

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส I เรื่อง ลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ โดยใช้กระบวนการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน มีรายละเอียดของผลการวิเคราะห์ ดังนี้

1. การปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน
2. ผลของการปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน
3. ความเชื่อมโยงระหว่างการปรับความรู้พื้นฐานกับการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน

ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้กระบวนการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน โดยแบ่งออกเป็น 3 วงจร ซึ่งวงจรที่ 1 ทำการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการให้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน วงจรที่ 2 ทำการปรับความรู้พื้นฐาน โดยใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 และวงจรที่ 3 ทำการปรับความรู้พื้นฐาน โดยใช้ใบความรู้ ดังนี้

วงจรที่ 1 การปรับความรู้พื้นฐานโดยการให้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการปรับความรู้พื้นฐาน โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผู้วิจัยแบ่งนักศึกษาออกเป็นกลุ่มละ 4 คนช่วยกันศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สำหรับการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการให้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ได้นำมาใช้ในการจัดการเรียนสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 และ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 โดยมีรายละเอียดดังนี้

การจัดการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เป็นเรื่องเกี่ยวกับความหมายของลิมิต ซึ่งก่อนที่นักศึกษาจะเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาคควมีความรู้พื้นฐานเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน

การพิจารณากราฟ ณ จุดพิศกัใด ๆ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องดังกล่าวโดยการ
ใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน จากการสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่า
นักศึกษา ส่วนใหญ่มีความสนใจและกระตือรือร้นในการศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์ มีการพูดคุย
และซักถามกันเองภายในกลุ่มคนไหนตอบได้ก็จะช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มฟัง แต่ถ้าไม่แน่ใจก็
จะถามผู้วิจัยเช่น เมื่อแทนค่า x ด้วย $(-2)^3$ จะมีค่าเท่ากับ 8 หรือ -8 เป็นต้น บางกลุ่มจะมีผู้นำ
ในการอธิบายเนื้อหาจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยทำการเลือกผู้นำที่มีความเข้าใจใน
เนื้อหานั้นๆ

การจัดการเรียนการสอนตามแผนที่ 2 เป็นเรื่องเกี่ยวกับการหาค่าของลิมิต ซึ่งก่อนที่
นักศึกษาจะเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาควรมีความรู้พื้นฐานเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน การแยกตัวประกอบ
ของพหุนาม การหารพหุนาม การดำเนินการของกรณฑ์ การคูณสังยุค และค่าของมุมฟังก์ชัน
ตรีโกณมิติ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องดังกล่าวโดยการ ใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์
ช่วยสอน จากการสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่มีความ
สนใจและกระตือรือร้นในการศึกษาบทเรียนคอมพิวเตอร์ มีการพูดคุยและซักถามกันเองภายใน
กลุ่มคนไหนตอบได้ก็จะช่วยอธิบายให้เพื่อนในกลุ่มฟัง แต่ถ้าไม่แน่ใจก็จะถามผู้วิจัยยกตัวอย่าง
เช่น

นักศึกษา “ $x^2 + 3x + 2$ มีค่าเท่ากับ $(x+1)(x+2)$ ใช่หรือไม่ใช่ ”

ผู้วิจัย “ ใช่โดยการตรวจสอบโดยนำตัวหน้าคูณตัวหน้า ตัวหน้าคูณตัวหลัง ตัวหลังคูณ
ตัวหน้า และตัวหลังคูณตัวหลัง ”

นักศึกษา “ $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times 2$ ใช่หรือไม่ใช่ ”

ผู้วิจัย “ ใช่โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง $(ab)^n = a^n \times b^n$ ”

บางกลุ่มจะมีผู้นำในการอธิบายเนื้อหาจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยทำการเลือกผู้นำที่มี
ความเข้าใจในเนื้อหานั้นๆ

ผลการวิเคราะห์แบบบันทึกสะท้อนคิดของนักศึกษาพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่คิดว่าการ
ทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเนื้อหาต่อไปเป็นสิ่งที่ดี และในการทบทวนเป็นกลุ่มจะมีเพื่อน
ช่วยอธิบายในส่วนที่ตนเองไม่รู้และไม่แน่ใจทำให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจนขึ้นสำหรับเรื่องที่จะเรียน
ต่อไป มีนักศึกษาบางส่วนอยากให้มีการแข่งขันในการเรียนการสอน

ข้อดีของการทบทวนความรู้พื้นฐานด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนคือ ทำให้
บรรยากาศในห้องเรียนเป็นกันเองระหว่างนักศึกษาและผู้วิจัย และทำให้นักศึกษาได้มีบทบาทมาก
ขึ้นในการจัดองค์ความรู้ด้วยตนเอง

ปัญหาที่พบคือต้องใช้เวลามากในการปรับความรู้พื้นฐานด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเนื่องจากเนื้อหาความรู้พื้นฐานในบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีเนื้อหาค่อนข้างจะกว้าง ส่งผลให้เวลาในช่วงชั้นเข้าสู่เนื้อหาและการเฉลยใบงานไม่ได้ตามเวลาที่วางแผนไว้

ผู้วิจัยได้วางแผนปรับแก้ไขในวงจรต่อไปคือกำหนดขอบเขตเนื้อหาในการทบทวนให้มีความกระชับและครอบคลุมเนื้อหาที่ต้องนำไปใช้ สำหรับใบงานนั้นผู้วิจัยได้ปรับความยากง่ายของใบงานให้สอดคล้องกับตัวอย่างที่ผู้วิจัยนำเสนอ และนำใบงานที่เหลือไปตรวจเอง พร้อมกับเขียนอธิบายในส่วนที่นักศึกษาทำไม่ถูกต้องหรือเข้าใจคลาดเคลื่อน และปรับใบงานให้มีความง่ายขึ้น และสอดคล้องกับตัวอย่าง พร้อมกับแนะนำวิธีการทำงานเป็นกลุ่มของกลุ่มที่ทำเสร็จตามทันเวลา

วงจรที่ 2 การปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50

ในการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ผู้วิจัยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 ฝ่าย แต่ละฝ่ายปรึกษากันถึงเรื่องความหมายของลิมิตและการหาค่าของลิมิต สำหรับการปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 นี้ ได้นำมาใช้ในการจัดการเรียนสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 และ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 โดยมีรายละเอียดดังนี้

การจัดการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เป็นเรื่องเกี่ยวกับส่วนขยายแนวคิดของลิมิต ซึ่งก่อนที่นักศึกษาจะเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาควรมีความรู้พื้นฐานเรื่องการหาค่าของลิมิต จากตาราง การหาค่าลิมิตจากกราฟ การหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีบทและการดำเนินการของเศษส่วน ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องดังกล่าวด้วยกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 จากการสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่จะปรึกษากันเองในกลุ่มเดิม มีส่วนน้อยที่จะปรึกษากันข้ามกลุ่ม ในขณะที่ปรึกษากันนักศึกษาแต่ละกลุ่มส่วนใหญ่ร่วมกันพูดคุยถึงประเด็นที่กำหนดไว้ และเมื่อเกมเริ่มขึ้น โดยผู้วิจัยถามคำถามทีละข้อนักศึกษาจะเงิบเพื่อฟังคำถาม และใช้เวลาในการตัดสินใจเขียนคำตอบด้วยตนเองภายในเวลา 30 วินาที คนไหนตอบถูกก็จะดีใจ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นนักศึกษาชายที่แสดงความคิดเห็นออกมาอย่างชัดเจน ส่วนนักศึกษาหญิงจะไม่ค่อยแสดงอาการ นักศึกษาคนใดที่ตอบผิดจะถือว่าตกรอบ แต่ก็มียุทธศาสตร์บางส่วนของที่ตกรอบก็ยังคิดและเขียนคำตอบจนครบคำถามทุกข้อ สำหรับการปรับความรู้พื้นฐานด้วยกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ผู้วิจัยพบว่านักศึกษาให้ความสนใจในเกมคำถาม 50 ต่อ 50

การจัดการเรียนการสอนตามแผนที่ 4 เป็นเรื่องเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งก่อนที่นักศึกษาจะเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาควรมีความรู้พื้นฐานเรื่องการวาดกราฟ การหาค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ การหาค่าลิมิตซ้ายและการหาค่าลิมิตขวาของฟังก์ชัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องดังกล่าวด้วยกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 จากแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 นักศึกษามีพฤติกรรมปรึกษากันเองภายในกลุ่ม ผู้วิจัยจึงได้ปรับแก้ไขโดยจัดห้องเรียนเป็นแถวยาวรูปตัวยู



โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม เพื่อให้นักศึกษาได้ปรึกษาและแลกเปลี่ยนความรู้ข้ามกลุ่ม จากการสังเกต และจัดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่จะปรึกษากันเองในกลุ่มเดิมและมีการพูดคุยกับเพื่อนตรงข้ามในประเด็นที่กำหนดไว้ และเมื่อเริ่มเล่นเกมผู้วิจัยถามคำถามที่ละข้อ นักศึกษาจะเงิบเพื่อฟังคำถาม และใช้เวลาในการตัดสินใจเขียนคำตอบด้วยตนเองภายในเวลา 30 วินาที คนไหนตอบถูกก็จะดีใจส่วนใหญ่จะเป็นนักศึกษาชายที่แสดงความดีใจออกมาอย่างชัดเจน ส่วนนักศึกษานางเริ่มสนุกและดีใจกับการตอบถูกของตนเองกับเพื่อนผู้หญิงด้วยกัน นักศึกษาคนใดที่ตอบผิดจะถือว่าตกรอบ แต่ก็มีนักศึกษบางส่วนที่ตกรอบก็ยังคิดและเขียนคำตอบจนครบคำถามทุกข้อ

ผลการวิเคราะห์แบบบันทึกสะท้อนคิดของนักศึกษาพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่สนุกกับการ ทบทวนความรู้พื้นฐานด้วยเกมแต่ต้องใช้ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาก่อนหน้านี้มาช่วยในการตอบ คำถาม นับว่าเป็นสิ่งที่ดีที่ให้เวลากับนักศึกษาได้ทบทวนความรู้ที่เรียนก่อนหน้านี้ในห้องเรียน อีกครั้งก่อนทำการสอนเนื้อหาต่อไป มีนักศึกษาน้อยที่รู้สึกอายเพื่อนในขณะที่ปรึกษากัน เป็นกลุ่มใหญ่

ข้อดีของการทบทวนความรู้พื้นฐานด้วยกิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 คือบรรยากาศของการเรียนไม่เครียด นักศึกษามีความสนุกในการเรียน เปิดโอกาสให้นักศึกษาได้แลกเปลี่ยนความรู้ ร่วมกันและสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

ถึงแม้ว่าผู้วิจัยพยายามจัดกลุ่มให้เป็นกลุ่มแถวตัวอยู่ในแผนจัดการเรียนรู้ที่ 4 เพื่อแก้ปัญหา นักศึกษาไม่ปรึกษาข้ามกลุ่มแต่ก็ยังมียกศึกษาส่วนน้อยปรึกษากันเองภายในกลุ่มเดิม อีกปัญหาหนึ่งที่พบในวงจรมีคือนักศึกษาที่ไม่ได้เข้าเรียนในคาบที่ผ่านมาจะตามเพื่อนไม่ทัน

ในวงจรถัดไปผู้วิจัยได้ปรับใบความรู้โดยการแทรกความรู้พื้นฐานที่ทบทวนในคาบที่แล้ว และเน้นย้ำให้สมาชิกในแต่ละกลุ่มอธิบายความรู้พื้นฐานให้เพื่อนที่ไม่ได้เข้าเรียนได้ฟัง และผู้วิจัย ได้เพิ่มแบบฝึกหัดในใบความรู้เพื่อเป็นการเน้นย้ำความเข้าใจ

วงจรถัดไป 3 การปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้ใบความรู้

ในการทบทวนความรู้พื้นฐานโดยใช้ใบความรู้ ผู้วิจัยแบ่งนักศึกษาออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คนช่วยกันศึกษาใบความรู้ สำหรับการปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้ใบความรู้นี้ได้ นำมาใช้ในการจัดการเรียนสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 และ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 โดยมี รายละเอียดดังนี้

การจัดการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เป็นเรื่องเกี่ยวกับบทนิยามอนุพันธ์ ของฟังก์ชัน ซึ่งก่อนที่นักศึกษาจะเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาคควมีความรู้พื้นฐานเรื่องความชันของกราฟ การบวก การลบ การคูณและการหารพหุนาม ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐาน

เรื่องดังกล่าวโดยการใช้ใบความรู้ จากการสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นและตั้งใจศึกษาใบความรู้เป็นอย่างดี มีการอภิปรายและแสดงความคิดเห็นและมีการอธิบายในส่วนที่สมาชิกในกลุ่มไม่เข้าใจ แต่ถ้าไม่แน่ใจก็จะถามผู้วิจัย ยกตัวอย่างเช่น

นักศึกษา “ การหาความชันจากจุด (1,3) และ (5,9) เมื่อเข้าสู่สูตรความชัน จาก

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ให้จุด (1,3) เป็นจุด } (x_1, y_1) \text{ ได้หรือไม่ หรือต้องใช้ จุด}$$

(5,9) เป็นจุด (x_2, y_2) เสมอ ”

ผู้วิจัย “ ใช้จุดไหนก็ได้ นักศึกษาลองทดสอบว่าทั้งสองแบบจะได้ค่าที่เท่ากัน ”

การจัดการเรียนการสอนตามแผนที่ 6 เป็นเรื่องเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งก่อนนักศึกษาวillเรียนเรื่องนี้ นักศึกษาคควมีความรู้พื้นฐานเรื่องการบวก การลบและการคูณจำนวนเต็มและเศษส่วน สมบัติเลขยกกำลังและการแก้สมการ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องดังกล่าวโดยการใช้ใบความรู้ จากการสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมของนักศึกษาพบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นและตั้งใจศึกษาใบความรู้ มีการพูดคุยกันแสดงความคิดเห็นและอธิบายในส่วนที่สมาชิกในกลุ่มไม่เข้าใจ แต่ถ้าไม่แน่ใจก็จะถามผู้วิจัยเช่น

นักศึกษา “ การบวกและการลบเศษส่วนต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันเสมอใช่หรือไม่ใช่ ”

ผู้วิจัย “ ใช่ ”

นักศึกษา “ เมื่อต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันทำได้วิธีนอกจากคูณไขว้ และจะมีวิธีทำอย่างไรให้ง่ายและเร็วขึ้น ”

ผู้วิจัย “ นำส่วนไปหา ค.ร.น. แล้วหาจำนวนใดๆมาคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วนเพื่อให้ตัวส่วนเท่ากับ ค.ร.น. ”

ผลการวิเคราะห์แบบบันทึกสะท้อนคิดของนักศึกษาพบว่านักศึกษาคส่วนใหญ่คิดว่า การทบทวนความรู้พื้นฐานก่อนเรียนเนื้อหาต่อไปเป็นสิ่งที่ดีและการศึกษาใบความรู้เป็นกลุ่มทำให้เข้าใจเนื้อหาได้ง่ายขึ้น มีความสนุกที่ได้แข่งกับเวลา ได้ช่วยเหลือและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นในกลุ่ม ทำให้เกิดความสามัคคี และนักศึกษาคส่วนใหญ่ชอบการทำงานกลุ่มแบบนี้

ข้อดีของการทบทวนความรู้พื้นฐานโดยการใช้ใบความรู้คือ นักศึกษามีการแลกเปลี่ยน การเรียนรู้ มีการจัดองค์ความรู้ด้วยตนเอง และสามารถเก็บใบความรู้ไว้อ้างอิงในการทำใบงานเพื่อ ต้องการตรวจสอบความแน่ใจ

จากการปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการใช้ใบความรู้พื้นฐานโดยการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้กิจกรรมเกม คำถาม 50 ต่อ 50 และโดยการใช้ใบความรู้ ในขั้นนำเข้าสู่บทเรียน พบว่านักศึกษาคส่วนใหญ่คิดว่า

การทบทวนความรู้พื้นฐานเป็นสิ่งที่ดี และสามารถนำความรู้พื้นฐานไปอธิบายเนื้อหาในการเรียน และทำใบงานได้

ผลของการปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน

ในส่วนนี้ ผู้วิจัยจะได้นำเสนอจากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่าหลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจบวงจรที่ 1 พบว่านักศึกษาส่วนใหญ่มีความเข้าใจในเรื่องความหมายของลิมิต และการหาค่าของลิมิต โดยมีนักศึกษาที่ทำแบบทดสอบผ่านเกณฑ์จำนวน 48 คน คิดเป็นร้อยละ 88.00 ของนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก ส่วนนักศึกษาที่ทำแบบทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์จำนวน 6 คนคิดเป็นร้อยละ 12.00 เหตุผลที่นักศึกษากลุ่มนี้ไม่ผ่านเกณฑ์อาจเป็น เพราะเวลานักศึกษาไม่ได้เข้าชั้นเรียนจึงทำให้ความรู้บางตอนขาดหายไป

ตาราง 5 แสดงผลการทดสอบชุดที่ 1 เรื่องความหมายของลิมิตและการหาค่าของลิมิต โดยการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์

จำนวนนักศึกษาผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)	จำนวนนักศึกษาไม่ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)
48	6
คิดเป็นร้อยละ 88.00	คิดเป็นร้อยละ 12.00

จากตาราง 6 แสดงให้เห็นว่าหลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจบวงจรที่ 2 พบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่มีความเข้าใจในเรื่องส่วนขยายแนวคิดลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยมีนักศึกษาทำแบบทดสอบผ่านเกณฑ์จำนวน 45 คน คิดเป็นร้อยละ 83.33 ของนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก นักศึกษาทำแบบทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์จำนวน 9 คนคิดเป็นร้อยละ 16.67 อาจเนื่องมาจากเวลาทำใบงานมีเพื่อนในกลุ่มช่วยอธิบายแต่เมื่อต้องทำคนเดียวจึงไม่มีใครช่วยอธิบายและตรวจทานจึงทำให้เกิดข้อผิดพลาด

ตาราง 6 แสดงผลการทดสอบชุดที่ 2 เรื่องส่วนขยายแนวคิดลิมิตและความต่อเนื่องโดยการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50

จำนวนนักศึกษาผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)	จำนวนนักศึกษาไม่ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)
45	9
คิดเป็นร้อยละ 83.33	คิดเป็นร้อยละ 16.67

จากตาราง 7 แสดงให้เห็นว่าหลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจบวงจรที่ 3 พบว่านักศึกษาส่วนใหญ่มีความเข้าใจในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยมีนักศึกษาทำแบบทดสอบผ่านเกณฑ์จำนวน 50 คนคิดเป็นร้อยละ 92.59 ของนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก นักศึกษาทำแบบทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์จำนวน 4 คนคิดเป็นร้อยละ 7.41 อาจเนื่องมาจากนักศึกษาขาดการอ่านทบทวนก่อนสอบ

ตาราง 7 แสดงผลการทดสอบชุดที่ 3 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน โดยการใช้ใบความรู้

จำนวนนักศึกษาผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)	จำนวนนักศึกษาไม่ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)
50	4
คิดเป็นร้อยละ 92.59	คิดเป็นร้อยละ 7.41

จากตาราง 8 แสดงให้เห็นว่าหลังจากจัดกิจกรรมการเรียนการสอนครบทั้ง 3 วงจร พบว่าการปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการปรับความรู้พื้นฐาน ส่งผลให้นักศึกษาทำแบบทดสอบผ่านเกณฑ์จำนวน 40 คน คิดเป็นร้อยละ 74.00 ของนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระดับดี นักศึกษาทำแบบทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์จำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 26.00 ของนักศึกษาทั้งหมด เหตุผลที่นักศึกษาไม่ผ่านเกณฑ์อาจเป็นเพราะว่าเวลาทำงานเป็นกลุ่มมีเพื่อนให้คำปรึกษาและอีกประการหนึ่งอาจเป็นเพราะว่านักศึกษาเข้าชั้นเรียนไม่สม่ำเสมอ

ตาราง 8 แสดงผลการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวนนักศึกษาผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)	จำนวนนักศึกษาไม่ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 50 ของแบบทดสอบ)
40	14
คิดเป็นร้อยละ 74.00	คิดเป็นร้อยละ 26.00

ความเชื่อมโยงระหว่างการปรับความรู้พื้นฐานกับการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในวงจรที่ 1 หลังจากการปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในขั้นนำแล้ว ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามปกติโดยการอธิบายทฤษฎีบทและยกตัวอย่าง จากการสังเกตพฤติกรรมของนักศึกษาในขณะที่ผู้วิจัยอธิบายตัวอย่างพบว่า เมื่อถามนักศึกษาถึงความรู้พื้นฐานที่ต้องใช้ในการหาคำตอบของตัวอย่างนั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่ดึงความรู้พื้นฐานที่ได้ทบทวนในขั้นนำมาใช้ในการตอบคำถามได้ แต่ในบางครั้งนักศึกษาไม่สามารถตอบคำถามได้ทันที ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำเพื่อถามถึงรายละเอียดทีละขั้นตอนในการหาคำตอบตัวอย่างนั้นๆ

ยกตัวอย่างการอธิบายโจทย์เช่น จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3$ โจทย์ข้อนี้ต้องใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน โดยผู้วิจัยใช้การถามตอบกับนักศึกษาดังนี้

ผู้วิจัย “จากโจทย์ที่กำหนดให้ จะได้ฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ใช่หรือไม่”

นักศึกษา “ใช่”

ผู้วิจัย “เมื่อ x เข้าใกล้ 2 หมายความว่าอย่างไร”

เมื่อผู้วิจัยถามคำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “จำนวน 2 ในระบบเส้นจำนวนแสดงการเข้าใกล้ได้อย่างไร”

นักศึกษา “เข้าใกล้ทางซ้ายคือจำนวนที่น้อยกว่า 2 และเข้าใกล้ทางขวาคือจำนวนที่มากกว่า 2 ”

ผู้วิจัย “จำนวนที่เข้าใกล้ 2 มีจำนวนใดบ้าง ”

เมื่อผู้วิจัยถามคำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “จำนวน 0 เข้าใกล้จำนวน 2 หรือยัง ถ้ายังมีจำนวนใดอีกบ้างให้นักศึกษาคิดและตอบทีละคน ”

นักศึกษา “จำนวน 1 , จำนวน 1.5 , จำนวน 1.9 , จำนวน 1.99 ”

ผู้วิจัย “ในการบอกค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ ที่เข้าใกล้ 2 แสดงในรูปตารางได้อย่างไร ”
เมื่อผู้วิจัยถามคำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ การบอกค่าฟังก์ชันทำได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ นำค่า x ที่ทราบ แทนค่าตัวแปร x ในฟังก์ชัน ”

ผู้วิจัย “ เมื่อนักศึกษาทราบค่า x ใดๆ ที่เข้าใกล้ 2 คือจำนวน 1.9 , 1.99 , 1.999 , ...

แล้วหาค่าฟังก์ชันแสดงในตารางได้อย่างไร ”

ตัวอย่างการอธิบายโจทย์อีกข้อหนึ่งเช่น จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ สำหรับโจทย์ข้อนี้

นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง การหารพหุนาม และการแยกตัวประกอบพหุนาม โดยผู้วิจัย
ใช้การถามตอบกับนักศึกษาดังนี้

ผู้วิจัย “ ลิมิตของฟังก์ชัน $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ มีค่าเท่าไร ”

นักศึกษา “ ตอบเบาๆว่าเป็น 4 ”

ผู้วิจัย “ จากโจทย์ฟังก์ชัน $f(x)$ คืออะไร ”

นักศึกษา “ $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ”

ผู้วิจัย “ โจทย์ต้องการหาค่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนใด ”

นักศึกษา “ x เข้าใกล้จำนวน 2 ”

ผู้วิจัย “ การหาค่าลิมิตโดยใช้สมบัติพื้นฐานนำค่าเข้าใกล้คือ 2 ไปแทนตัวแปร x ใช้
หรือไม่เพราะเหตุใด ”

นักศึกษา “ ไม่ใช่ เมื่อนำ $x = 2$ ไปแทนค่าแล้วทำให้ฟังก์ชันมีส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้ ”

ผู้วิจัยถาม “ นักศึกษาคิดว่าจะมีวิธีใดบ้างที่จะเปลี่ยนรูปฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ และเมื่อ

แทนค่า x ด้วย 2 แล้วจะทำให้ส่วนไม่เป็นศูนย์ ”

จากการใช้คำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ เมื่อต้นชั่วโมงนักศึกษาทบทวนเรื่องการแยกตัวประกอบ นักศึกษาแยกตัวประกอบ
ของ $x^2 - 4$ ได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ $(x - 2)(x + 2)$ ”

ผู้วิจัย “ เปลี่ยน $x^2 - 4$ ด้วย $(x - 2)(x + 2)$ ได้หรือไม่เพราะอะไร ”

นักศึกษ “ ได้เพราะเป็นฟังก์ชันเดียวกัน ”

ผู้วิจัย “ นักศึกษาจะเปลี่ยนรูปฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ และเมื่อแทนค่า x ด้วย 2 แล้วจะ

ทำให้ส่วนไม่เป็นศูนย์ได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ แยกตัวประกอบของ $x^2 - 4$ แล้วทำการตัดทอน $x - 2$ ก็จะได้ฟังก์ชันใหม่ เป็น $f(x) = x + 2$ ”

ผู้วิจัย “ หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ นำค่า $x = 2$ แทนในฟังก์ชัน $f(x) = x + 2$ แล้วจะมีค่าลิมิตเป็น 4 ”

จากการจัดการเรียนการสอนในวงจรที่ 1 พบว่า เมื่อนักศึกษามีความรู้พื้นฐานที่ดีก็ทำให้ การจัดการเรียนการสอนเป็นไปได้อย่างรวดเร็วขึ้นและจากการตรวจใบงาน ผู้วิจัยพบว่านักศึกษาได้นำ ความรู้พื้นฐานมาใช้อธิบายโจทย์ในใบงานได้ ยกตัวอย่างเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทน ค่าของฟังก์ชันในการทำโจทย์ดังรูป 1

3. $\lim_{x \rightarrow -1} x - 2$

(x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย)

x	f(x)
-1.1	-3.1
-1.01	-3.01
-1.001	-3.001
:	:
:	:

1 (x เข้าใกล้ -1 ทางขวา)

x	f(x)
-0.9	-2.9
-0.99	-2.99
-0.999	-2.999
:	:
:	:

เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเข้าใกล้ -3

เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางขวา ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเข้าใกล้ -3

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} x - 2$ มีค่าเป็น -3

รูป 1 ผลงานนักศึกษาในเรื่องการหาค่าลิมิตโดยใช้ตาราง

จากรูป 1 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าของ ฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ โดยหาค่าฟังก์ชัน $f(x) = x - 2$ เมื่อแทนค่า x ด้วย -1.1 -1.01 และ -1.001 แล้วทำการอธิบายค่าของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้ายและค่าของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้า ใกล้ -1 ทางขวามีค่าฟังก์ชันเป็นเท่าไรก็คือค่าของลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

อีกตัวอย่างหนึ่งเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามและการคูณสังยุคในการทำโจทย์ดังรูป 2

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x}{x-2} = \frac{5(4)}{4-2} = \frac{20}{2} = 10$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x}{x-2}$ มีค่าเป็น 10

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2}$

$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ มีค่าเป็น $\frac{1}{4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ มีค่าเป็น $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ปลี่ยน

$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$

$= \frac{(2+x)-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$

$= \frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$

$= \frac{1}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$

รูป 2 ผลงานนักศึกษาในเรื่องการหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีบท

จากรูป 2 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนาม โดยแยกตัวประกอบของ $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ แล้วทำการตัดทอนเพื่อเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน แล้วทำการหาค่าลิมิตตามทฤษฎีบทได้อย่างถูกต้องและนักศึกษามีความรู้พื้นฐานในเรื่องการคูณสังยุคโดยการนำ $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}$ มาคูณฟังก์ชันที่กำหนดให้เพื่อเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันแล้วทำการหาค่าลิมิตตามทฤษฎีบทได้อย่างถูกต้อง

ในวงจรที่ 2 หลังจากการปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้กิจกรรมเกมคำถาม 50 ต่อ 50 ในขั้นนำแล้ว ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามปกติโดยการอธิบายทฤษฎีบทและยกตัวอย่างจากการสังเกตพฤติกรรมของนักศึกษาในขณะที่ผู้วิจัยอธิบายตัวอย่างพบว่า เมื่อถามนักศึกษาถึงความรู้พื้นฐานที่ต้องใช้ในการหาคำตอบของตัวอย่างนั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่ดึงความรู้พื้นฐานที่ได้ทบทวนในขั้นนำมาใช้ในการตอบคำถามได้ แต่ในบางครั้งนักศึกษาไม่สามารถตอบคำถามได้ทันที ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำเพื่อถามถึงรายละเอียดทีละขั้นตอนในการหาคำตอบของตัวอย่างนั้นๆ

ยกตัวอย่างการอธิบายโจทย์เช่น จงหาค่าลิมิตซ้าย และลิมิตขวา เมื่อ x เข้าใกล้ 1

$$\text{โดย } f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \quad \text{โจทย์ข้อนี้ต้องใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยผู้วิจัยใช้การถามตอบกับนักศึกษาดังนี้}$$

ผู้วิจัย “จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ลิมิตขวาต้องพิจารณาจากฟังก์ชันใด ”

เมื่อถามคำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ลิมิตขวาหมายถึงการพิจารณาค่าฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวาใช่หรือไม่”

นักศึกษา “ใช่”

ผู้วิจัย “ลิมิตขวาต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด ”

นักศึกษา “ใช่เพราะค่าของ x มีค่ามากกว่า 1 ”

ผู้วิจัย “การหาค่าลิมิตขวาทำได้ด้วยวิธีใดได้บ้าง ”

นักศึกษา “นำค่า $x = 1$ ไปแทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน $f(x) = x$ หรือพิจารณาจากกราฟ

เมื่อ ค่า x เข้าใกล้ 1 ทางขวา หรือสร้างตารางค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวาก็จะได้ลิมิตขวา

มีค่าเป็น 1 ”

ผู้วิจัย “จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ลิมิตซ้ายต้องพิจารณาจากฟังก์ชันใด ”

เนื่องจากนักศึกษาไม่ตอบคำถามข้างต้น ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ลิมิตซ้ายหมายถึงการพิจารณาค่าฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายใช่หรือไม่”

นักศึกษา “ใช่”

ผู้วิจัย “ลิมิตซ้ายต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด ”

นักศึกษา “ใช่”

นักศึกษา “ ไร้เพราะค่าของ x มีค่าน้อยกว่า 1 ”

ผู้วิจัย “ การหาค่าลิมิตซ้ายทำได้ด้วยวิธีใดได้บ้าง ”

นักศึกษา “ นำค่า $x = 1$ ไปแทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ หรือพิจารณาจากกราฟ เมื่อค่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย หรือสร้างตารางค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย ก็จะได้ลิมิตซ้ายมีค่าเป็น 4 ”

ตัวอย่างการอธิบายโจทย์อีกข้อหนึ่งเช่น กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x \leq 2 \\ x^2 + x & ; x > 2 \end{cases}$

จงแสดงว่าที่จุด $x = 2$ ต่อเนื่องหรือไม่ สำหรับโจทย์นี้ต้องใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่อง การแทนค่าฟังก์ชัน การหาค่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชัน โดยผู้วิจัยใช้การถามตอบกับนักศึกษาดังนี้

ผู้วิจัย “ นักศึกษาจะอธิบายได้อย่างไรว่า ที่จุด $x = 2$ ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ”

เมื่อนักศึกษาไม่สามารถตอบคำถามข้างต้นได้ ผู้วิจัยได้ใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ นิยามความต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ ต้องแสดงขั้นตอน 3 ข้อ ไร้หรือไม่มีอะไรบ้าง ”

นักศึกษา “ ไร้ข้อ 1 บอกค่าฟังก์ชัน ข้อ 2 หาค่าลิมิต ข้อ 3 ข้อ 1 และข้อ 2 มีค่าเท่ากัน ”

ผู้วิจัย “ ค่าของฟังก์ชันเมื่อ $x = 2$ มีค่าเท่าไร ”

เมื่อผู้วิจัยใช้คำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบ ผู้วิจัยได้ใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ เมื่อ $x = 2$ จะได้ฟังก์ชันใด ”

นักศึกษา “ $f(x) = 3x$ ”

ผู้วิจัย “ ค่าของฟังก์ชันเมื่อ $x = 2$ ทำได้โดยแทนตัวแปร x ด้วย 2 ที่ฟังก์ชัน $f(x) = 3x$ ไร้หรือไม่ ”

นักศึกษา “ ไร้ โดยได้ค่าฟังก์ชันเมื่อ $x = 2$ คือ 6 ”

ผู้วิจัย “ ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่าไร ”

เนื่องจากนักศึกษาไม่ตอบคำถามข้างต้นได้ ผู้วิจัยได้ใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ ลิมิตด้านซ้ายพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = 3x$ ไร้หรือไม่เพราะอะไร ”

นักศึกษา “ ไร้เพราะ ค่าของ x น้อยกว่า 2 ”

ผู้วิจัย “ ค่าลิมิตด้านซ้ายมีค่าเท่าไร ”

นักศึกษา “ 6 ”

ผู้วิจัย “ ลิมิตด้านขวาพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x$ ไร้หรือไม่เพราะอะไร ”

นักศึกษา “ ไร้เพราะ ค่าของ x มากกว่า 2 ”

ผู้วิจัย “ ค่าลิมิตด้านขวามีค่าเท่าไร ”

นักศึกษา “ 6 ”

ผู้วิจัย “ ลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวาของฟังก์ชันเท่ากันหรือไม่อย่างไร ”

นักศึกษา “ เท่ากันหมายความว่าลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเป็น 6 ”

ผู้วิจัย “ ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่อย่างไร ”

นักศึกษา “ ต่อเนื่องเพราะเป็นจริงตามคุณสมบัติของความต่อเนื่องครบทั้ง 3 ข้อ ”

จากการจัดการเรียนการสอนในวงจรที่ 2 พบว่า เมื่อนักศึกษามีความรู้พื้นฐานที่ดีก็ทำให้การจัดการเรียนการสอนเป็นไปได้อย่างรวดเร็วขึ้นและจากการตรวจใบงาน ผู้วิจัยพบว่านักศึกษาได้นำความรู้พื้นฐานมาใช้อธิบายโจทย์ในใบงานได้ ยกตัวอย่างเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าของฟังก์ชัน การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในการทำโจทย์ดังรูป 3

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวา

$$1. f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 2+1 = 3$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ มีค่าเป็น 3 ✓

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x-1 = 2-1 = 1$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเป็น 1 ✓

$$2. f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 4 \\ x+5 & x \geq 4 \end{cases} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 3x-2 = 3(4)-2 = 10$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ มีค่าเป็น 10 ✓

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x+5 = 4+5 = 9$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ มีค่าเป็น 9 ✓

รูป 3 ผลงานนักศึกษาในเรื่องการหาค่าลิมิตด้านเดียว

จากรูป 3 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็ม และการแทนค่าฟังก์ชันเมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x+1$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย โดยแทนค่าฟังก์ชัน เมื่อ $x = 2$ เพื่อทำการหาค่าของลิมิตซ้ายโดยใช้ทฤษฎีบทได้

อีกตัวอย่างหนึ่งเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการหาค่าของลิมิต และการแทนค่าของฟังก์ชันในการทำโจทย์ดังรูป 4

3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ เมื่อ x เป็น -1

① ทดสอบ $f(c)$ เมื่อ $c = -1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\therefore f(-1) = \frac{-1^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

\therefore ทดสอบไม่ได้ ✓

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \text{ ที่ค่าอื่นที่ } x = -1$$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 3 \\ x^2 - x & ; x > 3 \end{cases}$ จงแสดงว่าที่จุด $x = 3$ ต่อเนื่องหรือไม่

① ทดสอบ $f(c)$ เมื่อ $c = 3$

$$f(x) = 2x$$

$$f(3) = 2(3) = 6$$

② $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 2(3) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - x = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ สอดคล้องเป็น 6 ✓

③ จาก ① และ ② สอดคล้องกัน ✓

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 3 \\ x^2 - x & ; x > 3 \end{cases} \text{ ที่ค่าอื่นที่ } x = 3 \text{ (จริง) ✓}$$

รูป 4 ผลงานนักศึกษาในเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จากรูป 4 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการบวกจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็ม การแทนค่าฟังก์ชัน โดยหาค่าฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ เมื่อ $x = -1$ และบอกได้ว่า $\frac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้ และนักศึกษามีความรู้พื้นฐานในเรื่องการหาค่าของลิมิตโดยการใช้ทฤษฎีบท โดยการหาค่าลิมิตซ้ายและการหาค่าลิมิตขวาแล้วทำการสรุปค่าลิมิตของฟังก์ชันได้

ในวงจรที่ 3 หลังจากการปรับความรู้พื้นฐานโดยการใช้ใบความรู้ในขั้นนำแล้ว ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามปกติโดยการอธิบายทฤษฎีบทและยกตัวอย่าง จากการสังเกตพฤติกรรมของนักศึกษาในขณะที่ผู้วิจัยอธิบายตัวอย่างพบว่า เมื่อถามนักศึกษาถึงความรู้พื้นฐานที่ต้องใช้ในการหาคำตอบของตัวอย่างนั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่ดึงความรู้พื้นฐานที่ได้ทบทวนในขั้นนำมาใช้ในการตอบคำถามได้ แต่ในบางครั้งนักศึกษาไม่สามารถตอบคำถามได้ทันทีผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำเพื่อถามถึงรายละเอียดที่ละขั้นตอนในการหาคำตอบของตัวอย่างนั้นๆ

ยกตัวอย่างโจทย์เช่น จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 5x$ โจทย์ข้อนี้ต้องใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน การบวกและการลบพหุนาม โดยผู้วิจัยใช้การถามตอบกับนักศึกษาดังนี้

ผู้วิจัย “ บทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันคือ ”

นักศึกษา “ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ”

ผู้วิจัย “ ค่าฟังก์ชันของ $f(x+h)$ มีค่าเท่าไร ”

จากการใช้คำถามข้างต้นนักศึกษาไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยได้ใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ $f(x+h)$ คืออะไร ”

นักศึกษา “ การแทนค่าตัวแปร x ด้วย $x+h$ ”

ผู้วิจัย “ ฟังก์ชันโจทย์กำหนด $f(x) = x^2 - 5x$ จะมีค่า $f(x+h)$ เท่าไร ”

นักศึกษา “ $(x+h)^2 - 5(x+h)$ ”

ผู้วิจัย “ ผลลัพธ์ของ $(x+h)^2 - 5(x+h)$ ได้เท่าไรเมื่อยกกำลังและนำ ลบหัวไปคูณ ”

นักศึกษา “ $x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h$ ”

ผู้วิจัย “ นำค่าฟังก์ชันที่หาได้ไปแทนในบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันคือ ”

นักศึกษา “ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h - (x^2 - 5x)}{h}$ ”

ผู้วิจัย “ ผลลัพธ์ของตัวเลขเหลือเท่าไร ”

นักศึกษา “ $2xh + h^2 - 5h$ ”

ผู้วิจัย “ หาค่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h}$ ทำได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ เปลี่ยนรูปฟังก์ชันโดยการดึงตัวร่วม h แล้วตัดทอนจะได้ฟังก์ชัน $2h + h - 5$ ”

ผู้วิจัย “ ลิมิตของฟังก์ชัน $2h + h - 5$ คือ ”

นักศึกษา “ $2x - 5$ ”

ผู้วิจัย “ ดังนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 5x$ คือ ”

นักศึกษา “ $2x - 5$ ”

ตัวอย่างการอธิบายโจทย์อีกข้อหนึ่งเช่น จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = (2x^2 - 4x + 3)^4$ สำหรับโจทย์ข้อนี้ นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องสมบัติของเลขยกกำลัง และการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎอนุพันธ์เบื้องต้น โดยผู้วิจัยใช้การถามตอบกับนักศึกษา ดังนี้

ผู้วิจัย “ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้ได้อย่างไร ”

เนื่องจากนักศึกษาไม่ตอบคำถามข้างต้น ผู้วิจัยได้ใช้คำถามนำดังนี้

ผู้วิจัย “ ฟังก์ชันนี้มีความแตกต่างจากเดิมอย่างไร ”

นักศึกษา “ ฟังก์ชันทั้งหมดยกกำลัง 4 ”

ผู้วิจัยทำการอธิบายทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎยกกำลัง

ผู้วิจัย “ จากฟังก์ชันให้ u แทนด้วยอะไร ”

นักศึกษา “ u คือ $x^2 - 4x + 3$ ”

ผู้วิจัย “ หาอนุพันธ์ของ u เทียบกับ x ได้อย่างไร ”

นักศึกษา “ $4x - 4$ ”

ผู้วิจัย “ หาอนุพันธ์ของ $y = u^n$ อย่างไร ”

นักศึกษา “ จะได้ $u^{n-1} du$ ”

ผู้วิจัย “ ดังนั้นอนุพันธ์ของ $y = (2x^2 - 4x + 3)^4$ คืออะไร ”

นักศึกษา “ $(2x^2 - 4x + 3)^3 (4x - 4)$ ”

จากการจัดการเรียนการสอนในวงจรที่ 3 พบว่า เมื่อนักศึกษามีความรู้พื้นฐานที่คิดก็ทำให้การจัดการเรียนการสอนเป็นไป得更เร็วขึ้นและจากการตรวจใบงาน ผู้วิจัยพบว่านักศึกษาได้นำความรู้พื้นฐานมาใช้อธิบายโจทย์ในใบงานได้ ยกตัวอย่างเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าของฟังก์ชัน การบวกพหุนาม การลบพหุนาม การคูณพหุนามในการทำโจทย์ดังรูป 5

คำชี้แจง ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม

1. $f(x) = x^2 - 3$

อนุพันธ์ = $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{3} - \cancel{x^2} + \cancel{3}}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$

หรือ

$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$

$= 2x$

\therefore อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $2x$

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 3$$

รูป 5 ผลงานนักศึกษาในเรื่องการหาอนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม

จากรูป 5 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องการแทนค่าฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ โดยแทนค่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3$ เมื่อ $x = x + h$ แล้วทำการบวก ลบ พหุนามได้ ต่อด้วยความรู้พื้นฐานในเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันจนได้คำตอบของอนุพันธ์

อีกตัวอย่างหนึ่งเช่นการใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องสมบัติเลขยกกำลัง และการหาอนุพันธ์ โดยการใช้กฎอนุพันธ์เบื้องต้นในการทำโจทย์ดังรูป 6

$$3. f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x}$$

$$f(x) = (x^4 - 4x^3 + 5x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^4 - 4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}} (4x^3 - 12x^2 + 5)$$

$$4. f(x) = 4x^2 + \frac{1}{(5x^3 + 6x)^5}$$

$$f(x) = 4x^2 + [(5x^3 + 6x)^{-5}]$$

$$f'(x) = 8x + [-5(5x^3 + 6x)^{-6} (15x^2 + 6)]$$

$$1. 4x^3 - xy^2 + y = 13$$

$$12x^2 - [x \frac{d}{dx} y^2 + y^2 \frac{d}{dx} x] + 1 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12x^2 - [x \cdot (2y \frac{dy}{dx}) + y^2] + 1 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12x^2 - 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2xy + 1 \frac{dy}{dx} = -12x^2 + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12x^2 + y^2}{-2xy + 1}$$

$$2. y^3 + x^2y - x^3 + 14x = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} + y \frac{dx^2}{dx} - 3x^2 + 14 = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - 3x^2 + 14 = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} = -2xy + 3x^2 - 14$$

$$3y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = -2xy + 3x^2 - 14$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + 3x^2 - 14}{3y^2 + x^2}$$

รูป 6 ผลงานนักศึกษาในเรื่องการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎการหาอนุพันธ์เบื้องต้น

จากรูป 6 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถใช้ความรู้พื้นฐานในเรื่องสมบัติของเลขยกกำลังโดยการเปลี่ยนฟังก์ชันกรณฑ์ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง และปรับเปลี่ยนเลขยกกำลังในรูปเศษส่วนเพื่อทำการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎอนุพันธ์เบื้องต้นจนได้คำตอบของอนุพันธ์

ฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ และนักศึกษามีความรู้พื้นฐานในเรื่องการแก้สมการจึงสามารถจัดรูปสมการจนได้คำตอบของอนุพันธ์ฟังก์ชันปริยายตามที่กำหนดให้ได้

ในการศึกษาความเชื่อมโยงระหว่างการปรับความรู้พื้นฐานกับการเรียนการสอนเรื่องลิมิตกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน พบว่าเมื่อนักศึกษามีความรู้พื้นฐานที่ดีแล้วก็จะส่งผลให้นักศึกษานำความรู้พื้นฐานไปอธิบายวิธีการหาคำตอบของโจทย์นั้นๆ ได้ จากการที่ผู้วิจัยอธิบายโจทย์ตัวอย่างหลายๆ ข้อ และจากการถามตอบกับนักศึกษา พบว่าเมื่อผู้วิจัยใช้คำถามในการดึงความรู้พื้นฐานในการทำโจทย์ข้อนั้นๆ บางคำถามนักศึกษาจะเฉยๆ ไม่ตอบคำถาม ผู้วิจัยจึงใช้คำถามนำโดยถามรายละเอียดทีละขั้นตอนในการดึงความรู้พื้นฐานและนักศึกษาก็สามารถตอบคำถามได้ทันที