

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- กชกร ธิปัตติ. (2544). การวิจัยในชั้นเรียน (Classroom Research). **วารสารการพัฒนาหลักสูตรและการเรียนการสอน**.
- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2538). **การสังเคราะห์งานวิจัยเกี่ยวกับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กฤษณา ศักดิ์ศรี. (2530). **จิตวิทยาการศึกษา**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์บำรุงสาส์น.
- กาญจนา ไชยพันธ์. (2549). **กระบวนการกลุ่ม**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.
- กรองกาญจน์ อรุณรัตน์. (2530). **บทเรียนแบบโปรแกรม**. เชียงใหม่: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- คงศักดิ์ ธาตุทอง. (2542). การประยุกต์ใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการวิจัยในชั้นเรียน. **วารสารวิชาการฉบับที่ 10**.
- ครุรักษ์ ภิมขันธ์. (2544). **การเรียนรู้และฝึกปฏิบัติการวิจัยในชั้นเรียน**. พิมพ์ครั้งที่ 4.
ชลบุรี: โรงพิมพ์งามช่าง.
- จารุวรรณ พุฒเนียม. (2544). เทคนิคการทบทวนความรู้เดิม : ขั้นตอนของการสร้างองค์ความรู้.
ในพิมพ์พันธ์ เคะหะคุปต์. **การเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ : แนวคิดวิธีและเทคนิคการสอน 2**. กรุงเทพฯ : บริษัท เดอะมาสเตอร์กรุ๊ป แมเนจเม้นต์ จำกัด.
- จินดารัตน์ มงคลเจริญสุข. (2538). **ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานของผู้เรียนกับผลการเรียนโปรแกรมเวิร์ดโปรเซสเซอร์**. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- เจนสมุทร แสงพันธ์. (2545). **การปรับปรุงกิจกรรมการทำและการส่งการบ้านวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนประชารัฐธรรมคุณ จังหวัดลำปาง**.
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- ชม ภูมิภาค. (2516). **จิตวิทยาการเรียนการสอน**. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.
- ชม ภูมิภาค. (2522). **การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรม**. **วารสารการศึกษา**.
15(เม. – พ.ค. 2522).

- ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2542). **ชุดกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการจัดค่ายคณิตศาสตร์.**
กรุงเทพฯ: บริษัท เดอะมาสเตอร์กรุ๊ป แมนเนจเม้นท์ จำกัด.
- ทิสนา แคมมณี. (2545). **กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานและการจัดการเรียนการสอน.**
กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วน นิชินแอดเวอร์ไทซิง กรุ๊ป.
- ทิสนา แคมมณี. (2547). **ศาสตร์การสอน : องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- นภดล เจนอักษร. (2544). **แก่นวิจัยในชั้นเรียน.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ภาพพิมพ์.
- เบ็ญจา โสทรโยม. (2523). **การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา: เอกสารประกอบการสอน.**
เชียงใหม่: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- ปริญญา อุปลา. (2545). **การวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียนเพื่อปรับปรุงคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบ้านพุทธรักษา จังหวัดสกลนคร.**
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- เป็รื่อง กุมุท. (2519). **เทคนิคการเขียนบทเรียนโปรแกรม.** มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ผ่องพรรณ ดรัยมงคลกุล. (2544). **การวิจัยในชั้นเรียน. พิมพ์ครั้งที่ 3.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ผ่องฉวี ไวยาวัจฉัย. (2528). **เกมประกอบการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น.**
เชียงใหม่: ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- ณอมพร(ตันติพิพัฒน์) เลาหจรัสแสง. (2541). **คอมพิวเตอร์ช่วยสอน.** กรุงเทพฯ: บริษัทวงกลมโปรดักชัน จำกัด.
- ทักษิณา สวานานนท์. (2530). **คอมพิวเตอร์เพื่อการศึกษา.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การค้ำคูณสภา.
- พรรณทิพา พรหมรักษ์. (2547). **การปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง สมการและอสมการชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนท่าวังผาพิทยาคม จังหวัดน่าน.**
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- พงษ์สานต์ เย็นอ่อน. (2545). **การสอนโดยใช้กระบวนการกลุ่มสัมพันธ์เพื่อพัฒนาพฤติกรรมเชิงจริยธรรมของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต**
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- พนัส หันนาคินทร์และพิทักษ์ รัชพลเดช. (2514). **คณิตศาสตร์ ตอน 3 วิธีสอนคณิตศาสตร์.**
กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

- มัลลิกา ถาวรธิวาสน์และคณะ. (2545). การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ใน
ชั้นมัธยมปลายของชั้นปีที่ 1 คณะเกษตรศาสตร์และคณะวิทยาศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาแคลคูลัส 206103. งานวิจัยคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
ขงยุทธ ขรรขงเมธ. (2526). ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยมีการทบทวนความรู้พื้นฐานเดิมจากบทเรียนบททวน.
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2539). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิพิธการพิมพ์.
รพีพร ใจอุ่น. (2534). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยการสอนและไม่สอนเสริม
ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน. วิทยานิพนธ์ศิลปศาสตรมหาบัณฑิต
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- วชิระ วิชชวรนนท์. (มปป). คู่มือการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.
กำแพงเพชร :คณะครุศาสตร์ สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร.
- วีระพนธ์ คำดี. (มปป). สร้างผลงานมัลติมีเดียสมบูรณ์แบบโดยใช้ AUTHORWARE 5.
กรุงเทพฯ: บริษัทซัคเซสมีเดียจำกัด.
- วันเพ็ญ พวงมะลิ. (2543). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 2 ที่ใช้เกมและการ์ตูนเรื่องการประกอบการสอนตามคู่มือครู.
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- วัลลภา แนวจำปา. (2527). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านเหตุผลเชิงนามธรรม
ความคิดสร้างสรรค์และความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เขตการศึกษา 10.
วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- วิไลวรรณ พิริยะกฤต. (2541). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และปฏิสัมพันธ์ของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ที่เรียนโดยใช้กระบวนการกลุ่มสัมพันธ์.
วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- ส.วาสนา ประवालพฤษย์. (2538). นกวางแผนวิจัยเชิงปฏิบัติการ. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา
ลาดพร้าว.
- สมพร สุทัศน์ย์. (2541). จิตวิทยาการปกครองชั้นเรียน. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.

- สมหมาย ผิวสะอาด. (2550). โครงการสอนปรับความรู้พื้นฐานในการเรียนวิชาแคลคูลัส สำหรับนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี. ระบบออนไลน์. แหล่งที่มา <http://www.campus.eduzones.com/news-1-5-40661.html> (14-15 พฤษภาคม 2550).
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (ม.ป.ป). 25 ปี สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คอมม่าดีไซน์แอนด์พริ้นท์.
- สุคนธ์ สิ้นพานนท์ และคณะ. (2545). การจัดกระบวนการเรียนรู้ : เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ. กรุงเทพฯ : อักษรเจริญทัศน์.
- สุนันท์ ปีทมาคม. (2523). บทเรียนโปรแกรม. กรุงเทพฯ : แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุรพล เกียนวัฒนา. (2536). เอกสารประกอบการสอนวิชาระบบการสอน. เชียงใหม่ : ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่,
- สุนทร ชนงอก. (2535). การสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา : ทฤษฎีและหลักการ. เชียงใหม่ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- สุรินทร์ สมณะ. (2542). ความรู้พื้นฐานของการศึกษาวิชาแคลคูลัส. ระบบออนไลน์. แหล่งที่มา <http://www.surin.sru.ac.th/index.php/component/content/article/50-mathshowmain/68-calculus> (30 พฤศจิกายน 2542).
- อรทัย จิตต์สนิทกุล. (2547). การพัฒนาชุดความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์สำหรับการเรียนเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- Kemp ,Jerold E. (1985). Planning and Producing Instruction Media. 5th ed. New York : Row Publisher.
- Romisowski A.J. (1986). Developing Auto-Instructional Materials. New York : London Nicols Publishing.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แผนการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1/1-2 มาทำความเข้าใจกับคำว่าลิมิต

วิชา แคลคูลัส I

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2553

จำนวน 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

บทนิยามเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในช่วงที่มีจุด c อยู่ด้วย แต่ไม่สนใจ $f(c)$ จะมีค่าได้หรือไม่ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L เพียงค่าเดียวเท่านั้น ในขณะที่ x เข้าใกล้ c (แต่ $x \neq c$) ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาแล้ว ลิมิตของ f ขณะที่ c คือ L ลิมิตนี้เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

จุดประสงค์

1. นักศึกษาบอกความหมายของลิมิตได้
2. นักศึกษาแสดงการประมาณค่าลิมิตโดยใช้ตารางได้
3. นักศึกษายอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
4. นักศึกษาให้เหตุผลในการบอกความหมายของลิมิต

เนื้อหา

- บทนิยามลิมิต
- การใช้สัญลักษณ์แทนลิมิต
- การประมาณค่าลิมิตโดยใช้ตาราง

ความรู้พื้นฐาน

- การแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใด ๆ

กิจกรรม

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องลิมิตตามความคิดของนักศึกษามีความหมายอย่างไร และในทางคณิตศาสตร์จะมีลักษณะเป็นเช่นไร
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องลิมิต แล้วแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใด ๆ
3. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มละ 4 คน เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใด ๆ (ประมาณ 15 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปวิธีการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใด ๆ (3 นาที)



ขั้นสู่นเนื้อหา

1. ผู้สอนอธิบายบทนิยามลิมิต ณ จุด x ใดๆ และสัญลักษณ์ในการเขียนลิมิต พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้

1. ลิมิตจะอยู่ในลักษณะของฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ ใช่หรือไม่ (ใช่)
2. ลิมิตเป็นการบอกค่าเข้าใกล้ ณ จุด x ใดๆ ใช่หรือไม่ (ใช่)

2. ผู้สอนอธิบายตัวอย่างที่ 1. $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3$ และ 2. $\lim_{x \rightarrow 5} 2x - 4$ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้

1. จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ใช่หรือไม่ (ใช่)
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 2 หมายความว่าอย่างไร (จำนวน 2 ในระบบเส้นจำนวนแสดงการเข้าใกล้ได้อย่างไร)
3. ในการบอกค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ ที่เข้าใกล้ 2 แสดงในรูปตารางจะดีหรือไม่อย่างไร

3. ผู้สอนแสดงตารางค่าฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย และทางขวา

4. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 การประมาณค่าของลิมิตด้วยตาราง (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมการทำงานของแต่ละกลุ่ม)
5. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบที่ได้
6. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงความหมายของลิมิต และวิธีการหาค่าของลิมิตโดยใช้ตาราง
7. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนเขียนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจเรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกในการทำกิจกรรมกลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ
- ใบงานที่ 1 การประมาณค่าของลิมิตด้วยตาราง

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

นักศึกษาส่วนใหญ่มีความสนใจและกระตือรือร้นในการศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์เป็นอย่างดี มีการพูดคุยและซักถามกันเองภายในกลุ่มคนไหนตอบได้ก็จะช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มฟัง บางกลุ่มจะมีผู้นำในการอธิบายเนื้อหาจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยทำการเลือกผู้นำที่มีความเข้าใจในเนื้อหา นักศึกษากลุ่มที่ 3 ถามผู้วิจัยว่าเมื่อแทนค่า x ด้วย $(-2)^3$ จะมีค่าเป็น 8 หรือ -8

2. ปัญหาที่เกิดขึ้น

เวลาที่ใช้ในการทบทวนความรู้พื้นฐานมากเกินไป

3. ข้อเสนอแนะและแนวทางการแก้ไข

ตัดทอนเนื้อหาที่ไม่สำคัญในบทเรียนคอมพิวเตอร์ออก

กลุ่มที่

1 2
3 4

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการประมาณค่าของลิมิตในรูปตาราง

1. $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1$

ใบงานที่ 1

(x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย)

x	f(x)

(x เข้าใกล้ 1 ทางขวา)

x	f(x)

.....
.....

2. $\lim_{x \rightarrow 3} 4 - x$

(x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย)

x	f(x)

(x เข้าใกล้ 3 ทางขวา)

x	f(x)

.....
.....

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} x - 2$$

(x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย)

x	f(x)

1 (x เข้าใกล้ -1 ทางขวา)

x	f(x)

.....

.....

.....

.....

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} 2 - x$$

(x เข้าใกล้ -3 ทางซ้าย)

x	f(x)

(x เข้าใกล้ -3 ทางขวา)

x	f(x)

.....

.....

.....

.....

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^2}{x}$

(x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย)

x	f(x)

(x เข้าใกล้ 0 ทางขวา)

x	f(x)

.....

.....

.....

.....

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย)

x	f(x)

(x เข้าใกล้ 1 ทางขวา)

x	f(x)

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการประมาณค่าของลิมิตในรูปตารางหรือกราฟ (รอเฉลยในรูปตาราง)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} 4 - x = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} x - 2 = -3$

4. $\lim_{x \rightarrow -3} 2 - x = 5$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^2}{x} = 4$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1/2-2 มาทำความรู้จักกับคำว่าลิมิต

วิชา แคลคูลัส I
ปีการศึกษา 2553

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

บทนิยามเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในช่วงที่มีจุด c อยู่ด้วย แต่ไม่สนใจ $f(c)$ จะมีค่าได้หรือไม่ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L เพียงค่าเดียวเท่านั้น ในขณะที่ x เข้าใกล้ c (แต่ $x \neq c$) ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาแล้ว ลิมิตของ f ขณะที่ c คือ L ลิมิตนี้เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

จุดประสงค์

1. นักศึกษาบอกค่าลิมิตจากกราฟที่กำหนดให้ได้
2. นักศึกษาบอกค่าลิมิตโดยใช้สมบัติพื้นฐานของลิมิตได้
3. นักศึกษายอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
4. นักศึกษาให้เหตุผลในการบอกค่าลิมิตจากกราฟที่กำหนดให้ได้

เนื้อหา

- การแสดงค่าของลิมิตด้วยกราฟ
- ทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐานของลิมิต

ความรู้พื้นฐาน

- การพิจารณากราฟ ณ จุดพิกัดใดๆ
- การแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ

กิจกรรม

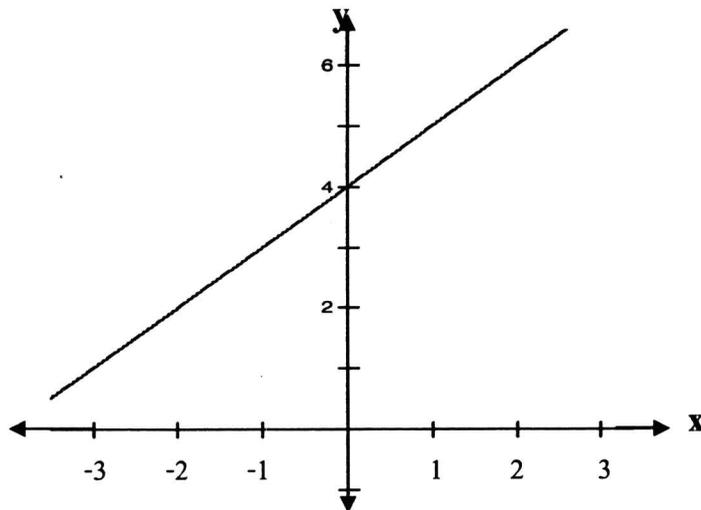
ตอนที่ 1 การแสดงค่าลิมิตด้วยกราฟ

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาถึงความหมายของลิมิต การประมาณค่าลิมิตจากตาราง และฟังก์ชันที่แสดงในรูปของกราฟจะทำได้หรือไม่ แล้วจะบอกค่าลิมิตได้อย่างไร
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องการบอกค่าลิมิตจากกราฟ แล้วแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการพิจารณากราฟ ณ จุดพิกัดใด ๆ
3. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มละ 4 คน เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐาน โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการพิจารณากราฟ ณ จุดพิกัดใด ๆ
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปลักษณะสำคัญของกราฟ และการบอกค่า ณ จุดพิกัดใด ๆ

ขั้นสู่อเนื่อหา

1. ผู้สอนยกตัวอย่าง จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} x + 4$ เมื่อกำหนดกราฟฟังก์ชัน $f(x) = x + 4$ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



1. นักศึกษาเห็นกราฟแล้วจะต้องทราบอะไรบ้างที่เกี่ยวกับกราฟ (พิกัด ณ จุดต่างๆ และแกน x แกน y)
2. จากกราฟ เมื่อ x เป็น 0 จะได้อันดับอะไร
3. เมื่อ x เป็น 0 จะได้อันดับของฟังก์ชันเป็นเท่าไร
4. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย หมายความว่าอย่างไร (ค่า x น้อยกว่า 1 เล็กน้อยใช่หรือไม่)
5. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ 5 ใช่หรือไม่(ใช่)
6. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา ค่าของฟังก์ชันเข้าใกล้ 5 ใช่หรือไม่(ใช่)
2. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตจากกราฟ (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมการทำงานของแต่ละกลุ่ม)
3. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงวิธีการหาค่าของลิมิตจากกราฟ (3 นาที)

ตอนที่ 2 ทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐานของลิมิต

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องการบอกค่าของลิมิตว่าทำผ่านมาแล้ว 2 วิธีคือการประมาณค่าลิมิตจากตาราง การบอกค่าลิมิตจากกราฟที่กำหนดให้ แล้วเราจะมีวิธีอื่นอีกไหมนอกจาก 2 วิธีนี้



2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมบัติพื้นฐานของลิมิต

แล้วต่อด้วยแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ

3. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มละ 4 คน เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ (ประมาณ 10 นาที)

4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ (3 นาที)

ขั้นสู่อเนื่อหา

1. ผู้สอนอธิบายทฤษฎีสมบัติพื้นฐานของลิมิตที่ว่า 1. $\lim_{x \rightarrow c} b = b$ และ 2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ เมื่อ b เป็น

ค่าคงที่ พร้อมทั้งใช้คำถามเช่น

- จากข้อ 1 จะได้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ใช่หรือไม่(ใช่)
- ลิมิตของฟังก์ชันค่าคงที่จะมีค่าเป็นค่าคงที่ใช่หรือไม่(ใช่)
- จากข้อ 2 จะได้ฟังก์ชัน $f(x) = c$ ใช่หรือไม่ (ไม่ใช่ เป็น x)
- ในการหาค่าลิมิตทำได้โดยแทนค่าเข้าใกล้คือ c ที่ตัวแปร x ใช่หรือไม่(ใช่)

2. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 การหาค่าของลิมิตโดยใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐาน เช่น $\lim_{x \rightarrow 3} 6 = 6$ เหตุผล

เพราะเป็นฟังก์ชันค่าคงที่ โดยมีค่าคงที่เป็น 6 และแสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 6$ แล้ว

ยกตัวอย่างที่มีความหลากหลายพร้อมกับให้เหตุผลในการใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐานมายืนยันคำตอบ

3. ผู้สอนอธิบายทฤษฎีสมบัติของลิมิตที่ว่าด้วยการคูณด้วยค่าคงที่ การบวก การลบ การคูณและการหารเมื่อตัวหารไม่เป็นศูนย์

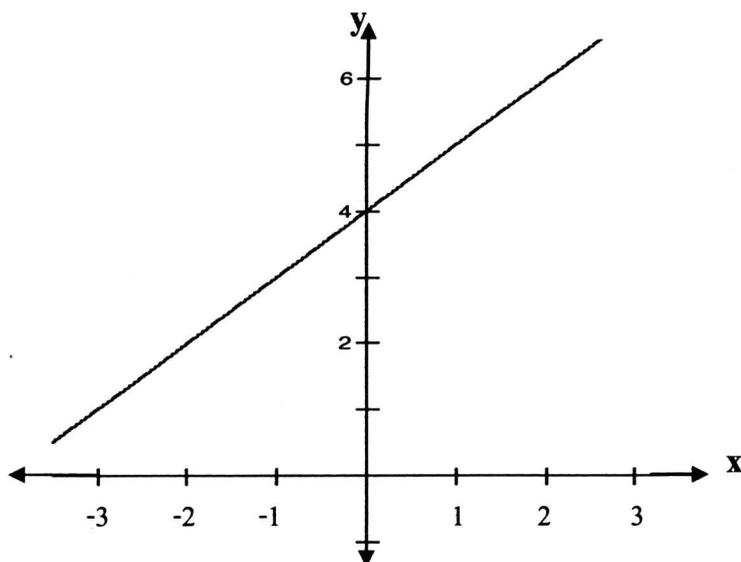
4. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} x + 4$ โดยการสร้างตาราง พิจารณาจากกราฟ และใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐานของลิมิต พร้อมทั้งใช้คำถามเช่น

(x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย)

x	$f(x)$
0.9	4.9
0.99	4.99
0.999	4.999
.	.

(x เข้าใกล้ 1 ทางขวา)

x	$f(x)$
1.1	5.1
1.01	5.01
1.001	5.001
.	.



กราฟแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x + 4$

- 4.1 แทนค่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวาด้วยอะไรได้บ้าง เพราะเหตุใด
 - 4.2 จากกราฟ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายหมายความว่าอย่างไร และมีค่าฟังก์ชันเท่าไร
 - 4.3 จากกราฟ x เข้าใกล้ 1 ทางขวาหมายความว่าอย่างไร และมีค่าฟังก์ชันเท่าไร
 - 4.4 จากทฤษฎีสมบัติพื้นฐานของลิมิตนำค่าเข้าใกล้คือ 1 ไปแทนตัวแปร x ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x)$ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้
1. จากโจทย์ฟังก์ชัน $f(x)$ คืออะไร
 2. โจทย์ต้องการหาค่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนใด
 3. การหาค่าลิมิตโดยใช้สมบัติพื้นฐานนำค่าเข้าใกล้คือ 2 ไปแทนตัวแปร x ใช่หรือไม่(ใช่)
 4. การที่นำค่าเข้าใกล้คือ 2 ไปแทนตัวแปร x ได้เพราะฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x$ ไม่มีส่วนเป็นศูนย์ และสมบัติของลิมิตมีการคูณด้วยค่าคงที่ การบวก และการลบใช่หรือไม่(ใช่)
6. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 2 การหาค่าของลิมิตโดยใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐาน (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกการทำงานของแต่ละกลุ่ม)
7. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 2 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
8. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงวิธีการหาค่าของลิมิตโดยใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐาน (3 นาที)

9. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจ เรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกในการทำกิจกรรมกลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการพิจารณากราฟ ณ จุดพิกัดใดๆ และการหาค่าฟังก์ชัน ณ

จุด x ใดๆ

- ใบงานที่ 1 การประมาณค่าของลิมิตจากกราฟ
- ใบงานที่ 2 การหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐาน

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1 และ 2
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

นักศึกษาส่วนใหญ่มีความสนใจและกระตือรือร้นในการศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์เป็นอย่างดี มีการพูดคุยและซักถามกันเองภายในกลุ่มคนไหนตอบได้ก็จะช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มฟัง บางกลุ่มจะมีผู้นำในการอธิบายเนื้อหาจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยทำการเลือกผู้นำที่มีความเข้าใจในเนื้อหานั้นๆ มีนักศึกษากลุ่มที่ 5 ถามผู้วิจัยว่า

2. ปัญหาที่เกิดขึ้น

เวลาที่ใช้ในการศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมากเกินไป

3. ข้อเสนอแนะและแนวทางการแก้ไข

นำแบบใบงานข้อที่เหลือไปตรวจเองแล้วอธิบายส่วนที่นักศึกษาทำผิดพลาดในชั่วโมง

ถัดไป

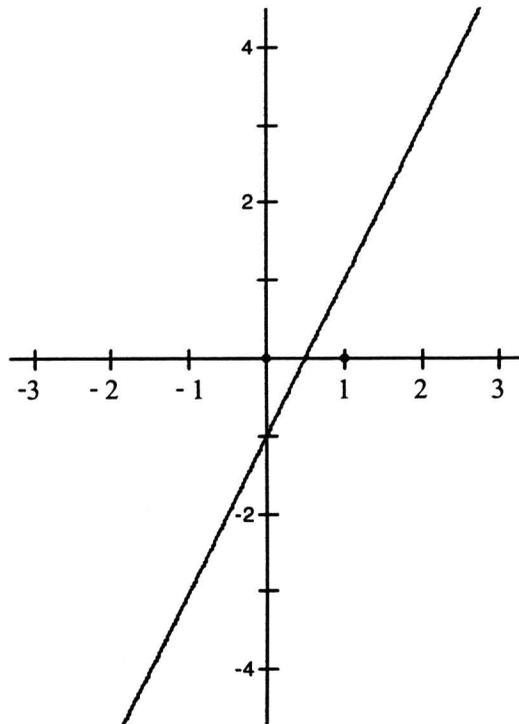
กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 1

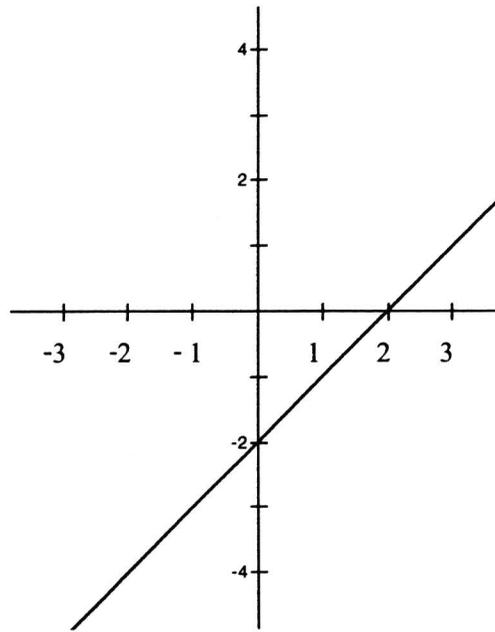
คำชี้แจง จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้จงอธิบายค่าของลิมิต

1. $\lim_{x \rightarrow -1} 2x - 1$



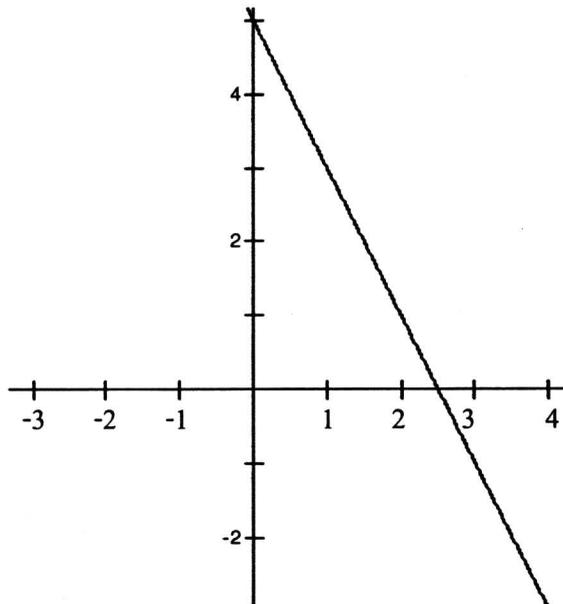
.....
.....
.....
.....

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$



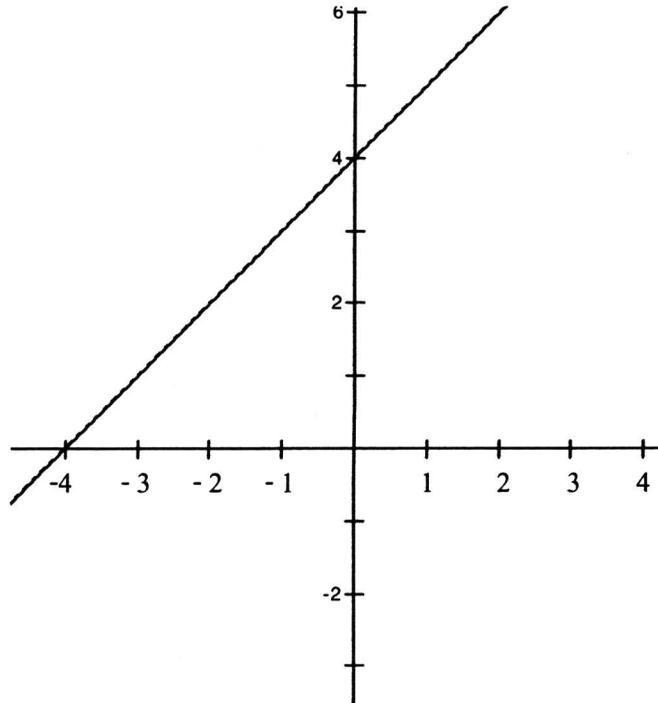
.....
.....

3. $\lim_{x \rightarrow 1} 5 - 2x$



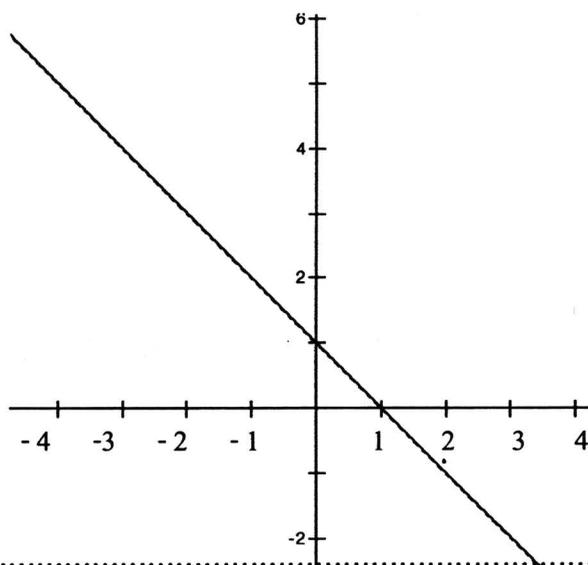
.....
.....

4. $\lim_{x \rightarrow -1} x + 4$



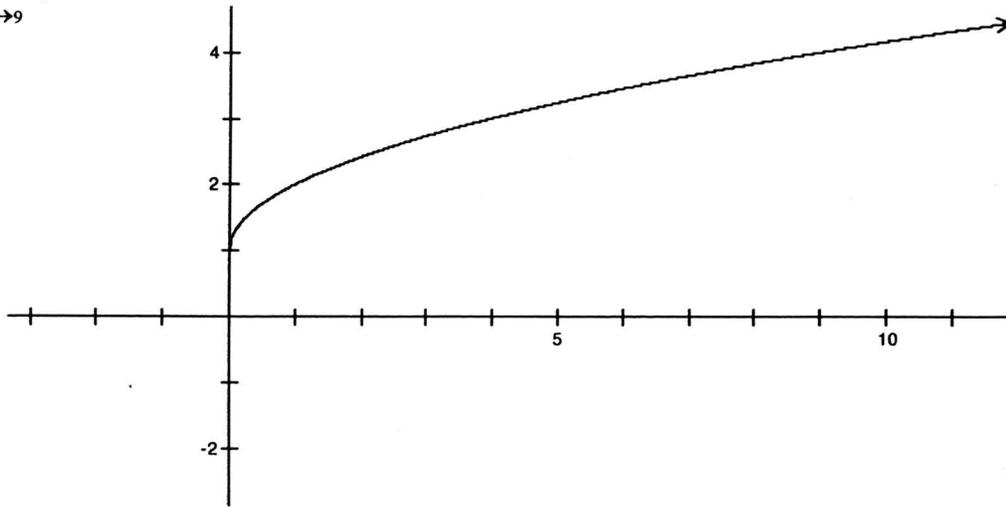
.....
.....

5. $\lim_{x \rightarrow -3} 1 - x$

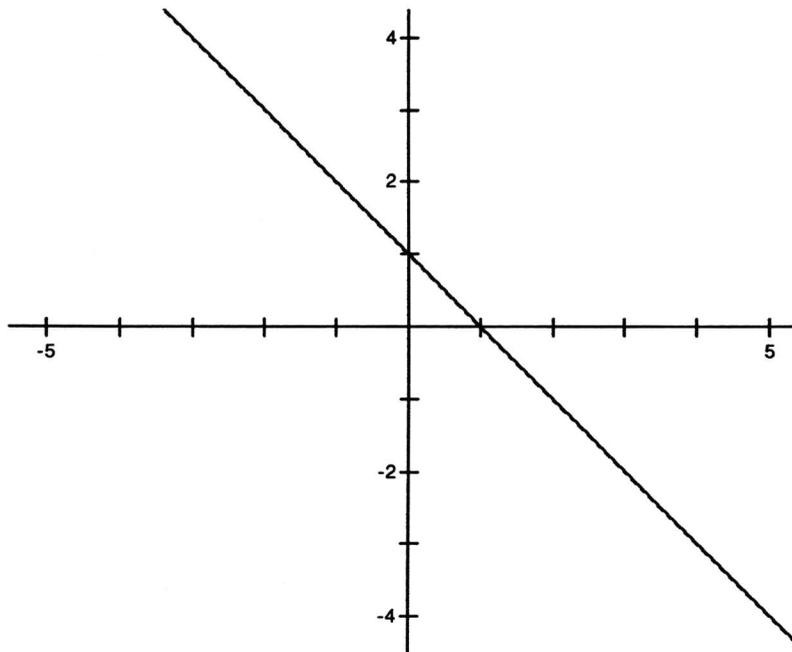


.....
.....

6. $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} + 1$



7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x}$



กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 2

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าของลิมิตโดยใช้ทฤษฎีสมบัติพื้นฐาน

1. $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} 4 - x$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} x - 2$

5. $\lim_{x \rightarrow -3} 2 - x$

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 3$

เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้จงอธิบายค่าของลิมิต

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} 2x - 1 = -3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} 5 - 2x = 3$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} x + 4 = 3$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} 1 - x = 4$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} + 1 = 4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = 2$$

เฉลยใบงานที่ 2

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการประมาณค่าของลิมิตในรูปตารางหรือกราฟ

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} 4 - x = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} x - 2 = -3$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} 2 - x = 5$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 3 = 5$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^2}{x} = 4$$



แนะนำ ก่อนเข้าสู่ลิมิต

- การหาค่าฟังก์ชัน ณ จุดใดๆ
- การอ่านพิกัดของกราฟ ณ จุดใดๆ
- การแยกตัวประกอบพหุนาม

การแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ

เรื่องที่ 24.1
กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

จุดประสงค์
เพื่อให้ นักเรียนสามารถหาค่าตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีกราฟได้

ย้อนกลับ

สาระสำคัญ

- สมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการที่มีตัวแปรสองตัว ซึ่งเลขชี้กำลังของแต่ละตัวเป็นหนึ่งและไม่มีการคูณกันของตัวแปร
- คำตอบของสมการเชิงเส้นที่มี x และ y เป็นตัวแปรคือ ค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริงและนิยมเขียนคำตอบของสมการในรูปของคู่อันดับ (x, y)
- สมการที่อยู่ในรูป $ax + by + c = 0$ เรียกว่า สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สามารถเขียนในรูป $y = -ax/b + c/b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

ย้อนกลับ

กิจกรรม 24.1
กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง 1. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากสมการ $x + y = 10$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 6

ย้อนกลับ

วิธีทำ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 6

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

จากการจะเห็นว่า คำตอบของสมการที่ต้องการ ได้แก่ $(0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4)$

ย้อนกลับ

ลองหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

- จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $2x + y = 5$ เมื่อ x และ y เป็น จำนวนเต็มและ x มีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 3

วิธีทำ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มและ x มีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 3

x	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1

จากการจะเห็นว่า คำตอบของสมการที่ต้องการ ได้แก่ $(-1, 7), (0, 5), (1, 3), (2, 1), (3, -1), (4, -3)$

ย้อนกลับ

- จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $2x + 4y = 10$

วิธีทำ $2x + 4y = 10$
ถ้า $x = -1$ แล้ว $2(-1) + 4y = 10$
 $4y = 10 + 2$
 $y = \frac{12}{4}$
 $y = 3$

ย้อนกลับ

ถ้า $x = 0$ แล้ว $2(0) + 4y = 10$

$$y = \frac{10}{4}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

ย้อนกลับ

หรือถ้าอยู่ในรูปของตาราง จะได้ดังนี้

x	-1	0	1
y	3	$\frac{5}{2}$	2

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการที่ตรงการ ได้แก่

$(-1, 3), (0, \frac{5}{2}), (1, 2)$

ย้อนกลับ

3. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $x + y = 10$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มและ x มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 5

วิธีทำ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มและ x มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 5

x	0	1	2	3	4	5
y	10	9	8	7	6	5

จากตารางจะเห็นว่า คำตอบของสมการที่ตรงการ ได้แก่

$(0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$

ย้อนกลับ

4. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $2x + y = 4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 6

วิธีทำ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 6

x	1	2	3	4	5	6
y	2	0	-2	-4	-6	-8

จากตารางจะเห็นว่า คำตอบของสมการที่ตรงการ ได้แก่

$(1, 2), (2, 0), (3, -2), (4, -4), (5, -6), (6, -8)$

ย้อนกลับ

5. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร $x + 2y = 8$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 3

วิธีทำ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 3

x	-1	0	1	2	3
y	4.5	4	3.5	3	2.5

จากตารางจะเห็นว่า คำตอบของสมการที่ตรงการ ได้แก่

$(-1, 4.5), (0, 4), (1, 3.5), (2, 3), (3, 2.5)$

ย้อนกลับ

ตัวอย่าง 2. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้โดยให้แกนคู่เดียวกัน

$$y = \frac{2}{3}x + 1, y = -2x + 1$$

$$y = -x + 1, y = \frac{1}{4}x + 1$$

ย้อนกลับ

วิธีทำ $y = \frac{2}{3}x + 1$ จะได้

x	0	3
y	1	3

$y = -2x + 1$ จะได้

x	0	1
y	1	-1

ย้อนกลับ

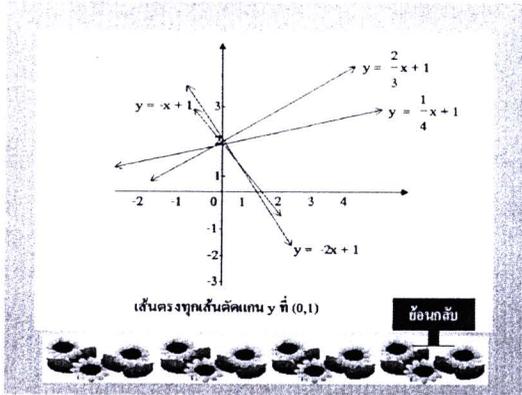
$y = -x + 1$ จะได้

x	0	1
y	1	0

$y = \frac{1}{4}x + 1$ จะได้

x	0	4
y	1	2

ย้อนกลับ



ลองเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

6. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้โดยให้แกนพิกัด

$y = 2x + 2$ $y = 4x + 4$

ย้อนกลับ

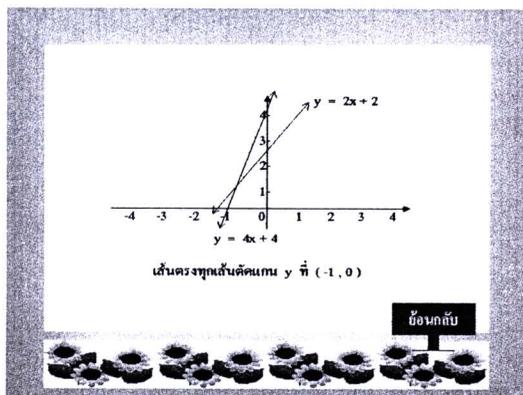
วิธีทำ $y = 2x + 2$ จะได้

x	0	1
y	2	4

$y = 4x + 4$ จะได้

x	0	-1
y	4	0

ย้อนกลับ

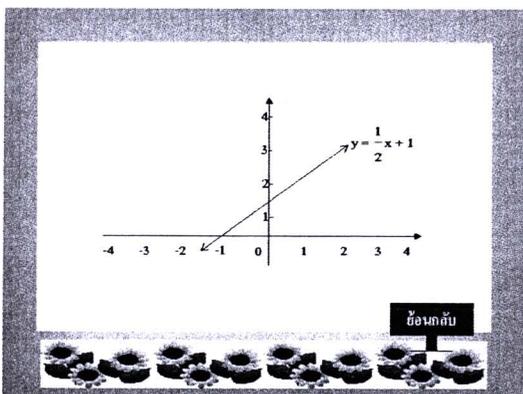


7. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ $2y - x = 2$

วิธีทำ $2y - x = 2$
 $2y = x + 2$
 $y = \frac{1}{2}x + 1$ จะได้

x	0	2	4
y	1	2	3

ย้อนกลับ

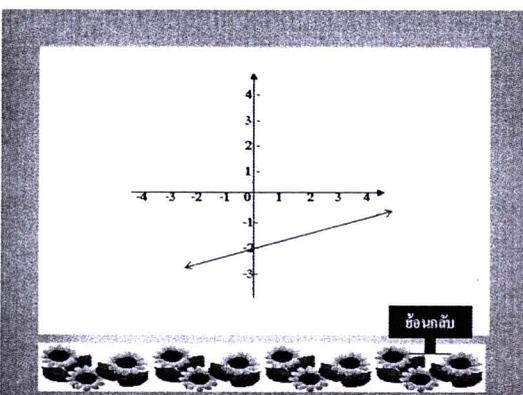


8. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ $x - 4y - 8 = 0$

วิธีทำ $x - 4y - 8 = 0$
 $-4y = 8 - x$
 $y = -2 + \frac{x}{4}$
 $y = \frac{1}{4}x - 2$ จะได้

x	-4	0	4
y	-3	-2	-1

ย้อนกลับ



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3/1-2 ส่วนขยายแนวคิดลิมิต

วิชา แคลคูลัส I

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2553

จำนวน 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

บทนิยาม ลิมิตด้านเดียว

ลิมิตซ้าย: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

ลิมิตขวา: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

จุดประสงค์

5. นักศึกษาบอกค่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
6. นักศึกษายอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
7. นักศึกษาให้เหตุผลในการบอกค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

ลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชัน

ความรู้พื้นฐาน

การหาค่าลิมิต

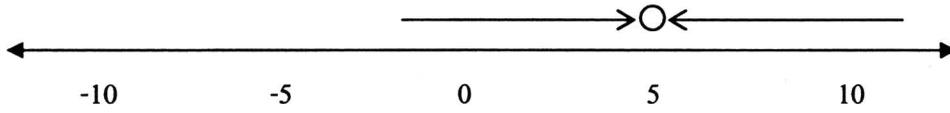
กิจกรรม

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องการหาค่าของลิมิตว่าสามารถทำได้อย่างไร (การใช้ตาราง การพิจารณาจากกราฟ การใช้ทฤษฎีบท)
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องลิมิตด้านเดียว ต่อด้วยแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการหาค่าลิมิต
3. ผู้สอนแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 ฝ่าย เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ในเรื่องการหาค่าลิมิต (ประมาณ 15 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปวิธีการการหาค่าลิมิต (3 นาที)

ขั้นสู่นเนื้อหา

1. ผู้สอนอธิบายการเป็นลิมิตซ้าย และลิมิตขวาด้วยระบบเส้นจำนวนดังภาพ



พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้

1.1 ลิมิตซ้ายหมายความว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ค่าของ x น้อยกว่า 5 เล็กน้อยใช่หรือไม่ (ใช่) เพราะเหตุใด

1.2 ลิมิตขวาหมายความว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ค่าของ x มากกว่า 5 นิดหน่อยใช่หรือไม่ (ใช่) เพราะเหตุใด

2. ผู้สอนอธิบายทฤษฎีการเป็นลิมิตซ้ายและลิมิตที่ว่า

ลิมิตซ้าย: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว

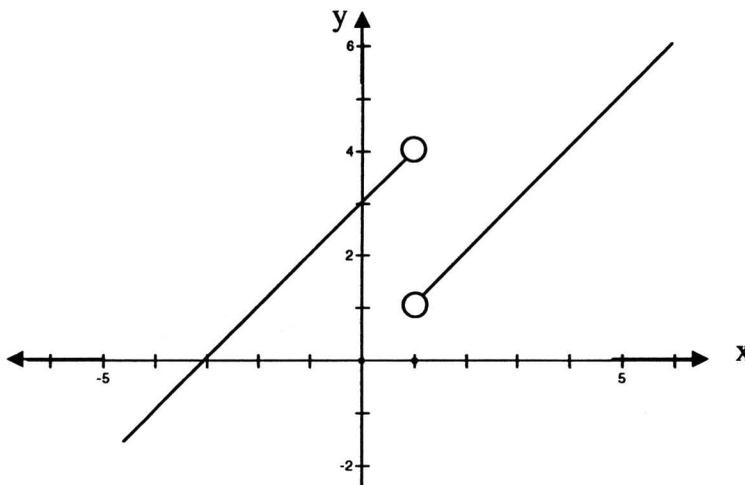
$$|f(x) - L| < \epsilon$$

ลิมิตขวา: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว

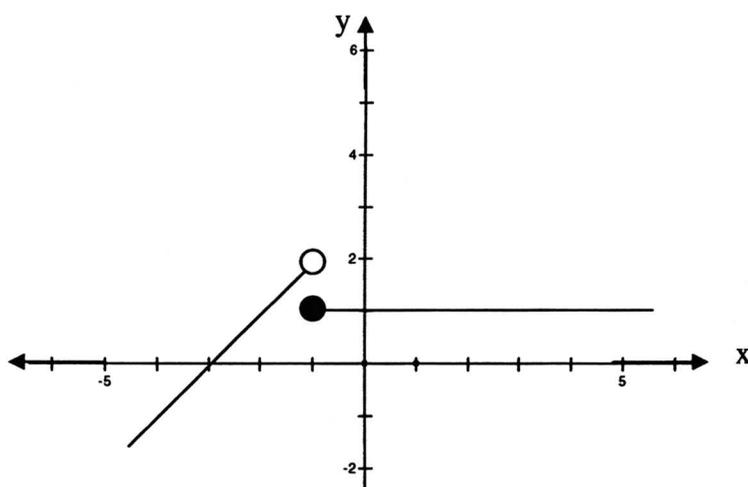
$$|f(x) - L| < \epsilon$$

3. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ จงหาค่าลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชันและใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



- 3.1 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายจะได้กราฟเป็นฟังก์ชันใด
- 3.2 ลิมิตซ้ายต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ใช่หรือไม่(ใช่) เพราะเหตุใด
- 3.3 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวาจะได้กราฟเป็นฟังก์ชันใด
- 3.4 ลิมิตขวาต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x$ ใช่หรือไม่ (ใช่) เพราะเหตุใด
- 3.5 การหาค่าลิมิตซ้ายทำได้โดยวิธีใดบ้าง (นำค่าเข้าใกล้คือ 1 ไปแทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ได้หรือไม่ (ได้))
- 3.6 การหาค่าลิมิตขวาทำได้ด้วยวิธีใดบ้าง (นำค่าเข้าใกล้คือ 1 ไปแทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน $f(x) = x$ หรือพิจารณาจากกราฟค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา หรือสร้างตารางค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา)
4. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ 1 & x \geq -1 \end{cases}$ จงหาค่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวา เมื่อ x เข้าใกล้ -1 พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชันและใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



- 4.1 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้ายจะได้กราฟเป็นฟังก์ชันใด
- 4.2 ลิมิตซ้ายต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x + 2$ ใช่หรือไม่(ใช่) เพราะเหตุใด
- 4.3 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางขวาจะได้กราฟเป็นฟังก์ชันใด
- 4.4 ลิมิตขวาต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = 1$ ใช่หรือไม่ (ใช่) เพราะเหตุใด
- 4.5 การหาค่าลิมิตซ้ายทำได้โดยวิธีใดบ้าง (นำค่าเข้าใกล้คือ -1 ไปแทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน $f(x) = x + 2$ ได้หรือไม่ (ได้))
- 4.6 การหาค่าลิมิตขวาทำได้ด้วยวิธีใดบ้าง

5. ผู้สอนยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้มีความหลากหลาย เช่น $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 และ $f(x) = \sqrt{x-1}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1

6. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 การค่าของลิมิตด้านเดียว (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกการทำงานของแต่ละกลุ่ม)

7. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

ขั้นสรุป

1. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงการหาค่าของลิมิตด้านเดียว (5 นาที)
2. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจ เรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกในการทำกิจกรรมกลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- ใบกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ในเรื่องการหาค่าลิมิต
- ใบงานที่ 1 การหาค่าลิมิตด้านเดียว

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
นักศึกษาสงเกตกับการเล่นเกม
2. ปัญหาที่เกิดขึ้น
นักศึกษาไม่ปรึกษาข้ามกลุ่มเดิมในช่วงเวลาที่ให้ทบทวน
3. ข้อเสนอแนะและแนวทางการแก้ไข
จัดแถวนั่งเป็นรูปตัวยู แบ่งเป็น 2 กลุ่ม

ใบกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 เรื่อง การหาค่าลิมิต

กติกาการเล่น

- 1 แบ่งผู้เล่นออกเป็น 2 ฝ่าย
- 2 ผู้เล่นแต่ละฝ่ายพยายามตอบคำถามให้ถูกต้อง ใครตอบผิดถือว่าออกจากการแข่งขัน
- 3 คำถาม 1 ข้อใช้เวลา 45 วินาทีในการตอบ
- 4 เมื่อเสร็จสิ้นคำถามหากฝ่ายใดเหลือผู้เล่นจำนวนมากกว่าฝ่ายนั้นเป็นผู้ชนะ

คำถาม

1. การหาค่าลิมิตทำได้กี่วิธี (3 วิธี)
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายหมายความว่าอย่างไร (x มีค่าน้อยกว่า 1 นิดหน่อย)
3. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวาหมายความว่าอย่างไร (x มีค่ามากกว่า 3 เล็กน้อย)
4. จุดพิกัด (1, 4) มีค่าของ y เป็นเท่าไร (4)
5. จุดพิกัด (2,1) มีค่าของ x เป็นเท่าไร (2)
6. เมื่อกำหนดกราฟฟังก์ชันใดๆมาให้มีจุดตัดกราฟที่ (3,5) มีค่าของฟังก์ชันเป็นเท่าไร (5)
7. ให้ $f(x) = 3$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 มีค่าของลิมิตเป็นเท่าไร (3)
8. ให้ $f(x) = 2x$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าของลิมิตเป็นเท่าไร (4)
9. ให้ $f(x) = 2x$ มีค่าของลิมิตเป็น 8 แสดงว่า x เข้าใกล้จำนวนใด (4)
10. ให้ $f(x) = x^2 - 3x$ เมื่อ x เข้าใกล้ -1 มีค่าของลิมิตเป็นเท่าไร (4)

กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวา

$$1. f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 4 \\ x+5 & x \geq 4 \end{cases} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 4$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 3 \\ 10 & x = 3 \end{cases} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 3$$

$$4. f(x) = \begin{cases} |3| & x > -1 \\ x & x < -1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } -1$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 1$$

$$6. f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวา

$$1. f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 4 \\ x+5 & x \geq 4 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 4$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} 3x - 2 \\ &= 3(2) - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} x + 5 \\ &= 4 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 3 \\ 10 & x = 3 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 3$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} |3| & x > -1 \\ x & x < -1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } -1$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |3|$$

$$= 3$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 1$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x$$

$$= 1$$

$$6. f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2}$$

$$= 4 - (2)^2$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4 - x^2}$$

$$= 4 - (2)^2$$

$$= 0$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3/2-2 ส่วนขยายแนวคิดลิมิต

วิชา แคลคูลัส I

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2553

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ลิมิตอนันต์คือ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในช่วงเปิดที่บรรจุ c แต่อาจไม่มีค่า c ก็ได้ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $M > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) > M$

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) < -N$

ลิมิตที่อนันต์คือ ค่า x เข้าใกล้อย่างไม่มีการขอบเขต มี 2 อย่างคือ มีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าลดลง

จุดประสงค์

8. นักศึกษาบอกการเป็นลิมิตอนันต์ของฟังก์ชันได้
9. นักศึกษาบอกลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันได้
10. นักศึกษายอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
11. นักศึกษาให้เหตุผลในการบอกการเป็นลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

- ลิมิตอนันต์ของฟังก์ชัน
- ลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชัน

ความรู้พื้นฐาน

- การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณากราฟ
- เศษส่วน

กิจกรรม

ตอนที่ 1 การบอกลิมิตอนันต์ของฟังก์ชัน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

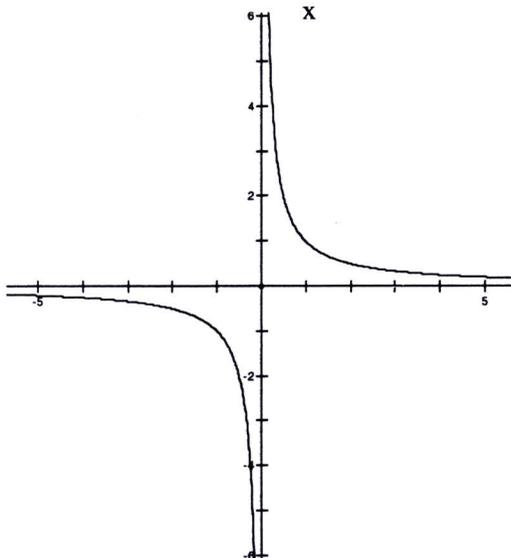
1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาถึงความหมายของลิมิต และการหาค่าของลิมิต
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องลิมิตที่อนันต์ แล้วแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณาจากกราฟ



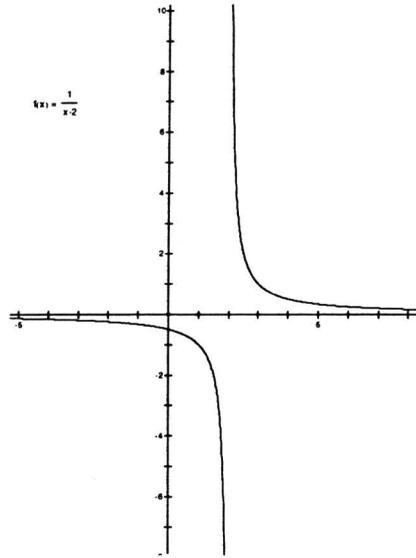
3. ผู้สอนแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 ฝ่าย เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้กิจกรรมเกมความยาว 50 ต่อ 50 ในเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณากราฟ (ประมาณ 15 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปลักษณะสำคัญของการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณากราฟ (3 นาที)

ขั้นสู่อเนื่อหา

1. ผู้สอนอธิบายการเป็นลิมิตอนันต์ด้วยกราฟ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 พร้อมทั้งคำถามนำดังต่อไปนี้



- 1.1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย หมายความว่าอย่างไร
 - 1.2 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้ายค่าของฟังก์ชัน เป็นอย่างไร (ค่าฟังก์ชันลดลงเรื่อย ๆ) และควรจะบอกค่าเข้าใกล้เป็นเท่าไรดี (เป็นลอบอนันต์ใช่หรือไม่)
 - 1.3 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา หมายความว่าอย่างไร
 - 1.4 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวาค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร (ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ) และควรจะบอกค่าเข้าใกล้เป็นเท่าไรดี (เป็นบวกอนันต์ใช่หรือไม่)
2. ผู้สอนอธิบายบทนิยามลิมิตอนันต์ที่ว่า เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในช่วงเปิดที่บรรจุ c แต่อาจไม่มีค่า c ก็ได้ แล้ว $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $M > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) > M$ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) < -N$
 3. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 เช่น $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายและทางขวา พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



3.1 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย หมายความว่าอย่างไร (ค่า x มากกว่าสองเล็กน้อย หรือ ไม่ใช่ x น้อยกว่าสองเล็กน้อย)

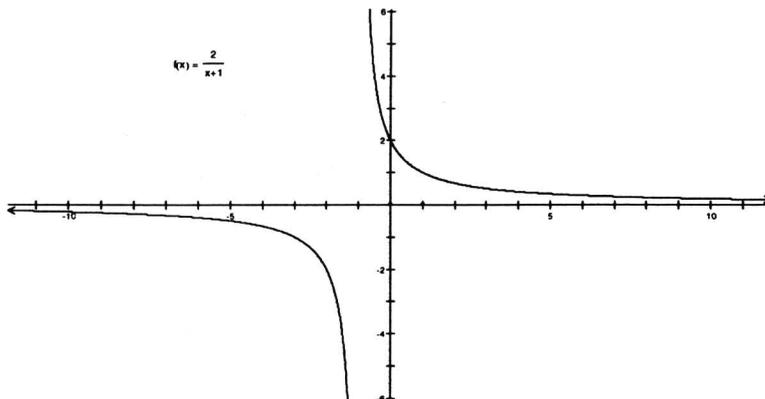
3.2 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร (ลดลงใช่หรือไม่) และควรจะบอกค่าเข้าใกล้เท่าไรดี (ลบนันต์)

3.3 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวา หมายความว่าอย่างไร (ค่า x มากกว่าสองเล็กน้อย หรือ ไม่ใช่)

3.4 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวา ค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร (เพิ่มขึ้นใช่หรือไม่) และควรจะบอกค่าเข้าใกล้เท่าไรดี (บวกอนันต์)

4. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 เช่น $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้ายและทางขวา

พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



- 4.1 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย หมายความว่าอย่างไร
- 4.2 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย ค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร (ลดลงใช่หรือไม่) และควรจะบอกค่าเข้าใกล้เท่าไรดี(ลบนันต์)
- 4.3 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางขวา หมายความว่าอย่างไร
- 4.4 เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางขวา ค่าของฟังก์ชันเป็นอย่างไร (เพิ่มขึ้นใช่หรือไม่) และควรบอกค่าเข้าใกล้เท่าไรดี (บวกอนันต์)
5. ผู้สอนยกตัวอย่างที่มีความหลากหลายเพิ่มเติม เช่น $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา หรือ $f(x) = \frac{1}{-x+1}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายและทางขวา
6. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมการทำงานของแต่ละกลุ่ม)
7. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
8. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงวิธีการหาค่าลิมิตอนันต์ (3 นาที)

ตอนที่ 2 การหาค่าลิมิตที่อนันต์

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องการบอกค่าของลิมิต
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องลิมิตที่อนันต์ แล้วต่อยอดแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องเศษส่วน
3. ผู้สอนแบ่งนักศึกษออกเป็น 2 ฝ่าย เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐาน โดยใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 เรื่องเศษส่วน (10 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปลักษณะสำคัญของเศษส่วน (3 นาที)

ขั้นสู่นเนื้อหา

1. ผู้สอนแนะนำทฤษฎีสมบัติลิมิตที่อนันต์ที่ว่า 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ
 บวก 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะบวก และ $\frac{1}{x^n}$ หาค่าได้ เมื่อ $x < 0$
2. ผู้สอนยกตัวอย่างการหาค่าของลิมิตที่อนันต์ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^4}$ พร้อมทั้งคำถามนำดังต่อไปนี้

2.1 เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนที่เพิ่มขึ้น ผลลัพธ์ของการหารจะมีค่าเป็นเท่าไร

2.2 จากสมบัติข้อที่ 1 ทำให้เราทราบว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^4} = 0$ ใช่หรือไม่ (ใช่)

3. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 9}{3x^2}$ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้

3.1 จากโจทย์ฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนได้อย่างไร

3.2 จะมีวิธีการใดที่จะเปลี่ยนฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{3x^2}$ ให้อยู่ในรูปตามสมบัติข้อ 1

จะนำ x^2 ไปหารทั้งเศษและส่วนของ $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{3x^2}$ จะได้หรือไม่ อย่างไร

4. ผู้สอนยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้ความหลากหลายเช่น 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x + 8}{x^4 + 2x^2}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x}}{x^2}$

5. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 2 การหาค่าของลิมิตที่อนันต์ (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกการทำงานของแต่ละกลุ่ม)

6. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 2 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

7. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงวิธีการหาค่าของลิมิตที่อนันต์ (3 นาที)

8. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจ เรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกในการทำกิจกรรมกลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- ใบกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ในเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยพิจารณากราฟและเศษส่วน
- ใบงานที่ 1 การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน
- ใบงานที่ 2 การหาค่าลิมิตที่อนันต์

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1 และ 2
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน**1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน**

นักศึกษาสนุกกับการเล่นเกม โดยแสดงออกอย่างชัดเจนในกลุ่มนักศึกษาชายที่ตอบคำถาม
ได้ถูกต้อง

2. ปัญหาที่เกิดขึ้น

ในการจัดแฉวงเป็นรูปตัวยู ยังมีนักศึกษาส่วนน้อยที่ไม่ยอมปรึกษาข้ามกลุ่ม

3. ข้อเสนอแนะและแนวทางการแก้ไข

สนทนากับนักศึกษาถึงประโยชน์ของการแลกเปลี่ยนความรู้จากหลายๆแหล่งข้อมูล

ใบกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันโดยพิจารณากราฟ

กติกาการเล่น

- 1 แบ่งผู้เล่นออกเป็น 2 ฝ่าย
- 2 ผู้เล่นแต่ละฝ่ายพยายามตอบคำถามให้ถูกต้อง ใครตอบผิดถือว่าออกจากการแข่งขัน
- 3 คำถาม 1 ข้อใช้เวลา 45 วินาทีในการตอบ
- 4 เมื่อเสร็จสิ้นคำถามหากฝ่ายใดเหลือผู้เล่นจำนวนมากกว่าฝ่ายนั้นเป็นผู้ชนะ

คำถาม

1. จุดพิกัด $(1, -4)$ มีค่าของ y เป็นเท่าไร (-4)
2. จุดพิกัด $(-2, 4)$ มีค่าของ x เป็นเท่าไร (-2)
3. จุดพิกัด $(0, 6)$ หมายความว่าอย่างไร (ค่า x เป็น 0 ส่วนค่า y เป็น 6)
4. จุดพิกัด $(2, 1)$ หมายความว่าอย่างไร (ค่า x เป็น 2 ส่วนค่า y เป็น 1)
5. จุดพิกัดที่มีค่า x และ ค่า y เป็นลบอยู่ใน คอร์ดแดนซ์ใด (3)
6. เมื่อกำหนดกราฟฟังก์ชันใดๆมาให้มีจุดตัดกราฟที่ $(2, 1)$ มีค่าของฟังก์ชันเป็นเท่าไร
(1)
7. เมื่อกำหนดกราฟฟังก์ชันใดๆมาให้มีจุดตัดกราฟที่ $(3, 7)$ มีค่าของฟังก์ชันเป็นเท่าไร
(7)
8. เมื่อกำหนดกราฟฟังก์ชันใดๆมาให้มีจุดตัดกราฟที่ $(-1, -4)$ มีค่าของฟังก์ชันเป็นเท่าไร
(-4)
9. ให้ $f(x) = x + 1$ เส้นกราฟตัดแกนที่จุดพิกัดใด $(1, 0)$
10. ให้ $f(x) = x + 1$ เส้นกราฟตัดแกนที่จุดพิกัดใด $(0, 1)$

ใบกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 เรื่องเศษส่วน

กติกาการเล่น

- 1 แบ่งผู้เล่นออกเป็น 2 ฝ่าย
- 2 ผู้เล่นแต่ละฝ่ายพยายามตอบคำถามให้ถูกต้อง ใครตอบผิดถือว่าออกจากการแข่งขัน
- 3 คำถาม 1 ข้อใช้เวลา 45 วินาทีในการตอบ
- 4 เมื่อเสร็จสิ้นคำถามหากฝ่ายใดเหลือผู้เล่นจำนวนมากกว่าฝ่ายนั้นเป็นผู้ชนะ

คำถาม

1. จำนวน $\frac{3}{7}$ เรียก 3 ว่าอย่างไร (ตัวเศษ)
2. ในการบวกและลบเศษส่วนต้องทำตัวส่วนให้เป็นอย่างไร (เท่ากัน)
3. การคูณเศษส่วนทำได้อย่างไร (จับตัวเศษคูณตัวเศษตัวส่วนคูณตัวส่วน)
4. จำนวน $\frac{12}{8}$ นำ 4 ไปตัวทอนจะได้คำตอบคือ $\frac{3}{2}$
5. จำนวน $\frac{6}{9}$ นำ 3 ไปหารทั้งตัวเศษและตัวส่วนจะได้คำตอบคือ $\frac{2}{3}$
6. จำนวน $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ มีค่าเท่าไร $\frac{4}{5}$
7. จำนวน $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$ มีค่าเท่าไร $\frac{4}{7}$
8. จำนวน $\frac{5}{0}$ มีค่าเท่าไร (หาค่าไม่ได้)
9. จำนวน $\frac{0}{7}$ มีค่าเท่าไร (0)
10. จำนวน $\frac{12}{15}$ นำอะไรไปหารทั้งเศษและส่วนแล้วได้คำตอบเป็น $\frac{4}{5}$ (3)

กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{2-x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2x-4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x^2-1}$

กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 2

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^4}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^3 + 2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{3x^3 - 5x}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{7x^3 + 5x^2 - 6x}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 6x + 7}{x^3 + 2x^2 - 8x}$

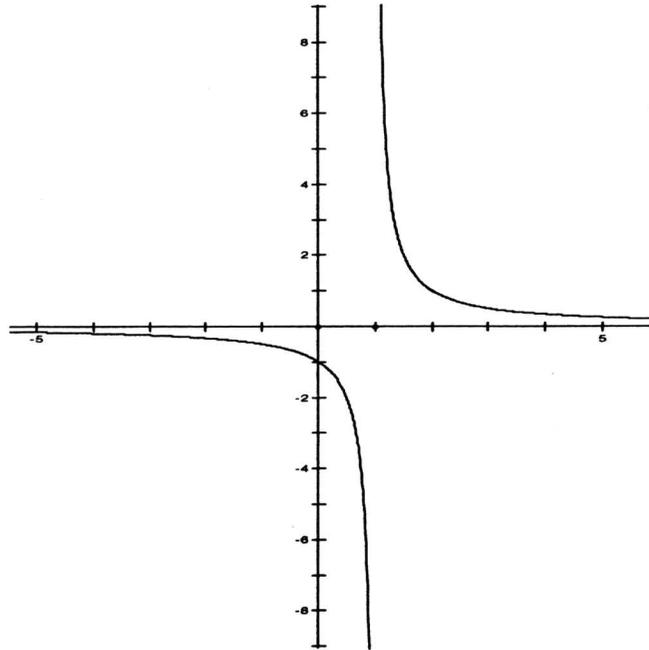
เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

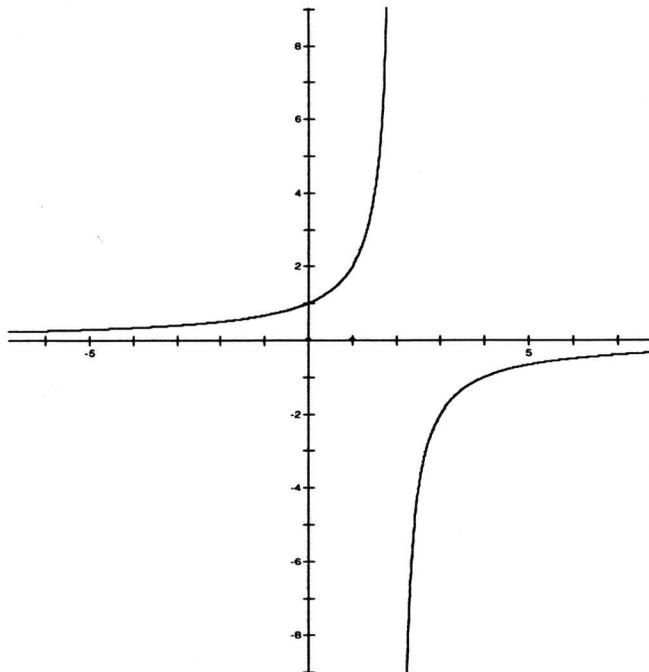
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{2-x}$$

จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{2-x} = +\infty$

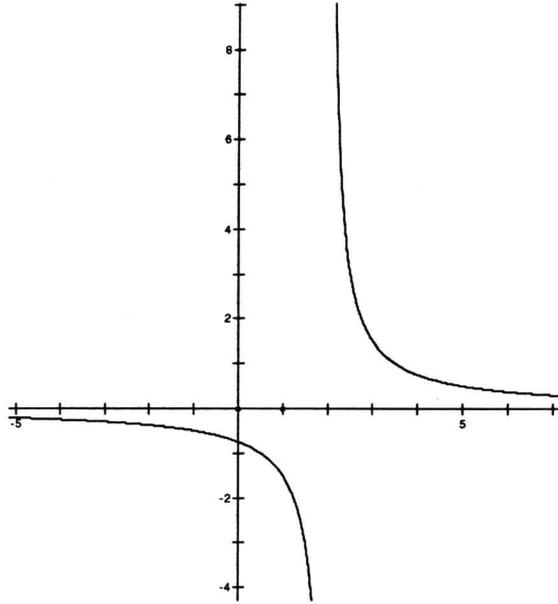
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{2-x} = -\infty$$



$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2x-4}$$

จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{2x-4} = -\infty$

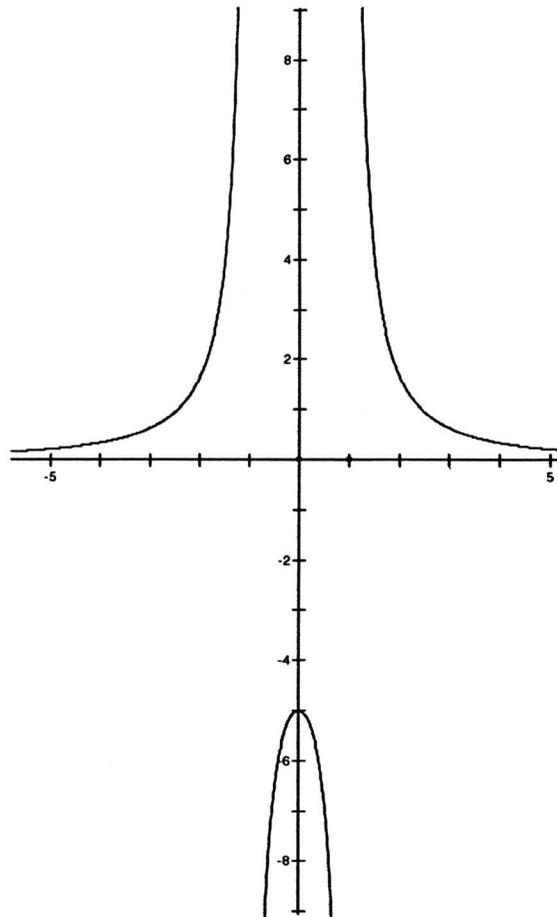
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{2x-4} = +\infty$$



$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x^2-1}$$

จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x^2-1} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x^2-1} = -\infty$$



เฉลยใบงานที่ 2

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาลำกัณฑ์ที่อนันต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^4} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^3 + 2x} = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{3x^3 - 5x} = 2$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{7x^3 + 5x^2 - 6x} = 0$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 6x + 7}{x^3 + 2x^2 - 8x} = 4$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5/1-2 อนุพันธ์และเส้นสัมผัส

วิชา แคลคูลัส I

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏ

เชียงใหม่ ปีการศึกษา 2553

จำนวน 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด $(a, f(a))$ คือ $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

จุดประสงค์

1. นักศึกษาบอกความชันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. นักศึกษายอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
3. นักศึกษาให้เหตุผลในการบอกความชันของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

ความชันของฟังก์ชัน

ความรู้พื้นฐาน

ความชันของกราฟ

กิจกรรม

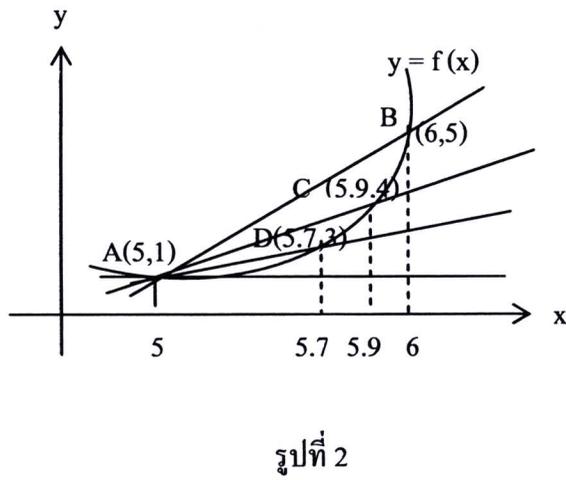
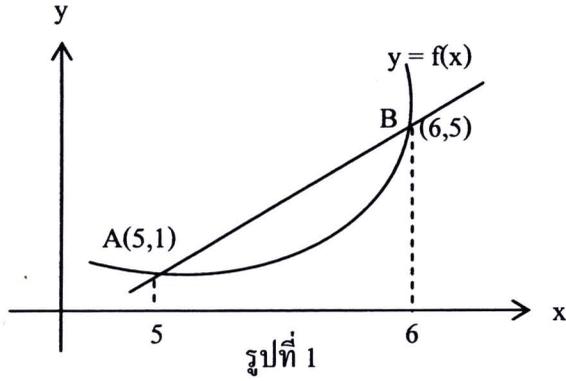
ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องความชันว่าเกิดขึ้นได้อย่างไร
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องความชันของฟังก์ชัน ต่อด้วยแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องความชันของกราฟ
3. ผู้สอนแบ่งนักศึกษาออกเป็นกลุ่มละ 4 คน เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้ใบความรู้ในเรื่องความชันของกราฟ (ประมาณ 15 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปวิธีการหาความชันของกราฟ (3 นาที)



ขั้นสู่นเนื้อหา

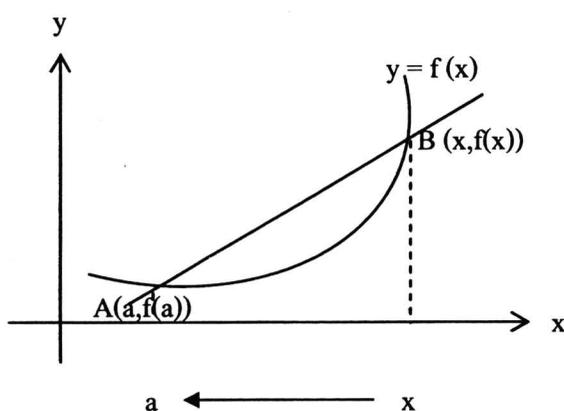
1. ผู้สอนอธิบายความชันของเส้นตัดกราฟ ดังรูป



ค่า x	ความชัน
$5 < x \leq 6$	4
$5 < x \leq 5.9$	3.33
$5 < x \leq 5.7$	2.85
$5 < x \leq 5.1$	$\frac{f(5.1) - f(5)}{5.1 - 5}$
⋮	⋮

พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้

- 1.1 จากรูปที่ 1 จะหาความชันของเส้นตัดกราฟได้อย่างไร
- 1.2 จากรูปที่ 1 ความชันของเส้นตัดกราฟหาได้จากการพิจารณาจุด A และ จุด B อย่างไร
- 1.3 ความชันหาได้จากสูตร $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ใช่หรือไม่
- 1.4 ความชันของเส้นตัดกราฟที่จุด A และ จุด B มีค่าเท่ากับ 4 ใช่หรือไม่
- 1.5 จากรูปที่ 2 จะหาความชันที่จุด A และ จุด C ได้อย่างไร
- 1.6 จากรูปที่ 2 จะหาความชันที่จุด A และจุด D ได้อย่างไร



2. ผู้สอนอธิบายบทนิยามความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุดใดๆด้วยกราฟ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้
 - 2.1 จากรูปจะหาความชันของเส้นตัดกราฟที่จุด A และ จุด B ได้อย่างไร
 - 2.2 ความชันหาได้จากการพิจารณาคู่อันดับ $(a, f(a))$ และ คู่อันดับ $(x, f(x))$ อย่างไร
 - 2.3 การที่ค่า x เข้าใกล้จนเกือบจะเป็นค่า a เราเรียกว่าหาค่าอะไร (จากการความรู้บทที่ 2 เรียกว่าการหาค่าลิมิต)
 - 2.4 จะได้ความชันเมื่อ x เข้าใกล้จนเกือบเป็น a คือ $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ใช่หรือไม่
3. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = x^2$ จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด $(2, f(2))$ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้
 - 3.1 สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟว่าอย่างไร
 - 3.2 ฟังก์ชัน $f(x)$ คืออะไร ตัวแปร a คืออะไร และ $f(a)$ มีค่าเท่าไร
 - 3.3 ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(2, f(2))$ หาได้อย่างไร

4. ผู้สอนยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้มีความหลากหลาย เช่น $f(x) = 4x^2 - 1$ จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด $x = -1$, $f(x) = x^2 + 5x$ หาความชันเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด $x = 3$ และ $f(x) = -x^2 + 2x$ หาความชันเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด $x = -2$ เป็นต้น
5. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 การหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด x ใดๆ (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกการทำงานของแต่ละกลุ่ม)
6. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

ขั้นสรุป

1. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด x ใดๆ (5 นาที)
2. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจ เรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกลงใจในการทำกิจกรรมกลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- ใบความรู้เรื่องความชันของกราฟ
- ใบงานที่ 1 การหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด x ใดๆ

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

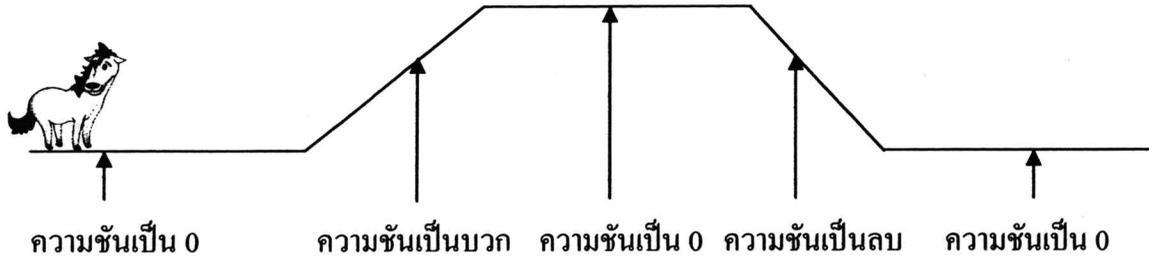
- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน

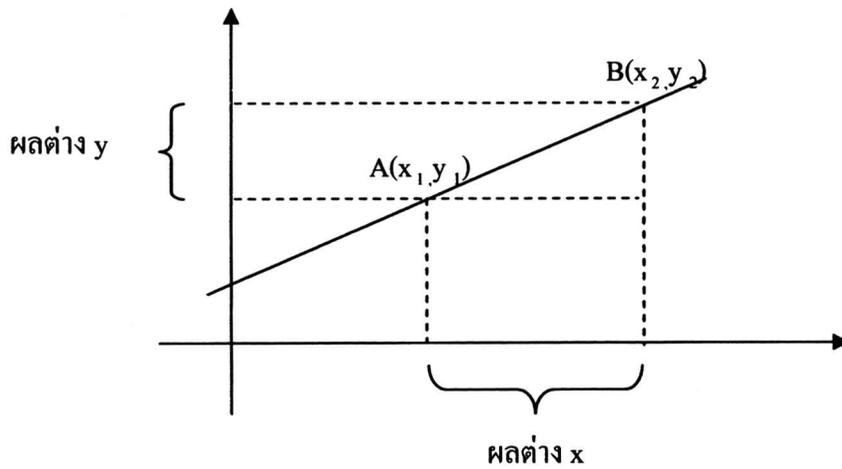
1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
 - นักศึกษาส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นและตั้งใจศึกษาใบความรู้เป็นอย่างดี มีการอภิปรายและแสดงความคิดเห็นและมีการอธิบายในส่วนที่สมาชิกในกลุ่มไม่เข้าใจ
2. ปัญหาที่เกิดขึ้น
 -
3. ข้อเสนอแนะและแนวทางแก้ไข
 -

ใบความรู้เรื่อง ความชันของกราฟ

พิจารณาภาพ ม้ากำลังจะวิ่งขึ้นเนิน

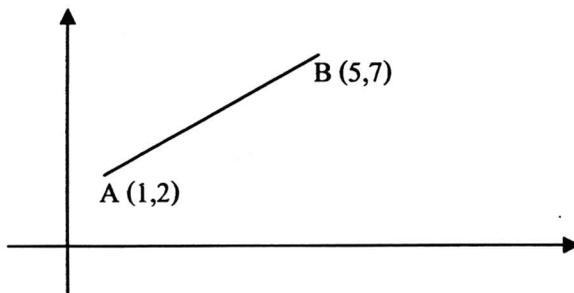


สูตรของความชัน (Slope) เขียนแทนด้วย m



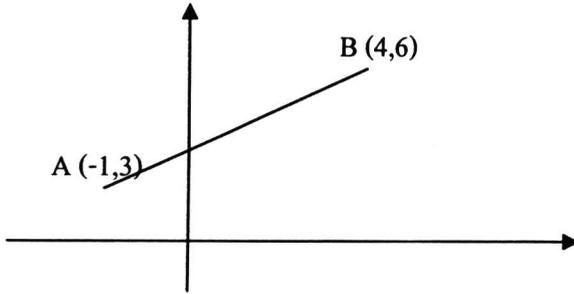
จากรูปจะได้ความชันจากจุด A ไป B คือ $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{ผลต่าง } y}{\text{ผลต่าง } x}$

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปจงหาความชันระหว่างจุด A กับจุด B



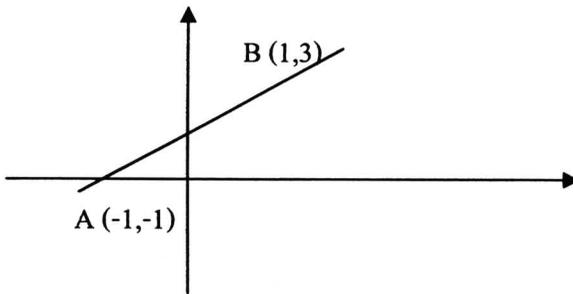
วิธีทำ จาก $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะได้ $m_{AB} = \frac{7-2}{5-1} = \frac{5}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงหาความชันระหว่างจุด A กับจุด B



วิธีทำ จาก $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะได้ $m_{AB} = \frac{6 - 3}{4 - (-1)} = \frac{3}{5}$

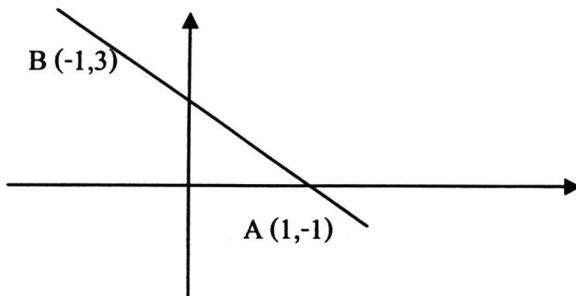
ตัวอย่างที่ 3 จากรูปจงหาความชันระหว่างจุด A กับจุด B



วิธีทำ

.....

ตัวอย่างที่ 4 จากรูปจงหาความชันระหว่างจุด A กับจุด B



วิธีทำ

.....

กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด x ที่กำหนดให้

1. $f(x) = x^2$, $x = 1$

2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $x = 2$

3. $f(x) = 7x - x^2$, $x = -3$

4. $f(x) = x^3$, $x = -1$

เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด x ที่กำหนดให้

1. $f(x) = x^2$, $x = 1$

จาก $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ จะได้

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $x = 2$

จาก $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ จะได้

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 1 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1 = 7$$

3. $f(x) = 7x - x^2$, $x = -3$

จาก $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ จะได้

$$m_{-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3}$$

$$m_{-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{7x - x^2 + 30}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(-x+10)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} -x + 10 = 13$$

4. $f(x) = x^3$, $x = -1$

จาก $m_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ จะได้

$$m_{-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$m_{-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1 = 3$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5/2-2 อนุพันธ์และเส้นสัมผัส

วิชา แคลคูลัส I

รหัส MATH 1401

มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2553

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x คือ f' ซึ่งกำหนดดังนี้ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

จุดประสงค์

4. นักศึกษาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามได้
5. นักศึกษยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
6. นักศึกษาให้เหตุผลในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ความรู้พื้นฐาน

- การบวก การลบ การคูณพหุนามและการหารพหุนาม

กิจกรรม

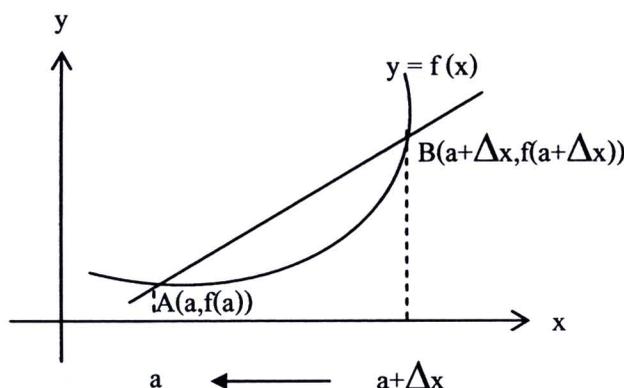
ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้สอนสนทนากับนักศึกษาในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันว่าคืออะไร
2. ผู้สอนอธิบายถึงความสำคัญของความรู้เดิมที่ควรมีในการเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ต่อด้วยแนะนำความรู้พื้นฐานเรื่องการบวก การลบและการคูณพหุนาม
3. ผู้สอนแบ่งนักศึกษาออกเป็นกลุ่มละ 4 คน เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้ใบความรู้ในเรื่องการบวก การลบและการคูณพหุนาม (ประมาณ 15 นาที)
4. ผู้สอนและนักศึกษาร่วมกันสรุปถึงการบวก การลบ การคูณพหุนามและการหารพหุนาม (3 นาที)



ขั้นสู่นเนื้อหา

1. ผู้สอนอธิบายบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ x เข้าใกล้ a ด้วยกราฟ พร้อมทั้งใช้คำถามนำดังต่อไปนี้



- 1.1 จากกราฟจะหาความชันที่จุด A และ จุด B ได้อย่างไร
- 1.2 หาความชันโดยพิจารณาจุดอันดับ $(a, f(a))$ และจุดอันดับ $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ อย่างไร
- 1.3 ถ้าจุด $a + \Delta x$ เข้าใกล้จุด a จะเป็นค่า a หมายความว่า Δx มีค่าเป็นอย่างไร
- 1.4 หาความชันที่จุด $a + \Delta x$ เข้าใกล้ a เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 ได้อย่างไร (นำค่า $a + \Delta x$ ไป

แทนที่ตัวแปร x ของการหาความชันเส้นสัมผัสกราฟที่จุด a) จึงได้ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

- 1.5 ผู้สอนจึงอธิบายบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ที่ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

- 2.1 บทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ x คือ
- 2.2 $f(x + \Delta x)$ คืออะไร (แทน $x + \Delta x$ ที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$)
- 2.3 หาค่าลิมิตได้อย่างไร (เปลี่ยนรูปฟังก์ชันแล้วแทนค่า Δx ด้วย 0)

3. ผู้สอนยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้มีความหลากหลาย เช่น จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 5x$, $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$ และ $f(x) = 5x - 2x^2$

4. ผู้สอนให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มและช่วยกันทำใบงานที่ 1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม (ผู้สอนสังเกตและจดบันทึกการทำงานของแต่ละกลุ่ม)

5. ผู้สอนสุ่มกลุ่มตัวแทนออกมาเฉลยใบงานที่ 1 ส่วนกลุ่มที่เหลือร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

ขั้นสรุป

1. ผู้สอนและนักเรียนร่วมกันสรุปถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม (5 นาที)
2. ผู้สอนให้นักศึกษาแต่ละคนสะท้อนคิดจากการเรียนการสอนในเรื่องสิ่งที่นักศึกษาเข้าใจ เรื่องใดที่อยากให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม สิ่งใดที่อยากให้ผู้สอนปรับปรุง และความรู้สึกในการทำกิจกรรม

กลุ่ม

สื่อการสอน

- ตำราเรียน
- ใบความรู้เรื่องการบวก การลบ การคูณพหุนามและการหารพหุนาม
- ใบงานที่ 1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม

การวัด

- แบบสังเกตพฤติกรรม
- ใบงานที่ 1
- แบบบันทึกสะท้อนคิดจากผู้เรียน

การประเมินผล

- นักศึกษาแต่ละกลุ่มทำใบงานได้ถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 60 ขึ้นไป

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
นักศึกษามีความกระตือรือร้นในการศึกษาใบความรู้ มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน
2. ปัญหาที่เกิดขึ้น
-
3. ข้อเสนอแนะและแนวทางการแก้ไข
-

ใบความรู้เรื่อง การบวก การลบ การคูณพหุนามและการหารพหุนาม

การบวก การลบพหุนาม

ตัวอย่าง จงหาผลลัพธ์ของพหุนามต่อไปนี้

1. $7x^2 + 3x + 5x + 2x^2 - 6x$

วิธีทำ $7x^2 + 3x + 5x + 2x^2 - 6x = (3 + 5 - 6)x + (7 + 2)x^2$
 $= 2x + 9x^2$

2. $4a - 5a^2 + 2a - 5a^3 - 3a^2$

วิธีทำ $4a - 5a^2 + 2a - 5a^3 - 3a^2 = (4 + 2)a + (-5 - 3)a^2 - 5a^3$
 $= 6a - 8a^2 - 5a^3$

3. $5x^2 - 6x - 11x^2 + 3x$

วิธีทำ $5x^2 - 6x - 11x^2 + 3x = (-6 + 3)x + (5 - 11)x^2$
 $= -3x - 6x^2$

4. $7x^2 + 6x - 3x^2 + 4x$

วิธีทำ $7x^2 + 6x - 3x^2 + 4x = (6 + 4)x + (7 - 3)x^2$
 $= 10x + 4x^2$

5. $11x^2 - 7x^3 - 3x^2 + 4x - 2x^3$

วิธีทำ

.....

สรุปการบวก การลบพหุนามทำได้โดย

.....

การคูณพหุนาม

ตัวอย่างจงหาผลลัพธ์ของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x+2)(x+2)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (x+2)(x+2) &= (x \cdot x) + (x \cdot 2) + (2 \cdot x) + (2 \cdot 2) \\ &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

2. $(x-2)(x+1)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (x-2)(x+1) &= (x \cdot x) + (x \cdot 1) + ((-2) \cdot x) + ((-2) \cdot 1) \\ &= x^2 + x - 2x - 2 \\ &= x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

3. $(x-3)(x-4)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (x-3)(x-4) &= (x \cdot x) + (x \cdot (-4)) + ((-3) \cdot x) + ((-3) \cdot (-4)) \\ &= x^2 - 4x - 3x + 12 \\ &= x^2 - 7x + 12 \end{aligned}$$

4. $(x-1)^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (x-1)(x-1) &= (x \cdot x) + (x \cdot (-1)) + ((-1) \cdot x) + ((-1) \cdot (-1)) \\ &= x^2 - x - x + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

5. $(x-3)(x+7)$

.....

.....

.....

การหารพหุนาม

ตัวอย่าง จงหาผลลัพธ์ของพหุนามต่อไปนี้

$$1. \frac{3x^2 + 2x}{x}$$

วิธีทำ
$$\frac{3x^2 + 2x}{x} = \frac{x(3x + 2)}{x}$$

$$= 3x + 2$$

$$2. \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3}$$

วิธีทำ
$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 5)}{x + 3}$$

$$= x - 5$$

$$3. \frac{4x^2 - 5x}{x}$$

.....

.....

.....

.....

$$4. \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$$

.....

.....

.....

.....

$$5. \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

$$6. \frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}} &= \frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{x + \sqrt{5}} \\ &= x - \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$7. \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}}$$

.....

.....

.....

$$8. \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

.....

.....

.....

$$9. \frac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}}$$

.....

.....

.....

กลุ่มที่

1 2
3 4

ใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม

1. $f(x) = x^2 - 3$

2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

3. $f(x) = 7x - x^2$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x$

เฉลยใบงานที่ 1

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม

1. $f(x) = x^2 - 3$

จาก $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3 - x^2 + 3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

จาก $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h - 5 = 6x + 5$$

3. $f(x) = 7x - x^2$

จาก $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x+h) - (x+h)^2 - (7x - x^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7x + 7h - x^2 - 2xh - h^2 - 7x + x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(7 - 2x - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 7 - 2x - h = 7 - 2x$$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x$

จาก $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - (2x^2 - 3x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 3 = 4x - 3$$

ภาคผนวก ข
เครื่องมือที่ใช้เก็บรวบรวมข้อมูล

กลุ่มที่

แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้

เรื่อง ชั่วโมงที่ วัน/เดือน/ปี.....

1. ความกระตือรือร้นสนใจในการเรียนบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. การตอบคำถามและการแสดงความคิดเห็นในการเรียน/ การเฉลยใบงาน

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. ความร่วมมือและความรับผิดชอบในการเข้ากลุ่มทำใบงาน

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างสะท้อนคิดจากผู้สอน

แผนการเรียนรู้ที่ 1 / 1-2 เรื่องความหมายของลิมิต

- ชั้นทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการแทนค่าของฟังก์ชัน จะพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่ให้ความสนใจดี และมีผู้นำช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มฟัง มีบางกลุ่ม จะทบทวนเสร็จก่อนเวลาที่กำหนดไว้ ก็จะทำการศึกษาเนื้อเรื่องที่จะเรียนรอกกลุ่มอื่นๆ เพราะ นักศึกษากลุ่มนี้เคยลงเรียนแค่ยกเลิกรายวิชาหลังจากทราบคะแนนสอบกลางภาคจึงทำให้เรียนรู้ได้ เร็วกว่ากลุ่มอื่น
- ในการใช้คำถามแบบเปิดนักศึกษาส่วนใหญ่ไม่กล้าที่จะตอบ อย่างเช่นคำถามที่ว่า จำนวนที่เข้าใกล้ 2 มีจำนวนใดบ้าง นักศึกษาจะเงียบหรือตอบเบาๆ ก็ต้องใช้คำถามที่แคบลงมาโดย ยกตัวอย่างว่า จำนวน 1 ใกล้จำนวน 2 หรือยังถ้ายังมีใครจะช่วยตอบได้ว่าใกล้กว่านี้ก็คือจำนวนใด ก็จะมีนักศึกษาหลายๆ คนช่วยกันตอบ
- ในการทำกิจกรรมใบงานจะพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่จะทำได้ในการแสดงตารางค่าเข้าใกล้ จำนวนเต็มที่เป็นบวก แต่เมื่อเจอโจทย์คำถามที่ต้องแสดงค่าเข้าใกล้จำนวนที่เป็นลบนักศึกษาจะไม่ แน่ใจว่าจะเติมจำนวนใดดีแต่นักศึกษาเข้าใจว่าเข้าใกล้ทางซ้ายมาทิศทางใดและเข้าใกล้ทางขวา มา ทิศทางใด เมื่อเขียนจำนวนเข้าใกล้ก็ไม่ถูกต้อง อาจเป็นด้วยที่ว่าผู้สอนไม่ได้ยกตัวอย่างอธิบาย แสดงจำนวนที่เข้าทางลบให้นักศึกษา และพบปัญหาอีกที่ว่าโจทย์ข้อต่างๆ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ มี การยกกำลังและเศษส่วนทำให้นักศึกษาเริ่มไม่อยากจะแทนค่าตัวแปร x แล้วหาค่าของฟังก์ชัน แต่นักศึกษาเขียนจำนวนในตารางค่าเข้าใกล้ได้ถูกต้องเนื่องด้วยค่าเข้าใกล้เป็นจำนวนเต็มบวก ผู้สอนคิดว่าการทำใบงานครั้งนี้ควรจะต้องเป็นฟังก์ชันที่ง่ายๆ ไม่มีความซับซ้อนในการหาค่า ของฟังก์ชันเนื่องด้วยตัวเลขที่แทนค่าตัวแปร x เป็นทศนิยมซึ่งดูแล้วจะยากเกินไปในฟังก์ชันตรรก ยะที่มีการยกกำลังและเศษส่วน และค่าเข้าใกล้ก็ควรจะเป็นจำนวนเต็มบวก ไม่ควรจะเป็นจำนวน เต็มลบเพราะว่าผู้สอนต้องการให้นักศึกษาทราบถึงความหมายของคำว่าลิมิต
- จากการอ่านสะท้อนคิดของนักศึกษาในหัวข้อเรื่องความเข้าใจความหมายของลิมิต นักศึกษาส่วน ใหญ่ยังอธิบายได้ไม่ชัดเจน ส่วนใหญ่จะเขียนว่าเป็นค่าที่เข้าใกล้จำนวนทางซ้ายกับทางขวา โดย ไม่มีการบอกว่าค่าของฟังก์ชันที่แสดงค่าเข้าใกล้ทางซ้ายกับทางขวามีค่าเป็นจำนวนเดียวกัน อาจ เป็นเพราะว่านักศึกษาสนใจค่าเข้าใกล้ที่เป็นค่าของตัวแปร x มากกว่าค่าของฟังก์ชันที่หาได้ ส่วน ในเรื่องของความต้องการให้ผู้สอนปรับปรุงคือ อยากให้ผู้สอนเนื้อหาเร็วๆ ถ้าวเรียนไม่ทันห้องอื่น

เพิ่มการอธิบายตัวอย่าง การพูดให้เสียงดังๆ ส่วนในเรื่องของความต้องการให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติมก็มีเรื่อง การแทนค่า การแก้สมการ ลิมิตตั้งแต่เริ่มต้นจนจบ ตารางและลิมิต สิ่งที่ผู้เรียนสงสัยอาจเป็นไปได้ว่าผู้เรียนบางคนยังบวกลบจำนวนไม่ดีพอ เพราะเห็นบางกลุ่มหาผลลัพธ์ของ $-(-3)$ ไม่ถูกต้อง และอาจเนื่องด้วยใบงานของโจทย์ที่ให้หาลิมิตของค่าเข้าใกล้ทางลบ กับฟังก์ชันตรรกยะมีความซับซ้อนในการหาผลลัพธ์จึงทำให้นักศึกษาบางคนเกิดความสับสนกับสิ่งที่ทำได้ในการแสดงค่าเข้าใกล้ของจำนวนเต็มบวกที่ทำได้ถูกต้อง และที่น่าแปลกใจคือคิดว่านักศึกษาอยากให้เพิ่มเติมเรื่องเทคนิคการหาค่าของลิมิต อนุพันธ์และปริพันธ์ ซึ่งเป็นเนื้อหาที่ผู้สอนยังไม่ได้อธิบาย แต่นักศึกษาอยากทำความเข้าใจ อาจเป็นเพราะนักศึกษากลุ่มนี้เคยลงเรียนและยกเลิกรายวิชาที่เคยเป็นห่วงเนื้อหาตรงนี้อยู่มากกว่าการเข้าใจถึงความหมายของลิมิต

- สิ่งที่ได้จากการสังเกตการณ์ทำใบงานพบว่า มีนักศึกษาบางกลุ่มทดลองแทนค่าเข้าใกล้ที่ตัวแปร x ของฟังก์ชันที่กำหนด เพื่อยืนยันคำตอบของลิมิตที่แสดงค่าเข้าใกล้ทางซ้ายกับทางขวา เนื่องจากนักศึกษาค่อยลงเรียนและยกเลิกรายวิชา

ตัวอย่างสะท้อนคิดจากผู้สอน(ต่อ)

แผนการเรียนรู้ที่ 1 / 2-2 เรื่องการหาค่าของลิมิต

- ชั้นทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องการพิจารณากราฟ ณ จุดพิศอกใดๆ และการแทนค่าของฟังก์ชันจะพบว่า นักศึกษายังให้ความสนใจเหมือนเดิม และมีการเป็นผู้นำในการอธิบายให้เพื่อนในสมาชิกกลุ่มฟัง มีการสลับเปลี่ยนผู้นำบ้างในบางกลุ่ม ผู้สอนคิดว่าคนที่ เป็นผู้นำในการอธิบายให้เพื่อนฟังน่าจะเข้าใจและยังพอจำเนื้อหาได้
- ในการใช้คำถามแบบเปิดในเรื่องการพิจารณากราฟ นักศึกษาส่วนใหญ่ตอบได้ และเข้าใจในการเข้าใจจำนวนทางซ้าย และทางขวา ผู้สอนคิดว่านักศึกษามองด้วยกราฟจะเห็นภาพได้ชัดเจนกว่าสร้างตารางค่าเข้าใกล้ของฟังก์ชันทางซ้ายและทางขวา ซึ่งทำให้นักศึกษาต้องคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่เป็นจำนวนทศนิยมหลายๆ ค่า ถึงจะจินตนาการสร้างภาพค่าของฟังก์ชันที่เข้าใกล้จำนวนอีกครั้ง ส่วนในช่วงของการเฉลยใบงานโดยการสุ่มตัวแทนกลุ่ม นักศึกษาที่ออกมาอธิบายไม่กล้าที่จะพูดเสียงดังผู้สอนคิดว่านักศึกษายังไม่คุ้นเคยกันเท่าไรเนื่องด้วยนักศึกษาที่ลงเรียนรายวิชานี้มีความหลากหลายแต่ละสาขาวิชา
- ในการทำกิจกรรมใบงานพบว่านักศึกษาให้ความร่วมมือกันดีมีการแบ่งหน้าที่เขียนและช่วยกันคิดคำนวณและตรวจสอบคำตอบของเพื่อนในกลุ่ม แต่มีบางกลุ่มที่ทำใบงานเสร็จก่อนเวลาจะเปิดอินเตอร์เน็ตเล่น มีนักศึกษบางกลุ่มสงสัยเมื่อแทนค่าเข้าใกล้ ที่ตัวแปร x ของฟังก์ชัน แล้วทำให้ค่าของฟังก์ชันมีส่วนเป็นศูนย์ จะถามว่าฟังก์ชันนี้มีลิมิตใช่หรือไม่ แต่เมื่อคู่วิธีการหาลิมิตจากการพิจารณากราฟของโจทย์ข้ออื่นๆ นักศึกษากลุ่มนี้ก็ได้ถูกต้องและมีการมองจากกราฟ แต่ฟังก์ชันของโจทย์จะไม่มีเศษส่วน ผู้สอนคิดว่านักศึกษากลุ่มนี้ลงเรียนรายวิชานี้แล้วยกเลิกรายวิชา ยังติดกับการหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีบทมากกว่าการพิจารณาค่าลิมิตจากกราฟของฟังก์ชันอีกอย่าง ผู้สอนไม่ได้มีการยกเว้นค่าของฟังก์ชันในเส้นกราฟ และมีนักศึกษาอยู่ 1 กลุ่มที่สรุปค่าของลิมิตเป็นค่าของ x ผู้สอนคิดว่านักศึกษากลุ่มนี้อยู่ทางท้ายห้องอาจจะเป็นเพราะไม่ค่อยได้ยินเสียงผู้สอนในการอธิบาย หรือยังยึดติดกับการมองภาพของเส้นจำนวนในแกน x ที่ผู้สอนอธิบายการเข้าใกล้ทางซ้ายกับทางขวา ในขณะที่นักศึกษาทำใบงาน และมีบางกลุ่มทำเสร็จก่อนเวลาก็จะหยิบรายวิชาอื่นมาทำ
- จากการอ่านสะท้อนคิดของนักศึกษาในเรื่องการหาค่าลิมิตโดยการพิจารณาจากกราฟ และการหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานในหัวข้อเรื่อง นักศึกษาเข้าใจเรื่องนี้อย่างไร นักศึกษาส่วนใหญ่จะ



เขียนว่าการใช้กราฟหาค่าลิมิตได้ง่ายกว่าการใช้ตาราง ลิมิตคือค่าที่เข้าใกล้จำนวน และการหาลิมิต
ต้องหาค่าของ x ก่อนแล้วค่อยลากเส้นไปตัดเส้นกราฟแกน y เพื่อได้ค่าของกราฟแกน y มีค่า
เท่าใด ลิมิตจะมีค่าเข้าใกล้จำนวนนั้น ผู้สอนคิดว่าจากการตรวจใบงานนักศึกษาแต่ละกลุ่มทำได้
เกินร้อยละ 60 แต่นักศึกษาเขียนอธิบายไม่เป็น ส่วนในเรื่องที่นักศึกษาอยากให้ผู้สอนปรับปรุงจะ
มี อยากให้มีกิจกรรมเกม สอนซ้ำอีกนิด เพิ่มตัวอย่าง สอนให้ละเอียด พูดช้าลง สอนให้เร็วกว่านี้
ทำโจทย์เพิ่ม อยากให้มีตัวอย่างกราฟหลายๆแบบๆ ส่วนในเรื่องที่นักศึกษาอยากให้ผู้สอนอธิบาย
เนื้อหาเพิ่มเติมได้แก่ การบวก การลบจำนวน วิธีคิดแบบง่ายๆ โดยไม่ต้องอาศัยเครื่องคำนวณ การ
ดูกราฟง่ายๆ การหาค่าลิมิต สอนวิธีคิดแบบง่ายๆ ลิมิตและฟังก์ชัน กราฟและลิมิต การแทน
ค่าตัวแปร x เจาะรายละเอียดให้ลึกอีก การคำนวณที่ละเอียด ฟังก์ชันตรีโกณมิติ แนะนำการจำ
สูตร แนะนำสูตรลัด ความหมายของลิมิต ผู้สอนคิดว่านักศึกษาที่เคยลงเรียนแล้วจะเน้นให้สอน
ไปเร็วๆ และเจาะลึกรายละเอียดของการหาค่าลิมิตที่มีตัวส่วนเป็น 0 และอยากให้ผู้สอนบอก
เทคนิคในการหาค่าของลิมิต ซึ่งจะเรียนกันในคราวต่อไป ส่วนนักศึกษาที่ลงเรียนเป็นครั้งแรกจะ
อยากให้ผู้สอนช้าๆ ต้องการให้ผู้สอนอธิบายตัวอย่างมากๆ และทบทวนการบวก การลบจำนวนเต็ม
การแทนค่าตัวแปร x ซึ่งต้องหาผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่มีการยกกำลัง และการบวก การลบ

สะท้อนคิดจากผู้เรียนในเรื่อง ความหมายของลิมิต

1. นักศึกษาเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตได้อย่างไร

ความหมายที่เข้าใจง่ายคือ กรณีที่เราจะไป ณ จุดใดจุดหนึ่งหน้า 1/10 หรือ 1/100
 หรือ 1/n เมื่อ $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2$
 0.9 → 2.9 1.1 → 3.1

2. นักศึกษาอยากให้ผู้สอนปรับปรุงในเรื่องใดบ้าง เพราะเหตุใด

ไม่เข้าใจเรื่อง ฟอนแบบเดิมๆ แล้ว เคนๆ หน่อย

3. นักศึกษาอยากให้ผู้สอนอธิบายเรื่องใดเพิ่มเติมบ้าง

ไม่มี แต่อาจจะมีได้ในบทเรียนต่อไป

4. นักศึกษามีความรู้สึกอย่างไรในการทำกิจกรรมกลุ่ม

รู้สึกดีนะ แต่ผู้ปรับเรื่องนั้น ก็รอบรู้เรื่องๆ หน่อยก็รอบพร้อมกัน เรียบร้อย
 ใช้เวลาพอสมควร

สะท้อนคิดจากผู้เรียนในเรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่อง

1. นักศึกษาเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องนี้อย่างไร

- เกี่ยวกับ การ ตกต่ำ ของ ตัวชี้วัด และ ลิมิต
- เหนือขีด ค่าอาจจะมี ส่วน เกี่ยวกับ การ ตกต่ำ แทน บ้าง
- การ ตกต่ำ ลิมิต นั้น ของ แทน บ้าง ไม่ค่อย คิด ออก ให้ ใจ ให้ ใจ

2. นักศึกษาอยากให้ผู้สอนปรับปรุงในเรื่องใดบ้าง เพราะเหตุใด

- ปรับปรุง เรื่อง การ ใช้ เหนือขีด ใน การ สอน เช่น อดคิดอะไร เหนือ เหนือ แล้ว คิด และ ออก ให้ อาจารย์
- สอน ของ สอน กว. กว. ให้ ใจ กว. ให้ ใจ

3. นักศึกษาอยากให้ผู้สอนอธิบายเรื่องใดเพิ่มเติมบ้าง

- เรื่อง การ ใช้ ใจ ลิมิต แทน บ้าง โดย ไม่ ต้อง ใจ ที่ ใจ คิด เลข เลข (ใจ ใจ)
- การ ใจ ลิมิต แทน บ้าง
- การ ตกต่ำ ลิมิต ให้ ใจ เหนือ แล้ว เหนือ

4. นักศึกษามีความรู้สึกอย่างไรในการทำกิจกรรมกลุ่ม

- ของ ลิมิต เหนือ ใจ ได้ ใจ ว่า ความ ลิมิต ของ เหนือ ใจ แต่ เหนือ ใจ ใน กลุ่ม เหนือ เหนือ ใจ และ เหนือ ใจ
- ลิมิต แทน ลิมิต แทน บ้าง และ เหนือ ใจ ลิมิต แทน บ้าง

แบบทดสอบชุดที่ 1

คำชี้แจง

ตอนที่ 1 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการค่าของลิมิตในรูปตาราง และกราฟ

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2$

ตอนที่ 2 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการค่าของลิมิตด้วยวิธีการใช้ทฤษฎีบทของลิมิต

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 60} (\sin x + \cos x)$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 1

ตอนที่ 1 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการค่าของลิมิตในรูปตาราง และกราฟ

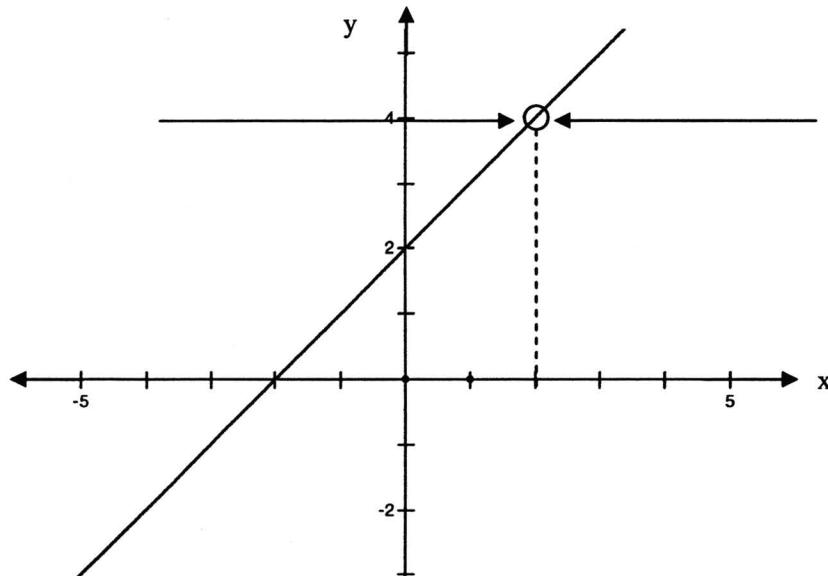
1. $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$

(x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย)

x	f(x)
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
.	.

(x เข้าใกล้ 2 ทางขวา)

x	f(x)
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
.	.



ตอนที่ 2 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการค่าของลิมิตด้วยวิธีการใช้ทฤษฎีบทของลิมิต

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} x - 4 = -4 - 4 = -8$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 6} = \frac{1^2 + 5(1) - 3}{1 + 6} = \frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{x} \times \frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5}}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5+x-5}{x \cdot (\sqrt{5+x} + \sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5+0} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{x \rightarrow 60} (\sin x + \cos x) &= \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

แบบทดสอบชุดที่ 2

ตอนที่ 1 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวา

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ 2x + 2 & x > 2 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

ตอนที่ 2 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3 - x}$$

ตอนที่ 3 ให้นักศึกษาพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าต่อเนื่องหรือไม่

$$1. f(x) = \begin{cases} 5x & ; x \leq 1 \\ 3x^2 - x & ; x > 1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็น } 1$$

$$2. f(x) = 3x - 2 \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็น } -1$$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 2

ตอนที่ 1 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวา

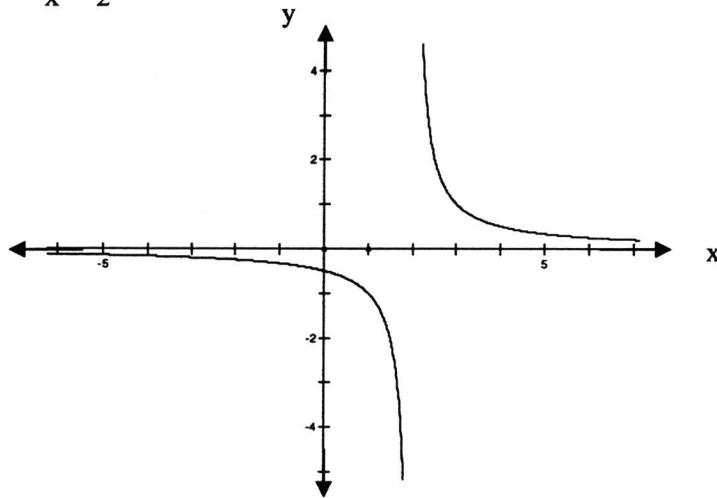
$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ 2x + 2 & x > 2 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

ลิมิตซ้ายคือ $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

ลิมิตขวาคือ $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 2 = 2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$

ตอนที่ 2 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = +\infty$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = -\infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ หาค่าไม่ได้

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3 - x}$ นำ x^3 มาหารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^3 - x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1 - 0} = 2$$

ตอนที่ 3 ให้นักศึกษาพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าต่อเนื่องหรือไม่

$$1. f(x) = \begin{cases} 5x & ; x \leq 1 \\ 3x^2 - x & ; x > 1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็น } 1$$

1. หาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = 1$ จะได้ $f(x) = 5x$ และ $f(1) = 5$

2. หาค่าลิมิต $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ จะได้

$$\text{ลิมิตซ้ายคือ } \lim_{x \rightarrow 1^-} 5x = 5$$

$$\text{ลิมิตขวาคือ } \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 - x = 3(1)^2 - 1 = 2$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

$$\text{ดังนั้น ฟังก์ชัน } f(x) = \begin{cases} 5x & ; x \leq 1 \\ 3x^2 - x & ; x > 1 \end{cases} \quad \text{ไม่ต่อเนื่องที่ } x = 1$$

$$2. f(x) = 3x - 2 \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็น } -1$$

1. หาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = -1$ จะได้ $f(x) = 3x - 2$ และ $f(-1) = 3(-1) - 2 = -5$

2. หาค่าลิมิต $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ จะได้

$$\text{ลิมิตซ้ายคือ } \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x - 2 = -5$$

$$\text{ลิมิตขวาคือ } \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x - 2 = -5$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$

$$3. f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x) = 3x - 2$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$

แบบทดสอบชุดที่ 3

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีทำหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^4 + x^7$

2. $f(x) = (x^3 + 3x)(4x^2 + 1)$

3. $f(x) = (4x^3 + 6x - 5x^2)^7$

4. $f(x) = \sqrt{9x^3 - 5x^2 + 3x}$

5. $x^4 + 2x^2y - 4y^3 = 0$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 3

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีทำหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^4 + x^7$

$$f'(x) = 15x^2 - 12x^3 + 7x^6$$

2. $f(x) = (x^3 + 3x)(4x^2 + 1)$

$$f'(x) = (x^3 + 3x)d(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)d(x^3 + 3x)$$

$$f'(x) = (x^3 + 3x)(8x) + (4x^2 + 1)(3x^2 + 3)$$

3. $f(x) = (4x^3 + 6x - 5x^2)^7$

ให้ $u = 4x^3 + 6x - 5x^2$ จะได้

$$f'(x) = 7(4x^3 + 6x - 5x^2)^6 d(4x^3 + 6x - 5x^2)$$

$$f'(x) = 7(4x^3 + 6x - 5x^2)^6 (12x^3 + 6 - 10x)$$

4. $f(x) = \sqrt{9x^3 - 5x^2 + 3x}$

ให้ $u = 9x^3 - 5x^2 + 3x$ จะได้

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9x^3 - 5x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}} d(9x^3 - 5x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9x^3 - 5x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}} (27x^2 - 10x + 3)$$

5. $x^4 + 2x^2y - 4y^3 = 0$ นำ $\frac{d}{dx}$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}2x^2y - \frac{d}{dx}4y^3 = \frac{d}{dx}0$$

$$4x^3 + 2x^2 \frac{d}{dx}y + y \frac{d}{dx}2x^2 - 12y^2 \frac{d}{dx}y = 0$$

$$2x^2 \frac{d}{dx}y - 12y^2 \frac{d}{dx}y = -4x^3 - 4xy$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-4x^3 - 4xy}{2x^2 - 12y^2}$$

ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

คำชี้แจง 1. ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ รวม 30 คะแนน ใช้เวลา 2 ชั่วโมง

1 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 5x + 1)$ 2 คะแนน

1.2 $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} \right)$ 2 คะแนน

1.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} \right)$ 2 คะแนน

1.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \right)$ 3 คะแนน

1.5 $\lim_{x \rightarrow 30} (\sin x - \cos 2x + 3 \tan x)$ 2 คะแนน

2 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & , x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3} & , x > 3 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่ 3 คะแนน

3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x$ โดยใช้บทนิยาม 3 คะแนน

4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้สูตร ข้อละ 2 คะแนน

4.1 $y = 2x^4 + 3x^7 + \frac{1}{x^5} + 24$

4.2 $y = (2x^3 + 2x)(3x^3 - 4)$

4.3 $y = \frac{2x^3 - x}{5x - 1}$

4.4 $y = (2x^3 - 2x - 1)^5$

4.5 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$

5 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของสมการ $4x^2 + xy^2 - y^3 = 18$ 3 คะแนน

เฉลยข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

คำชี้แจง 1. ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ รวม 30 คะแนน ใช้เวลา 2 ชั่วโมง

1 จงหาลิมิตต่อไปนี้

$$1.1 \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 5x + 1) = (-3)^2 - 5(-3) + 1 = 9 + 15 + 1 = 25$$

$$1.2 \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} x + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$1.3 \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 7 = 2 + 7 = 9$$

$$1.4 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$1.5 \lim_{x \rightarrow 30} (\sin x - \cos 2x + 3 \tan x) = \sin 30^\circ - \cos 2(30^\circ) + 3 \tan 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

2 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} 3x-3 & , x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

1. หาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = 3$ จะได้ $f(x) = 3x - 3$ และ $f(3) = 3(3) - 3 = 6$

2. หาค่าลิมิต $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ จะได้

$$\text{ลิมิตซ้ายคือ } \lim_{x \rightarrow 3^-} 3x - 3 = 6$$

$$\text{ลิมิตขวาคือ } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 3 = 6$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

3. $f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x-3 & , x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ $x = 3$

3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x$ โดยใช้บทนิยาม

$$\text{จาก } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้สูตร

$$4.1 \quad y = 2x^4 + 3x^7 + \frac{1}{x^5} + 24$$

$$y' = 8x^3 + 21x^6 - 5x^{-6}$$

$$4.2 \quad y = (2x^3 + 2x)(3x^3 - 4)$$

$$y' = (2x^3 + 2x)d(3x^3 - 4) + (3x^3 - 4)d(2x^3 + 2x)$$

$$y' = (2x^3 + 2x)(9x^2) + (3x^3 - 4)d(6x^2 + 2)$$

$$4.3 \quad y = \frac{2x^3 - x}{5x - 1}$$

$$y' = \frac{5x - 1d(2x^3 - x) - (2x^3 - x)d(5x - 1)}{(5x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{(5x - 1)(6x^2 - 1) - (2x^3 - x)(5)}{(5x - 1)^2}$$

$$4.4 \quad y = (2x^3 - 2x - 1)^5$$

$$y' = 5(2x^3 - 2x - 1)^4 d(2x^3 - 2x - 1)$$

$$y' = 5(2x^3 - 2x - 1)^4 (6x^2 - 2)$$

$$4.5 \quad y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 3)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 - 5x + 3)$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 3)^{-\frac{1}{2}} (2x - 5)$$

5 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของสมการ $4x^2 + xy^2 - y^3 = 18$

$$\frac{d}{dx}4x^2 + \frac{d}{dx}xy^2 - \frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}18$$

$$8x + x\frac{d}{dx}y^2 + y^2\frac{d}{dx}x - 3y^2\frac{d}{dx}y = 0$$

$$8x + 2xy\frac{d}{dx}y + y^2 - 3y^2\frac{d}{dx}y = 0$$

$$2xy\frac{d}{dx}y - 3y^2\frac{d}{dx}y = -8x - y^2$$

$$(2xy - 3y^2)\frac{dy}{dx} = -8x - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x - y^2}{2xy - 3y^2}$$



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล

นายวิเชษฐ์ สิงห์โต

วัน เดือน ปี เกิด

25 กรกฎาคม 2522

ประวัติการศึกษา

ปีการศึกษา 2541

สำเร็จการศึกษามัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนสุโขทัย
วิทยาคม จังหวัดสุโขทัย

ปีการศึกษา 2544

สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิตเกียรตินิยมอันดับ 2
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

ทุนการศึกษา

ทุนพัฒนาอาจารย์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
ประจำปีการศึกษา 2551

