

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แบบจำลองพลศาสตร์ควอนตัมเชิงโมเลกุล (Quantum Molecular Dynamics, QMD)

การไหลของสสารนิวเคลียร์ในการชนกันของไอออนหนักได้ถูกทำนายโดยการคำนวณไฮโดรไดนามิก [38] มันส่งผลให้ในตรงบริเวณใกล้ศูนย์กลางการชนที่ซึ่งสสารนิวเคลียร์ได้ถูกบีบอัดเป็นที่แรกและการบีบอัดของพลังงานได้ถูกปล่อยออกมาภายหลัง พลังงานการบีบอัดเกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ตามแนวยาวแต่การปลดปล่อยเป็นแบบยืดหยุ่นเท่ากันทุกทิศทาง ด้วยเหตุนี้อนุภาคจึงมีความเร่งในแนวตามขวางด้วย ในการทดลองได้มีการสังเกตการณ์ขึ้นครั้งแรกโดย Plastic Ball Group [39, 40, 41, 42] ซึ่งเป็นการสังเกตการณ์ไหลที่มีการสาดอย่างชัดเจนว่าสสารเหนี่ยวยังคงมีบทบาทสำคัญสำหรับพลศาสตร์ของปฏิกิริยาที่ลำของพลังงาน (beam energy) ประมาณ 1 A GeV และสสารนิวเคลียร์เหล่านั้นได้ถูกบีบอัดในปฏิกิริยา อย่างไรก็ตามมันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างการไหลและสมการของสถานะนิวเคลียร์ ดังนั้นการตรวจวัดนี้ได้มีการทำการทดลองโดยอยู่บนฐานของสมการสถานะ เช่น การบีบอัดของสสารนิวเคลียร์

การไหลของสสารนิวเคลียร์เป็นกลุ่มของปรากฏการณ์ ที่การชนกันของนิวคลีออนมีแนวโน้มที่จะทำลายการจัดตำแหน่งของโมเมนตัมของคู่การชนและด้วยเหตุนี้จึงลดการไหลรวมลงในแง่หนึ่งคือนิวคลีออนซึ่งเป็นการชนกันของสองวัตถุที่มีการชนกันอย่างรุนแรงโดยปกติแล้วจะสิ้นสุดลงที่บริเวณที่แตกต่างกันของปริภูมิเฟส เปรียบเทียบกับนิวคลีออนเหล่านั้นที่ซึ่งเคลื่อนไปด้วยการไหลและไม่กระเจิง ในทางกลับกัน คือนิวคลีออนซึ่งเป็นการชนกันของสองวัตถุที่มีการชนกันอย่างรุนแรงมีโอกาสน้อยที่สิ้นสุดลงโดยการเป็นส่วนหนึ่งของแฟรกเมนต์ การผสมผสานของการสังเกตทั้งสอง เราสามารถคาดการณ์ได้ว่าแฟรกเมนต์ที่มีความซับซ้อนเป็นเครื่องมือในการศึกษาการไหลรวมดีกว่าโปรตอนที่ถูกปล่อยออกมา

เพื่อเป็นการระบุเอกลักษณ์ของสมการสถานะจากข้อมูลหลายๆข้อมูลของความสัมพันธ์ในการชนกันของไอออนหนัก แบบจำลองที่น่าเชื่อถือควรนำมาใช้เพื่อที่ติดตามวิวัฒนาการของระบบ รูปแบบของการสังเกตการณ์ที่มีการคาดการณ์อย่างเช่น ทฤษฎีของการขึ้นกับเวลาที่ต้องเปรียบเทียบกับข้อมูลโดยการปรับสมการสถานะ

การตรวจสอบทฤษฎีของการชนกันของไอออนหนักสามารถเริ่มได้สองจุดคือ สามารถทำการคิดค้นแบบจำลองปรากฏการณ์ง่ายๆโดยการอธิบายทฤษฎีหรือลักษณะของการเกิดปฏิกิริยา

หรือไม่อีกทางหนึ่งคือ การหาการประมาณการที่เหมาะสมของสมการชโรดิงเงอร์ (Schrodinger equation) แบบหลายวัตถุ (n-body) ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial t} = H^{(n)} \psi^{(n)} \quad (1)$$

เมื่อ

$\psi^{(n)}$ = ฟังก์ชันคลื่นของหลายวัตถุ

$H^{(n)}$ = เอมิลโตเนียน (Hamiltonian) ของหลายวัตถุ

การคำนวณไฮโดรไดนามิก (hydrodynamical calculation)

การคำนวณการวิวัฒนาการทางเวลาของสองนิวไคลด์ที่ชนกันในปริภูมิเฟสได้แสดงการประสบความสำเร็จในการคำนวณไฮโดรไดนามิก ต่อมาสมการของการขึ้นกับเวลาของฮาร์ทรี่ฟ็อก (Time – dependent Hartree-Fock, TDHF) และสมการของ Boltzmann-Uhlnbeck-uehling (BUU) ได้ถูกหาผลเฉลย ความถูกต้องของแต่ละวิธีการมีความจำกัดถึงระบบของพลังงานที่แน่นอน แต่อย่างไรก็ตาม สมการเหล่านี้โดยทั่วไปเป็นสมการของระบบแบบหนึ่งวัตถุ ดังนั้นแบบจำลองพลศาสตร์ควอนตัมเชิงโมเลกุลเป็นแบบจำลองใช้สำหรับศึกษาการชนของไอออนหนักที่พัฒนาจากแบบจำลองพลศาสตร์เชิงโมเลกุลแบบฉบับ (Classical molecular dynamics) [38, 39] ซึ่งแบบจำลองนี้เป็นทฤษฎีของระบบหลายวัตถุ (n-body theory) โดยข้อมูลทั้งหมดของระบบสามารถคำนวณได้จากการหาผลเฉลยของสมการลิววิลล์แบบหลายวัตถุ (n-body Liouville equation)

ในแบบจำลอง QMD จะมีลักษณะสำคัญบางประการทางควอนตัมได้ถูกรวมเข้าไปเช่น การชนระหว่างนิวคลีออนจะเป็นหลักการกีดกันของเพาลี (Pauli blocked) กล่าวคือการชนจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อในปริภูมิเฟส มีสถานะควอนตัมที่ยังว่างอยู่ ทำให้นิวคลีออนที่กระเจิงไปสามารถเข้าครอบครองได้ นอกจากนั้น แอมพลิจูดการกระเจิงจะไม่สามารถบ่งบอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงพารามิเตอร์การกระเจิงได้ นั่นคือเราจะทราบเพียงแค่ค่ากำลังสองของแอมพลิจูดการกระเจิงเป็นค่าเดียวกับการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution) เท่านั้น ส่วนมุมกระเจิงและการจำกัดการชนซึ่งนำนิวคลีออนในปริภูมิเฟสที่มีการเข้าครอบครองบางส่วนจะถูกคิดโดยวิธีทางสถิติ ซึ่งการคิดแบบนี้ทำลายสมบัติการผันกลับได้ทางเวลา (the time reversibility)

ของสมการแบบฉบับ อย่างไรก็ตามการจำลองนี้ยังให้ผลเฉลยของระบบหลายวัตถุโดยไม่ลดรูปเป็นแบบวัตถุเดียวและให้ข้อมูลของการวิวัฒนาการทางเวลาของสหสัมพันธ์ทั้งหมด

เวลาโดยทั่วไปสำหรับปฏิกิริยาของไอออนหนัก ซึ่งเราสามารถสังเกตได้ประมาณ 200 fm/c สำหรับเวลาที่นิวเคลียสไม่ปฏิสัมพันธ์ต้องมีความเสถียร อีกนัยหนึ่งคือไม่สามารถแน่ใจได้ว่าเป็นการแสดงผลจริงทางฟิสิกส์และไม่ได้เป็นเพียงสิ่งประดิษฐ์ที่มนุษย์สร้างขึ้น ความเสถียรและการประสบความสำเร็จในการจำลองการชนกันของไอออนหนักขึ้นอยู่กับผลเฉลยของสองปัญหาใหญ่ๆ คือเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นอย่างไรและจะพัฒนาระบบ $A_T + A_P$ ได้ทันในช่วงเวลาได้อย่างไร สำหรับแบบจำลองระดับจุลทรรศน์เหล่านี้มีลักษณะเป็นแบบอลวน (chaotic) ซึ่งจุดสองจุดในปริภูมิเฟสที่อยู่ติดกันในปริภูมิเฟสที่มีมิติ $A_T + A_P$ จะลู่ออกแบบชี้กำลังโดยเป็นฟังก์ชันของเวลา นอกจากนี้ในระบบควอนตัมเรายังไม่สามารถกำหนดค่าที่แน่นอนของพารามิเตอร์การกระทบให้เที่ยงกว่า $\Delta b > h/\Delta p$ ดังนั้นแทนที่จะแปรผันพารามิเตอร์การกระทบ บนบริเวณนี้เราจะเริ่มต้นด้วยการเลือกตำแหน่ง และโมเมนตัมของแต่ละอนุภาคเป็นแบบสุ่ม ซึ่งการจำลองสถานการณ์การชนของไอออนหนัก โดยใช้แบบจำลอง QMD นั้นจะมี 2 ส่วนที่สำคัญคือ การเริ่มต้นของนิวคลีออนที่เข้าชนกับนิวคลีออนที่เป็นเป้าหมายและการวิวัฒนาการทางเวลาของระบบ $A_T + A_P$

การกำหนดค่าเริ่มต้น

ในแบบจำลอง QMD แต่ละนิวคลีออนจะแทนด้วยสถานะอาพันธ์ (coherent state) ในรูปของ (ใช้ $\hbar$ และ $c = 1$)

$$\psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{r}_{i0}, t) = \frac{\exp\{i[\mathbf{p}_{i0} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i0}) - \mathbf{p}_{i0}^2 t / 2m]\}}{[\sqrt{\pi/2L} 2L(t)]^{3/2}} e^{\{-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i0} - \mathbf{p}_{i0}t/m)^2 / 4L(t)\}} \quad (2)$$

ฟังก์ชันคลื่นนิวเคลียร์คือ

$$\Psi_n = \prod_{i=1}^N \psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}_{i0}, \mathbf{r}_{i0}, t) \quad (3)$$

เมื่อ $\mathbf{r}_0$ เป็นศูนย์กลางที่ขึ้นกับเวลาของกลุ่มคลื่นแบบเกาส์ (the Gaussian wave packet) ในปริภูมิพิกัด (coordinate space) โดยความกว้างของสถานะอาพันธ์จะเริ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันของเวลา ถ้ามีการแผ่ด้วยสมการชโรดิงเงอร์แบบอิสระ ในแบบจำลอง QMD ความกว้าง L เป็นค่าคงที่ หมายถึงเราไม่อนุญาตให้มีการกระจายของฟังก์ชันคลื่น มิฉะนั้นทั้งนิวเคลียสจะมีการกระจายใน

ปริภูมิพิกัดโดยฟังก์ชันของเวลา ค่า $L = 1.08 \text{ fm}^2$ สอดคล้องกับรากกำลังสองเฉลี่ยของรัศมีนิวคลีออน เพื่อให้จะให้ใกล้เคียงกับทฤษฎีการขนส่งแบบฉบับ (the classical transport theory) และเราจะให้ความหนาแน่นแบบวิกเนอร์ (the wigner density) แทนที่ฟังก์ชันคลื่น โดยการแปลงแบบวิกเนอร์ (the wigner transformation) ของสถานะอาพันธ์คือรูปแบบเกาส์ในปริภูมิพิกัดและโมเมนตัม นั่นคือ

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{12}} \psi\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}_{12}}{2}, t\right) \psi_i^*\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{12}}{2}, t\right) d^3\mathbf{r}_{12} \\ &= \frac{1}{(\pi)^3} \exp\left[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0} - \mathbf{p}_{i0}t/m)^2 / 2L\right] - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i0})^2 \cdot 2L \end{aligned} \quad (4)$$

การแทนวิกเนอร์ (the wigner representation) ของกลุ่มคลื่นแบบเกาส์จะต้องสอดคล้องตามหลักความไม่แน่นอน $\Delta r_x \Delta p_x = \hbar/2$

$$f^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \prod_{i=1}^N f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t)$$

โดยความหนาแน่นแบบวัตถุเดียวในพิกัดและปริภูมิของโมเมนตัมสามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \int f^N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \\ &= \sum_i^N \frac{1}{(2\pi L)^{3/2}} e^{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0})^2 / 2L} \end{aligned} \quad (5)$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$g(p, t) = \sum_{i=1}^N \delta(p - p_i) \int f^N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \quad (6)$$

การเลือกศูนย์ของ $A_T + A_P$ แบบเกาส์โดยวิธีสุ่มในปริภูมิพิกัดและเวลานั้นไม่พอเพียงที่จะรักษาเสถียรภาพของนิวคลีออนได้นานเพียงพอ เนื่องจากการขึ้นๆ ลงๆ จะมีเลขสุ่มจำนวนจำกัดที่ไม่สร้างสถานะพื้นของนิวเคลียสแต่จะสร้างสถานะที่ถูกกระตุ้นที่สลายตัวโดยปลดปล่อยนิวคลีออน เวลาที่นิวเคลียสเสถียรแสดงถึงลิมิตบนของพลังงานที่สถานะถูกกระตุ้นจะคงไว้ได้

สถานะเฉพาะ (eigenstates) ของฮามิลโตเนียนจะสอดคล้องกับหลักความไม่แน่นอน ความแปรปรวนของ $\Delta x \Delta p_x$ ของฟังก์ชันเฉพาะ (eigenfunction) สองค่าที่อยู่ใกล้กันจะแตกต่างกัน $\hbar/2$ กล่าวคือแต่ละระดับจะเติมปริมาตรของ $\hbar^3$ ในปริภูมิอวกาศถ้าระบบอยู่ในสถานะพื้น ปริภูมิเฟสจะถูกเติมอย่างหนาแน่นจนถึงค่าสูงสุดในปริภูมิพิกัดและเวลาโดยไม่มีช่องว่างเหลืออยู่ ซึ่งนี่ก็คือสมบัติของสถานะพื้นนั่นเอง การเริ่มต้นของสถานะพื้นของนิวเคลียส A นั้นก่อนอื่นเราต้องกำหนดตำแหน่งของนิวคลีออนในทรงกลมรัศมี $R_A = r_0 A^{1/3}$ fm โดยเลือกเลขสุ่ม

$$\varphi_1 = R\theta \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\varphi_2 = R\varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

$$p_x = R_A \sin \theta \cos \varphi$$

$$p_y = R_A \sin \theta \sin \varphi$$

$$p_z = R_A \cos \theta$$

ที่มีระยะห่างของตำแหน่งของสองนิวคลีออนที่ใกล้กว่า $r_{\min} = 1.5$ fm

ในขั้นต่อไปเป็นขั้นกำหนดศักย์เฉพาะที่ (the local potential) $U(r)$ ที่เกิดจากนิวคลีออนอื่นที่ศูนย์กลางแบบแก๊ส โดยที่โมเมนตัมของเฟอร์มิแบบเฉพาะที่ (the local Fermi momentum) จะถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์

$$p_F(r_{i0}) = \sqrt{2mU(r_{i0})}$$

$$E_i = \frac{p_F^2}{2m} = p^2 + U \Rightarrow \sqrt{2mU(r_{i0})}$$

$$p_{i0x} = p_{i0} \sin \theta \cos \varphi$$

$$p_{i0y} = p_{i0} \sin \theta \sin \varphi$$

$$p_{i0z} = p_{i0} \cos \theta$$

โดยที่ $p_i = \varphi p_F(r_{i0})$ เมื่อ $U(r_{i0})$ คือ พลังงานศักย์ของอนุภาคตัวที่ i ขั้นตอนสุดท้าย โมเมนตัมของทุกอนุภาคจะถูกสุ่มค่าระหว่างศูนย์ถึงค่าโมเมนตัมของเฟอร์มิแบบเฉพาะที่ ทั้งนี้จะไม่ใช้ค่าสุ่มของอนุภาคคู่ใดๆ ที่ใกล้กันน้อยกว่า $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2 = d_{\min}^2$ ซึ่งโดยปกติแล้วมีเพียงหนึ่งในห้าหมื่นของการเริ่มต้นเท่านั้นที่สามารถนำมาใช้ได้ ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ อย่างไรก็ตามการใช้ในการคำนวณบนคอมพิวเตอร์ก็ยังสั้นกว่าเมื่อเทียบกับเวลาของการคำนวณการแพร่ขยาย

การแพร่กระจายในศักย์ยังผล (Propagation in the effective potential)

เรานิยามฟังก์ชันลากรางจ์แบบทั่วไป เพื่อที่จะตรวจสอบการวิวัฒนาการทางเวลาของระบบ โดยสมการดังนี้

$$L = \int \psi \left[H - i \frac{\partial}{\partial t} - i \sum \left(\dot{r}_{i0} \cdot \frac{d}{dr_{i0}} + \dot{p}_{i0} \cdot \frac{d}{dp_{i0}} \right) \right] \psi d^3 r_1 \dots d^3 r_n \quad (7)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^N \psi_i, \quad H = \sum (T_i + V_i) \quad (8)$$

ψ เป็นผลคูณโดยตรงของสถานะอาพันธ์ของฟังก์ชันคลื่น

H เป็นเป็นแฮมิลโตเนียนรวมของระบบหลายวัตถุ

V_i และ T_i เป็นศักย์และพลังงานจลน์ของอนุภาคตัวที่ i ตามลำดับ

ฟังก์ชันลากรางจ์สามารถขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ทั้งหลายเหล่านี้ $p_{i0}, \dots, p_{n0}, r_{i0}, \dots, r_{n0}$ และอนุพันธ์ของเวลาของพารามิเตอร์เหล่านี้สำหรับผลคูณโดยตรงของสถานะอาพันธ์ โดยจะได้สมการลากรางจ์ดังนี้

$$L = \sum \left(-\dot{r}_{i0} \cdot p_{i0} + \langle V_i \rangle + \frac{3}{8Lm} \right) \quad (9)$$

การวิวัฒนาการทางเวลาของเซตพารามิเตอร์ p_{i0} และ $\dot{r}_{i0} = r_{i0} + p_{i0}t/m$ กำหนดโดยสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_{i0}} - \frac{\partial L}{\partial p_{i0}} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{r}_{i0} = \frac{p_{i0}}{m} + \nabla_p U_i, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{i0}} - \frac{\partial L}{\partial r_{i0}} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_{i0} = -\nabla U_i \quad (11)$$

นิวเคลียสที่ได้กำหนดเงื่อนไขการเริ่มต้นไว้แล้วจะถูกเพิ่มความเร็วให้วิ่งเข้าหากันโดยใช้ความเร็วของศูนย์กลางมวลแบบจลศาสตร์สัมพัทธภาพ (relativistic kinematics) โดยศูนย์กลางของอนุภาคที่เข้าชนและอนุภาคเป้าหมายจะเคลื่อนที่ตามแนววิถีคูลอมบ์จนถึงระยะห่างไม่เกิน 2 fm ซึ่งวัดจากผิวของอนุภาคเข้าชนถึงผิวของอนุภาคเป้าหมาย ทั้งนี้การที่เรารักษาความกว้างของ

แก๊สเขียนให้คงที่ ทำให้การวิวัฒนาการทางเวลาของการแจกแจงวัตถุ A ถูกกำหนดโดยการเคลื่อนที่ของเซตทรอยด์ของแก๊สเขียน (r_{i0}, p_{i0}) ซึ่งแพร่ขยายโดยวงเล็บปัวซอง (Poisson brackets)

$$\dot{\mathbf{p}}_{i0} = \left\{ p_{i0}, \sum_j H_j \right\} = \{ \mathbf{p}_{i0}, T_i + U_i \} \quad (12)$$

และ

$$\dot{\mathbf{r}}_{i0} = \left\{ r_{i0}, \sum_j H_j \right\} = \{ \mathbf{r}_{i0}, T_i + U_i \} \quad (13)$$

ในที่นี้ T_i คือพลังงานจลน์ และ U_i คือพลังงานรวมของนิวคลีออนทั้งหมด จากนั้นจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ได้โดยใช้วิธีการหาปริพันธ์แบบออยเลอร์ (Euler integration routine) ที่ขั้นเวลา (time step) (Δt) คงที่

$$\mathbf{p}_{i0}(n+1) = \mathbf{p}_{i0}(n) - \nabla r_{i0} U_i \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_{i0} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \mathbf{r}_{i0} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{\mathbf{p}_{i0}(n)}{[p_{i0}(n)^2 + m_i^2]^{1/2}} \Delta t + \nabla p_{i0} U_i \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \quad (15)$$

อนุภาคทั้งหลายจะการกระทำตอบโต้กันเป็นอันตรกิริยาแบบสองและสามวัตถุ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นหากต้องการให้การขึ้นๆลงๆและสับสนสัมพันธ์คงสภาพ เราพิจารณาระบบให้ประกอบด้วยอันตรกิริยาแบบพิสัยสั้น (the short range interaction) ระหว่างนิวคลีออนมีส่วนรับผิดชอบต่อสมบัติโดยรวมของระบบ เป็นอันตรกิริยาชนิดสแก็ร์มแบบเฉพาะที่ และเพิ่มอันตรกิริยาแบบยูกาวาพิสัยยาว ที่มีความจำเป็นในการทดแทนที่ผิวและอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ ทำให้สามารถเขียนอันตรกิริยาสถิติโดยรวมได้เป็น

$$V^{tot} = V^{loc} + V^{Yuk} + V^{Coul} \quad (16)$$

เมื่อแต่ละเทอมแสดงดังนี้

$$V^{loc} = t_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + t_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (17)$$

$$V^{Yuk} = t_3 \frac{e^{-|r_1 - r_2|/m}}{|r_1 - r_2|/m} \quad (18)$$

โดย $m = 1.5 \text{ fm}$ และ $t_3 = -6.66 \text{ MeV}$ ซึ่งพารามิเตอร์เหล่านี้จะทำให้รักษาสภาพพื้นผิวนิวเคลียสไว้ได้พลังงานรวม H_i ของอนุภาค i เป็นพลังงานรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์

$$H_i = T_i + U_i = T_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij}^{(2)} + \frac{1}{3!} \sum_{jk \neq i} U_{ijk}^{(3)} \quad (19)$$

โดย T_i คือพลังงานจลน์ของอนุภาค i ส่วนเทอมต่างๆของพลังงานศักย์แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U_i^{(2)}(t) &= \sum_{j \neq i} U_{ij}^{(2)} = \sum_{j \neq i} \int f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) f_j(\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j, t) V^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}_i d^3 \mathbf{p}_i d^3 \mathbf{r}_j d^3 \mathbf{p}_j \\ &= U_{iloc}^{(2)} + U_{iYuk}^{(2)} + U_{iCoul}^{(2)} \quad (24) \end{aligned}$$

$$U_{iloc}^{(2)} = t_1 \tilde{\rho}(\mathbf{r}_{i0})$$

เมื่อความหนาแน่นอันตรกิริยา (the interaction density) $\tilde{\rho}(\mathbf{r}_{i0})$ คือ

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}_{i0}) = \frac{1}{(4\pi L)^{3/2}} \sum_j e^{(\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{j0})^2 / 4L} \quad (20)$$

ความหนาแน่นอันตรกิริยามีค่าเป็นสองเท่าของความกว้างของความหนาแน่นของอนุภาคเดียว (the single particle density)

$$\begin{aligned} U_{iYuk}^{(2)} &= \sum_{j \neq i} U_{ijYuk}^{(2)} \\ &= t_3 \sum_{j \neq i} \frac{e^{e/m^2}}{r_{ij}/2m} \left\{ e^{-r_{ij}/m} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{L}}{m} - \frac{r_{ij}}{2\sqrt{L}} \right) \right] - e^{r_{ij}/m} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{L}}{m} + \frac{r_{ij}}{2L} \right) \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

ในที่นี้ $\Phi(x)$ คือ ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน (the error function) $U_{iCoul}^{(2)}$ คือ พลังงานคูลอมบ์ (the Coulomb energy) ขณะที่ศักย์ของสามวัตถุเมื่อ $v = 2$ กำหนดโดย

$$\begin{aligned}
 U_i^{(3)} &= \sum_{j,k,j,k \neq i,k \neq j} \int f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) f_j(\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j, t) f_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k, t) \times V^{(3)} d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{p}_i d^3\mathbf{r}_j d^3\mathbf{p}_j d^3\mathbf{r}_k d^3\mathbf{p}_k \\
 &= \frac{t_2}{(2\pi L)^3 3^{3/2}} \times \sum_{j,k,j,k \neq i,k \neq j} \exp\left\{\left[(\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{j0})^2 + (\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{k0})^2 + (\mathbf{r}_{j0} - \mathbf{r}_{k0})^2\right]/4L\right\} \\
 &\approx \frac{t_2}{(2\pi L)^3 3^{3/2}} \sum_{j,k,j,k \neq i,k \neq j} \exp\left[(\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{j0})^2 + (\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{k0})^2\right]/4L \\
 &\approx \frac{t_2 (4\pi L)^{3v/2}}{(2\pi L)^{3(v-1)/2} (v+1)^{3/2}} \tilde{\rho}_i^v(\mathbf{r}_{i0})
 \end{aligned} \tag{22}$$

ค่าคาดหวังของพลังงานรวมคือ

$$E = \sum_i \left[T_i + \frac{1}{2} U_i^{(2)} + \frac{1}{3!} U_i^{(3)} \right] \tag{23}$$

เมื่อดัชนีตัวบนแสดงถึงอันตรกิริยาระหว่างสองและสามวัตถุตามลำดับ

ต่อไปเราต้องกำหนดพารามิเตอร์ t_1 และ t_2 โดยเริ่มจากการสังเกตว่าในสสารนิวเคลียสนั้นความหนาแน่นคงตัว $U^{(2)}$ แปรผันตรงกับ ρ/ρ_0 ในสสารนิวเคลียสที่สปินอิ่มตัว (spin saturated nuclear matter) จะพบว่าอันตรกิริยาระหว่างสามวัตถุสมมูลกับอันตรกิริยาของวัตถุที่ขึ้นกับความหนาแน่น ถ้าสมมติให้ความหนาแน่นไม่แปรผันมากนักในช่วงระยะระหว่างสองวัตถุ จะได้ว่า $U^{(3)}$ แปรผันตรงกับ $(\rho/\rho_0)^2$ ข้อสังเกตนี้ทำให้เราสามารถเชื่อมโยง ระหว่างพารามิเตอร์เข้ากับสมบัติของสสารนิวเคลียสได้ จึงสามารถเขียนศักย์ในสสารนิวเคลียสได้เป็น

$$U^{loc} = \alpha \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \beta \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \tag{24}$$

ศักย์นี้มีพารามิเตอร์อิสระสองตัว ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขที่กล่าวว่าพลังงานยึดเหนี่ยวของสสารนิวเคลียสที่ความหนาแน่นปกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 16 MeV และพลังงานรวมจะมีค่าน้อยสุดที่

ρ_0 การปรับพารามิเตอร์สองตัวนี้จะให้ค่าของสภาพอัดได้ (compressibility) ออกมาด้วย เพื่อที่จะศึกษาผลของสภาพอัดได้เราสามารถเขียนศักย์ให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$U^{loc} = \alpha \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \beta \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} \quad (25)$$

จะเห็นว่าขณะนี้มีการใส่พารามิเตอร์ตัวที่สามเข้าไป เพื่อที่จะทำให้สภาพอัดได้จะไม่ขึ้นกับปริมาณอื่น ๆ และยังสามารถตีความได้นำไปเทียบกับศักย์ระหว่างนิวคลีออนจะได้ว่า 2 ด้วย γ ส่วนพารามิเตอร์ α จะสัมพันธ์กับศักย์ยูคาวา ซึ่งกระจายแบบเทย์เลอร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U_{Yuk} &= \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/m}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/m} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \\ &= 4\pi m^3 \left\{ \int d^3\mathbf{r} \rho^2(\mathbf{r}) + m^2 \int d^3\mathbf{r}' [\rho(\mathbf{r}) \nabla^2 \rho(\mathbf{r})] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

ในที่นี้ α มีค่า

$$\alpha \sim t - 4\pi m^3 t_3 \quad (27)$$

ค่าสัมพันธ์ระหว่าง t_1 และ t_2 และพารามิเตอร์ m จะถูกปรับเพื่อให้ค่าพลังงานยึดเหนี่ยวมีค่าที่สมเหตุสมผลตามจำนวนนิวคลีอัสที่มีอยู่จำกัด ซึ่งค่า $t_2 = 10$ MeV และ $m = 0.8$ fm ให้ $E/A = 6 - 14$ MeV สำหรับนิวคลีอัส A ตั้งแต่ 7 ถึง 200 ส่วนสัมประสิทธิ์ที่สอดคล้องกันระหว่าง α กับ t_1 และระหว่าง β กับ t_2 จะหาได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข

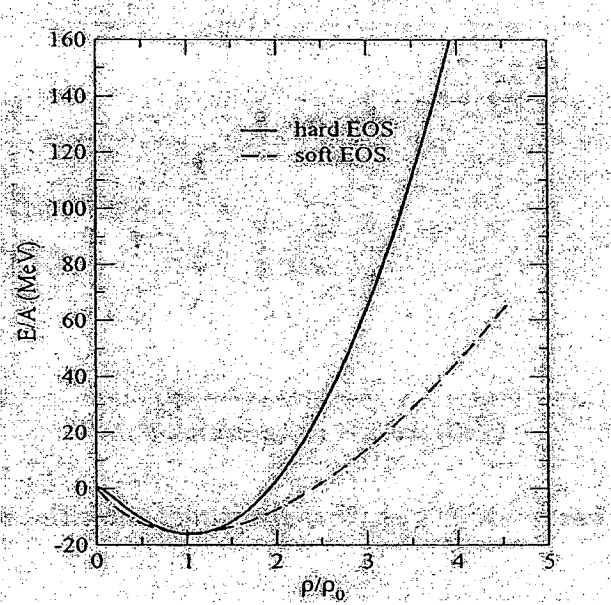
อย่างไรก็ตามเราต้องการเน้นว่าสำหรับวิธีการแพร่ขยายจริง ๆ แล้วอันตรกิริยาที่ขัดแย้งของสองและสามวัตถุจะถูกใช้ไม่ใช่ศักย์ของของสสารนิวเคลียร์ ซึ่งเรื่องนี้มีความสำคัญเนื่องจากการสมมูลของปริมาณทั้งสองจะเป็นจริงเฉพาะในสสารนิวเคลียร์แต่ไม่จริงในระบบที่มีจำนวนนิวคลีอัสจำกัด การสมมูลนี้สามารถใช้เชื่อมโยงพารามิเตอร์ t_1 และ t_3 กับสมบัติสสารนิวเคลียร์หรือสมการสถานะทางนิวเคลียร์ ทำให้เราสามารถศึกษารายละเอียดสมการสถานะทางนิวเคลียร์ที่เกิดขึ้นในระบบการชนของไอออนหนักแบบต่าง ๆ ในสสารนิวเคลียร์จะมีการปรับอันตรกิริยาของสองและสามวัตถุ เล็กน้อยเพื่อให้สอดคล้องกับอันตรกิริยาที่ขึ้นกับความหนาแน่น

ในการชนของไอออนหนัก โดยภาพ 1 แสดงถึงการขึ้นกับความหนาแน่นของพลังงานที่สถานะพื้นต่ออนุภาคในสสารนิวเคลียร์สำหรับพารามิเตอร์ที่แตกต่างกันสองชุดรายละเอียดพารามิเตอร์ที่ใช้ในสมการที่ (25) จะแสดงดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงพารามิเตอร์ที่ใช้ในสมการที่ (25) สำหรับสมการสถานะนิวเคลียร์แบบแข็ง (hard EOS) และแบบอ่อน (soft EOS)

K	α	β	γ	EOS
200MeV	-356 MeV	303 MeV	$\frac{7}{6}$	S
380MeV	-124 MeV	70.5 MeV	2	H

ลักษณะของศักย์ระหว่างนิวคลีออนสามารถเพิ่มเติมโดยใช้อันตรกิริยาที่ขึ้นกับโมเมนตัม [43, 44, 45] สำหรับสภาพอัดได้การเพิ่มเติมอันตรกิริยาที่ขึ้นกับโมเมนตัมนี้จะไม่เปลี่ยนแปลงของพลังงานในสสารนิวเคลียร์ แต่จะมีผลต่อพลศาสตร์ของการชนของไอออนหนัก ดังนั้นในการคำนวณนี้เราใช้แรงสเกอร์มที่ขึ้นกับโมเมนตัม (the momentum dependent Skyrme force)



ภาพ1 สมการสถานะ แสดงถึงการขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของพลังงานต่อมวลอะตอมในสสารนิวเคลียร์ที่อุณหภูมิ $T = 0$ สำหรับพารามิเตอร์ที่แตกต่างกันสองชุด [46] ภาพอ้างอิงจาก [11]

หลักการไหลรวมของการชน

แบบจำลอง QMD มีลักษณะการชนของอนุภาคแบบไบนารี การชนแสดงโดยจุดอนุภาค เช่นเดียวกับแบบจำลอง VUU [47] การชนของอนุภาคสองตัว ด้วยระยะห่างน้อยสุด d ใกล้เคียงกับระยะของศูนย์กลางของ Gaussians ระหว่างการเคลื่อนที่ในกรอบศูนย์กลางมวล

$$d \leq d_0 = \sqrt{\frac{\sigma_{tot}}{\pi}}, \sigma_{tot} = \sigma(\sqrt{s}, type) \quad (28)$$

1. การไหลเชิงตรง (direct flow)

$$v_1 = \left\langle \frac{p_x}{p_t} \right\rangle \quad (29)$$

เมื่อ

p_x = การส่งผ่านโมเมนตัมในแนวแกน x

p_y = การส่งผ่านโมเมนตัมในแนวแกน y

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (30)$$

p_t = โมเมนตัมตามขวาง

2. การไหลแบบวงรี (The elliptic flow)

ถ้าให้ลำของอนุภาคที่เคลื่อนที่เข้าชนกันอยู่ในแนวแกน z และระนาบการเกิดปฏิกิริยา (reaction plane) อยู่ในแนวแกน x-z แล้ว การไหลแบบวงรีจะถูกกำหนดโดยผลต่างของกำลังสองของโมเมนตัมตามแนวขวางในแนว x และ y

$$v_2 = \left\langle \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_x^2 + p_y^2} \right\rangle \quad (31)$$

แรพิดิตี (rapidity)

ในทางฟิสิกส์แรพิดิตีเป็นพารามิเตอร์ของความเร็วใช้ในกรอบอ้างอิงในสัมพัทธภาพพิเศษ

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
y_{beam} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E_{beam} + p_z}{E_{beam} - p_z}\right) \\
y_{cm} &= \frac{1}{2} |y_{beam}| \\
y_0 &= \frac{y}{y_{cm}}
\end{aligned} \tag{33}$$

เมื่อ

y_0 = กึ่งกลางแรพิดิตี (mid-rapidity)

y_{cm} = แรพิดิตีในระบบศูนย์กลางมวล

y_{beam} = แรพิดิตีในระบบกรอบปฏิบัติการ

E_{beam} = พลังงานการเข้าชน

p_z = โมเมนตัมในแนวแกน z

ความเร็วใน 4 มิติ (Four-velocity; u) ที่ระดับของโมเมนตัมตามขวาง (u_{t0})

ในทางฟิสิกส์นั้นรายละเอียดของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษและสัมพัทธภาพทั่วไป ความเร็วใน 4 มิติ คือ เวกเตอร์ใน 4 มิติ (เวกเตอร์ในปริภูมิของเวลาใน 4 มิติ) ที่ชี้แทนที่ด้วยความเร็ว (เวกเตอร์ใน 3 มิติ) แมกนิจูดของความเร็วใน 4 มิติของอนุภาคหรือวัตถุนั้นเท่ากับความเร็วของแสงเสมอ สำหรับวัตถุอื่น (ที่เกี่ยวข้องกับระบบพิกัด) ความเร็วใน 4 มิติของมันจะอยู่ในทิศทางของพิกัดของเวลา

การคำนวณค่าความเร็วใน 4 มิติ (u) ที่ระดับของโมเมนตัมตามขวาง (u_{t0})

$$u_{t0} = \frac{u_t}{u_p} \tag{34}$$

$$u_t = \beta_t \gamma \tag{35}$$

β_t เป็นค่าความเร็วในกรอบอ้างอิงระบบและมีพิกัดเป็นองค์ประกอบตามขวาง หาได้จาก

$$\beta_t = \frac{p_t}{E_p} \quad (36)$$

$$E_p = p_p^2 + m_p^2 \quad (37)$$

$$p_p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (38)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_t^2}} \quad (39)$$

เมื่อ

u_t = กรอบอ้างอิงของระบบและมีพิกัดเป็นองค์ประกอบตามขวาง

$\vec{\beta}$ = เวกเตอร์สามมิติในหน่วยของความเร็วแสง

γ = ตัวคูณลอเรนซ์ (Lorentz factor)

m_p = มวลของโปรตอน

p_p = โมเมนตัมรวมของโปรตอน

p_t = โมเมนตัมตามขวาง

E_p = พลังงานรวมของโปรตอนพิกัดองค์ประกอบตามขวาง

$$u_p = \beta_p \gamma \quad (40)$$

β_p เป็นค่าความเร็วในกรอบอ้างอิงระบบและมีพิกัดเป็นของโปรเจ็คไทล์ของลำแสงในแนวการชน คือในแนวแกน z หาได้จาก

$$\beta_p = \frac{p_{beam}}{E_{beam}} \quad (41)$$

เนื่องจากพิกัดเป็นของโปรเจ็คไทล์ของลำแสงในแนวการชนคือในแนวแกน z ดังนั้นความเร็วในแนวแกน x และ y จึงเท่ากับศูนย์

$$p_{beam} = \sqrt{E_{beam}^2 + m_p^2} \quad (42)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} \quad (43)$$

เมื่อ

u_p = กรอบอ้างอิงของระบบและมีพิกัดของโปรเจ็คไทล์

$\bar{\beta}$ = เวกเตอร์สามมิติในหน่วยของความเร็วแสง

γ = ตัวคูณลอเรนซ์ (Lorentz factor)

m_p = มวลของโปรตอน

p_{beam} = โมเมนตัมรวมของโปรตอนพิกัดของโปรเจ็คไทล์ของลำแสงในแนวการชน
คือในแนวแกน z

E_{beam} = พลังงานการเข้าชน

การไหลของสสารนิวเคลียร์ในการชนกันของไอออนหนักได้ถูกทำนายโดยการคำนวณไฮโดรไดนามิก [38] มันส่งผลให้ในบริเวณใกล้เคียงศูนย์กลางการชนที่ซึ่งสสารนิวเคลียร์ได้ถูกบีบอัดเป็นที่แรกและการบีบอัดของพลังงานได้ถูกปล่อยออกมาภายหลัง พลังงานการบีบอัดเกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ตามแนวยาวแต่การปลดปล่อยเป็นแบบยืดหยุ่นเท่ากันทุกทิศทาง ด้วยเหตุนี้อนุภาคจึงมีความเร่งในแนวตามขวางด้วย ในการทดลองได้มีการสังเกตการณ์ขึ้นครั้งแรกโดย Plastic Ball Group [39, 40, 41, 42] ซึ่งเป็นการสังเกตการณ์ไหลที่มีการสาธิตอย่างชัดเจนว่าสสารเฉลี่ยยังคงมีบทบาทสำคัญสำหรับพลศาสตร์ของปฏิกิริยาที่ลำของพลังงาน (beam energy) ประมาณ 1 A GeV และสสารนิวเคลียร์เหล่านั้นได้ถูกบีบอัดในปฏิกิริยา และที่น่าตื่นเต้นไปกว่านี้อะไรก็ตามมันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างการไหลและสมการของสถานะนิวเคลียร์ ดังนั้นการตรวจวัดนี้ดูเหมือนจะมีการทำการทดลองโดยอยู่บนฐานของสมการสถานะ เช่น การบีบอัดของสสารนิวเคลียร์

การไหลของสสารนิวเคลียร์เป็นกลุ่มของปรากฏการณ์ ที่การชนกันของนิวคลีออนมีแนวโน้มที่จะทำลายการจัดตำแหน่งของโมเมนตัมของคู่การชนและด้วยเหตุนี้จึงลดการไหลรวมลงในแง่หนึ่งคือนิวคลีออนซึ่งเป็นการชนกันของสองวัตถุที่มีการชนกันอย่างรุนแรงโดยปกติแล้วจะสิ้นสุดลงที่บริเวณที่แตกต่างกันของปริภูมิเฟส เปรียบเทียบกับนิวคลีออนเหล่านั้นที่ซึ่งเคลื่อนไปด้วยการไหลและไม่กระเจิง ในทางกลับกัน คือนิวคลีออนซึ่งเป็นการชนกันของสองวัตถุที่มีการชนกันอย่างรุนแรงนั้นมีโอกาสไม่มากที่จะสิ้นสุดลงโดยการเป็นส่วนหนึ่งของแฟรกเมนต์ การ

ผสมผสานของการสังเกตทั้งสอง เราสามารถคาดการณ์ได้ว่าแฟรกเมนต์ที่มีความซับซ้อนเป็นเครื่องมือในการศึกษาการไหลรวมดีกว่าโปรตอนที่ถูกปล่อยออกมา

W. Reisdorf, et al. [37] ได้มีการใช้อุปกรณ์เครื่องเร่งอนุภาคนาขนาดใหญ่ของ FOPI ที่ได้รับการยอมรับ [37,38] เพื่อทำการศึกษาศูนย์กลางและกึ่งศูนย์กลางการชนกันในปฏิกิริยาการชนกันของ $\text{Ca}^{40} + \text{Ca}^{40}$, $\text{Ru}^{96} + \text{Ru}^{96}$, $\text{Au}^{197} + \text{Au}^{197}$ ที่พลังงานตั้งแต่ 0.15 A GeV ถึง 1.93 A GeV รวมถึงการสังเกตการไหลเชิงตรงและเชิงวงรีของโปรตอนด้วย ข้อมูลที่ได้จะถูกเปรียบเทียบกับข้อมูลที่มีการบันทึกไว้ก่อนหน้านี้ ที่ซึ่งมีความเป็นไปได้และเพื่อการจำลองของแบบจำลองการส่งผ่าน สมการสถานะนิวเคลียร์ถูกพบว่าไม่สอดคล้องกับข้อมูลการทดลอง หลักฐานสำหรับการผลิตที่มีค่ามากของนิวตรอนในสสารที่ไม่สมมาตรที่ถูกบีบอัดถูกค้นพบ การทดลองนี้มีการทำขึ้นที่เครื่องเร่งอนุภาค SIS Darmstadt ประเทศเยอรมัน โดยกระบวนการการทดลองของอุปกรณ์และหลักการวิเคราะห์ที่ได้ถูกนำเสนออยู่ในผลงานการตีพิมพ์ที่เกี่ยวข้อง เรื่องของการปลดปล่อยโพออน [39] โดยในรายละเอียดของการเลือกศูนย์กลางการชนจะหาได้จากอ้างอิง [43,44] และใช้สเกลของพารามิเตอร์ตกกระทบ b_0 ซึ่งนิยามโดย $b_0 = b/b_{\text{max}}$ โดยที่ $b_{\text{max}} = 1.15(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})$ fm ซึ่งสเกลนี้เป็นประโยชน์เมื่อเราต้องการเปรียบเทียบขนาดของระบบ สำหรับงานวิจัยนี้ใช้สเกลของพารามิเตอร์ตกกระทบอยู่ที่ $b_0 < 0.15$, $b_0 < 0.25$, $0.25 < b_0 < 0.45$ และ $0.45 < b_0 < 0.55$

เนื่องจากปรากฏการณ์การไหลรวมที่มีการค้นพบจากการทดลองในปี 1984 [45, 46] มีความเป็นไปได้ที่จะสร้างระนาบปฏิกิริยาของเหตุการณ์ต่อเหตุการณ์ขึ้นอีกครั้ง และด้วยเหตุนี้จึงมีการศึกษาความสัมพันธ์ของมุมอะซิมุทเทียบกับระนาบนั้น จึงมีการใช้หลักการของโมเมนตัมตามขวาง (transverse momentum) [47] รวมถึงอนุภาคที่สามารถระบุได้ทั้งหมดภายนอกช่วงของแรดิติศูนย์กลาง ($|y_0|$) น้อยกว่า 0.3 และไม่รวมโพออนที่ระบุได้ ในบริบทนี้เป็นเพียงการพบว่าเป็นสิ่งสำคัญที่พลังงานสูงสุดของ SIS แต่ส่วนใหญ่จะเป็นวิธีการผ่านผวนของระนาบปฏิกิริยา เราใช้พารามิเตอร์ที่ดีขึ้น [42,43]

$$u = (\gamma, \bar{\beta}\gamma); \quad u_i = \beta_i \gamma$$

$$\frac{dN}{u_i du_i dy d\phi} = v_0 [1 + 2v_1 \cos(\phi) + 2v_2 \cos(2\phi)] \quad (44)$$

$$v_0 = v_0(y, u_i); \quad v_1 = v_1(y, u_i); \quad v_2 = v_2(y, u_i)$$

$$v_1 = \left\langle \frac{p_x}{p_t} \right\rangle = \langle \cos(\phi) \rangle; \quad v_2 = \left\langle \left(\frac{p_x}{p_t} \right)^2 - \left(\frac{p_y}{p_t} \right)^2 \right\rangle = \langle \cos(2\phi) \rangle \quad (45)$$

เมื่อ ϕ เป็นมุมอะซิมุทที่เกี่ยวกับระนาบปฏิกิริยาและที่สมการ (35) ในวงเล็บแสดงให้เห็นถึงค่าเฉลี่ยในช่วงของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น(ของระดับที่เฉพาะเจาะจง) การกระจายสมการฟูเรียร์จึงถูกตัดทอนให้เหลือเพียงสามพารามิเตอร์ คือ v_0 , v_1 และ v_2 ที่ถูกนำมาใช้เพื่อที่จะอธิบาย สามมิติสำหรับช่วงที่คงที่ของแรมพิติตี้และโมเมนตัมตามขวาง

A. Ohnishi, et al. [48] ได้ศึกษากลุ่มของการไหลของโปรตอนในการชนกันของไอออนหนัก ที่พลังงาน AGS (2-11 A GeV) และ SPS ((40,158) A GeV) ได้ทำการตรวจสอบในรูปแบบจำลองการส่งผ่านไม่สมดุล กับสนามนิวเคลียร์เฉลี่ย ซึ่งศึกษาการไหลด้านข้าง (Sideward flow) การไหลเชิงตรง และการไหลเชิงวงรี โดยมีการใช้สมการสถานะนิวเคลียร์ที่แตกต่างกัน และพวกเขาพบว่าโมเมนตัมมีการขึ้นอยู่กัสนามนิวเคลียร์เฉลี่ยซึ่งมีความสำคัญสำหรับการที่จะเข้าใจกลุ่มการไหลของโปรตอน ที่พลังงานของ AGS และ SPS จากผลการทดลองของ A. Ohnishi กลุ่มของการไหลทั้งการไหลด้านข้าง การไหลเชิงตรงและการไหลเชิงวงรี ที่พลังงาน AGS ถึง SPS ผลการทดลองที่มีการรวมโมเมนตัมที่ขึ้นกับสนามเฉลี่ยมีความสอดคล้องกับผลของการไหลของโปรตอน

Norber Herrman, Johannes P. Wessels and Thomas Wienold [26] ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับกลุ่มของการไหลในการชนกันของไอออนหนัก โดยที่พวกเขาได้เสนอส่วนของปรากฏการณ์การไหลในการชนกันของไอออนหนัก โดยใช้พลังงานตั้งแต่ 100 A GeV ถึง 160 A GeV โดยอธิบายการไหลในรูปแบบต่างๆ การอธิบายของการไหลขึ้นอยู่กัระบบของการชนและพลังงานการเข้าชน ซึ่งพวกเขาเจาะจงไปที่สเกลความแตกต่างกันของเวลาในกระบวนการทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะของสร้างของฟังก์ชัน ซึ่งข้อมูลจะมีการเปลี่ยนแปลงตามคุณสมบัติของสสารนิวเคลียร์ เช่น สมการสถานะ ผลของตัวกลาง และ เฟสการส่งผ่าน

สำหรับนิยามของกลุ่มการเคลื่อนที่ เนื่องจากการสร้างและการอธิบายคุณสมบัติของ quasimacrsopic ของสสารนิวเคลียร์ ซึ่งมีความจำเป็นในการตรวจสอบกลุ่มการเคลื่อนที่ ซึ่งพวกเขาได้อธิบายถึงปรากฏการณ์ของกลุ่มการเคลื่อนที่ ที่เรียกว่า การไหล ดังนี้

การไหลแบบลองจิจูด เป็นกลุ่มการเคลื่อนที่ของอนุภาคในทิศทางของการเคลื่อนที่ปกติหรือลำของการชน

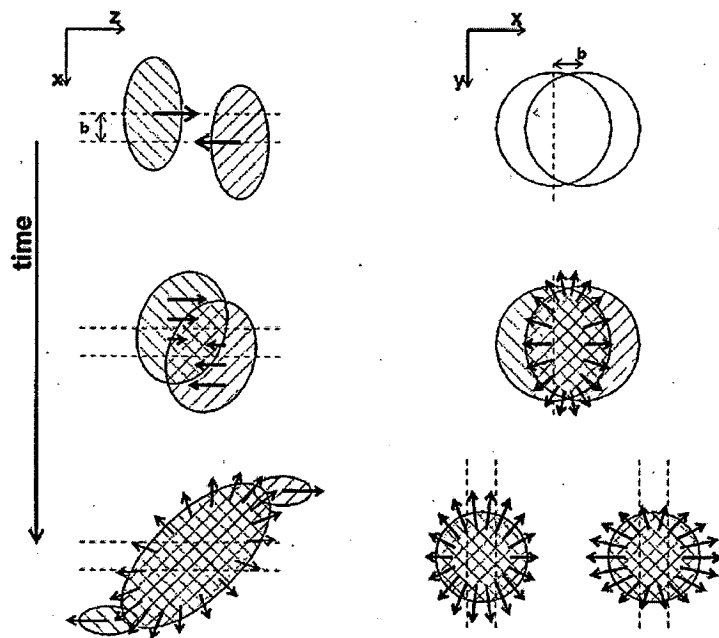
การไหลเชิงรัศมี อนุภาคถูกปลดปล่อยจากแหล่งกำเนิดด้วยความเร็วปกติไม่ขึ้นกับทิศทาง เช่น สนามความเร็วของทรงกลมสมมาตร

การไหลแบบตามขวาง เป็นเทอมที่ถูกใช้ เมื่อใดก็ตามที่พบว่าความเร็วขึ้นอยู่กับมุมอะซิมุท

การไหลเชิงตรง การปรับของเวกเตอร์พารามิเตอร์ตกกระทบในการชนกันของนิวเคลียสกับ นิวเคลียส กำหนดค่าของทิศของมุมอะซิมุท เฉพาะเจาะจงค่าเดียว เพิ่มการปลดปล่อยอนุภาคใน ทิศทางที่ถูกสังเกตในการทดลอง ปรากฏการณ์การไหลเชิงตรงที่สำคัญส่วนใหญ่จะถูกเรียกว่า การ ไหลด้านข้าง (side flow)

การไหลเชิงวงรี อธิบายถึงรูปแบบการปลดปล่อยอนุภาค ที่ซึ่งอนุภาคถูกพบว่า ได้ถูก ปลดปล่อยมาเป็นพิเศษตามมุมอะซิมุทที่แน่นอนและสมมาตร

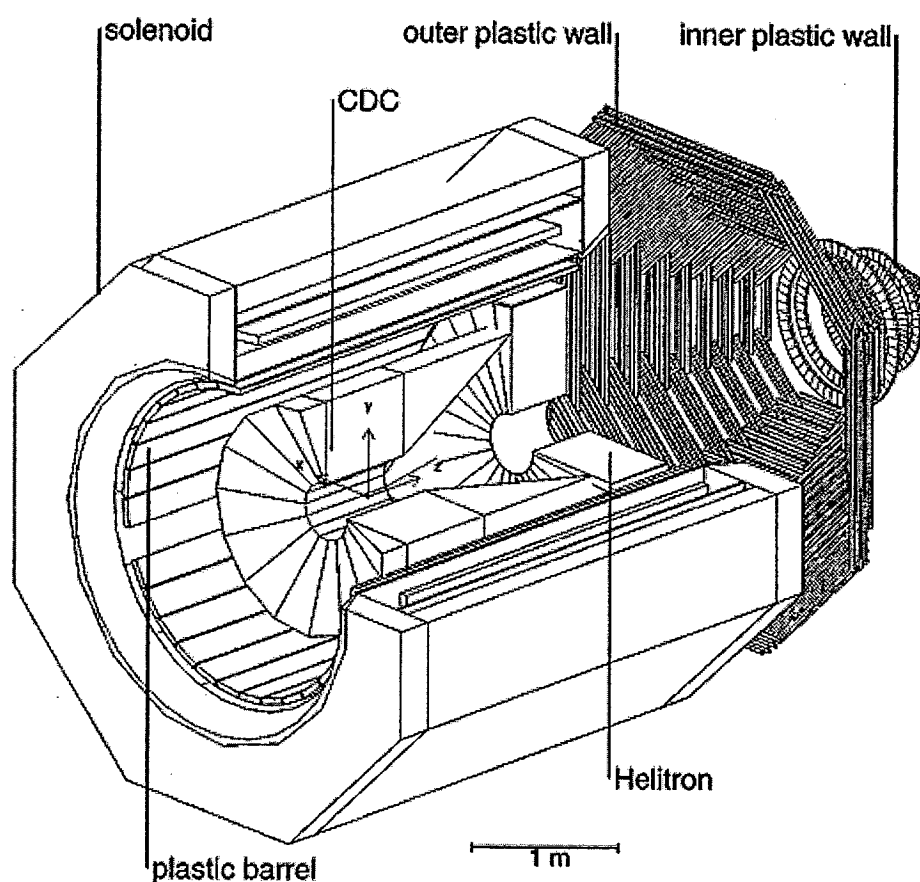
เกี่ยวกับการวิวัฒนาการทางเวลา เนื่องจากปริมาณที่สำคัญส่วนใหญ่ในการชนกันของไอออนหนัก ภาพ 2 เป็นการวาดภาพของกลุ่มการเคลื่อนที่แบบฉบับ ในปฏิบัติการการชนกันของไอออนหนัก ที่เมื่อนิวไคลด์ 2 ตัว เข้าใกล้ซึ่งกันและกัน การปรับของอนุภาคในปริภูมิและทิศทางเริ่มต้นอยู่ในระนาบปฏิบัติการ เวกเตอร์พารามิเตอร์ตกกระทบจะอยู่ในทิศของระนาบปฏิบัติการ



ภาพ 2 แผนผังของการวิวัฒนาการทางเวลาในการชนกันของไอออนหนักและการพัฒนาการของกลุ่มของสนามของความเร็ว (ด้านซ้าย) การวิวัฒนาการทางเวลาของปฏิบัติการในระนาบของปฏิบัติการ (ด้านขวา) ภาพวาดของระนาบตามขวางที่ศูนย์กลางแรงพิบัติหลาย ๆ เฟสของปฏิบัติการไอออนหนักแบบฉบับสามารถหาได้ [26]

สำหรับเฟสเริ่มต้น เมื่ออนุภาคหรือสสารชนกันและเริ่มที่จะกลืนกัน (overlap) คุณสมบัติของอันตรกิริยานิวคลีออนกับนิวคลีออนในปริภูมิอิสระ จะเห็นได้ในกระบวนการของการกระเจิงนิวคลีออนที่พื้นผิวจะมีการสะท้อนพฤติกรรมของแรงลอเรนซ์ ของอันตรกิริยา นิวคลีออนกับนิวคลีออน โดยตรงมากที่สุด และจะเบนออกไปเพราะความสมมาตรสำหรับพารามิเตอร์ตกกระทบมีจำกัด

หัววัด FOPI การทดลองของ FOPI ที่ SIS ได้ทำการติดตั้งเป็น 2 ช่วง [49, 50] ซึ่งประกอบไปด้วยส่วนต่างๆ ดังภาพ 3



ภาพ 3 ภาพส่วนประกอบของหัววัด FOPI [26]

หัวใจของหัววัดประกอบไปด้วย ขดลวดตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่กับสนามแม่เหล็กขนาด 6 เทสลา ตรงกลางเป็นช่องสูญญากาศ (CDC) มีพลาสติกโดยรอบ ด้านหน้าเป็น Helitron สำหรับ

ห้องสุญญากาศคลุมเป็นมุมโพล่า $30^\circ < \theta < 150^\circ$ มีการตรวจวัดโมเมนตัมของอนุภาค π, K, p, d, t การระบุค่าโมเมนตัมสามารถทำได้ด้วยความละเอียด 4% ที่พลังงาน 300 MeV/c และ 10% ที่พลังงาน 1 GeV/c สำหรับ Helitron คลุมเป็นมุมโพล่า $0^\circ < \theta < 30^\circ$ ตรงบริเวณด้านหน้าของหัววัดจะสามารถตรวจสอบอนุภาคกลุ่มเมซอน และหามวลของอนุภาคที่มีประจุที่ขนาดเบา ($Z < 3$) และโมเมนตัมของอนุภาคจะถูกคำนวณค่าโดยส่วนประกอบที่เรียกว่า TOF (Time of Flight) ส่วนห้องสุญญากาศจะระบุความสมมาตรของมุมอะซิมุทที่มีค่าสูง ในกรณีของศูนย์กลางการชนกันของกับทง ที่พลังงาน 1 A GeV ได้ถูกติดตั้งให้สามารถตรวจวัดได้กับอนุภาคถึง 200 ตัว ที่ถูกดูดกลืนได้พร้อมกันในเวลาเดียวกัน

Norber Herrman, Johannes P. Wessels and Thomas Wienold พวกเขาได้ทำการทดลองที่มุ่งเน้นไปที่การสังเกตปรากฏการณ์ของกลุ่มของการไหล ซึ่งมีการไหลหลายรูปแบบ และได้อธิบายถึงรูปแบบการไหล ที่โดยทั่วไปแสดงคุณสมบัติของสมการสถานะเพื่อที่จะปรับเปลี่ยนตัวกลางภายในของมวลของอนุภาค และอันตรกิริยาที่ขึ้นกับโมเมนตัม