล่งการเรียนรู้ทั้งที่เป็นเอกสารและเว็บไซต์ต่างๆ พร้อมทั้งการนำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียนหรือในระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

## 7. อุปกรณ์สื่อการสอน/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นใส

3. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์

4. ใบงาน

5. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

6. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>

เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>

ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## 8. การวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน

1. การบ้าน/การศึกษาค้นคว้า/การนำเสนอผลงาน	40 %
2. การทดสอบประจำหน่วย	25 %
3. การสอบปลายภาค	25 %
4. ความสนใจเข้าเรียนสม่ำเสมอและพฤติกรรมในชั้นเรียน	10 %

## 9. การประเมินผลการเรียนและเกณฑ์การให้คะแนน

เกรด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
A	80-100	<ul style="list-style-type: none"> <li>• นิสิตเข้าเรียนครบทุกครั้ง</li> <li>• นิสิตทำกิจกรรมที่มอบหมายครบทุกครั้งด้วยความตั้งใจ ร่วมแสดงความคิดเห็น ให้ความร่วมมือและรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมายอย่างกระตือรือร้น ทำให้กลุ่มได้ผลงานครบถ้วนมีคุณภาพตามระยะเวลาที่ได้ตกลงกันไว้อย่างเคร่งครัด</li> <li>• นิสิตสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้วิธีการพิสูจน์ได้เหมาะสมกับปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการพิสูจน์และนำเสนอการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม</li> <li>• นิสิตตั้งใจรับฟังความคิดเห็นจากเพื่อน ๆ อย่างเต็มใจและร่วมอภิปราย แสดงความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ด้วยความมั่นใจ เมื่อมีโอกาสตลอดจนยอมรับฟังข้อโต้แย้งหรือคำแนะนำจากเพื่อนอย่างเห็นคุณค่าและเต็มใจ</li> </ul>
B <sup>+</sup>	75-79	
B	70-74	<ul style="list-style-type: none"> <li>• นิสิตมีเวลาเรียนครบตามระเบียบของมหาวิทยาลัย</li> <li>• นิสิตทำกิจกรรมที่มอบหมายครบทุกครั้งด้วยความตั้งใจ ร่วมแสดงความคิดเห็น ให้ความร่วมมือและรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมายอย่างเต็มใจ ทำให้กลุ่มได้ผลงานครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้ตกลงกันไว้อย่างสม่ำเสมอ</li> <li>• นิสิตสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้วิธีการพิสูจน์ได้เหมาะสมกับปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการพิสูจน์และนำเสนอการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน</li> <li>• นิสิตตั้งใจรับฟังความคิดเห็นจากเพื่อน ๆ อย่างเต็มใจและร่วมอภิปราย แสดงความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ เมื่อมีโอกาสตลอดจนยอมรับฟังข้อโต้แย้งหรือคำแนะนำจากเพื่อนด้วยดี</li> </ul>
C <sup>+</sup>	65-69	

เกรด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
C	60-64	<ul style="list-style-type: none"> <li>• นิสิตมีเวลาเรียนครบตามระเบียบของมหาวิทยาลัย</li> <li>• นิสิตเข้าร่วมกิจกรรมที่มอบหมายเกือบทุกครั้ง ร่วมแสดงความคิดเห็น ให้ความร่วมมือและรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมาย ทำให้กลุ่มได้ผลงานครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้ตกลงกันไว้เป็นบางครั้ง</li> <li>• นิสิตสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้วิธีการพิสูจน์ได้เหมาะสมกับปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการพิสูจน์และนำเสนอการพิสูจน์ได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย</li> <li>• นิสิตตั้งใจรับฟังความคิดเห็นจากเพื่อน ๆ และร่วมอภิปรายแสดงความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ในบางโอกาส ตลอดจนยอมรับฟังข้อโต้แย้งหรือคำแนะนำจากเพื่อนด้วยดีแม้จะไม่เห็นด้วยในบางครั้ง</li> </ul>
D <sup>+</sup>	55-59	
D	50-54	<ul style="list-style-type: none"> <li>• นิสิตมีเวลาเรียนครบตามระเบียบของมหาวิทยาลัย</li> <li>• นิสิตทำกิจกรรมที่มอบหมายเกือบทุกครั้ง ร่วมแสดงความคิดเห็น ให้ความร่วมมือและรับผิดชอบในงานของตนที่กลุ่มมอบหมาย ทำให้กลุ่มได้ผลงานครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้ตกลงกันไว้บ่อยครั้งหรือมีคุณภาพค่อนข้างต่ำ</li> <li>• นิสิตสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้วิธีการพิสูจน์ได้เหมาะสมกับปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการพิสูจน์และนำเสนอการพิสูจน์ได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมค่อนข้างมาก</li> <li>• นิสิตตั้งใจรับฟังความคิดเห็นจากเพื่อน ๆ และร่วมอภิปรายแสดงความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์น้อยครั้งมาก ตลอดจนยอมรับฟังข้อโต้แย้งหรือคำแนะนำจากเพื่อนด้วยดีแม้จะไม่เห็นด้วยในบางครั้ง</li> </ul>

เกรด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
F	ต่ำกว่า 50	<ul style="list-style-type: none"> <li>• นิสิตมีเวลาเรียนไม่ครบตามระเบียบของมหาวิทยาลัยหรือมีเวลาเรียนไม่ถึงร้อยละ 80 ของเวลาเรียนทั้งหมด</li> <li>• นิสิตเข้าร่วมทำกิจกรรมที่มอบหมายบางครั้ง ไม่ร่วมแสดงความคิดเห็น ไม่ให้ความร่วมมือและไม่รับผิดชอบในงานของตนในกลุ่มมอบหมาย ทำให้กลุ่มได้ผลงานที่มีคุณภาพต่ำ</li> <li>• นิสิตไม่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการพิสูจน์และยังเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ไม่เหมาะสมกับปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการพิสูจน์และนำเสนอการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง</li> <li>• นิสิตไม่รับฟังความคิดเห็นจากเพื่อน ๆ ไม่รวมอภิปรายแสดงความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์และไม่ยอมรับฟังข้อโต้แย้งหรือคำแนะนำจากเพื่อน</li> </ul>

#### 10. การให้โอกาสนอกเวลาเรียนแก่นิสิตเข้าพบและให้คำแนะนำในด้านการเรียน

ในวันและเวลาราชการ ห้อง ED3-202 (สาขาวิชาคณิตศาสตร์)

E-mail: [feducnc@ku.ac.th](mailto:feducnc@ku.ac.th)

เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>

ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

#### 11. เอกสารอ่านประกอบและแหล่งค้นคว้าเพิ่มเติม

กรรณิกา กวักเพชुरย์. 2542. **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ:

โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชานนท์ จันทรา. 2545. **เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการ**

**พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์และคณะ. 2539. **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ The Method of**

**Mathematical Induction**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์กรมการศาสนา.

อาริสา ฉัตรกิจวรณ. 2529. **รากฐานคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.

Daniel, S. 2002. **How to Read And Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes**. New York: John Wiley.

Intellitech Systems Inc. 2004. **Proof by Contradiction** (Online).

Available: [http://www.delphiforfun.org/Programs/Math\\_Topics/proof\\_by\\_contradiction.htm](http://www.delphiforfun.org/Programs/Math_Topics/proof_by_contradiction.htm)

Kurtz, D.C. 1992. **Foundation of Abstract Mathematics**. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Lay, S.R. 1986. **Analysis an Introduction to Proof**. New Jersey: Prentice-Hall.

Olmsted, D.D. 2000. **The Rationale for Analog Truth Value Operations in the History of Logic** (Online). Available:

[http://www.neurocomputing.org/Logic\\_History/body\\_logic\\_history.html](http://www.neurocomputing.org/Logic_History/body_logic_history.html)

Oswego City School District. 2004. **Contrapositive** (Online).

Available: <http://regentsprep.org/Regents/math/relcond/Lcontrap.htm>

Silverstein, C. 1998. **Morphology of Proof an introduction to rigorous proof techniques** (Online). Available: <http://nike.psu.edu/resources/cache/proof.pdf>

The MathPath Organization. 2003. **MathPath** (Online).

Available: <http://www.mathpath.org/proof/proof.argument.htm>

Toida. 2001. **Mathematical Reasoning** (Online).

Available: [http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/set/math\\_reasoning.html](http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/set/math_reasoning.html)

Velleman, D.J. 1998. **How To Proof It A Structured Approach**.

Cambridge: Cambridge University Press.

Weisstein, E.W. 2004. **Proof** (Online). Available:

<http://mathworld.wolfram.com/Proof.html>

## 12. ตารางกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการเรียน

สัปดาห์ที่	หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กิจกรรมการเรียนรู้
1	ก้าวแรกสู่ การพิสูจน์	<ul style="list-style-type: none"> <li>ปฐมนิเทศรายวิชา</li> <li>การทดสอบก่อนเรียน</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ชี้แจงลักษณะการเรียนการสอน วัตถุประสงค์ รายวิชา กิจกรรม งานที่มอบหมายให้ทำและเกณฑ์การให้คะแนน</li> <li>ทดสอบก่อนเรียน</li> </ul>
2	โครงสร้างและ กระบวนการให้ เหตุผลทาง คณิตศาสตร์	<ul style="list-style-type: none"> <li>โครงสร้างทางคณิตศาสตร์</li> <li>กระบวนการให้เหตุผล</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: Jigsaw II</li> <li>M@xLearn: งานกลุ่ม</li> </ul>
3	ประเมินผล เพื่อพัฒนา	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 1</li> <li>สรุปประเด็นหน่วยที่ 1</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 1</li> <li>เฉลยแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 1</li> <li>นิสิตร่วมกันสรุปแนวคิด หลักการและประเด็นสำคัญที่ได้รับจากหน่วยการเรียนรู้</li> <li>ซักถามและร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับงานกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn</li> </ul>
4	ประพจน์และ ค่าความจริง	<ul style="list-style-type: none"> <li>ประพจน์และตัวเชื่อมประพจน์</li> <li>ตารางค่าความจริงและการหาค่าความจริงของประพจน์</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: TAI</li> </ul>
5	สัจนิรันดร์และ สมมูลเชิง ตรรกศาสตร์	<ul style="list-style-type: none"> <li>สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง</li> <li>สมมูลเชิงตรรกศาสตร์</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: TAI</li> </ul>
6	การอ้างเหตุผล	<ul style="list-style-type: none"> <li>ประโยคเปิด</li> <li>การอ้างเหตุผล</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>ทำกิจกรรมบนกระดานและให้นิสิตแสดงความคิดเห็นร่วมกัน</li> <li>M@xLearn : งานกลุ่ม</li> </ul>
7	ตัวบ่งปริมาณ	<ul style="list-style-type: none"> <li>ตัวบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียวและสองตัวแปร</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ซักถามและร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับงานกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn</li> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: STAD</li> <li>M@xLearn: งานเดี่ยว</li> </ul>

สัปดาห์ที่	หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กิจกรรมการเรียนรู้
8	ประเมินผล เพื่อพัฒนา	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 2</li> <li>สรุปประเด็นหน่วยที่ 2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 2</li> <li>เฉลยแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 2</li> <li>นิสิตร่วมกันสรุปแนวคิด หลักการและประเด็นสำคัญที่ได้รับจากหน่วยการเรียนรู้</li> <li>ซักถามและร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับงานเดี่ยวที่มอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn</li> </ul>
9	การพิสูจน์ ข้อความ $p \rightarrow q$	<ul style="list-style-type: none"> <li>การพิสูจน์โดยวิธีตรง</li> <li>การพิสูจน์โดยวิธีเดินหน้า ถอยหลัง</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>ทำกิจกรรมบนกระดานและให้นิสิตแสดงความคิดเห็นร่วมกัน</li> <li>M@xLearn: งานเดี่ยว</li> </ul>
10	การพิสูจน์ ข้อความ $p \rightarrow q$ (ต่อ)	<ul style="list-style-type: none"> <li>วิธีการแย้งสลับที่</li> <li>วิธีการหาข้อขัดแย้ง</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ซักถามและอภิปรายงานเดี่ยวที่มอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn</li> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: Jigsaw II</li> <li>M@xLearn: งานกลุ่มและงานเดี่ยว</li> </ul>
11	การพิสูจน์ ข้อความ $p \leftrightarrow q$ และ การแจกกรณี	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 3</li> <li>การพิสูจน์ข้อความใน แบบ <math>p \leftrightarrow q</math></li> <li>วิธีการแจกกรณี</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 3</li> <li>เฉลยแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 3</li> <li>ซักถามและร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับงานเดี่ยวและกลุ่มที่มอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn</li> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> </ul>
12	การพิสูจน์ว่า เป็นเท็จและมี อย่างน้อยหนึ่ง	<ul style="list-style-type: none"> <li>วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน</li> <li>วิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อย หนึ่งและมีเพียงหนึ่งเดียว</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: Giraffiti Model</li> </ul>
13	วิธีอุปนัยเชิง คณิตศาสตร์	<ul style="list-style-type: none"> <li>วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>ทำกิจกรรมบนกระดานดำและให้นิสิตแสดงความคิดเห็นร่วมกัน</li> <li>M@xLearn: งานกลุ่ม</li> </ul>
14	วิธีอุปนัยเชิง คณิตศาสตร์ (ต่อ)	<ul style="list-style-type: none"> <li>วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ซักถามและอภิปรายงานกลุ่มที่มอบหมายให้ทำใน M@xLearn</li> <li>อธิบายและแสดงเหตุผล</li> <li>ถามตอบประกอบการอธิบาย</li> <li>กิจกรรมกลุ่ม: TAI</li> </ul>

สัปดาห์ที่	หน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	กิจกรรมการเรียนรู้
15	ประเมินผล เพื่อพัฒนา	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 4</li> <li>สรุปประเด็นหน่วยที่ 3</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ทดสอบย่อยครั้งที่ 4</li> <li>เฉลยแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 4</li> <li>นิสิตร่วมกันสรุปแนวคิด หลักการและประเด็นสำคัญที่ได้รับจากหน่วยการเรียนรู้</li> </ul>
16	ประเมินผล รวบยอด	<ul style="list-style-type: none"> <li>สอบปลายภาค</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>สอบข้อเขียนเพื่อประเมินผลการเรียนรู้</li> </ul>

### 13. ผู้สอน อาจารย์ชานนท์ จันทรา

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ส่วนที่ 4  
แผนการจัดการเรียนรู้  
รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I



### แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$

จำนวน 3 ชั่วโมง

รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ปีการศึกษา 2548

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้การพิสูจน์วิธีตรงหรือวิธีเดินหน้าถอยหลังได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

#### สาระการเรียนรู้

การพิสูจน์ข้อความในแบบ  $p \rightarrow q$  สามารถทำได้ 3 วิธีคือ วิธีตรง (direct proof) วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof) และวิธีขัดแย้ง (contradiction proof)

#### การพิสูจน์โดยวิธีตรงและวิธีเดินหน้าถอยหลัง

ถ้า  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  เป็นบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้วในการพิสูจน์  $p \rightarrow q$  ทางตรงหรือการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ว่า จาก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  สรุปได้ว่า  $p \rightarrow q$  ในการพิสูจน์แบบนี้เราจะให้  $p$  เป็นส่วนหนึ่งของเหตุแล้วพิสูจน์ว่า จาก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, p$  สรุปได้ว่า  $q$  ดังรูปแบบต่อไปนี้

<p><b>พิสูจน์</b> สมมติว่า <math>p</math></p> <p><math>\therefore</math> (ใช้ <math>p</math> และ <math>S_1, S_2, S_3, \dots, S_n</math>)</p> <p>เพราะฉะนั้น <math>q</math></p> <p>นั่นคือ <math>p \rightarrow q</math></p>
--

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่าถ้า  $x$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $x^2$  เป็นจำนวนคู่

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$x$ เป็นจำนวนเต็ม	$x$ เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow$ $x^2$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$x$ เป็นจำนวนเต็ม	$x^2$ เป็นจำนวนคู่
$x$ เป็นจำนวนคู่	
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

$x$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $t$  ที่ทำให้  $x = 2t$

พิสูจน์ ให้  $x$  เป็นจำนวนคู่

จะแสดงว่า  $x^2$  เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $t$  ซึ่ง  $x = 2t$

นั่นคือ  $x^2 = (2t)^2 = 4t^2 = 2(2t^2)$  โดยที่  $2t^2$  เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น  $x^2$  เป็นจำนวนคู่

#

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็ม ถ้า  $a$  ทหาร  $b$  ลงตัว และ  $b$  ทหาร  $c$  ลงตัว แล้ว  $a$  ทหาร  $c$  ลงตัว (เขียนแทนด้วย  $alc$ )

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a$ , $b$ และ $c$ เป็นจำนวนเต็ม	$(alb \wedge blc) \rightarrow alc$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม	alc
$alb \wedge blc$	
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

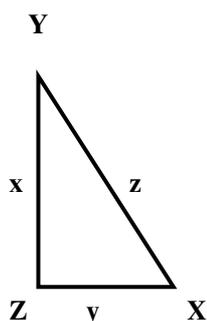
a หาร b ลงตัว ( $alb$ ) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้  $b = am$

**พิสูจน์** ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ  
 เนื่องจาก  $alb$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง  $b = am$   
 และเนื่องจาก  $blc$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง  $c = bn$   
 เพราะฉะนั้น  $c = bn = (am)n = a(mn)$  โดยที่  $mn$  เป็นจำนวนเต็ม  
 ดังนั้น  $a \mid c$  #

ในการพิสูจน์รูปแบบ  $p \rightarrow q$  โดยวิธีตรงมีเทคนิคการพิสูจน์พื้นฐานวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้การพิสูจน์สามารถทำได้ง่ายยิ่งขึ้น เราเรียกเทคนิคนี้ว่า วิธีเดินหน้า-ถอยหลัง (forward – backward method) ซึ่งเทคนิคการพิสูจน์นี้จะเป็นความรู้พื้นฐานที่สามารถนำไปใช้เป็นส่วนประกอบหนึ่งในการพิสูจน์ของเทคนิคการพิสูจน์อื่น ๆ ต่อไปได้ โดยขั้นตอนแรกของการพิสูจน์ว่า “ถ้า p แล้ว q” เป็นจริงจะต้องแยกแยะให้ได้ว่าข้อความส่วนใดแทน p และ q ซึ่งโดยทั่วไปแล้วข้อความที่ตามหลังคำว่า “ถ้า (if)” แต่อยู่หน้าคำว่า “แล้ว (then)” จะเป็น p (สมมติฐาน) และข้อความที่ตามหลังคำว่า “แล้ว (then)” จะเป็น q (ข้อสรุป) ในการพิสูจน์ข้อความ “ $p \rightarrow q$ ” เป็นจริงเพียงพอที่จะยอมรับหรือสมมติให้ p เป็นจริง แล้วจึงจะพยายามหาทางพิสูจน์ให้ q เป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 3** ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ มีด้านประกอบมุมฉากยาว  $x$  หน่วยและ  $y$  หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $z$  หน่วย มีพื้นที่เท่ากับ  $\frac{z^2}{4}$  ตารางหน่วย แล้วรูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

**วิเคราะห์การพิสูจน์** ในตัวอย่างนี้มีประพจน์อยู่ 2 ประพจน์ ดังต่อไปนี้



**p** (สมมติฐาน): รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ มีด้านประกอบมุมฉากยาว  $x$  หน่วย และ  $y$  หน่วยและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $z$  หน่วย มีพื้นที่เท่ากับ  $\frac{z^2}{4}$  ตารางหน่วย

**q** (ข้อสรุป): รูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นเมื่อต้องการที่จะพิสูจน์ให้ “ $p \rightarrow q$ ” เป็นจริงนั้นเราสามารถที่จะสมมติให้  $p$  เป็นจริงได้ แล้วใช้รายละเอียดต่าง ๆ ของ  $p$  ให้เป็นประโยชน์ในการหาทางสรุปว่า  $q$  เป็นจริงด้วย ซึ่งในการพยายามที่จะไปให้ถึงข้อสรุป ( $q$ ) เป็นจริงนั้นจะผ่านกระบวนการ (process) ที่เรียกว่า **backward** แต่การใช้รายละเอียดที่เฉพาะเจาะจงใน  $p$  นั้นจะผ่านกระบวนการที่เรียกว่า **forward** ทั้งสองกระบวนการนี้จะอธิบายโดยละเอียดดังต่อไปนี้

### ➤ กระบวนการถอยหลัง (backward process)

ในกระบวนการถอยหลังจะเริ่มต้นด้วยการถามว่า “ทำอย่างไรหรือเมื่อใดที่จะสรุปว่า  $q$  เป็นจริง” ในทางปฏิบัติคำถามที่ตั้งขึ้นควรจะถามแบบนามธรรม (abstract) กล่าวคือ ไม่มีสัญลักษณ์ ไม่มีค่าเฉพาะเจาะจงไม่ว่าจะเป็นค่าตัวเลขหรือรูปเรขาคณิตสามมิติที่ใส่ชื่อเฉพาะเจาะจงลงไป สำหรับตัวอย่างที่ 3 นี้ คำถามที่ถามจาก  $q$  คือ “ทำอย่างไรจึงจะแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” คำถามนี้เรียกว่า **คำถามหลัก** (key question) เมื่อได้คำถามหลักแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือ การตอบคำถามหลัก สำหรับการตอบคำถามหลัก เราจะผ่านกระบวนการที่เรียกว่า **2 phase process** ซึ่งประกอบด้วย การตอบคำถามแบบนามธรรม (abstract answer) ซึ่งในที่นี้คือ “การแสดงว่าด้านสองด้านยาวเท่ากัน” จากนั้นใช้กับสถานการณ์เฉพาะ คือการตอบคำถามแบบเฉพาะเจาะจง (specific answer) ซึ่งในที่นี้ก็คือ “แสดงว่า  $x = y$ ” การสร้างคำถามหลัก แล้วตอบคำถามแบบนามธรรม จากนั้นประยุกต์กับสถานการณ์เฉพาะ กล่าวคือ ตอบคำถามแบบเฉพาะเจาะจง รวมเป็นหนึ่งขั้นตอนของกระบวนการถอยหลัง จากหนึ่งขั้นตอนของกระบวนการถอยหลังนี้จะได้ประพจน์ใหม่หนึ่งประพจน์ที่

เรียกว่า  $q_1$  ซึ่งมีสมบัติว่า “ถ้า  $q_1$  เป็นจริงแล้ว  $q$  เป็นจริงด้วย” จากตัวอย่างที่ 3 นี้จะได้  $q_1$  ดังต่อไปนี้  $q_1: x = y$

ถ้าสามารถแสดงได้ว่า  $x = y$  แล้วรูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่า ถ้า  $q_1$  เป็นจริงแล้ว  $q$  เป็นจริง การถามว่าจะแสดงว่า  $q_1$  เป็นจริงได้อย่างไรนั้น ท้ายที่สุดแล้วก็ต้องใช้สมมติฐาน (p) อย่างแน่นอน วิธีการแสดงว่า  $q$  เป็นจริงได้อย่างไรนั้นจำเป็นจะต้องสร้างอีกหนึ่งขั้นตอนของกระบวนการถอยหลัง ซึ่งในที่นี้คำถามหลักของ  $q_1$  คือ “ทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมยาวเท่ากัน” หรือทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่า “จำนวนจริงทั้งสองจำนวนเท่ากัน” การมีคำถามหลักมากกว่าหนึ่ง ปัญหาจะเกิดความยุ่งยาก ดังนั้น ควรเลือกคำถามหลักไปใช้ให้เหมาะสมกับงานในทางคณิตศาสตร์ คำถามหลักจะถามอย่างชัดเจน ทำให้สามารถเลือกใช้คำถามหลักให้เหมาะสมกับงานได้ง่ายและไม่ควรใช้คำถามหลักมากกว่าหนึ่งปัญหา ในที่นี้จะเลือกคำถามหลัก ที่กล่าวว่า “ทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่าจำนวนจริงสองจำนวนเท่ากัน” จากนั้นก็ดำเนินการตามกระบวนการ 2 phase process กล่าวคือ การตอบแบบนามธรรม ในที่นี้คือ “ผลต่างของจำนวนจริง สองจำนวนเป็นศูนย์” จากนั้นตอบคำถามแบบเฉพาะเจาะจงซึ่งในที่นี้ คือ “ $x - y = 0$ ” แต่ถ้าเราเลือกคำถามหลัก ประโยคแรกที่ว่า “ทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมยาวเท่ากัน” ซึ่งจากรูปสามเหลี่ยม XYZ จะต้องแสดงว่า  $\hat{x} = \hat{y}$  ซึ่งใน p ไม่ได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องของมุมไว้ ดังนั้น การเลือกใช้คำถามหลักควรดูรายละเอียดที่กำหนดมาให้ด้วยจาก 1 step process ดังกล่าวข้างต้นจะได้ประพจน์ใหม่คือ  $q_2$  ดังต่อไปนี้  $q_2: x - y = 0$

คำถามหลัก สำหรับ  $q_2$  คือ “ทำอย่างไรจึงจะแสดงได้ว่าผลต่างของจำนวนจริงสองจำนวนเป็นศูนย์” การตอบคำถามนี้จะเกิดปัญหาขึ้นในกระบวนการถอยหลัง เพราะจะหาเหตุผลจากกระบวนการถอยหลังมาตอบคำถามนี้ไม่ได้ แต่อย่าเพิ่งสิ้นหวังและโปรดจำไว้ว่าการพิสูจน์ว่า “ $p \rightarrow q$ ” เป็นจริงจะอนุญาตให้สมมติว่า p เป็นจริงซึ่งเมื่อมาถึงตอนนี้จะป็นโอกาสเหมาะสมที่จะเลือกข้อเท็จจริงจาก p มาใช้ นั่นคือ ต้องไปดูที่กระบวนการเดินหน้า (forward process)

### ➤ กระบวนการเดินหน้า (forward process)

กระบวนการเดินหน้าจะเริ่มต้นที่ p โดยการสมมติให้ p เป็นจริง จาก p จะก่อให้เกิดหรือเหนี่ยวนำ (derive) ให้เกิดประพจน์ใหม่ คือ  $p_1$  ซึ่งเป็นจริงด้วยประพจน์ที่เกิดจาก p ไม่ใช่ประพจน์ที่เกิดขึ้นโดยบังเอิญแต่เกิดขึ้นโดยมีสิ่งเชื่อมโยงมาจากปลายทางของกระบวนการถอยหลัง ซึ่งในที่นี้คือ  $q_2: x - y = 0$  สำหรับตัวอย่างนี้

$p$ : รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ มีด้านประกอบมุมฉากยาว  $x$  หน่วย และ  $y$  หน่วยและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $z$  หน่วย มีพื้นที่เป็น  $\frac{z^2}{4}$  ตารางหน่วย ณ จุดนี้ควรทราบว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ  $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$  ดังนั้นจาก  $p$  จะได้  $p_1$  คือ  $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$  และมีอีกประพจน์หนึ่งซึ่งมีประโยชน์มากที่ได้มาจาก  $p$  เราทราบว่ารูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยอาศัยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส (Pythagorus) จะได้ว่า  $p_2$  คือ  $x^2 + y^2 = z^2$

ในกระบวนการเดินทาง เราสามารถรวมประพจน์  $p_1$  และ  $p_2$  เข้าด้วยกันเพื่อสร้างประพจน์ใหม่ได้อีกในที่นี้จะได้  $p_3$  คือ  $\frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$

ปัญหาหนึ่งสำหรับกระบวนการเดินทาง คือ ประพจน์ใหม่ที่ได้จาก  $p$  มีได้หลายประพจน์ แต่บางประพจน์ไม่มีประโยชน์ เช่น “มุม  $X$  น้อยกว่า  $90^\circ$ ” ให้เลือกประพจน์ที่สามารถสร้างประพจน์ใหม่ๆ ตามมา เพื่อนำทางไปสู่จุดหมายปลายทาง ซึ่งในที่นี้คือ  $q_2$  กล่าวโดยสรุปครมองผลจากกระบวนการถอยหลังเป็นตัวชี้นำ ในที่นี้  $p_3$  คล้ายกับ  $q_2$  แล้วซึ่งชี้ให้ทำต่อไป ดังนี้

$$p_4: x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$p_5: (x - y)^2 = 0$$

$$q_2: x - y = 0$$

$$q_1: x = y$$

$q$ : รูป  $\triangle XYZ$  เป็น รูป  $\triangle$  หน้าจั่ว

ในทางปฏิบัติเรารวมเขียนการพิสูจน์ได้ ดังต่อไปนี้

ข้อความ	เหตุผล
$p$ : พื้นที่รูป $\triangle XYZ$ เท่ากับ $\frac{z^2}{4}$	กำหนดให้
$p_1$ : $\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$	พ.ท. รูป $\triangle$ เท่ากับ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง
$p_2$ : $x^2 + y^2 = z^2$	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
$p_3$ : $\frac{xy}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4}$	แทนค่า $p_2$ ใน $p_1$
$p_4$ : $x^2 - 2xy + y^2 = 0$	จาก $p_3$
$p_5$ : $(x - y)^2 = 0$	โดยการแยกตัวประกอบ
$q_2$ : $x - y = 0$	จาก $p_5$
$q_1$ : $x = y$	จาก $q_2$
$q$ : รูป $\triangle XYZ$ เป็น รูป $\triangle$ หน้าจั่ว	จาก $q_1$

Q.E.D หรือ # หรือ ■

ในที่สุดแล้วให้ฟังตระหนักไว้ว่าในทางปฏิบัติวิธีการพิสูจน์ข้างต้นนี้เป็นวิธีการพิสูจน์ที่สิ้นเปลืองเวลาและเนื้อที่มากเกินไป จึงนิยมเขียนวิธีพิสูจน์แบบกะทัดรัด ในลักษณะดังต่อไปนี้

### พิสูจน์

จากสมมติฐาน ( $p$ ) และสูตรเฉพาะของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } XYZ \text{ คือ } \frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ว่า  $x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$$\text{แทนค่า } \textcircled{2} \text{ ลง } \textcircled{1} \text{ แล้วจัดรูปใหม่จะได้ } x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 0$$

ดังนั้น  $x = y$  ซึ่งจะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม  $XYZ$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว #

ดังนั้น การพิสูจน์โดยใช้ The Forward-Backward Method ใช้สำหรับการพิสูจน์ให้  $p \rightarrow q$  เป็นจริงโดยเริ่มต้นจากประพจน์  $q$  ซึ่งเป็นข้อสรุปที่ต้องการแสดงให้เห็นว่าจริงจาก  $q$  ใช้กระบวนการถอยหลัง โดยตั้งคำถามหลัก แล้วตอบคำถามของคำถามหลัก ซึ่งจะเกิดประพจน์ใหม่ในขั้นตอนตรงนี้เรียกว่า  $q_1$  โดยที่  $q_1$  มีสมบัติว่าเมื่อ  $q_1$  เป็นจริงแล้ว  $q$  เป็นจริง จาก  $q_1$  ใช้กระบวนการถอยหลัง เช่นนี้อีก ก็จะได้ประพจน์ใหม่เรียกว่า  $q_2$  และ  $q_2$  จะมีสมบัติว่าเมื่อ  $q_2$  เป็นจริงแล้ว  $q_1$  จริงและโปรดจำไว้ว่า กระบวนการถอยหลังถูกชักจูง (motivate) โดยข้อเท็จจริงของ  $p$  ซึ่งถูกสมมติว่าจริง ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งไม่สามารถที่จะตั้งคำถามหลัก และตอบคำถามของคำถามหลักได้ ในกรณีเช่นนี้ ถึงเวลาที่จะใช้กระบวนการเดินหน้า โดยเริ่มจากการสมมติว่า  $p$  เป็น

จริง จาก  $p$  จะสามารถสร้างประพจน์ใหม่ ๆ ได้อีกหลายประพจน์และโปรดจำไว้ว่า กระบวนการเดินทางมีจุดมุ่งหมายเพื่อเชื่อมต่อกับจุดหมายปลายทางของกระบวนการถอยหลัง ดังนั้น การสร้างประพจน์ใหม่จาก  $p$  ควรเลือกให้เกิดประโยชน์ในการเชื่อมต่อกับกระบวนการถอยหลังเพื่อการสรุปว่า  $q$  เป็นจริง

The Forward-Backward Method เป็นกระบวนการสองกระบวนการซึ่งง่ายต่อการจดจำ ถ้าจะเปรียบประพจน์  $q$  เสมือนเข็มหนึ่งเล่มในกองหญ้า กระบวนการเดินทางจะเริ่มต้นด้วยการสมมติว่า  $p$  เป็นจริง ซึ่งเปรียบเสมือนการพยายามค้นหาเข็มในกองหญ้าโดยเริ่มต้นจากนอกกองหญ้า ส่วนกระบวนการถอยหลังเป็นกระบวนการทำงานที่เริ่มต้นจากเข็มซึ่งอยู่ภายในกองหญ้า แล้วพยายามหาวิถีทางภายในกองหญ้าเพื่อให้พบ  $p$  ที่อยู่นอกกองหญ้า

**ตัวอย่างที่ 4** ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $n^2$  เป็นจำนวนคู่ด้วย

**วิเคราะห์การพิสูจน์** สมมติฐาน ( $p$ ):  $n$  เป็นจำนวนคู่  
 ข้อสรุป ( $q$ ):  $n^2$  เป็นจำนวนคู่  
 ต้องการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริง

การพิสูจน์สามารถนำ The Forward-Backward Method มาใช้ในการพิสูจน์ได้ใน ส่วนของกระบวนการถอยหลัง เราสามารถตั้งคำถามหลักได้ว่า “ทำอย่างไรจึงจะทำให้จำนวนเต็มจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคู่” วิธีตอบคำถามนี้เราจะเลือกนิยามที่เหมาะสมมาตอบคำถามหลักนี้ ซึ่งจะพิสูจน์ให้ปรากฏ ดังต่อไปนี้

Forward	Backward
$p$ : $n$ เป็นจำนวนคู่	$q$ : $n^2$ เป็นจำนวนคู่
$p_1$ : $\exists k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $n = 2k$	$q_1$ : $\exists m \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $n^2 = 2m$
$p_2$ : ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้างได้ว่า $n^2 = 4k^2$	



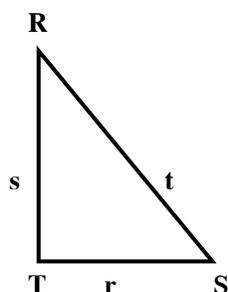
**พิสูจน์** เราสามารถเขียนการพิสูจน์ได้ ดังนี้

ข้อความ	เหตุผล
$p$ : $n$ เป็นจำนวนคู่	กำหนดให้
$P_1$ : $\exists k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $n = 2k$	นิยามของจำนวนคู่
$p_2$ : $n^2 = 4k^2$	จาก $p_1$ ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง
$q_1$ : $\exists m \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $n^2 = 2m$	จาก $p_2$
$q$ : $n^2$ เป็นจำนวนคู่	จาก $q_1$

Q.E.D.

**ตัวอย่างที่ 5** ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก RST มีด้านประกอบมุมฉากยาว  $r$  หน่วยและ  $s$  หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $t$  หน่วย โดยที่  $t$  สอดคล้องกับสมการ  $t = \sqrt{2rs}$  จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม RST เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

**วิเคราะห์การพิสูจน์**



จะพิสูจน์โดยใช้ The Forward-Backward Method โดยตั้งคำถามหลักว่า “ทำอย่างไรจึงจะแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”

การตอบคำถามของคำถามหลัก จะใช้บทนิยามที่ว่า “รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แปลว่า รูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน” ซึ่งแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

Forward	Backward
<p>p: รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก RST มีด้านประกอบมุมฉากยาว r และ s หน่วยและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว t หน่วย โดยที่ t สอดคล้องกับสมการ <math>t = \sqrt{2rs}</math></p> <p><math>p_1: t^2 = (\sqrt{2rs})^2</math> หรือ <math>t^2 = 2rs</math></p> <p><math>p_2: t^2 = r^2 + s^2</math></p> <p><math>p_3: 2rs = r^2 + s^2</math></p> <p><math>p_4: r^2 - 2rs + s^2 = 0</math></p> <p><math>p_5: (r - s)^2 = 0</math></p>	<p>q: รูปสามเหลี่ยม RST เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว</p> <p><math>q_1: r = s</math></p> <p><math>q_2: r - s = 0</math></p>

พิสูจน์ เราสามารถเขียนการพิสูจน์ได้ ดังนี้

ข้อความ	เหตุผล
<p>p: รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก RST มีด้านประกอบมุมฉากยาว r และ s หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว t หน่วย โดยที่ t สอดคล้องกับสมการ <math>t = \sqrt{2rs}</math></p> <p><math>p_1: t^2 = (\sqrt{2rs})^2</math> หรือ <math>t^2 = 2rs</math></p> <p><math>p_2: t^2 = r^2 + s^2</math></p> <p><math>p_3: 2rs = r^2 + s^2</math></p> <p><math>p_4: r^2 - 2rs + s^2 = 0</math></p> <p><math>p_5: (r - s)^2 = 0</math></p> <p><math>q_2: r - s = 0</math></p> <p><math>q_1: r = s</math></p> <p>q: รูปสามเหลี่ยม RST เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว</p>	<p>กำหนดให้</p> <p>จาก p ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส แทนค่า <math>p_1</math> ใน <math>p_2</math> จาก <math>p_3</math> โดยการแยกตัวประกอบ จาก <math>p_5</math> จาก <math>q_2</math> จาก <math>q_1</math></p>

Q.E.D.

## สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
4. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
 เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
 ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้ให้นักเรียนทราบ
2. ผู้สอนทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องรูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันในรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  โดยใช้การถามตอบและให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

3. ผู้สอนให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายวิธีที่สามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$
4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยวิธีตรง โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ
5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายบนกระดานและยกตัวอย่างที่ 2 บนกระดานให้นักเรียนทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 2-3 คนออกมาเฉลยบนกระดานโดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
6. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 3 เพื่อแสดงวิธีการพิสูจน์โดยวิธีเดิหน้าถอยหลังโดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 4 บนกระดานโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายและยกตัวอย่างที่ 5 ให้นักทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 3-4 คนออกมาเฉลยบนกระดาน โดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

### ขั้นสรุปความรู้

8. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นักมีส่วนร่วมสรุปขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์โดยวิธีตรงและวิธีการพิสูจน์โดยวิธีเดินหน้าถอยหลัง

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

9. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 1 และข้อ 3-5 ให้นักทุกคนทำจากนั้นผู้สอนให้นักมีส่วนร่วมเฉลยและสุ่มนิสิต 3-4 คนออกไปเฉลยบนกระดานสำหรับข้อ 4 และข้อ 5

10. ผู้สอนมอบหมายให้นักแต่ละคนเข้าไปทำกิจกรรมบนระบบจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ problem 2 ภายใต้เมนู Homework เพื่อให้นักแต่ละคนเข้าไปฝึกวิเคราะห์การพิสูจน์โดยให้ตรวจสอบว่าการพิสูจน์ที่กำหนดให้ถูกต้องหรือไม่เพราะเหตุใด

ข้อ	คำถาม	ชนิดของคำตอบ	จำนวนผู้ส่งคำตอบ	รายละเอียด	แผนภูมิ
1	What is wrong with the following proof of the theorem ?	Text	28		

หน้าหลัก

Using this Course  
Members: 1 member(s)  
Show All

11. ผู้สอนให้นิสิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 6-7 และข้อ 12 (ข้อย่อยที่ 12.2, 12.4 และ 12.10)

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

12. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	2. นิสิตส่วนใหญ่ทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
3. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 6-7 และข้อ 12 (ข้อย่อยที่ 12.2, 12.4 และ 12.10) (แบบประเมินชิ้นงาน)	3. นิสิตทุกคนทำการบ้านได้ถูกต้อง
4. ทำกิจกรรมรายบุคคลบน M@xLearn (แบบประเมินชิ้นงาน)	4. นิสิตส่วนใหญ่ทำกิจกรรมได้ถูกต้องตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

หลังจากที่ผู้สอนได้อธิบายถึงการใช้กระบวนการเดินหน้า-ถอยหลัง เพื่อนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  พบว่า มีนิสิตบางคนยังไม่เข้าใจการสร้างคำถามหลักในส่วนของกระบวนการถอยหลัง แต่เมื่อผู้สอนได้ให้นิสิตทำแบบฝึกหัด โดยเรียกถามเป็นรายบุคคลก็ทำให้นิสิตเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น และในการทำกิจกรรมรายบุคคล บน M@xLearn พบว่า มีนิสิตบางคนซึ่งเป็นส่วนน้อยที่ยังอ่านคำสั่งไม่รอบคอบหรือยังไม่เข้าใจคำสั่ง จึงทำให้นิสิตทำกิจกรรมออกมาไม่ครบตามที่โจทย์ต้องการหรือไม่ตรงตามวัตถุประสงค์ ซึ่งทำให้ผู้สอนได้วางแผนทางการแก้ปัญหา โดยผู้สอนจะทำการชี้แจงคำสั่งหรือวัตถุประสงค์ที่ต้องการอย่างชัดเจนให้นิสิตได้เข้าใจก่อนทำกิจกรรมในทุก ๆ ครั้ง

**แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

**หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$**

ชื่อ ..... นามสกุล .....

---

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้







### แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  (ต่อ)

จำนวน 3 ชั่วโมง

รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ปีการศึกษา 2548

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้งได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

#### สาระการเรียนรู้

##### การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive)

เนื่องจากข้อความ  $p \rightarrow q$  สมมูลกับ  $\sim q \rightarrow \sim p$  กล่าวคือ มีตารางค่าความจริงเหมือนกัน ซึ่งในทางตรรกศาสตร์สามารถใช้แทนกันได้ จึงสามารถพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  โดยพิสูจน์ข้อความ  $\sim q \rightarrow \sim p$  แทนและในการพิสูจน์  $\sim q \rightarrow \sim p$  นั้นก็ทำเช่นเดียวกับการพิสูจน์  $p \rightarrow q$  ทางตรง หรือถ้าใช้เทคนิควิธีเดินหน้า-ถอยหลัง (The Forward-Backward Method) ก็จะเริ่มจากการทำกระบวนการเดินหน้าจาก  $\sim q$  เท่านั้น โดยสมมติให้  $\sim q$  เป็นจริง แล้วพยายามทำกระบวนการเดินหน้าให้ถึงข้อสรุปว่า  $p$  เป็นเท็จ (หรือกล่าวว่า  $\sim p$  เป็นจริง)

วิธีการพิสูจน์	การสมมติ	การสรุป
Forward - Backward	$p \rightarrow$	(Forward) ... (Backward) $\leftarrow q$
Contrapositive	$\sim q \rightarrow$	(Forward) ... (Backward) $\leftarrow \sim p$

ดังนั้น การพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริงโดยสมมติว่า  $\sim q$  เป็นจริงแล้วแสดงให้ได้ว่า  $\sim p$  เป็นจริง มีรูปแบบดังต่อไปนี้

**พิสูจน์** สมมติว่า  $\sim q$   
 : (ใช้  $\sim q$  บทนิยาม ลัจพจน์  
 หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น  $\sim p$   
 นั่นคือ  $\sim q \rightarrow \sim p$   
 ดังนั้น  $p \rightarrow q$

**ตัวอย่างที่ 1** กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ  
 จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $x^2$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $x$  เป็นจำนวนคู่

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$x$ เป็นจำนวนเต็ม	$x^2$ เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow x$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการแย้งสลับที่ ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$x$ เป็นจำนวนเต็ม	$x^2$ เป็นจำนวนคี่
$x$ เป็นจำนวนคี่	
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

$x$  เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $t$  ที่ทำให้  $x = 2t + 1$

**พิสูจน์** โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่  
 นั่นคือจะพิสูจน์ว่า ถ้า  $x$  เป็นจำนวนคี่ แล้ว  $x^2$  เป็นจำนวนคี่  
 ให้  $x$  เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $t$  ซึ่ง  $x = 2t + 1$   
 จะได้ว่า  $x^2 = (2t + 1)^2$   

$$= 4t^2 + 4t + 1 = 2(2t^2 + 2t) + 1$$
 เพราะฉะนั้น  $x^2$  เป็นจำนวนคี่ #

**ตัวอย่างที่ 2** กำหนดให้  $m, b \in \mathbf{R}$  และ  $m \neq 0$  จงแสดงว่า  $f(x) = mx + b$  เป็นฟังก์ชัน 1-1

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$m, b \in \mathbf{R} \text{ และ } m \neq 0$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$f(x) = mx + b \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}) (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการแย้งสลับที่ ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$m, b \in \mathbf{R} \text{ และ } m \neq 0$$

$$x, y \in \mathbf{R}$$

$$f(x) = f(y)$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x = y$$

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่  $f$  เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะกล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ  $(\forall x, y \in \mathbf{R}) (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$

**พิสูจน์** โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่

สมมติให้  $m, b \in \mathbf{R}$  และ  $m \neq 0$

ต้องการพิสูจน์ว่า  $f(x) = mx + b$  เป็นฟังก์ชัน 1-1

กล่าวคือ จะต้องแสดงว่า  $(\forall x, y \in \mathbf{R}) (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

ให้  $f(x) = f(y)$

นั่นคือ  $mx + b = my + b$

จะได้ว่า  $mx = my$  (สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก)

$x = y$  เมื่อ  $m \neq 0$  (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ)

ดังนั้น  $f(x)$  เป็นฟังก์ชัน 1-1

#

### การพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง (contradiction)

วิธีนี้มีชื่อเรียกอื่น ๆ อีก เช่น **Reductio ad absurdum** หรือ การพิสูจน์ทางอ้อม (indirect proof) เนื่องจาก  $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q \rightarrow c)$  เมื่อ  $c$  แทนข้อความขัดแย้ง จะได้ว่าเราสามารถพิสูจน์  $p \wedge \sim q \rightarrow c$  แทนการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  ได้ซึ่งการพิสูจน์ว่า  $p \wedge \sim q \rightarrow c$  นั้นเราจะสมมติว่า  $p$  และ  $\sim q$  เป็นจริงทั้งคู่แล้วพยายามหาข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow q$  เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้งอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

**พิสูจน์** สมมติว่า  $p$  และ  $\sim q$  เป็นจริง  
 $\therefore$  (ใช้  $p, \sim q$  บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น เกิดข้อความขัดแย้ง ( $c$ )  
 นั่นคือ  $p \wedge \sim q \rightarrow c$   
 ดังนั้น  $p \rightarrow q$  เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่าถ้า  $3 + 4 \neq a$  แล้ว  $6(3 + 4) \neq 6a$

#### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$3 + 4 \neq a$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$6(3 + 4) \neq 6a$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการหาข้อขัดแย้ง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$3 + 4 \neq a$$

$$6(3 + 4) = 6a$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

เกิดข้อขัดแย้ง

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่ สมบัติการเท่ากันสำหรับการคูณ

**พิสูจน์** โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า  $3 + 4 \neq a$  และ  $6(3 + 4) = 6a$

เพราะว่า  $6(3 + 4) = 6a$  เพราะฉะนั้น  $3 + 4 = \frac{6a}{6} = a$

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติว่า  $3 + 4 \neq a$  แสดงว่าที่เราสมมติไว้ไม่เป็นจริง  
ดังนั้นข้อความที่ต้องการพิสูจน์จึงต้องเป็นจริง #

**ตัวอย่างที่ 4** จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a + 2$  เป็นจำนวนคี่ แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคี่

**วิเคราะห์การพิสูจน์**

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a + 2$ เป็นจำนวนคี่	$a$ เป็นจำนวนคี่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการหาข้อขัดแย้ง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a + 2$ เป็นจำนวนคี่ $a$ เป็นจำนวนคู่	เกิดข้อขัดแย้ง
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

$a$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $a = 2m$

**พิสูจน์** โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า  $a + 2$  เป็นจำนวนคี่และ  $a$  เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $a = 2m$

เพราะฉะนั้น  $a + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1)$

จะได้ว่า  $a + 2$  เป็นจำนวนคู่

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งขึ้น แสดงว่าที่เราสมมติไว้ไม่เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความที่ต้องการพิสูจน์จึงต้องเป็นจริง

#

สำหรับการพิสูจน์ข้อความ  $p$  ใด ๆ โดยวิธีหาข้อขัดแย้งสามารถทำได้โดยสมมติให้  $\sim p$  เป็นจริงแล้วแสดงได้ว่า  $q \wedge \sim q$  เนื่องจาก  $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$  เป็นสัจนิรันดร์จึงสรุปได้ว่า  $p$  เป็นจริง ดังนั้นการพิสูจน์ว่า  $p$  เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้งอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

**พิสูจน์** สมมติว่า  $\sim p$  เป็นจริง  
 $\therefore$  (ใช้  $\sim p$  บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว)  
 เพราะฉะนั้น  $q \wedge \sim q$   
 นั่นคือ  $\sim p \rightarrow q \wedge \sim q$   
 ดังนั้น  $p$  เป็นจริง

**หมายเหตุ** นิเสธจะพบว่าการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  โดยวิธีหาข้อขัดแย้งนั้นเป็นกรณีพิเศษของการพิสูจน์ข้อความ  $p$  หรือกล่าวได้ว่าเป็นกรณีที่ข้อความ  $p$  ที่จะพิสูจน์อยู่ในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  นั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 5** จงพิสูจน์ว่า  $\sqrt{2}$  เป็นจำนวนอตรรกยะ

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
-	$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการหาข้อขัดแย้ง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ	เกิดข้อขัดแย้ง
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่  
 จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มเมื่อตัวส่วนไม่เป็นศูนย์  
 $a$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $a = 2m$

### พิสูจน์ โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้  $\sqrt{2}$  เป็นจำนวนตรรกยะ นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{โดยที่ } a, b \in \mathbf{Z}^+ \text{ และ } (a, b) = 1 \text{ [ห.ร.ม ของ } a \text{ และ } b \text{ เป็น } 1]$$

จาก  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  จะได้ว่า  $\frac{a^2}{b^2} = 2$  หรือ  $a^2 = 2b^2$  และ  $b^2$  เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น  $a^2$  เป็นจำนวนคู่ และจะได้ว่า  $a$  เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น  $a = 2n$  สำหรับบาง  $n \in \mathbf{Z}$  และได้ว่า  $a^2 = (2n)^2$

และจาก  $a^2 = 2b^2$  จะได้ว่า  $2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$  และ  $b^2 = 2n^2$  โดยที่  $n^2 \in \mathbf{Z}$

เพราะฉะนั้น  $b^2$  เป็นจำนวนคู่ จึงได้ว่า  $b$  เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น  $b = 2m$  สำหรับบาง  $m \in \mathbf{Z}$

จะได้ว่า 2 เป็นตัวหารร่วมของ  $a$  และ  $b$

นั่นคือ ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  ไม่เท่ากับ 1 ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า  $(a, b) = 1$

ดังนั้น  $\sqrt{2}$  เป็นจำนวนอตรรกยะ #

**ตัวอย่างที่ 6** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ถ้าเห็นว่าเป็นจริงหรือถ้าเห็นว่าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน  
“ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่”

**วิธีทำ** เนื่องจากข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง พิจารณาตัวอย่างค้าน ดังนี้

ให้  $x = 2$  และ  $y = 3$  จะได้ว่า  $x + y = 2 + 3 = 5$  ซึ่งไม่เป็นจำนวนคู่ #

### สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. ใบงานที่ 1-4
4. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
5. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้รวมถึงเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินในกิจกรรมกลุ่มให้นิสิตทราบ
2. ผู้สอนเฉลยโจทย์การบ้านแบบฝึกหัดที่ 3.1 บนกระดานสำหรับข้อที่นิสิตส่วนใหญ่ทำผิดโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย
3. ผู้สอนสุ่มถามนิสิต 6-7 คนเกี่ยวกับงานรายบุคคลที่ผู้สอนมอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn เพื่อตรวจสอบการทำงานของนิสิต พร้อมทั้งให้นิสิตร่วมกันอภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับจากการทำงานใน M@xLearn

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ
5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายบนกระดานและยกตัวอย่างที่ 2 บนกระดานให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 2-3 คนออกมาเฉลยบนกระดานโดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
6. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้งโดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ
7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 3 เพื่อแสดงวิธีการพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้งโดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ
8. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 4 บนกระดานโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายและยกตัวอย่างที่ 5 และ ตัวอย่างที่ 6 ให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 3-4 คนออกมาเฉลยบนกระดานโดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

9. ผู้สอนแบ่งนิสิตออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3 คน โดยนิสิตในแต่ละกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน (ดูจากผลการเรียนที่ผ่านมา) มีทั้งนิสิตหญิงและนิสิตชายโดยกลุ่มเหล่านี้จะเรียกว่า Home Group จากนั้นผู้สอนได้ทำความเข้าใจกับนิสิตเกี่ยวกับการทำงานกลุ่มว่า

9.1) ให้นิสิตเลือกประธาน เลขานุการและกรรมการกลุ่มเพื่อแบ่งบทบาทและหน้าที่กันในระหว่างการทำงาน

9.2) ให้ทุกคนร่วมมือช่วยเหลือกันทำงานในกลุ่มจนเสร็จตามที่ผู้สอนกำหนด

9.3) หากมีปัญหาใดๆ ให้ขอความช่วยเหลือจากเพื่อนในกลุ่ม ก่อนถามผู้สอน

9.4) พุดจากกันเบาๆ อย่างสุภาพ

10. ผู้สอนแจกใบงานที่ 1-4 ให้แต่ละกลุ่มจากนั้นให้ประธานกลุ่มนำใบงานที่ 1-3 ไปแจกให้กับสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มเพื่อให้สมาชิกแต่ละคนรับผิดชอบไปศึกษาใบงานนั้น จากนั้นให้นิสิตที่ได้รับใบงานที่เหมือนกันในแต่ละกลุ่มมาจับกลุ่มกันใหม่ซึ่งจะได้จำนวน 3 กลุ่มโดยให้กลุ่มย่อยหมายเลข 1 ทำใบงานที่ 1 การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ กลุ่มย่อยหมายเลข 2 ทำใบงานที่ 2 การพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง และกลุ่มย่อยหมายเลข 3 ทำใบงานที่ 3 การพิสูจน์ข้อความ p ใดๆ โดยการหาข้อขัดแย้ง โดยกลุ่มย่อยเหล่านี้เราจะเรียกว่า Expert Group ซึ่งนิสิตในแต่ละกลุ่มย่อยสามารถร่วมปรึกษาหารือกัน แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันและช่วยเหลือกันได้ ส่วนใบงานที่ 4 การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้งเป็นใบงานที่ให้สมาชิกในกลุ่ม Home Group ร่วมกันทำเพื่อนำเสนอหน้าชั้นเรียนหลังจากที่สมาชิกของกลุ่มกลับมารวมกลุ่มกัน

11. เมื่อถึงเวลาที่กำหนด ผู้สอนให้นิสิตทุกคนแยกย้ายกลับเข้ากลุ่มเดิม (Home Group) เพื่อให้นิสิตแต่ละคนอธิบาย สรุปสาระเรื่องราวในใบงานของตนให้เพื่อนสมาชิกฟังจนเข้าใจจนครบทุกหัวข้อ จากนั้นผู้สอนให้นิสิตในกลุ่มร่วมกันทำใบงานที่ 4 เพื่อตรวจสอบว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้โดยแต่ละกลุ่มจะมีเลขานุการกลุ่มทำหน้าที่จัดบันทึกคำตอบที่ได้ของกลุ่มลงในกระดาษที่แจกให้แล้วให้เพื่อนในกลุ่มตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อยและเซ็นชื่อกำกับก่อนส่งผู้สอน

12. เมื่อนิสิตในแต่ละกลุ่มทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้สอนทำการสุมนิสิตจากแต่ละกลุ่ม ออกมาอธิบายเพื่อนำเสนองานในกลุ่มของตนหน้าชั้นเรียน หลังจากที่แต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานเสร็จให้นิสิตทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายสรุปในสาระความรู้ที่ได้รับทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

### ขั้นสรุปความรู้

13. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นิสิตร่วมกันสรุปขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้ง

14. ผู้สอนแบ่งนิสิตออกเป็น 4 กลุ่มโดยให้นิสิตแต่ละกลุ่มเข้าไปทำกิจกรรมบนระบบจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วน Forum 3 ภายใต้เมนู Group ของแต่ละกลุ่ม เช่น กลุ่มที่ 1 ก็จะเป็น Group 1

The screenshot shows a web browser window with the address <http://course.ku.ac.th/lms/index.php>. The page header features the Kasetst University logo and name. The main content is a forum discussion titled 'นิสิตถาม [ Forum 3 ] { Discussion 3 for group 1 ที่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่ม 1 ศึกษาและกันกว่าเกี่ยวกับ Direct pf/ Forward-Backward / Contrapositive and Contradiction proof จากหนังสือ เอกสาร Web-resource ใน website ราชวรา หรือ Resources เมื่อร่วมกับปริญญานิพนธ์ " วิธีการพิสูจน์ที่สามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความ ถ้า p แล้ว q นั้นมีวิธีการใดบ้าง และแต่ละวิธีมีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร " Deadline : 22/08/2548 (23.59 น.) }'. The forum posts include:

- Post b4706066: สวัสดีค่ะ เพื่อน ๆ ทราบกันไหมว่า วิธีการพิสูจน์ที่สามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  ได้ มีวิธีอะไรบ้าง ช่วยบอกหน่อย [ 17-08-2005 04:35 ]
- Post b4706319: เรารู้จะมี 3 วิธีคือ 1.วิธีตรง (Direct proofs) 2.วิธีแย้งสลับที่ (Proof by using contrapositive) 3.วิธีหาข้อขัดแย้ง (Proof by contradiction) [ 17-08-2005 04:39 ]
- Post b4706066: อ้อ ใช่ ๆ เราพอจะรู้อย่างนั้นว่า เกี่ยวกับการคิดแบบที่ 1 ละ วิธีตรง ( Direct Proof ) จะพิสูจน์เฉพาะกรณีที่มีสมมติให้ข้างหน้าเป็นจริง ใช่ไหม [ 17-08-2005 04:42 ]
- Post b4706319: ใช่ เพราะว่าถ้าข้างหน้าเป็นเท็จแล้ว ไม่ข้างหลังจะเป็นจริงหรือเท็จ ค่าความจริงที่ได้ก็จะเป็นจริงเสมอ เพราะว่าเชื่อมด้วย เครื่องหมาย  $\rightarrow$  ดังนั้นจึงพิจารณาแค่เฉพาะกรณีที่ข้างหน้าเป็นจริง ก็เพียงพอที่จะสรุปคำตอบได้ละ [ 17-08-2005 04:46 ]
- Post b4706319: [ 17-08-2005 04:47 ]
- Post b4706066: อ้อ เราจะสามารถสมมติให้  $p$  เป็นจริง ได้เลยใช่ไหมละ แล้วก็พิสูจน์โดยการอ้างทฤษฎีเก่า ๆ ที่รู้ๆ มาแล้วไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้  $q$  ใช่ไหมละ [ 17-08-2005 04:51 ]
- Post b4706063: ไม่ใช่เฉพาะทฤษฎีเท่านั้นนะ มีรวมถึงนิยาม สัจพจน์ หรือความรู้ต่างๆที่สมมติกันก็สามารถนำมาใช้ช่วยในการพิสูจน์ได้ [ 19-08-2005 01:15 ]

The forum also includes a section for 'เขียนข้อความ' (Write message) with a text input field and a 'ส่ง' (Send) button. The right sidebar shows user information for 'คุณเลือก' (Selected user) and 'รายชื่อผู้เข้าขณะนี้ (1)' (Current users: 1), listing 'feduenc (you)'. The bottom status bar shows the system time as 12:44.

เพื่อให้ผลิตร่วมกันอภิปราย เสนอความคิดเห็นและสรุปประเด็นเกี่ยวกับหัวข้อที่เรียนในวันนี้ที่กำหนดไว้ใน Forum 3 ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนด้วยกันโดยให้ผลิตแต่ละคนในแต่ละกลุ่มแสดงความคิดเห็นของตนเองพร้อมทั้งร่วมอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในสิ่งที่สมาชิกกลุ่มเสนอมาด้วย

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

15. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 2 และข้อ 8-11 และแบบฝึกหัดที่ 3.2 ข้อ 1 และข้อ 8 ให้ผลิตทุกคนทำ จากนั้นผู้สอนให้ผลิตร่วมกันเฉลยและสุ่มผลิต 4-5 คนไปเฉลยบนกระดานสำหรับแบบฝึกหัดที่ 3.2 ข้อ 1 และข้อ 8

16. ผู้สอนให้ผลิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 12 (ข้อย่อยที่ 12.5-12.7 และข้อย่อยที่ 12.10) และแบบฝึกหัดที่ 3.2 ข้อ 9

17. ผู้สอนมอบหมายให้ผลิตแต่ละคนเข้าไปทำกิจกรรมบนระบบจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วนของ problem 3 ภายใต้เมนู Homework เพื่อให้ผลิตแต่ละคนเข้าไปฝึกวิเคราะห์การพิสูจน์โดยให้ตรวจสอบว่าการพิสูจน์ที่กำหนดให้ถูกต้องหรือไม่เพราะเหตุใด

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

18. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมกลุ่ม (แบบประเมินการทำงานกลุ่ม)	2. นิสิตทำกิจกรรมได้ถูกต้อง
3. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3. นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอน แบบฝึกหัดที่ 3.1 ข้อ 12 (ข้อย่อยที่ 12.5-12.7 และ ข้อย่อยที่ 12.10) และ แบบฝึกหัดที่ 3.2 ข้อ 9 (แบบประเมินชิ้นงาน)	4. นิสิตทุกคนทำการบ้านได้ถูกต้อง
5. ทำกิจกรรมกลุ่ม บน M@xLearn (แบบประเมินชิ้นงาน)	5. นิสิตส่วนใหญ่ทำกิจกรรมได้ถูกต้องตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ
6. ทำกิจกรรมรายบุคคล บน M@xLearn (แบบประเมินชิ้นงาน)	6. นิสิตส่วนใหญ่ทำกิจกรรมได้ถูกต้องตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

นิสิตร่วมมือกันดีในการทำกิจกรรมกลุ่ม โดยทุก ๆ คนในกลุ่มมีโอกาสช่วยกันและร่วมกันอภิปรายทำให้ผลงานของกลุ่มมีความชัดเจนและถูกต้อง

**ใบงานที่ 1**  
**เรื่อง การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive)**

**คำชี้แจง** ให้นักศึกษาหัวข้อการพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่จากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในหน้า 78-79 พร้อมทั้งทำกิจกรรมที่กำหนดให้โดยนิตสามารถปรึกษาหารือหรือเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม (Expert Group) ที่ได้รับมอบหมายให้ศึกษาหัวข้อนี้เพื่อนิตจะได้นำความรู้ที่ได้จากการศึกษากลับไปสอนสมาชิกในกลุ่ม (Home Group) ที่ไม่ได้ศึกษาหัวข้อนี้

1. เพราะเหตุใด เราจึงสามารถนำวิธีการแย้งสลับที่มาใช้ในการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  ได้
2. ให้นักนิตรูปร่างขั้นตอนการพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่
3. เพราะอะไรและเมื่อใดเราจึงจะใช้วิธีการแย้งสลับที่มาทำการพิสูจน์แทนวิธีตรงหรือวิธีเดินหน้าถอยหลัง สำหรับข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$

#####

ใบงานที่ 2  
เรื่อง การพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง (contradiction)

**คำชี้แจง** ให้นักศึกษาหัวข้อการพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$  โดยใช้วิธีการหาข้อขัดแย้งจากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในหน้า 79-81 พร้อมทั้งทำกิจกรรมที่กำหนดให้โดยนักศึกษสามารถปรึกษาหารือหรือเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม (Expert Group) ที่ได้รับมอบหมายให้ศึกษาหัวข้อนี้เพื่อนักศึกษาจะได้นำความรู้ที่ได้จากการศึกษากลับไปสอนสมาชิกในกลุ่ม (Home Group) ที่ไม่ได้ศึกษาหัวข้อนี้

1. เพราะเหตุใด เราจึงสามารถนำวิธีการหาข้อขัดแย้งมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  ได้
2. ให้นักศึกษาสรุปขั้นตอนการพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง
3. เพราะอะไรและเมื่อใดเราจึงจะใช้วิธีการหาข้อขัดแย้งมาทำการพิสูจน์แทนวิธีตรงหรือวิธีเดินหน้าถอยหลัง สำหรับข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$

#####

**ใบงานที่ 3**  
**เรื่อง การพิสูจน์ข้อความ  $p$  ใด ๆ โดยการหาข้อขัดแย้ง**

**คำชี้แจง** ให้นักศึกษาหัวข้อการพิสูจน์ข้อความ  $p$  ใด ๆ โดยการหาข้อขัดแย้งจากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในหน้า 93-95 พร้อมทั้งทำกิจกรรมที่กำหนดให้โดยนักศึกษสามารถปรึกษาหารือหรือเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่ม (Expert Group) ที่ได้รับมอบหมายให้ศึกษาหัวข้อนี้เพื่อนักศึกษจะได้ นำความรู้ที่ได้จากการศึกษา กลับไปสอนสมาชิกในกลุ่ม (Home Group) ที่ไม่ได้ศึกษาหัวข้อนี้

1. การนำวิธีการหาข้อขัดแย้งมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความ  $p$  ใด ๆ กับข้อความที่อยู่ในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  มีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร
2. ให้นักศึกษสรุปขั้นตอนการพิสูจน์ว่า  $p$  เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้ง

#####

**ใบงานที่ 4 (กลุ่ม)**  
**เรื่อง การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้ง**

**คำชี้แจง** หลังจากที่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มได้รายงานผลงานหรือสรุปสาระความรู้ที่แต่ละคนรับผิดชอบให้แก่เพื่อนสมาชิกในกลุ่ม (Home Group) ได้เรียนรู้ร่วมกันแล้วให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มร่วมกันทำกิจกรรมต่อไปนี้เพื่อตรวจสอบว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้และทุกคนพร้อมที่จะเป็นตัวแทนกลุ่มเพื่อนำเสนอผลงานของกลุ่ม

1. ให้สมาชิกในกลุ่มร่วมกันสรุปสาระความรู้ที่ได้ทั้งหมดจากการศึกษาเรื่องการพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้งโดยอาจสรุปออกมาในรูปแบบผังความคิด (mind mapping) หรืออื่น ๆ ตามมติของกลุ่ม
2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a + b$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคู่หรือ  $b$  เป็นจำนวนคี่ โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $x^2 + y = 13$  และ  $y \neq 4$  แล้ว  $x \neq 3$  โดยใช้วิธีการหาข้อขัดแย้ง

#####

**แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

**หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \rightarrow q$**

ชื่อ ..... นามสกุล .....

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการแย้งสลับที่และวิธีการหาข้อขัดแย้งโดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้



## 2. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

.....

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....

.....

พิสูจน์ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  และ การแจกกรณี  
รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

จำนวน 3 ชั่วโมง  
ปีการศึกษา 2548

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีการพิสูจน์ข้อความแบบ  $p \leftrightarrow q$  และวิธีการแจกกรณีได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

#### สาระการเรียนรู้

##### การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$

เนื่องจาก  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \leftrightarrow q)$  ดังนั้นวิธีหนึ่งที่เราจะพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  โดยแยกการพิสูจน์เป็น 2 ตอน คือ

1)  $p \rightarrow q$  ขั้นตอนนี้เรียกว่า “if part” หรือ “sufficient part” ( $p$  เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับ  $q$ ) และ

2)  $q \rightarrow p$  ขั้นตอนนี้เรียกว่า “only if part” หรือ “necessity part” ( $p$  เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ  $q$ )

นอกจากนี้เรายังอาจใช้วิธีการแย้งสลับที่มาช่วยในการพิสูจน์ได้ กล่าวคือจะพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  เราต้องแสดงว่า  $p \rightarrow q$  และ  $\sim p \rightarrow \sim q$  เป็นจริง

อีกวิธีหนึ่งที่เรานิยมใช้ในการพิสูจน์ข้อความแบบ  $p \leftrightarrow q$  ซึ่งเรียกว่า **Iff-String** คือ การสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจาก  $p$  ไป  $q$  ดังนี้

$$\begin{array}{lll}
 p \leftrightarrow q_1 & \text{อาจจะเขียนสั้น ๆ ได้เป็น} & p \leftrightarrow q_1 \\
 q_1 \leftrightarrow q_2 & & \leftrightarrow q_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 q_n \leftrightarrow q & & \leftrightarrow q
 \end{array}$$

**ตัวอย่างที่ 1** จงพิสูจน์ว่า  $n$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ  $n^2$  เป็นจำนวนคู่

**วิเคราะห์การพิสูจน์** เนื่องจากจะพิสูจน์ว่า  $n$  เป็นจำนวนคู่  $\leftrightarrow n^2$  เป็นจำนวนคู่  
ดังนั้นจึงต้องแยกพิจารณาเป็นสองกรณี คือ

**กรณีที่ 1** ( $\rightarrow$ )  $n$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow n^2$  เป็นจำนวนคู่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$n$ เป็นจำนวนคู่	$n^2$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists m \in \mathbf{Z} (n = 2m)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (n^2 = 2m)$
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่  
 $n$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $n = 2m$

**กรณีที่ 2** ( $\leftarrow$ )  $n^2$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow n$  เป็นจำนวนคู่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$n^2$ เป็นจำนวนคู่	$n$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists k \in \mathbf{Z} (n^2 = 2k)$	$\exists k \in \mathbf{Z} (n = 2k)$
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่  
 $n$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $n = 2k$

**พิสูจน์** เราจะต้องแสดงว่า 1)  $n$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow n^2$  เป็นจำนวนคู่  
และ 2)  $n^2$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow n$  เป็นจำนวนคู่

( $\rightarrow$ ) ใช้การพิสูจน์  $p \rightarrow q$  โดยตรง

นั่นคือ จะแสดงว่า  $n$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow n^2$  เป็นจำนวนคู่

สมมติให้  $n$  เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $m$  ซึ่ง  $n = 2m$

และได้ว่า  $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$  และเนื่องจาก  $2m^2$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $n^2$  เป็นจำนวนคู่

( $\leftarrow$ ) ใช้วิธีการแย้งสลับที่

นั่นคือ จะแสดงว่า  $n$  เป็นจำนวนคี่  $\rightarrow n^2$  เป็นจำนวนคี่

สมมติให้  $n$  เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ซึ่ง  $n = 2k + 1$

และได้ว่า  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

และเนื่องจาก  $2k^2 + 2k$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จะได้ว่า  $n^2$  เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ จากทั้งสองกรณี จะได้ว่า  $n$  เป็นจำนวนคู่  $\leftrightarrow n^2$  เป็นจำนวนคู่ #

**ตัวอย่างที่ 2** ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเซตใดๆ จงพิสูจน์ว่า  $A \cap B = B \cap A$

**วิเคราะห์การพิสูจน์** เนื่องจากจะพิสูจน์ว่า  $A \cap B = B \cap A$

ดังนั้นจึงต้องแยกพิจารณาเป็นสองกรณีคือ

**กรณีที่ 1** ( $\rightarrow$ )  $(A \cap B) \subseteq (B \cap A)$

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$A$  และ  $B$  เป็นเซตใดๆ

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$(A \cap B) \subseteq (B \cap A)$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$A$  และ  $B$  เป็นเซตใดๆ

$x \in A \cap B$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$x \in B \cap A$

**กรณีที่ 2 ( $\leftarrow$ )**  $(B \cap A) \subseteq (A \cap B)$

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
A และ B เป็นเซตใดๆ	$(B \cap A) \subseteq (A \cap B)$
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
A และ B เป็นเซตใดๆ	$x \in A \cap B$
$x \in B \cap A$	
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 
$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in U, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

**พิสูจน์** ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ และ  $x \in U$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } x \in A \cap B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{(นิยาม } A \cap B) \\ &\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A && (p \wedge q \equiv q \wedge p) \\ &\leftrightarrow x \in B \cap A && \text{(นิยาม } B \cap A) \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า  $A \cap B = B \cap A$  #

โดยทั่วไป ถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่าข้อความ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  สมมูลกันทุกคู่ กล่าวคือ  $(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \leftrightarrow p_n) \wedge (p_n \leftrightarrow p_1)$  เราเพียงแต่แสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเท่านั้น คือ  $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1)$

**ตัวอย่างที่ 3** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

$p_1$  :  $a$  เป็นจำนวนคู่

$p_2$  :  $a^2$  หารด้วย 4 ลงตัว ( $4|a^2$ )

$p_3$  :  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

**วิเคราะห์การพิสูจน์** เนื่องจากจะพิสูจน์ว่าข้อความ  $p_1$ ,  $p_2$  และ  $p_3$  สมมูลกันทุกคู่ ดังนั้นจึงต้องแสดงการพิสูจน์เป็นสามกรณี คือ

**กรณีที่ 1** ( $p_1 \rightarrow p_2$ )  $a$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow a^2$  หารด้วย 4 ลงตัว

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a$ เป็นจำนวนคู่	$a^2$ หารด้วย 4 ลงตัว
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (a^2 = 4m)$

**กรณีที่ 2** ( $p_2 \rightarrow p_3$ )  $a^2$  หารด้วย 4 ลงตัว  $\rightarrow a^2$  เป็นจำนวนคู่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a^2$ หารด้วย 4 ลงตัว	$a^2$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists k \in \mathbf{Z} (a^2 = 4k)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (a = 2m)$

**กรณีที่ 3** ( $p_3 \rightarrow p_1$ )  $a^2$  เป็นจำนวนคู่  $\rightarrow a$  เป็นจำนวนคู่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a^2$ เป็นจำนวนคู่	$a$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีการแย้งสลับที่ ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k+1)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (a^2 = 4m+1)$
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
  - $a$  เป็นจำนวนคู่  $\leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k)$
  - $a$  เป็นจำนวนคี่  $\leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k+1)$
  - $a^2$  หารด้วย 4 ลงตัว  $\leftrightarrow \exists m \in \mathbf{Z} (a^2 = 4m)$

**พิสูจน์** 1) จะแสดงว่า  $p_1 \rightarrow p_2$  โดยวิธีตรง

ให้  $a$  เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ซึ่ง  $a = 2k$

เพราะฉะนั้น  $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$  แต่เพราะว่า  $k^2$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จึงได้ว่า  $a^2$  หารด้วย 4 ลงตัว

2) จะแสดงว่า  $p_2 \rightarrow p_3$  โดยวิธีตรง

ให้  $a \in \mathbf{Z}$  และ  $4 \mid a^2$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม  $k$  ซึ่ง  $a^2 = 4k = 2(2k)$  แต่เพราะว่า  $2k$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

3) จะแสดงว่า  $p_3 \rightarrow p_1$

นั่นคือจะแสดงว่าถ้า  $a^2$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคู่

ซึ่งได้เคยพิสูจน์แล้วโดยใช้วิธีการแย้งสลับที่ (จากตัวอย่างที่ 3.1.6 ในเอกสาร)

ดังนั้นจากทั้งสามกรณีสามารถสรุปได้ว่า ข้อความ  $p_1$ ,  $p_2$  และ  $p_3$  สมมูลกันทุกคู่ #

### การพิสูจน์ข้อความโดยการแจกกรณี (Proof by Cases)

เนื่องจากข้อความ  $(p \vee q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$  กล่าวคือถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความ  $p \vee q \rightarrow r$  เป็นจริงทำได้โดยการพิสูจน์ว่า  $p \rightarrow r$  และ  $q \rightarrow r$  เป็นจริงเราจะเรียกการพิสูจน์ในลักษณะนี้ว่า การพิสูจน์แบบการแจกกรณี

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจะพิสูจน์ว่า  $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow r$  จริงก็โดยการพิสูจน์ว่า  $(p_1 \rightarrow r) \wedge (p_2 \rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow r)$  เป็นจริงนั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 4** จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

**วิเคราะห์การพิสูจน์** เนื่องจากจะพิสูจน์ว่า  $a$  เป็นจำนวนเต็ม  $\rightarrow a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะแยกพิจารณาเป็นสองกรณีคือ  $a$  เป็นจำนวนคู่ และ  $a$  เป็นจำนวนคี่

**กรณีที่ 1**  $a$  เป็นจำนวนคู่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a$ เป็นจำนวนคู่	$a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists n \in \mathbf{Z} (a = 2n)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (a^2 - a = 2m)$
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

$a$  เป็นจำนวนคู่  $\leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k)$

## กรณีที่ 2 $a$ เป็นจำนวนคี่

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$a$ เป็นจำนวนคี่	$a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่
- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า
 

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$\exists n \in \mathbf{Z} (a = 2n + 1)$	$\exists m \in \mathbf{Z} (a^2 - a = 2m)$
- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่
 

$a$ เป็นจำนวนคี่ $\leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k + 1)$
$a$ เป็นจำนวนคู่ $\leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} (a = 2k)$

**พิสูจน์** ในการพิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่ เราจะต้องทำการพิสูจน์ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 พิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่  
 กรณีที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคี่แล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

**กรณีที่ 1** สมมติให้  $a$  เป็นจำนวนคู่ (โดยวิธีตรง)

ดังนั้นจะได้ว่า  $a = 2n$  โดยที่  $n \in \mathbf{Z}$

เพราะฉะนั้น  $a^2 - a = (2n)^2 - 2n = 4n^2 - 2n = 2(2n^2 - n)$

แต่เพราะว่า  $2n^2 - n$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคู่แล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

**กรณีที่ 2** สมมติให้  $a$  เป็นจำนวนคี่ (โดยวิธีตรง)

ดังนั้นจะได้ว่า  $a = 2n + 1$  โดยที่  $n \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } a^2 - a &= (2n + 1)^2 - (2n + 1) = (4n^2 + 4n + 1) - (2n + 1) \\ &= 4n^2 + 2n = 2(2n^2 + n) \end{aligned}$$

แต่เพราะว่า  $2n^2 + n$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคี่แล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่

จากทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $a^2 - a$  เป็นจำนวนคู่ #

**ตัวอย่างที่ 5** จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริงลบหรือ  $x = 0$  หรือ  $x$  เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว  $x \leq |x|$

**วิเคราะห์การพิสูจน์** เนื่องจากจะพิสูจน์ว่า  $(x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0) \rightarrow x \leq |x|$

ดังนั้นจะแยกพิจารณาเป็นสามกรณี คือ  $x < 0$  และ  $x = 0$  และ  $x > 0$

**กรณีที่ 1:  $x < 0$**  วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x \in \mathbf{R}$$

$$x < 0$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x \leq |x|$$

**กรณีที่ 2:  $x = 0$**  วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x \in \mathbf{R}$$

$$x = 0$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x \leq |x|$$

**กรณีที่ 3:  $x > 0$**  วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ วิธีตรง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x \in \mathbf{R}$$

$$x > 0$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x \leq |x|$$

บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**พิสูจน์** ให้  $x \in \mathbb{R}$  ซึ่ง  $x < 0$  หรือ  $x = 0$  หรือ  $x > 0$

**กรณี  $x < 0$**  จะได้ว่า  $|x| = -x$  เนื่องจาก  $x < 0$  ดังนั้น  $-x > 0$

และจาก  $x < 0$  และ  $-x > 0$  ดังนั้น  $x < -x = |x|$  จึงได้ว่า  $x \leq |x|$

**กรณี  $x = 0$**  จะได้ว่า  $|x| = 0$  ดังนั้น  $x = |x|$  จึงได้ว่า  $x \leq |x|$

**กรณี  $x > 0$**  จะได้ว่า  $|x| = x$  ดังนั้น  $x \leq |x|$

จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า  $(x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0) \rightarrow x \leq |x|$  #

### สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
4. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

### กิจกรรมการเรียนรู้

#### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และเนื้อหาหรือหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้ให้นิสิตทราบ
2. ผู้สอนสุ่มถามนิสิต 6-7 คนเกี่ยวกับงานที่ผู้สอนมอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn เพื่อตรวจสอบการทำงานของนิสิต พร้อมทั้งให้นิสิตร่วมกันอภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับจากการทำงานใน M@xLearn

3. ผู้สอนแจกแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 3 เพื่อทำการทดสอบนิสิตเรื่องการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \rightarrow q$  โดยใช้เวลาในการสอบ 45 นาที และเมื่อนิสิตทำแบบทดสอบเสร็จตามเวลาที่กำหนดผู้สอนทำการเฉลยแบบทดสอบ

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \leftrightarrow q$  โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายบนกระดานและยกตัวอย่างที่ 2 และ 3 บนกระดานให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 2-3 คนออกมาเฉลยบนกระดานโดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

6. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นิสิตร่วมกันอภิปรายถึงวิธีในการพิสูจน์ข้อความโดยการแจกกรณี จากนั้นผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความโดยการแจกกรณี โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 4 บนกระดานโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายและยกตัวอย่างที่ 5 ให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 2-3 คนออกมาเฉลยบนกระดาน โดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

### ขั้นสรุปความรู้

8. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นิสิตร่วมกันสรุปขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $p \leftrightarrow q$  และการพิสูจน์ข้อความโดยการแจกกรณี

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

9. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.3 ข้อ 1 (ข้อย่อยที่ 1.3, 1.5 และ 1.7) และแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1 (ข้อย่อยที่ 1.7 และ 1.9) ให้นิสิตทุกคนทำ จากนั้นผู้สอนให้นิสิตร่วมกันเฉลยและสุ่มนิสิต 6-7 คนออกไปเฉลยบนกระดานทีละข้อ

10. ผู้สอนให้นิสิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.3 ข้อ 2 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.1) และข้อ 4 (ข้อย่อยที่ 4.1) และแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1 (ข้อย่อยที่ 1.4)

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

11. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	2. นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
3. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.3 ข้อ 2 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.1) และข้อ 4 (ข้อย่อยที่ 4.1) และแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1 (ข้อย่อยที่ 1.4) (แบบประเมินชิ้นงาน)	3. นิสิตทุกคนทำการบ้านได้ถูกต้อง

### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

นิสิตสนใจเรียนมากขึ้น เมื่อผู้สอนให้นิสิตแต่ละคนทำแบบฝึกหัด จากนั้นผู้สอนสุ่มเรียกนิสิตออกไปทำโจทย์ปัญหาการพิสูจน์บนกระดานหน้าชั้นเรียน

แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ข้อความ  $p \leftrightarrow q$  และการแจงกรณี

ชื่อ ..... นามสกุล .....

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการพิสูจน์ข้อความแบบ  $p \leftrightarrow q$  และวิธีการแจงกรณีโดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้

1. กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ

จงพิสูจน์ว่า  $(a + b)^2$  เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ  $a$  เป็นจำนวนคี่

### วิเคราะห์การพิสูจน์

**กรณีที่ 1** ( $\rightarrow$ ) .....

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....

**กรณีที่ 2** ( $\leftarrow$ ) .....

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....



2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $a^2 + 3a + 1$  เป็นจำนวนคี่

วิเคราะห์การพิสูจน์ เนื่องจากจะพิสูจน์ว่า .....  
 ดังนั้นจะแยกพิจารณาเป็นสองกรณีคือ .....

กรณีที่ 1 .....

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....

กรณีที่ 2 .....

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....



**แผนการจัดการเรียนรู้**  
**หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จและมีอย่างน้อยหนึ่ง**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

จำนวน 3 ชั่วโมง  
 ปีการศึกษา 2548

### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านและวิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งหรือมีเพียงหนึ่งเดียวได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

### สาระการเรียนรู้

#### การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน (disproof by counterexample)

การที่จะพิสูจน์ว่าข้อความ  $p$  เป็นเท็จนั้นสามารถทำได้โดยการพิสูจน์ว่าข้อความ  $\sim p$  เป็นจริงนั่นเอง สำหรับการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านเป็นการคัดค้านข้อความ “สำหรับทุก ๆ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์  $U$  ที่สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้” กล่าวคือเป็นการพิสูจน์ว่า  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จหรือ  $\sim \forall x, p(x)$  เป็นจริงนั่นเองหรือกล่าวได้ว่า เราสามารถพิสูจน์  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จ (หรือ  $\sim \forall x, p(x)$  เป็นจริง) โดยพิสูจน์ว่า  $\exists x, \sim p(x)$  เป็นจริง เนื่องจาก  $\sim \forall x, p(x) \equiv \exists x, \sim p(x)$

ดังนั้น การพิสูจน์ว่า  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จอยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

**พิสูจน์** เลือก  $a$  ที่เหมาะสม โดยให้  $a \in U$   
 $\vdots$   
 เพราะฉะนั้น  $\sim p(a)$  เป็นจริง  
 นั่นคือ  $\exists x, \sim p(x)$  เป็นจริง  
 ดังนั้น  $\forall x, p(x)$  เป็นเท็จ

**ตัวอย่างที่ 1** จงพิสูจน์ว่าข้อความสำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  จะมีจำนวนเต็ม  $x, y, z$  ที่ทำให้  $x^2 + y^2 + z^2 = n$  เป็นเท็จ

### วิเคราะห์การพิสูจน์

จากข้อความข้างบนสามารถเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x, y, z \in \mathbf{Z} \ni x^2 + y^2 + z^2 = n$  การที่จะแสดงว่าข้อความเป็นเท็จ เราต้องแสดงว่า  $\exists n \in \mathbf{N} \ni \forall x, y, z \in \mathbf{Z}, x^2 + y^2 + z^2 \neq n$  จริง กล่าวคือ มีจำนวนนับ  $n$  ตัวหนึ่งซึ่ง  $x^2 + y^2 + z^2 \neq n$  ไม่ว่า  $x, y, z$  จะเป็นจำนวนเต็มใดๆ ก็ตาม

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbf{N}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$\exists x, y, z \in \mathbf{Z} \ni x^2 + y^2 + z^2 = n \text{ เป็นเท็จ}$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n = 7$$

$$x, y, z \in \mathbf{Z}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq n$$

**พิสูจน์** โดยการยกตัวอย่างค้าน

เนื่องจาก 7 เป็นจำนวนนับจำนวนหนึ่ง

การที่จะเขียน 7 ในรูป  $x^2 + y^2 + z^2$  เมื่อ  $x, y, z \in \mathbf{Z}$

เนื่องจาก  $3^2 = (-3)^2 = 9$  ซึ่งมากกว่า 7

จะเห็นว่า  $x, y, z$  น่าจะต้องมีค่าเป็น  $0, \pm 1, \pm 2$  เท่านั้น

แต่ถ้าลองแทนค่า  $x, y, z$  ด้วยจำนวนต่างๆ ในเซต  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จะเห็นว่าไม่มีกรณีใดเลยที่จะได้ว่า  $x^2 + y^2 + z^2 = 7$

ดังนั้น  $7 \neq x^2 + y^2 + z^2$  ไม่ว่า  $x, y, z$  จะเป็นจำนวนเต็มใด

นั่นคือ  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x, y, z \in \mathbf{Z} \ni x^2 + y^2 + z^2 = n$  เป็นเท็จ #

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า  $\forall x, [x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 > x]$  เป็นเท็จ

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x \in \mathbf{R}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x^2 > x \text{ เป็นเท็จ}$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x = \frac{1}{2}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x^2 \leq x$$

**พิสูจน์** โดยการยกตัวอย่างค้าน เนื่องจาก  $\frac{1}{2}$  เป็นจำนวนจริงและ  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

นั่นคือ  $\exists x \ni (x \in \mathbf{R} \wedge x^2 \leq x)$  เป็นจริง

ดังนั้น  $\forall x, [x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 > x]$  เป็นเท็จ

#

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า “ผลคูณของจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ” เป็นเท็จ

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x, y \in \mathbf{Q}^c$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$xy \in \mathbf{Q}^c \text{ เป็นเท็จ}$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$xy \notin \mathbf{Q}^c$$

**พิสูจน์** โดยการยกตัวอย่างค้าน ข้อความที่กำหนด คือ

$\forall x \forall y$  [x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ  $\rightarrow$  xy เป็นจำนวนอตรรกยะ]

เนื่องจาก  $\sqrt{2}$  เป็นจำนวนอตรรกยะและ  $(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$  ไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ

จึงได้ว่า  $\sqrt{2}$  เป็นจำนวนอตรรกยะและ  $(\sqrt{2})(\sqrt{2})$  ไม่ใช่จำนวนอตรรกยะเป็นจริง

นั่นคือ  $\exists x = \sqrt{2} \exists y = \sqrt{2}$  [x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะและ xy ไม่ใช่

จำนวนอตรรกยะ] เป็นจริง

ดังนั้น  $\forall x \forall y$  [x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ  $\rightarrow$  xy เป็นจำนวนอตรรกยะ] #

**การพิสูจน์ว่ามี (อย่างน้อยหนึ่ง) และมีเพียงหนึ่งเดียว (Proof of Existence and Uniqueness)**

การพิสูจน์ว่ามีเป็นการพิสูจน์ว่ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้ กล่าวคือเป็นการพิสูจน์ว่า  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง โดยการหาสมาชิกหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์มาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ p(x) เป็นจริง

รูปแบบการพิสูจน์ คือ

**พิสูจน์** เลือก  $a \in U$  ที่เหมาะสม

$\vdots$

เพราะฉะนั้น  $p(a)$  เป็นจริง

ดังนั้น  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 4** จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนเต็ม x อย่างน้อยหนึ่งจำนวนซึ่ง  $\frac{1}{x} = x$ ”

**วิเคราะห์การพิสูจน์**

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

-

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$\exists x \in \mathbf{Z} \ni \frac{1}{x} = x$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ การพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x = 1$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$\frac{1}{x} = x$$

**พิสูจน์** โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า  $\exists x \in \mathbf{Z} \ni \frac{1}{x} = x$  เป็นจริง

ให้ (เลือก)  $x = 1$  และ  $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 = x$  เป็นจริง

นั่นคือ  $\exists x \in \mathbf{Z} \ni \frac{1}{x} = x$  เป็นจริง #

**ตัวอย่างที่ 5** จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนจริง  $x$  ที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ”

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

-

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$\exists x \in \mathbf{R} \ni x^2 - 4x + 3 = 0$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ การพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x = 1$$

$$(x = 3)$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

**พิสูจน์** โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า  $\exists x \in \mathbf{R} \ni x^2 - 4x + 3 = 0$  เป็นจริง

ให้  $x = 1$  และ  $x^2 - 4x + 3 = 1^2 - 4(1) + 3 = 0$  เป็นจริง

หรือให้  $x = 3$  และ  $x^2 - 4x + 3 = 9 - 4(3) + 3 = 0$  เป็นจริง

นั่นคือ  $\exists x \in \mathbf{R} \ni x^2 - 4x + 3 = 0$  เป็นจริง #

**ตัวอย่างที่ 6** จงพิสูจน์ว่า “สำหรับทุกๆ จำนวนจริง  $\varepsilon > 0$  จะมีจำนวนจริง  $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $|x - 2| < \delta$  แล้ว  $|4x - 8| < \varepsilon$ ”

### วิเคราะห์การพิสูจน์

โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni (|x - 2| < \delta \rightarrow |4x - 8| < \varepsilon)$

การเลือก  $\delta$  เราได้จากการวิเคราะห์ ดังนี้

$$\text{จาก } |4x - 8| < \varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ } 4|x - 2| < \varepsilon$$

$$\text{หรือ } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{ดังนั้น เราให้ } \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

นอกจากนี้ยังอาจให้  $\delta$  เป็นค่าอื่นๆ ก็ได้ เช่น  $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$

$$\text{สมมติให้ } |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$4|x - 2| < 4\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$$

$$|4x - 8| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น } |4x - 8| < \varepsilon$$

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$\varepsilon > 0$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$\exists \delta > 0 \ni (|x - 2| < \delta \rightarrow |4x - 8| < \varepsilon)$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ การพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$\varepsilon > 0$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$|x - 2| < \delta \rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$$

**พิสูจน์** กำหนดให้  $\varepsilon > 0$

เลือก  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$  ซึ่ง  $\delta > 0$

และสมมติให้  $|x - 2| < \delta$

เพราะฉะนั้น  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$4|x - 2| < \varepsilon$$

นั่นคือ  $|4x - 8| < \varepsilon$

ดังนั้น เมื่อกำหนด  $\varepsilon > 0$  ใดๆ มาเราจะเลือก  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$  ซึ่ง

ถ้า  $|x - 2| < \delta$  แล้ว  $|4x - 8| < \varepsilon$  #

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า  $\exists!x \ni p(x)$  เป็นจริง กล่าวคือต้องการพิสูจน์ว่า มี  $x$  เพียงตัวเดียว (Unique) เท่านั้นที่ทำให้  $p(x)$  เป็นจริง เราจะต้องแสดง 2 ขั้นตอน คือ

1. พิสูจน์ว่า  $\exists x \ni p(x)$  เป็นจริง (แสดงว่ามี  $x$  อย่างน้อยที่สุดตัวหนึ่งซึ่งมีสมบัติ  $p(x)$ )
2. พิสูจน์ว่า  $\forall x \forall y [p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y]$  (แสดงว่ามี  $x$  อย่างมากที่สุดเพียงตัวเดียวซึ่งมีสมบัติ  $p(x)$ ) หรือเขียนในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น  $(\exists x \ni p(x)) \wedge (\forall x \forall y [p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y])$

ตัวอย่างที่ 7 จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนเต็ม  $x$  เพียงจำนวนเดียวที่ทำให้  $x + 3 = 5$ ”

วิเคราะห์การพิสูจน์ โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า  $\exists!x \in \mathbf{Z} \ni x + 3 = 5$

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x = 2$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x + 3 = 5$$

$$\forall x \in \mathbf{Z} \forall y \in \mathbf{Z} [x + 3 = 5 \wedge y + 3 = 5 \rightarrow x = y]$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือการพิสูจน์ว่ามีเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$x + 3 = 5$$

$$y + 3 = 5$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$x = y$$

**พิสูจน์** ข้อความนี้เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น  $\exists!x \in \mathbf{Z} \ni x + 3 = 5$

(1) จะแสดงว่า  $\exists x \in \mathbf{Z} \ni x + 3 = 5$

เลือก  $x = 2$  และ  $x + 3 = 2 + 3 = 5$

ดังนั้น สรุปได้ว่า  $\exists x \in \mathbf{Z} \ni x + 3 = 5$

(2) จะแสดงว่า  $\forall x \in \mathbf{Z} \forall y \in \mathbf{Z} [x + 3 = 5 \wedge y + 3 = 5 \rightarrow x = y]$

สมมติว่า  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ทำให้  $x + 3 = 5$  และ  $y + 3 = 5$

ดังนั้น  $x + 3 = y + 3$  (ต่างก็เท่ากับ 5)

จะได้ว่า  $x = y$  (สมบัติการตัดออกของการบวก)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า มีจำนวนเต็มเพียงจำนวนเดียวคือ 2 ที่นำมาบวกกับ 3 แล้วได้ 5 #

### สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. ใบงานเรื่องการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จและมีอย่างน้อยหนึ่ง
4. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
5. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

### กิจกรรมการเรียนรู้

#### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้รวมถึงเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินในกิจกรรมกลุ่มให้นิสิตทราบ
2. ผู้สอนเฉลยโจทย์การบ้านบนกระดาน สำหรับข้อที่นิสิตส่วนใหญ่ทำผิดโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย

3. ผู้สอนเขียนข้อความ “ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่” บนกระดาน เพื่อให้นิสิตร่วมกันอภิปรายว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ (ซึ่งข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ ดังนั้นนิสิตต้องยกตัวอย่างค้าน)

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน และยกตัวอย่างที่ 1 โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2-3 ให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 3-4 คนออกมาเฉลยบนกระดาน นิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

6. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งโดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลและยกตัวอย่างที่ 4 โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 5 ให้นิสิตทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 1 คนออกมาเฉลยบนกระดาน นิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง และยกตัวอย่างที่ 6 บนกระดาน โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย

8. ผู้สอนอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบเพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ว่ามีเพียงหนึ่งเดียวพร้อมยกตัวอย่างที่ 7 โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

9. ผู้สอนแบ่งนิสิตออกเป็น 6 กลุ่ม ๆ ละ 4 คน โดยนิสิตในแต่ละกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน (ดูจากผลการเรียนที่ผ่านมา) มีทั้งนิสิตหญิงและนิสิตชาย จากนั้นผู้สอนได้ทำความเข้าใจกับนิสิตเกี่ยวกับการทำงานกลุ่มว่า

9.1) ให้นิสิตเลือกประธาน เลขานุการและกรรมการกลุ่มเพื่อแบ่งบทบาทและหน้าที่กันในการทำงาน

9.2) ให้ทุกคนร่วมมือช่วยเหลือกันทำงานในกลุ่มจนเสร็จตามที่ผู้สอนกำหนด

9.3) หากมีปัญหาใดๆ ให้ขอความช่วยเหลือจากเพื่อนในกลุ่ม ก่อนถามผู้สอน

9.4) พูดจากันเบา ๆ อย่างสุภาพ

9.5) เมื่องานกลุ่มเสร็จนั้นคือทุกคนในกลุ่มพร้อมที่จะเป็นตัวแทนเพื่อนำเสนอผลงานของกลุ่มหรือการประเมินจากผู้สอน

10. ผู้สอนแจกกระดาษให้นิสิตทุกคน คนละ 5 แผ่น เพื่อให้นิสิตแต่ละคนในแต่ละกลุ่มแสดงการแก้ปัญหาหรือพิสูจน์โจทย์ในใบงานโดยที่ผู้สอนจะถามทีละคำถามซึ่งมีทั้งหมด 5 ข้อ

11. ผู้สอนจะเขียนโจทย์ทีละข้อบนกระดาน จากนั้นให้สมาชิกแต่ละคนในแต่ละกลุ่มเขียนแสดงวิธีการพิสูจน์ลงในกระดาษที่แจกให้ โดยที่ผู้สอนจะกำหนดเวลาในการทำโจทย์แต่ละข้อซึ่งจะทำเช่นนี้เรื่อยไปจนครบทั้ง 5 ข้อ

12. จากนั้นผู้สอนให้แต่ละกลุ่มทบทวนสิ่งที่ตอบในทุกคำถามอีกครั้งหนึ่งโดยให้แต่ละคนในกลุ่มนำวิธีการพิสูจน์ที่แต่ละคนได้แสดงไว้ในแต่ละคำถามมาดูร่วมกันกับเพื่อนในกลุ่มแล้วร่วมกันพิจารณาว่าวิธีการพิสูจน์ในแต่ละคำถามควรเป็นเช่นไร จึงจะต้องสมบูรณ์ จากนั้นให้แต่ละกลุ่มนำวิธีการพิสูจน์ของสมาชิกแต่ละคนที่กลุ่มเห็นว่าถูกต้องมาประมวลเข้าด้วยกันและเรียบเรียงเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันเพื่อเป็นผลงานของกลุ่ม โดยให้เลขานุการกลุ่มเขียนโจทย์แต่ละข้อพร้อมวิธีการพิสูจน์ที่เป็นมติของกลุ่มลงในแผ่นโปสเตอร์ที่ผู้สอนแจกให้

13. เมื่อนิสิตในแต่ละกลุ่มทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้สอนทำการสุ่มนิสิตจากแต่ละกลุ่มมาอธิบายเพื่อนำเสนอผลงานในกลุ่มของตน (ทีละข้อพร้อมกันทุกกลุ่มเพื่อเปรียบเทียบวิธีการพิสูจน์ของแต่ละกลุ่ม) โดยใช้เครื่องฉายข้ามศีรษะและผู้สอนตรวจสอบความถูกต้อง หลังจากทีแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานเสร็จให้นิสิตทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายสรุปในสาระความรู้ที่ได้รับทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

### ขั้นสรุปความรู้

14. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นิสิตร่วมกันสรุปเรื่องวิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านและวิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งหรือมีเพียงหนึ่งเดียว

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

15. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ 7 ข้อ 9 และข้อ 11 และแบบฝึกหัดที่ 3.8 ข้อ 4 ข้อ 7 และข้อ 12 ให้นิสิตทุกคนทำจากนั้นผู้สอนให้นิสิตร่วมกันเฉลยและสุ่มนิสิต 6-7 คน ไปเฉลยบนกระดาน

16. ผู้สอนให้นิสิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ 4 และข้อ 15 แบบฝึกหัดที่ 3.8 ข้อ 3 ข้อที่ 8 และข้อ 13

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

17. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมกลุ่ม (แบบประเมินการทำงานกลุ่ม)	2. นิสิตทำกิจกรรมได้ถูกต้อง
3. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3. นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ 4 และข้อ 15 แบบฝึกหัดที่ 3.8 ข้อ 3 ข้อที่ 8 และข้อ 13 (แบบประเมินชิ้นงาน)	4. นิสิตทุกคนทำการบ้านได้ถูกต้อง

### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

นิสิตร่วมมือกันดีในการทำกิจกรรมกลุ่ม โดยทุก ๆ คนในกลุ่มมีโอกาสช่วยกันและร่วมกันอภิปรายทำให้ผลงานของกลุ่มมีความชัดเจนและถูกต้อง

ใบงาน  
เรื่อง การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จและมีอย่างน้อยหนึ่ง

คำชี้แจง จงทำกิจกรรมในใบงานนี้ เพื่อเป็นการทบทวนบทเรียนที่นิสิตได้เรียนมาแล้ว โดยให้นิสิตแต่ละกลุ่มช่วยกันคิดและทำโจทย์ทุกข้อจนแน่ใจว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มของนิสิตมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้เพื่อพร้อมที่จะนำเสนอต่อไป

1. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นเท็จ

1.1) กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  และ  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  จะได้ว่า  $A \subseteq B$

1.2)  $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x < y \rightarrow |x| < |y|)$

2. จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนจริง  $x$  ที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”

3. จงพิสูจน์ว่า “สำหรับทุกๆ จำนวนจริง  $\varepsilon > 0$  จะมีจำนวนจริง  $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $|x - 2| < \delta$  แล้ว  $|3x - 6| < \varepsilon$ ”

4. จงพิสูจน์ว่า “ $\exists! y \in \mathbf{R} \ni 2 + y = 0$  เป็นจริง”

#####

แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

หน่วยการเรียนรู้ การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จและมีอย่างน้อยหนึ่ง

ชื่อ ..... นามสกุล .....

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านและวิธีการพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งหรือมีเพียงหนึ่งเดียวโดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนน ดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้





## แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จำนวน 3 ชั่วโมง

รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ปีการศึกษา 2547

### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

### สาระการเรียนรู้

#### การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

บ่อยครั้งที่เราจะต้องพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ  $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$  หรืออาจกล่าวได้ว่า หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ใช้กับข้อสรุปซึ่งอยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

“For every integer  $n \geq 1$ ”, “something happens”

(“สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม  $n \geq 1$ ”, “บางสิ่งบางอย่างเกิดขึ้น”)

จะเห็นว่า “บางสิ่งบางอย่างเกิดขึ้น” จะเกิดขึ้นได้ขึ้นอยู่กับ “จำนวนเต็ม  $n$ ” เช่น ต้องการพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbb{N}$$

$$(n-3)(n+2) = n^2 - n - 6 \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+x^n \quad \text{สำหรับ } n \in \mathbb{N}$$

ในการพิสูจน์ข้อความดังกล่าวข้างต้นนั้นเราจะต้องอาศัย หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้พิสูจน์ข้อความประเภท  $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$  เป็นจริง เมื่อ  $N$  เป็นเซตของจำนวนนับ สำหรับการพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นั้นเป็นการตรวจสอบคำตอบไม่ใช่การหาคำตอบ การหาคำตอบนั้นต้องหาด้วยวิธีอื่น หลังจากนั้นเราก็จะตรวจสอบคำตอบของเราได้ด้วยวิธีการพิสูจน์แบบนี้

### ทฤษฎีบท วิธีพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 1

(The first method of proof by mathematical induction)

สำหรับ  $n \in \mathbb{N}$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$

ถ้า (1)  $p(1)$  เป็นจริง (ขั้นตอนฐานหลัก - basic step)

และ (2) สำหรับ  $k \in \mathbb{N}$  ถ้า  $p(k)$  เป็นจริง แล้ว  $p(k + 1)$  เป็นจริงด้วย

(ขั้นตอนอุปนัย - induction step)

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

**ตัวอย่างที่ 1** จงพิสูจน์ว่า  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

#### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbb{N}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ  $p(n)$  แทน  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbb{N}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

- บทนิยาม หลักการหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่ หลักการแยกตัวประกอบ

**พิสูจน์** ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) เนื่องจาก  $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$  ดังนั้น  $p(1)$  เป็นจริง

2) สมมติว่า  $p(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ  $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$  เป็นจริง

(จะแสดงว่า  $p(k+1)$  เป็นจริง)

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left[ \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] \\ &= (k+1) \left[ \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \right] \\ &= (k+1) \left[ \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

นั่นคือ  $p(k+1)$  เป็นจริง

ดังนั้น จากหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง

สำหรับทุกๆ จำนวนนับ  $n$

#

**ตัวอย่างที่ 2** จงพิสูจน์ว่า  $\forall n \in \mathbb{N}, (n^3 - n)$  ทหารด้วย 3 ได้ลงตัว

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbb{N}$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$3|(n^3 - n)$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เมื่อ  $p(n)$  แทน  $3|(n^3 - n)$  ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)	สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)
$n \in \mathbf{N}$	$\exists n \in \mathbf{Z} ((k+1)^3 - (k+1) = 3n)$
$\exists m \in \mathbf{Z} (k^3 - k = 3m)$	

- บทนิยาม หลักการหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่  
ให้  $a, b \in \mathbf{Z}$  และ  $b \neq 0$   
 $a|b$  (a ทหาร b ลงตัว)  $\leftrightarrow \exists c \in \mathbf{Z} (b = ca)$

**พิสูจน์** ข้อความนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ได้เป็น  $\forall n \in \mathbf{N}, 3|(n^3 - n)$   
สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $3|(n^3 - n)$

1) เนื่องจากเมื่อ  $n = 1$  จะได้ว่า  $n^3 - n = 1 - 1 = 0$  และ  $0 = 3(0)$  ดังนั้น  $3|0$   
จึงได้ว่า  $3|(1^3 - 1)$  นั่นคือ  $p(1)$  เป็นจริง

2) สมมติว่า  $p(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ  $3|(k^3 - k)$  สำหรับ  $k \in \mathbf{N}$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $k^3 - k = 3m$

จะพิสูจน์ว่า  $p(k + 1)$  เป็นจริง

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } (k + 1)^3 - (k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= 3m + 3(k^2 + k) \\ &= 3(m + k^2 + k) \end{aligned}$$

แสดงว่า  $3|((k + 1)^3 - (k + 1))$  โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก  $n \in \mathbf{N}$  #

**บทแทรก** สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$  และ  $m$  เป็นจำนวนนับที่กำหนดให้

ถ้า (1)  $p(m)$  เป็นจริง

และ (2) สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $k$  ซึ่ง  $k \geq m$

ถ้า  $p(k)$  เป็นจริงแล้ว  $p(k + 1)$  เป็นจริงด้วย

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ซึ่ง  $n \geq m$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า  $2n < 2^n$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ซึ่ง  $n \geq 3$

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbb{N}$$

$$n \geq 3$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$2n < 2^n$$

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เมื่อ  $p(n)$  แทน  $2n < 2^n$  ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

$$n \in \mathbb{N}$$

$$n \geq 3$$

$$2k < 2^k$$

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

$$2(k+1) < 2^{(k+1)}$$

พิสูจน์ สำหรับ  $n \in \mathbb{N}$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $2n < 2^n$

1) เนื่องจาก  $2(3) < 2^3$  ดังนั้น  $p(3)$  เป็นจริง

2) ให้  $k \in \mathbb{N}$  และ  $k \geq 3$

สมมติให้  $p(k)$  เป็นจริง นั่นคือ  $2k < 2^k$

จะพิสูจน์ว่า  $p(k+1)$  เป็นจริง นั่นคือจะพิสูจน์ว่า  $2(k+1) < 2^{(k+1)}$

เนื่องจาก  $2(k+1) = 2k + 2 < 2^k + 2$  (จาก  $p(k)$  เป็นจริง)

$$< 2^k + 2^k \quad (\text{เนื่องจาก } 2 < 2^k, \forall k \geq 3)$$

$$= 2(2^k) = 2^{(k+1)}$$

เพราะฉะนั้น  $2(k+1) < 2^{(k+1)}$  ดังนั้น  $p(k+1)$  เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 3

#

## สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
4. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
 เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
 ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้ให้นักเรียนทราบ
2. ผู้สอนเฉลยโจทย์การบ้านบนกระดานสำหรับข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิดโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย
3. ผู้สอนเขียนสูตรการหาผลบวก  $n$  พจน์ซึ่งได้แก่  $1+2+3+ \dots +n = \frac{n(n+1)}{2}$  เพื่อให้ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงวิธีในการตรวจสอบหรือพิสูจน์ว่าเป็นจริง

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และทฤษฎีบทเกี่ยวกับวิธีพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 1 โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ
5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายบนกระดานและยกตัวอย่างที่ 2 บนกระดานให้นักเรียนทุกคนทำแล้วสุ่มนิสิต 2-3 คนออกมาเฉลยบนกระดานทีละคนโดยมีนิสิตคนอื่น ๆ และผู้สอนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

6. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับบทแทรก ซึ่งเป็นกรณีพิเศษหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้การอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบ

7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 3 บนกระดานโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย

### ขั้นสรุปความรู้

8. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นักลิตร่วมกันสรุปขั้นตอนเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

9. ผู้สอนแบ่งนิตออกเป็น 4 กลุ่มโดยให้นักลิตแต่ละกลุ่มเข้าไปทำกิจกรรมบนระบบจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn ในส่วน Forum 4 ภายใต้เมนู Group ของแต่ละกลุ่ม เช่น กลุ่มที่ 1 ก็จะเป็น Group 1 เป็นต้น

เพื่อให้ นิสิตร่วมกันอภิปราย เสนอความคิดเห็นและสรุปประเด็นเกี่ยวกับหัวข้อที่เรียนในวันนี้ที่กำหนดไว้ใน Forum 4 ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนด้วยกันโดยให้นิสิตแต่ละคนในแต่ละกลุ่มแสดงความคิดเห็นของตนเองพร้อมทั้งร่วมอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในสิ่งที่สมาชิกกลุ่มเสนอมาด้วย

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

10. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.9, 3.12 และ 3.16) ให้นิสิตทุกคนทำจากนั้น ผู้สอนให้นิสิตร่วมกันเฉลยและสุ่มนิสิต 7 คนออกไปเฉลยบนกระดาน

11. ผู้สอนให้นิสิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.11, 3.13, 3.19 และ 3.24)

### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

12. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	2. นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
3. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.11, 3.13, 3.19 และ 3.24) (แบบประเมินชิ้นงาน)	3. นิสิตส่วนใหญ่ทำการบ้านได้ถูกต้อง
4. ทำกิจกรรมกลุ่มบน M@xLearn (แบบประเมินชิ้นงาน)	4. นิสิตทุกกลุ่มทำกิจกรรมได้ถูกต้องและตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

### **บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้**

นิสิตเข้าใจวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มากขึ้น เมื่อผู้สอนให้นิสิตแต่ละคนทำแบบฝึกหัด จากนั้นผู้สอนสุ่มเรียกนิสิตออกไปทำโจทย์ปัญหาการพิสูจน์บนกระดานหน้าชั้นเรียน

**แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**  
**หน่วยการเรียนรู้ วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

ชื่อ ..... นามสกุล .....

---

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์โดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้

1. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{n}{2} = \frac{n}{4}(n+1)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

### วิเคราะห์การพิสูจน์

- จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

- วิธีการพิสูจน์ที่นำมาใช้คือ .....

เมื่อ  $p(n)$  แทน ..... ดังนั้นจะได้ว่า

สิ่งที่กำหนดให้ (Givens)

สิ่งที่ต้องการ/เป้าหมาย (Goal)

.....

.....

- บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ได้แก่

.....

.....

พิสูจน์ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



### แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (ต่อ)

จำนวน 3 ชั่วโมง

รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ปีการศึกษา 2548

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนิสิตสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง

#### สาระการเรียนรู้

การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

ทฤษฎีบท วิธีพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 2 (The second method of proof by mathematical induction หรือ Strong induction)

สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$

ถ้า (1)  $p(1)$  เป็นจริง

และ (2) สำหรับแต่ละจำนวนนับ  $m$  ถ้า  $p(k)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $k$  ซึ่ง  $k \leq m$  แล้ว  $p(m + 1)$  เป็นจริง

จะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\{p(1) \wedge [\forall m \in \mathbb{N}, p(1) \wedge p(2) \wedge \dots \wedge p(m) \rightarrow p(m + 1)]\} \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, p(n)$$

หมายเหตุ โดยปกติแล้วทฤษฎีบทนี้จะเขียนไว้ในรูปต่อไปนี้

สมมติว่าสำหรับจำนวนนับ  $m$  ใดๆ ถ้า  $p(k)$  เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ  $k$  ซึ่ง  $k < m$  แล้ว  $p(m)$  เป็นจริง เราจะสรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า  $\{\forall m, [\forall k < m, p(k)] \rightarrow p(m)\} \rightarrow \forall n, p(n)$

**ตัวอย่าง** พิจารณาลำดับ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ซึ่งเรียก ลำดับฟีโบนัคชี (Fibonacci sequence) และกำหนดพจน์ที่  $n$  ดังนี้

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{สำหรับจำนวนเต็มบวก } n \text{ ซึ่ง } n \geq 3$$

จงพิสูจน์ว่า  $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก  $n$

**พิสูจน์** สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก  $n$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

$$(1) \quad \text{เนื่องจาก } F_1 = 1 < \frac{7}{4} \text{ และ } F_2 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \approx 3.06$$

ดังนั้น  $p(1)$  และ  $p(2)$  เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนเต็มบวก  $k \geq 3$  สมมติว่า  $p(m)$  เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก  $m$  ซึ่ง  $m < k$

จะพิสูจน์ว่า  $p(k)$  เป็นจริง

$$\text{จากสมมติฐานจะได้ว่า } F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \text{ และ } F_{k-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2}$$

$$\text{แต่ } F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

$$\text{ดังนั้น } F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \left(\frac{11}{4}\right)$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{11}{4} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\text{นั่นคือ } F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^k \text{ แสดงว่า } p(k) \text{ เป็นจริง}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก  $n$  #

### สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะและแผ่นโปร่งใส
3. แบบทดสอบความรู้พื้นฐานของผู้เรียนก่อนเรียน
4. ใบงานที่ 1-2
5. แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
6. เว็บไซต์ผู้สอน: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/>  
เว็บไซต์รายวิชา: <http://pirun.ku.ac.th/~feducnc/project.html>  
ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน: <http://course.ku.ac.th/>

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนบอกจุดประสงค์การเรียนรู้และเนื้อหาหรือหัวข้อที่จะเรียนในคาบนี้ให้นิสิตทราบ
2. ผู้สอนสุ่มถามนิสิต 5-6 คนเกี่ยวกับผลงานของกลุ่มที่ผู้สอนมอบหมายให้นิสิตทำใน M@xLearn เพื่อตรวจสอบการทำงานของนิสิต พร้อมทั้งให้นิสิตร่วมกันอภิปรายถึงความรู้ที่ได้รับจากการทำงานกลุ่มใน M@xLearn
3. ผู้สอนแจกแบบทดสอบความรู้พื้นฐานเรื่อง วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความรู้พื้นฐานของนิสิตและใช้ในการจัดนิสิตเข้ากลุ่มในช่วงของการทำกิจกรรมกลุ่มเมื่อนิสิตทำแบบทดสอบเสร็จตามเวลาที่กำหนดแล้วผู้สอนให้นิสิตแลกเปลี่ยนตรวจพร้อมรวมคะแนนโดยผู้สอนนำเฉลยแบบทดสอบที่เขียนในแผ่นโปร่งใสขึ้นฉายบนเครื่องฉายข้ามศีรษะ

### ขั้นเสนอสาระการเรียนรู้

4. ผู้สอนฉายแผ่นโปร่งใสเกี่ยวกับทฤษฎีบทวิธีพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์วิธีที่ 2 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย
5. ผู้สอนยกตัวอย่างบนกระดานดำโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย
6. ผู้สอนแบ่งนิสิตออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน โดยนิสิตในแต่ละกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน (คละความสามารถโดยดูจากผลคะแนนการทดสอบความรู้พื้นฐาน) ที่มีทั้งนิสิตหญิงและนิสิตชาย จากนั้นผู้สอนได้ทำความเข้าใจกับนิสิตเกี่ยวกับการทำงานกลุ่มว่า
  - 6.1) ให้นิสิตเลือกประธาน เลขานุการและกรรมการกลุ่มเพื่อแบ่งบทบาทและหน้าที่กันในการทำงาน
  - 6.2) ให้ทุกคนร่วมกันแสดงความคิดเห็นและรับฟังความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

6.3) หากมีปัญหาใดๆ ให้ขอความช่วยเหลือจากเพื่อนในกลุ่ม ก่อนถามผู้สอน

6.4) พุดจากกันเบาๆ อย่างสุภาพ

7. เมื่อนิสิตเข้ากลุ่มกันแล้ว ผู้สอนให้นิสิตแต่ละกลุ่มจับคู่กันภายในกลุ่ม จากนั้นผู้สอนแจกใบงานที่ 1 และใบงานที่ 2 ให้แต่ละกลุ่ม โดยให้แต่ละคู่ทำกิจกรรมตามคำชี้แจงในใบงานที่ 1 ส่วนใบงานที่ 2 ให้เก็บไว้ที่ประธานกลุ่มซึ่งเป็นใบงานที่ให้สมาชิกในกลุ่มทุกคนต้องร่วมกันทำเพื่อนำเสนอหน้าชั้นเรียนหลังจากที่สมาชิกของกลุ่มกลับมารวมกัน

8. ขณะที่นิสิตแต่ละคู่กำลังทำใบงานที่ 1 อยู่นั้น ผู้สอนทำหน้าที่สังเกตพฤติกรรมการทำงานของนิสิตแต่ละคู่และให้คำแนะนำในกรณีที่นิสิตต้องการความช่วยเหลือ

9. เมื่อนิสิตทุกคู่ในกลุ่มปฏิบัติกิจกรรมในใบงานที่ 1 จนเสร็จสิ้นแล้ว ผู้สอนให้นิสิตทุกคู่กลับมารวมตัวกันเป็น 4 คนตามเดิม แล้วให้นิสิตทุกคนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและสรุปความรู้ที่ได้จากการทำใบงานที่ 1 โดยมีเลขานุการกลุ่มเป็นผู้จัดบันทึกสรุปการอภิปรายของสมาชิกแต่ละคน จากนั้นผู้สอนให้นิสิตในกลุ่มร่วมกันทำใบงานที่ 2 เพื่อตรวจสอบว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้โดยแต่ละกลุ่มมีเลขานุการกลุ่มทำหน้าที่จัดบันทึกคำตอบที่ได้ของกลุ่มลงในใบงานที่แจกให้แล้วให้เพื่อนในกลุ่มตรวจสอบความถูกต้องเรียบร้อยและเซ็นชื่อกำกับก่อนส่งผู้สอน

10. เมื่อนิสิตในแต่ละกลุ่มทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้สอนทำการสุ่มนิสิตจากแต่ละกลุ่มออกมาอธิบายเพื่อนำเสนองานในกลุ่มของตนหน้าชั้นเรียน หลังจากทีแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานเสร็จให้นิสิตทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายสรุปในสาระความรู้ที่ได้รับทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

### ขั้นสรุปความรู้

11. ผู้สอนใช้การถามตอบให้นิสิตร่วมกันสรุปขั้นตอนเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

### ขั้นฝึกปฏิบัติและนำไปใช้

12. ผู้สอนยกโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.10 และ 3.23) ให้นิสิตทุกคนทำ จากนั้น ผู้สอนให้นิสิตร่วมกันเฉลยและสุ่มนิสิต 3-4 คนออกไปเฉลยบนกระดาน

13. ผู้สอนให้นิสิตทำการบ้านในเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.32, 3.38 และ 3.39)

#### ขั้นวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

14. ผู้สอนให้นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิต

#### การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นิสิตส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมกลุ่ม (แบบประเมินการทำงานกลุ่ม)	2. นิสิตทำกิจกรรมได้ถูกต้อง
3. ทำแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3. นิสิตทุกคนทำแบบวัดทักษะฯ ได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์เป็นการบ้านจากเอกสารประกอบการสอนแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 3 (ข้อย่อยที่ 3.32, 3.38 และ 3.39) (แบบประเมินชิ้นงาน)	4. นิสิตทุกคนทำการบ้านได้ถูกต้อง

#### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

นิสิตร่วมมือกันดีในการทำกิจกรรมกลุ่ม โดยทุก ๆ คนในกลุ่มมีโอกาสช่วยกันและร่วมกันอภิปรายทำให้ผลงานของกลุ่มมีความชัดเจนและถูกต้อง

**แบบทดสอบความรู้พื้นฐาน**  
**เรื่อง การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I** **เวลาสอบ 30 นาที**

---

- คำชี้แจง**
1. ข้อสอบชุดนี้มีทั้งหมด 2 ข้อ คิดเป็นคะแนน 20 คะแนน
  2. ให้นักเรียนทำข้อสอบทุกข้อลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้
- 

1. จงพิสูจน์ว่า  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  สำหรับทุกๆ จำนวนนับ  $n$  (10 คะแนน)
2. จงพิสูจน์ว่า  $n^2 \geq n$  สำหรับทุกๆ จำนวนนับ  $n$  (10 คะแนน)

% %

**ใบงานที่ 1**  
**เรื่อง วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันศึกษาหัวข้อเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จากเอกสารประกอบการสอนรายวิชา 1582222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ในหน้า 111-116 เพื่อทบทวนความรู้และทำแบบฝึกหัดที่กำหนด หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนในแต่ละคู่ ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้ครบทุกข้อและเมื่อทั้งคู่ทำเสร็จก็ให้แลกเปลี่ยนกันตรวจงานโดยดูจาก เฉลยที่ผู้สอนเตรียมไว้ให้พร้อมรวมคะแนนที่นักเรียนแต่ละคนทำได้ หากมีแบบฝึกหัดข้อใดผิดก็ให้นักเรียนแต่ละคู่ร่วมกันปรึกษาหารือในคู่ของตนเพื่อทำความเข้าใจร่วมกัน

1. จงพิสูจน์ว่า  $5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2) - 3$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 2$
2. จงพิสูจน์ว่า  $3^n > n$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

#####

เฉลยแบบฝึกหัดใบงานที่ 1  
เรื่อง วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. จงพิสูจน์ว่า  $5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2) - 3$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 2$

พิสูจน์ ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2) - 3$

1) เนื่องจาก  $2(2) + 1 = 5 = 2(2 + 2) - 3$  ดังนั้น  $p(2)$  เป็นจริง

2) สมมติว่า  $p(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ  $5 + 7 + \dots + (2k + 1) = k(k + 2) - 3$  เป็นจริง

(จะแสดงว่า  $p(k + 1)$  เป็นจริง)

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } 5+7+\dots+(2k+1)+\{2(k+1)+1\} &= k(k+2) - 3 + \{2(k+1) + 1\} \\ &= k^2+2k-3+2k+3 \\ &= k^2+4k+3-3 \\ &= (k+1)(k+3) - 3 \\ &= (k+1)\{(k+1)+2\}-3 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $p(k + 1)$  เป็นจริง

ดังนั้น จากหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  ที่  $n \geq 2$  #

2. จงพิสูจน์ว่า  $3^n > n$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

พิสูจน์ สำหรับ  $n \in \mathbb{N}$  ให้  $p(n)$  แทนข้อความ  $3^n > n$

1) เนื่องจาก  $3^1 = 3 > 1$  ดังนั้น  $p(1)$  เป็นจริง

2) ให้  $k \in \mathbb{N}$  และสมมติให้  $p(k)$  เป็นจริง นั่นคือ  $3^k > k$

จะพิสูจน์ว่า  $p(k + 1)$  เป็นจริง นั่นคือจะพิสูจน์ว่า  $3^{(k+1)} > k+1$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } 3^{(k+1)} &= 3 \cdot 3^k > 3k && (\text{จาก } p(k) \text{ เป็นจริง}) \\ &= 2k + k \\ &\geq 2k + 1 && (\text{เนื่องจาก } k \geq 1) \\ &> k + 1 && (\text{เนื่องจาก } 2k > k, k \geq 1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $3^{(k+1)} > k+1$  ดังนั้น  $p(k + 1)$  เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $p(n)$  เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$  #

**ใบงานที่ 2 (กลุ่ม)**  
**เรื่อง วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

**คำชี้แจง** หลังจากนิสิตทุกคู่ในกลุ่มทำงานตามใบงานที่ 1 เสร็จสิ้นแล้วให้นิสิตทุกคู่กลับมารวมกลุ่มกันเป็น 4 คนตามเดิม แล้วให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและสรุปความรู้ที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดในใบงานที่ 1 และให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มร่วมกันทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้เพื่อตรวจสอบว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้และทุกคนพร้อมที่จะถูกเรียกออกไปเป็นตัวแทนกลุ่มเพื่อนำเสนอผลงานของกลุ่ม

1. จงพิสูจน์ว่า  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

2. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$  สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

[**แนะ:** ใช้  $x^0 = 1$  และทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน]

#####

**แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**  
**รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**  
**หน่วยการเรียนรู้ วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

ชื่อ ..... นามสกุล .....

**คำชี้แจง** แบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ชุดนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์โดยมีเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนดังนี้

- 4 คะแนน** หมายถึง ผลงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีมากและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน** หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน** หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้





ภาคผนวก ข  
แบบประเมินชิ้นงาน



### เกณฑ์การให้คะแนน

- 4 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อยและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้



### เกณฑ์การให้คะแนน

- 4 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์ ครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และสมาชิกในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นอย่างดีเยี่ยมและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนด ครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และสมาชิกในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นเป็นอย่างดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และสมาชิกในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นปานกลางและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อยและสมาชิกในกลุ่มร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นน้อยและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและสมาชิกในกลุ่มไม่ใส่ใจเข้าร่วมอภิปรายและแสดงความคิดเห็นและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้



### เกณฑ์การให้คะแนน

- 4 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อยและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้



## เกณฑ์การให้คะแนน

- 4 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้



## เกณฑ์การให้คะแนน

- 4 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดีมาก ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดอย่างสมบูรณ์และครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม
- 3 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนดี ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและครบถ้วนตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความสมบูรณ์ สมเหตุสมผลดีและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- 2 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานมีความชัดเจนปานกลาง ถูกต้อง สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ การลำดับความยังค่อนข้างขาดความสมบูรณ์และนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้ค่อนข้างถูกต้อง แต่ยังมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมเล็กน้อย
- 1 คะแนน หมายถึง ชิ้นงานขาดความชัดเจน คลุมเครือ สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดน้อย การลำดับความยังขาดความสมบูรณ์ ไม่สมเหตุสมผลและนิสิตสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้น้อยและมีข้อบกพร่องที่ต้องแก้ไขหรือเพิ่มเติมมาก
- 0 คะแนน หมายถึง ไม่มีชิ้นงานหรือชิ้นงานขาดความชัดเจน ไม่สมเหตุสมผล ไม่สอดคล้องกับหัวข้อเรื่องที่กำหนดและนิสิตไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษามาใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่างๆ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบการแก้ปัญหาและนำเสนอได้

ภาคผนวก ค  
แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม

**แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มโดยนิสิต**

วัน/เดือน/ปี ..... หน่วยการเรียนรู้/กิจกรรม .....

กลุ่มที่ ..... ชื่อกลุ่ม .....

ชื่อ-นามสกุล .....

ข้าพเจ้าได้รับมอบหมายให้ทำหน้าที่เป็น

ประธานกลุ่ม  เลขานุการกลุ่ม  ผู้รักษาเวลา  ผู้ตรวจสอบ  ผู้รายงาน

**คำชี้แจง** ให้นิสิตเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่สอดคล้องกับพฤติกรรมการทำงานของกลุ่มมากที่สุด

ข้อรายการ/พฤติกรรม	มาก	ปานกลาง	น้อย	ต้องปรับปรุง
1) สมาชิกในกลุ่มรับบทบาทหน้าที่ว่าจะทำอะไร				
2) กลุ่มของเราพูดคุยกันเฉพาะในกลุ่ม ไม่เดินไปเดินมา				
3) สมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบงานของตน และตั้งใจปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย				
4) สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน				
5) สมาชิกในกลุ่มร่วมกันแสดงความคิดเห็น				
6) สมาชิกในกลุ่มแลกเปลี่ยนสิ่งที่เรียนต่อกัน				
7) สมาชิกในกลุ่มช่วยกันตัดสินใจ				
8) กลุ่มของเราใช้เวลาอย่างมีประสิทธิภาพ				
9) สมาชิกในกลุ่มรับฟังความคิดเห็นของเพื่อน				
10) สมาชิกในกลุ่มยอมรับในข้อตกลงของกลุ่ม				
11) กลุ่มของเราช่วยเหลือเพื่อนบางคนเป็นพิเศษ เมื่อเรารู้ว่าเพื่อนมีปัญหา				
12) กลุ่มของเราตรวจสอบและซักถาม จนเพื่อน ๆ ในกลุ่มเข้าใจตรงกันทุกคน				

### แบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่มโดยผู้สอน

วัน/เดือน/ปี ..... หน่วยการเรียนรู้/กิจกรรม .....

กลุ่มที่ ..... ชื่อกลุ่ม .....

**คำชี้แจง** ให้ผู้สอนเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่สอดคล้องกับพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม  
ของนิสิตมากที่สุด

ข้อรายการ/พฤติกรรม	มาก	ปานกลาง	น้อย	ต้องปรับปรุง
1) ความชัดเจนในการกำหนดบทบาทหน้าที่ ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม				
2) ลักษณะการเป็นผู้นำและผู้ตาม				
3) การมีส่วนร่วมในกิจกรรมกลุ่ม				
4) ความรับผิดชอบงานและความตั้งใจ ปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมาย				
5) การช่วยเหลือ เอื้อเฟื้อ เผื่อแผ่กันในกลุ่ม				
6) กลุ่มทำงานเสร็จและถูกต้องภายในเวลาที่กำหนด				
7) การร่วมกันตัดสินใจและรับฟังความคิดเห็น ของเพื่อนในกลุ่ม				
8) ผลงานของกลุ่มถูกต้องและสมบูรณ์				
9) การนำเสนอผลงานของกลุ่มหน้าชั้นเรียน มีความชัดเจน				

ภาคผนวก ง

แบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน  
รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

**แบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน  
รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

**คำชี้แจง** แบบสอบถามความคิดเห็นฉบับนี้เป็นการสอบถามความคิดเห็นของนิสิตเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอนที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ในรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยให้นิสิตอ่านข้อความที่กำหนดและแสดงความคิดเห็นของนิสิต โดยให้นิสิตทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของนิสิตมากที่สุด

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
<b>ด้านเนื้อหาสาระ</b>					
1. เนื้อหาที่เรียนตรงตามวัตถุประสงค์ของรายวิชาที่ได้กำหนดไว้					
2. การจัดเรียงลำดับหัวข้อของเนื้อหา มีความเหมาะสม					
3. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ ได้					
4. เนื้อหาที่ปรากฏในรายวิชาสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้ดี					
<b>ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน</b>					
5. กิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมนิสิตให้เกิดการเรียนรู้เป็นกลุ่มรายบุคคลและส่งเสริมทักษะทางสังคม					
6. ผู้สอนใช้วิธีสอนโดยการอธิบายและแสดงเหตุผลประกอบทำให้นิสิตเกิดความเข้าใจและชัดเจนยิ่งขึ้น					
7. การสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำให้นิสิตได้พัฒนากระบวนการคิดและสติปัญญา					
8. กิจกรรมกลุ่มที่จัดขึ้นทำให้นิสิตได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับสมาชิกภายในกลุ่มและเกิดความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
9. ประสบการณ์ที่ได้รับจากการทำงานในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทำให้ผลิตได้พัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					
10. การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเป็นสิ่งที่จำเป็นและมีประโยชน์สำหรับนิสิต					
11. การทำแบบฝึกหัดและแบบวัดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นิสิตเกิดทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					
12. การทำกิจกรรมผ่านระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn ทำให้นิสิตได้รับความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น					
<b>ด้านสื่อการเรียนรู้</b>					
13. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีความหลากหลายทำให้นิสิตมองเห็นช่องทางในการแสวงหาความรู้มากขึ้น					
14. ระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn เป็นสื่อการเรียนรู้ที่มีความทันสมัยและเหมาะสมกับการเรียนรู้ในรายวิชานี้					
15. เว็บไซต์รายวิชาที่ผู้สอนพัฒนาขึ้นเป็นแหล่งค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี					
<b>ด้านการวัดผลและการประเมินผล</b>					
16. เกณฑ์การประเมินผลรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม					
17. การบอกเกณฑ์การให้คะแนนชิ้นงานแต่ละชิ้นงานก่อนให้นิสิตลงมือปฏิบัติก่อให้เกิดความยุติธรรมและทำลายความสามารถของนิสิต					
18. การทดสอบย่อยประจำหน่วยการเรียนทำให้นิสิตได้ทราบข้อบกพร่องต่างๆ ของตนเอง พร้อมทั้งนำข้อบกพร่องไปปรับปรุงและแก้ไขเพื่อพัฒนาตนเอง					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
19. การสอนซ่อมเสริมทำให้นิสิตสามารถพัฒนาตนเองและมีกำลังใจในการเรียนรู้มากขึ้น					
<b>ด้านประโยชน์และการนำไปประยุกต์ใช้</b>					
20. รูปแบบการเรียนการสอนที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชาชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I					
20.1) สามารถพัฒนาทำให้นิสิตเกิดการเรียนรู้และมีความมั่นใจในตนเองเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์มากขึ้น					
20.2) สามารถพัฒนาทำให้นิสิตนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ ได้					
<b>ด้านผู้สอน</b>					
21. ผู้สอนเอาใจใส่และให้ความเป็นกันเองกับนิสิตทำให้ช่วยส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนการสอน					
22. ผู้สอนเปิดโอกาสให้นิสิตได้แสดงความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วยตนเอง					
23. ผู้สอนตรวจชิ้นงานและการบ้านของนิสิตอย่างสม่ำเสมอ พร้อมให้คำแนะนำหากนิสิตมีประเด็นที่ยังไม่เข้าใจหรือมีข้อบกพร่อง					
24. ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้อำนวยความสะดวกและที่ปรึกษาที่ดีในการจัดกิจกรรมที่เน้นกระบวนการกลุ่ม					
<b>ด้านการติดต่อสื่อสาร</b>					
25. การติดต่อสื่อสารระหว่างนิสิตกับผู้สอนและระหว่างนิสิตกับนิสิตผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard ในระบบสนับสนุนการเรียนการสอน M@xLearn มีความสะดวกและเป็นกันเอง					



ภาคผนวก จ

แบบวัดเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

**แบบวัดเจตคติต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

**คำชี้แจง** แบบวัดเจตคติฉบับนี้เป็นการสอบถามเกี่ยวกับความรู้สึกของนิสิตต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ซึ่งการตอบแบบวัดเจตคติฉบับนี้ไม่มีถูกหรือผิดและการตอบไม่มีผลต่อผลการเรียนของนิสิตไม่ว่ากรณีใด ๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นขอให้นิสิตตอบคำถามให้ตรงกับความรู้สึกของนิสิตมากที่สุด โดยให้นิสิตอ่านข้อความที่กำหนดแล้วพิจารณาว่าตรงกับความรู้สึกของนิสิตระดับใด จากนั้นให้นิสิตทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความรู้สึกของนิสิตมากที่สุด

ข้อความ	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
1. การเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีประโยชน์สำหรับข้าพเจ้าเพื่อนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆ					
2. เวลาในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I สำหรับข้าพเจ้าน้อยเกินไป					
3. ข้าพเจ้าไม่ยอมให้เวลาในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ล้นสุดลงในแต่ละครั้ง					
4. ข้าพเจ้าอยากให้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีการเรียนการสอนทุกวัน					
5. ข้าพเจ้ารู้สึกวิตกกังวลทุกครั้งที่เข้าเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I					
6. ถ้าเลือกได้ข้าพเจ้าจะไม่เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I					
7. การเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ไม่มีประโยชน์ต่อการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงอื่นๆในอนาคต					
8. ข้าพเจ้ารู้สึกท้อแท้ที่ต้องเรียนเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					

ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
9. รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นรายวิชาที่ยากสำหรับข้าพเจ้า					
10. รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีเนื้อหาที่เข้าใจยาก					
11. ข้าพเจ้าอยากใช้เวลาในการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ผ่านไปอย่างรวดเร็ว					
12. กิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นในชั้นเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นกิจกรรมที่สนุก					
13. การสอนโดยใช้คำถามกระตุ้นทำให้ข้าพเจ้าได้พัฒนากระบวนการคิดและสติปัญญา					
14. การที่ข้าพเจ้าได้มีโอกาสอธิบายเนื้อหาในบทเรียนหรือแบบฝึกหัดให้เพื่อน ๆ ฟังทำให้ข้าพเจ้าเป็นคนที่มีความรู้ค่า					
15. กิจกรรมการเรียนรู้รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทำให้ข้าพเจ้าเป็นคนที่ทันสมัยสำหรับโลกยุคเทคโนโลยีสารสนเทศ (IT)					
16. ประสบการณ์ที่ได้รับจากการทำงานในการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เป็นสิ่งที่มีค่าสำหรับข้าพเจ้า					
17. กิจกรรมการทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเป็นสิ่งที่มีความหมายสำหรับข้าพเจ้า					
18. การสอนซ่อมเสริมทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจในการเรียนรู้มากขึ้น					
19. กิจกรรมที่จัดขึ้นในชั้นเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ไม่มีอะไรน่าตื่นเต้น					
20. การอ่านหนังสือหรือเอกสารเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่เสียเวลา					
21. การทำงานกับเพื่อนต่างกลุ่มทำให้ข้าพเจ้ารู้สึกอึดอัด					

ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
22. การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเป็น การเสียเวลาโดยเปล่าประโยชน์					
23. ข้าพเจ้าวิตกกังวลว่าจะถูกเรียกถามทุกครั้ง ที่เรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ I					
24. การทำกิจกรรมผ่านระบบสนับสนุนการเรียน การสอน M@xLearn ทำให้ข้าพเจ้าได้รับ ความรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพิ่มขึ้น					
25. ข้าพเจ้าตื่นเต้นเสมอที่ได้ทำโจทย์ปัญหา เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					
26. ข้าพเจ้ารู้สึกมีคุณค่าเมื่อสามารถทำการพิสูจน์ ข้อความทางคณิตศาสตร์ได้สำเร็จ					
27. การทำแบบฝึกหัดเกี่ยวกับการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์เป็นเรื่องน่าเบื่อ					
28. ข้าพเจ้าทำงานที่ได้รับมอบหมายจากการเรียน รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ I ด้วยความเต็มใจ					
29. ปริมาณงานที่ได้รับมอบหมายให้ทำใน การเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ทำให้ข้าพเจ้า รู้สึกท้อแท้					
30. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์ I กระตุ้นให้ข้าพเจ้าตื่นตัว ตลอดเวลา					
31. เกณฑ์การประเมินผลของรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ท้าทายความสามารถของข้าพเจ้า					
32. เกณฑ์การประเมินผลรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เหมาะสมและยุติธรรมทำให้ข้าพเจ้า มีกำลังใจในการเรียน					

ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
33. ข้าพเจ้ารู้สึกเครียดทุกครั้งที่มีการทดสอบย่อย					
34. ข้าพเจ้ารู้สึกว่าคุณสามารถทำข้อสอบได้ อย่างเต็มความสามารถทุกครั้ง					
35. การติดต่อสื่อสารระหว่างข้าพเจ้ากับผู้สอน ผ่านทางจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือ webboard มีความสะดวกและ เป็นกันเอง					

ภาคผนวก จ  
แบบสันทนาการกลุ่ม

**แบบสนทนากลุ่มของนิสิตเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไข  
ที่ส่งผลต่อการเรียนการสอนและรูปแบบการเรียนการสอน  
รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

วัน/เดือน/ปี ที่สัมภาษณ์ .....  
เวลาสัมภาษณ์ ตั้งแต่เวลา ..... น. ถึง เวลา ..... น.

---

**คำชี้แจง**

แบบสนทนากลุ่มนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการเก็บข้อมูลด้านความรู้สึกและความคิดเห็นของนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 3 และ 4 เกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนรายวิชาชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยผู้วิจัยได้ทำการคัดเลือกนิสิตโดยพิจารณาจากข้อมูลส่วนตัว ผลการเรียน และความคิดเห็นของผู้สอนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้นิสิตจำนวน 12 คนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ปานกลางและค่อนข้างอ่อน ชั้นปีละ 6 คน มารับการสัมภาษณ์ โดยการสัมภาษณ์ใช้วิธีสนทนากันเป็นกลุ่ม ใช้คำถามปลายเปิดและตั้งคำถามจากคำตอบของนิสิต

**ขั้นตอนการดำเนินการ**

1. แนะนำตัวและอธิบายจุดประสงค์ของการจัดสนทนากลุ่ม
2. ขอให้ทุกคนร่วมกันแสดงความคิดเห็นอย่างเต็มที่
3. ขอจดบันทึกและบันทึกเทปการสนทนา
4. ทำความรู้จักกับนิสิตทุกคน พูดคุยเรื่องทั่วไป เพื่อผ่อนคลายความตึงเครียดและสร้างความคุ้นเคย เป็นกันเองระหว่างผู้วิจัยกับนิสิตที่เข้าร่วมการสนทนา
5. แจกประมวลการสอนและเอกสารประกอบการสอนที่นิสิตเคยใช้เรียนมาเป็นสื่อประกอบ เพื่อนิสิตจะได้ใช้ทบทวนถึงประสบการณ์และความคิดเห็นที่ผ่านมา

## ประเด็นและแนวคำถามที่ใช้ในการสนทนา

### 1. ความคิดเห็นเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนการสอน พร้อมทั้งแนวทางการแก้ปัญหา

1.1) นิสิตคิดว่าสภาพหรือปัญหาที่พบในการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีอะไรและมีแนวทางในการแก้ไขปัญหที่เกิดขึ้นได้อย่างไร โปรดอธิบาย

1.2) นิสิตคิดว่ามีปัจจัยและเงื่อนไขอะไรบ้างที่มีผลต่อการเรียนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ของนิสิต

1.3) รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีผลต่อการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงของคณะวิทยาศาสตร์หรือไม่ โปรดอธิบาย

1.4) การจัดทำรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เรียนในชั้นปีที่ 2 ภาคต้นนั้นมีความเหมาะสมหรือไม่อย่างไร โปรดอธิบาย

### 2. ความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน

2.1) ก่อนที่ผู้สอนจะเริ่มทำการสอนเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนผู้สอนมีการเตรียมความพร้อมของนิสิตอย่างไรบ้าง (ทดสอบความรู้พื้นฐาน ซ่อมเสริมหรือปรับความรู้พื้นฐานให้แก่นิสิต แจกจุดประสงค์ในการเรียนการสอนของแต่ละหน่วยการเรียน บอกเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินในแต่ละกิจกรรมและเนื้อหาสาระ ฯลฯ)

2.2) กิจกรรมที่ผู้สอนจัดขึ้นในชั้นเรียนมีอะไรบ้างและมีลักษณะเป็นเช่นไร นิสิตมีความคิดเห็นต่อกิจกรรมเหล่านั้นอย่างไรบ้าง โปรดอธิบาย

2.3) รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I น่าจะมีขั้นตอนและองค์ประกอบอย่างไร ที่ทำให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้นทั้งในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านทักษะทางสังคม และมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

**แบบสนทนากลุ่มของอาจารย์ผู้สอนเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไข  
ที่ส่งผลต่อการเรียนการสอนและรูปแบบการเรียนการสอน  
รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I**

วัน/เดือน/ปี ที่สัมภาษณ์ .....  
เวลาสัมภาษณ์ ตั้งแต่เวลา ..... น. ถึง เวลา ..... น.

---

**คำชี้แจง**

แบบสนทนากลุ่มนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการเก็บข้อมูลด้านความรู้สึก  
และความคิดเห็นของอาจารย์ผู้สอนเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียน  
รายวิชา 158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I และรูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา  
158222 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I โดยผู้วิจัยได้เชิญอาจารย์ทั้งที่เคยสอนและ  
อาจารย์ปัจจุบันที่ทำการสอนรายวิชา 158325 ชั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์  
จำนวน 3 คน มาทำการสัมภาษณ์ โดยการสัมภาษณ์ใช้วิธีสนทนากันเป็นกลุ่ม ใช้คำถาม  
ปลายเปิดและตั้งคำถามจากคำตอบของอาจารย์ผู้สอน

**ขั้นตอนการดำเนินการ**

1. แนะนำตัวและอธิบายจุดประสงค์ของการจัดสนทนากลุ่ม
2. ขอให้ทุกคนร่วมกันแสดงความคิดเห็นอย่างเต็มที่
3. ขอจดบันทึกและบันทึกเทปการสนทนา
4. ทำความรู้จักกับอาจารย์ผู้สอนทุกคน พูดคุยเรื่องทั่วไปเพื่อสร้างความคุ้นเคย  
เป็นกันเองระหว่างผู้วิจัยกับอาจารย์ผู้สอนที่เข้าร่วมการสนทนา
5. แจกประมวลการสอนและเอกสารประกอบการสอนที่ใช้ในการเรียนการสอนมาเป็น  
สื่อประกอบ เพื่ออาจารย์ผู้สอนจะได้ใช้บทวนถึงประสบการณ์และความคิดเห็นที่ผ่านมา

## ประเด็นและแนวคำถามที่ใช้ในการสนทนา

### 1. ความคิดเห็นเกี่ยวกับสภาพปัญหา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อการเรียนการสอน พร้อมทั้งแนวทางการแก้ปัญหา

1.1) ท่านคิดว่าสภาพหรือปัญหาที่พบในการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีอะไรและมีแนวทางในการแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้อย่างไร โปรดอธิบาย

1.2) ท่านคิดว่ามีปัจจัยและเงื่อนไขอะไรบ้างที่มีผลต่อการเรียนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I ของนิสิต

1.3) รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I มีผลต่อการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงของคณะวิทยาศาสตร์หรือไม่ โปรดอธิบาย

1.4) การจัดให้รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I เรียนในชั้นปีที่ 2 ภาคต้นนั้นมีความเหมาะสมหรือไม่ อย่างไร

### 2. ความคิดเห็นเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนการสอน

2.1) ก่อนที่จะเริ่มทำการสอนเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนท่านมีการเตรียมความพร้อมของนิสิตอย่างไรบ้าง (ทดสอบความรู้พื้นฐาน ซ้อมเสริมหรือปรับความรู้พื้นฐานให้แก่ นิสิต แจ้งจุดประสงค์ในการเรียนการสอนของแต่ละหน่วยการเรียน บอกเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินในแต่ละกิจกรรมและเนื้อหาสาระ ฯลฯ)

2.2) กิจกรรมการเรียนการสอนที่ท่านได้จัดขึ้นในชั้นเรียนมีอะไรบ้างและมีลักษณะเป็นเช่นไร และท่านมีความคิดเห็นอย่างไรต่อการนำกิจกรรมเหล่านั้นมาใช้ โปรดอธิบาย

2.3) รูปแบบการเรียนการสอนรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I น่าจะมีขั้นตอนและองค์ประกอบอย่างไร ที่ทำให้นิสิตมีผลการเรียนรู้สูงขึ้นทั้งใน ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านทักษะทางสังคม และมีเจตคติที่ดีต่อรายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

ภาคผนวก ช

ตัวอย่างกิจกรรมบนระบบการจัดการเรียนการสอนและเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

ภาพผนวกที่ ข1 หน้าจอแสดงองค์ประกอบต่างๆ บนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

Microsoft Internet Explorer window showing the iSelf M@xLearn e-Learning interface. The browser title is "iSelf M@xLearn e-Learning :: นายชานนท์ จันทรา - Microsoft Internet Explorer". The address bar shows "http://course.ku.ac.th/lms/index.php". The page header features the Kasetart University logo and name in Thai and English. The main content area displays a table of student information for course "158222 (1)". The table has columns for "รหัสผู้ใช้" (User ID), "ชื่อ-นามสกุล" (Name-Surname), "อีเมลล์" (Email), "โฮมเพจ" (Homepage), and "เข้างานครั้งสุดท้าย" (Last Login). The table lists 10 students with their respective IDs, names, email addresses, and last login times. A sidebar on the left shows a navigation menu with options like "แผนการสอน", "สมาชิกรายวิชา", "ปัญหาท้ายวิชา", "คำนวณผลการเรียน", "Problems", "Resources", "Webboard", "Groupworks", and "Forum 1-4". The Windows taskbar at the bottom shows the Start button, the active window "iSelf M@xLearn e-Lea...", and the system clock at 14:11.

รหัสผู้ใช้	ชื่อ-นามสกุล	อีเมลล์	โฮมเพจ	เข้างานครั้งสุดท้าย
b4706061	นางสาวกุลวดี จิกรมุดร		-	02-10-2005 17:01
b4706062	นางสาวจุฑารัตน์ มิ่งสอน		-	07-10-2005 11:56
b4706063	นายฉัตรชัย คำบำรุง		-	28-09-2005 20:53
b4706065	นายชวกรจิต แจ่มศรี		-	05-10-2005 12:10
b4706066	นางสาวมาดา ชูชื่น		-	01-10-2005 16:55
b4706068	นางสาวดวงพร ประมคช		-	05-10-2005 14:33
b4706069	นางสาวระนพร โปษยานนท์		-	03-10-2005 12:21
b4706072	นางสาวนฤมล คำจันทร์			05-10-2005 14:39
b4706076	นางสาวพิไลพร ชาวปลอด		-	01-10-2005 01:01
.....	นางสาวกมลวรรณ อึ้งทองสงฆ์		-	28-09-2005 18-11

ภาพผนวกที่ ๒2 หน้าจอแสดงสมาชิกของรายวิชาบนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

The screenshot shows a web browser window with the following elements:

- Browser Title:** iSelf M@xLearn e-Learning :: นายชานนท์ จันทรา - Microsoft Internet Explorer
- Address Bar:** http://course.ku.ac.th/lms/index.php
- Page Header:** Kasetsart University logo and name in Thai (มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์) and English (Kasetsart University).
- User Information:** ผู้ใช้ขณะนี้ : ชานนท์ จันทรา | ออกจากระบบ
- Left Sidebar (Navigation Menu):**
  - แผนการสอน
  - สมาชิกรายวิชา
  - ปฏิทินรายวิชา
  - คำถามผลการเรียน
  - Problems
  - Resources
  - Webboard
  - Groupworks
    - Group 1
      - Forum 1
      - Forum 2
      - Forum 3
      - Forum 4
    - Group 2
      - Forum 1
      - Forum 2
      - Forum 3

- Main Content Area (Forum Posts):**
- Post 1: เรียนครั้งต่อไป จะมีงานกลุ่มให้ทำอีกมั้ยคะอาจารย์  
อยากทำอีกค่ะ สนุกดี 😊  
b4706319  
27/06/2005  
07:10  
Buttons: Profile, Edit, Delete
- Post 2: Good evening ครั้นอาจารย์ 😊  
b4706063  
26/06/2005  
07:23  
Buttons: Profile, Edit, Delete
- Post 3: เรียนครั้งหน้าจะมีการบ้านใน m@xlearn ให้ทำอีกมั้ยคะ 😊  
b4706072  
24/06/2005  
09:24
- Taskbar:** Shows Start button, active windows (iSelf M@xLearn e-Lea..., Microsoft Word - ภาคหน...), and system tray (Internet, EN, 14:17).

ภาพผนวกที่ ๓3 หน้าจอแสดงกิจกรรมใน webboard บนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

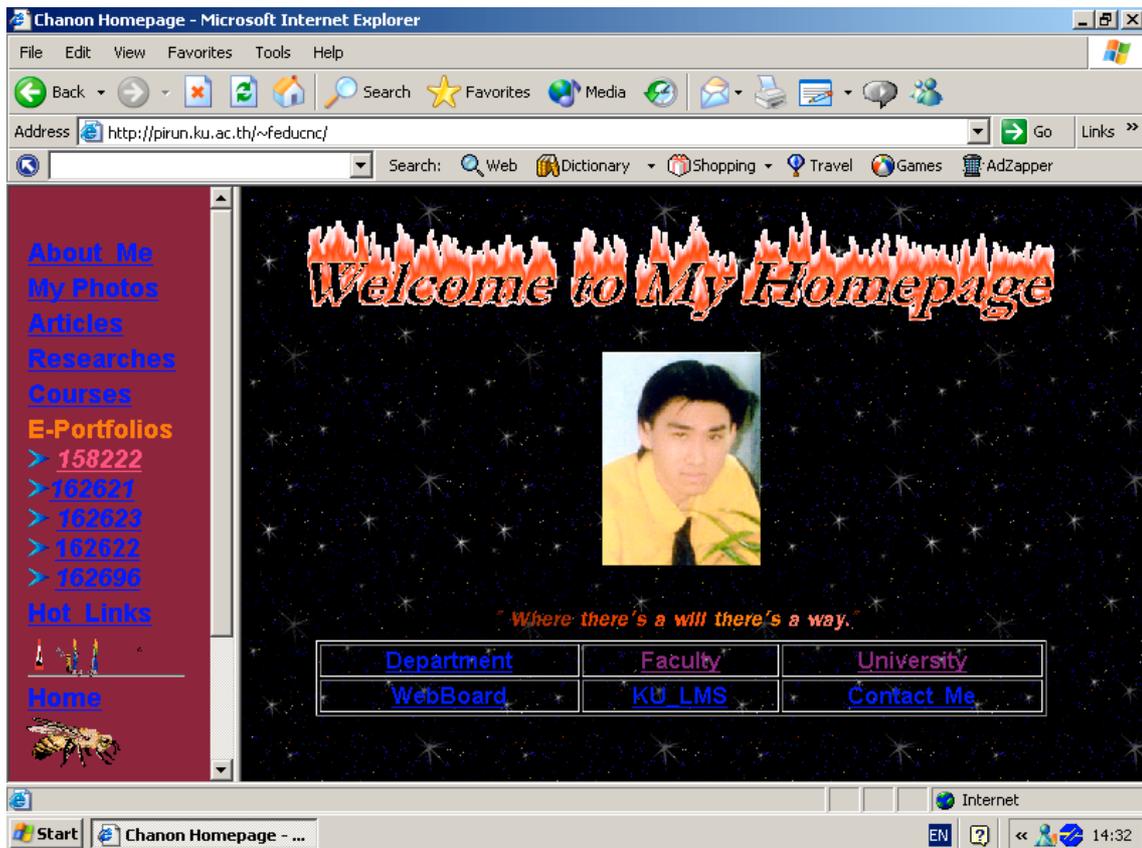
ภาพผนวกที่ ๕4 หน้าจอแสดงกิจกรรมกลุ่มบนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

The screenshot shows a web browser window titled "iSelf M@xLearn e-Learning :: มหาวิทยาลัย จันทร - Microsoft Internet Explorer". The address bar contains "http://course.ku.ac.th/lms/index.php". The page header features the logo of Kaset Sart University and the name "มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ Kaset Sart University". The main content area displays a forum post with Thai text discussing logical concepts like contradiction and truth values. The left sidebar shows a navigation menu with "Forum 3", "Forum 4", "Group 4", "Homeworks", and "Using this Course". The bottom status bar shows "Done" and "Internet".

ภาพผนวกที่ ๕ หน้าจอแสดงกิจกรรมรายบุคคลบนระบบการจัดการเรียนการสอน และเนื้อหาผ่านเว็บ M@xLearn

ภาคผนวก ซ

Homepage ผู้สอน และ Homepage รายวิชา



ภาพผนวกที่ ช1 หน้าจอแสดง Homepage ของผู้สอน



ภาพผนวกที่ ช2 หน้าจอแสดง Homepage รายวิชา 158222 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ I

## ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ-นามสกุล	นายชานนท์ จันทร์
วัน เดือน ปีที่เกิด	10 พฤศจิกายน พ.ศ. 2517
สถานที่เกิด	จังหวัดกรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	ศษ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2540 วท.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2544
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ระดับ 5 ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนโครงการพัฒนาอาจารย์ สาขาขาดแคลน ประจำปี 2546 ทุนสนับสนุนงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา ประจำปี งบประมาณ 2548