

เราได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่ออธิบายสภาวะพื้นของ Bose-Einstein Condensation (BEC) โดยการลดรูปสมการ Gross-Pitaevskii equation ใน 3 มิติ (3D GPE) ภายใต้ค่าจำกัดค่าหนึ่งของความถี่กักกัน (trapping frequency) โดยในขั้นแรกจะนำสมการ 3D GPE มาทำการลดรูปจนได้พารามิเตอร์หลักๆ 3 ตัวออกมา และแสดงวิธีการลดรูปสมการลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE ของการควบแน่นแบบ disk-shaped condensation และแสดงการลดรูปสมการจนได้เป็นสมการ 1D GPE ของการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation. จากนั้นจึงการคำนวณสภาวะพื้นของสมการ 3D GPE โดยวิธีการประมาณแบบ backward Euler finite difference discretization ผลเฉลยโดยประมาณที่วิเคราะห์ได้นั้น ค่า relative errors ของอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบต่างๆ ทำให้เราเห็นอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ที่เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ซึ่งตอบสนองต่อค่า γ_Z ต่างๆของการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE และเห็นอัตราการลู่เข้าที่เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ซึ่งตอบสนองต่อค่า γ_T ต่างๆของการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE โดยมีอัตราส่วนระหว่างค่าความถี่กักกัน (ratio between trapping frequencies) เท่ากับค่านั้นต์ นอกจากนี้เราจะใช้วิธีการประมาณแบบ Thomas-fermi approximation และการประมาณแบบ first order approximation คำนวณพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้นของสมการ d-dimension GPE ที่มีค่า $d=1,2$ และ 3. จากนั้นเราจะทำการประมาณสภาวะพื้นของสมการ 3D GPE ในกรณีที่มีสถานะการควบแน่นแบบ isotropic condensation, สถานะการควบแน่นแบบ disk-shaped condensation และสถานะการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation. นอกจากนี้เรายังได้ประมาณพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้นของกรณีที่เกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อนและกรณีที่เกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลัดกันอย่างแรงด้วย จากผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้ออกมานั้น เราได้รายงานผลของอัตราการลู่เข้าภายใต้ relative error ของการเกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบต่างๆด้วย

และในส่วนสุดท้ายของรายงาน เราได้ศึกษาผลเฉลยโดยประมาณจากการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE เพื่ออธิบาย BEC โดยใช้วิธี the-fourth-order time-splitting sine-spectral method (TSSP). ผลเฉลยที่ประมาณได้โดยวิธี TSSP นี้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างมากกับผลเฉลยโดยประมาณจากการลดรูปสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลาที่วิเคราะห์ได้ด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในตอนแรก และเราได้แสดงให้เห็นอัตราการลู่เข้าภายใต้ค่าจำกัดค่าหนึ่งของอัตราส่วนความถี่กักกัน (trapping frequency ratios) ด้วย.

we study numerically and asymptotically dimension reduction of three-dimensional (3D) Gross-Pitaevskii equation (GPE) for Bose-Einstein condensates (BEC) in certain limiting trapping frequency regimes. As preparation steps, we take the 3D GPE, scale it to get a three parameters model, and review how to reduce it to 2D GPE in disk-shaped condensation or 1D GPE in cigar-shaped condensation. Then we compute the ground state of 3D GPE numerically by a normalized gradient flow under backward Euler finite difference discretization and verify numerically the formal dimension reduction for ground state. From our numerical results, for relative errors of the interaction parameter, we observe numerically the convergence rate of $3/4$ with respect to γ_z for dimension reduction from 3D to 2D, and respectively, of $1/3$ with respect to γ_r for reduction from 3D to 1D, when the ratio between trapping frequencies goes to infinity. Furthermore, we obtain Thomas-Fermi and first order approximations for energy and chemical potential of the ground state for d -dimension GPE with $d = 1; 2; 3$. Then we classify approximations of the ground state of 3D GPE in three cases based on the ratios between the trapping frequencies: i). isotropic condensation; ii). disk-shaped condensation; iii). cigar-shaped condensation. Approximate ground states as well as their energy and chemical potential are provided explicitly in weakly, intermediate repulsive and strongly repulsive interaction regimes. These results are fully confirmed by our 3D numerical results. Also, convergence rates in relative error for all interacting quantities are observed and reported.

Finally, we study dimension reduction of time-dependent GPE from 3D to 2D numerically by a fourth-order time-splitting sine-spectral method. Our numerical results confirm the formal dimension reduction for time-dependent GPE and also suggest convergence rates in limiting trapping frequency ratios.