รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์
ทุนอุดหนุนวิจัย มก.ปีงบประมาณ 2556

รหัสโครงการวิจัย ว-ท(ด)16.56
สามเหลี่ยมฟีโบนักซีอันดับ k และการประยุกต์
Generalized order-k Fibonacci triangles and applications

หัวหน้าโครงการ อ.กันตภณ คูหาพัฒนกุล
หน่วยงานต้นสังกัด ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ บางเขน
หน่วยงานหลัก ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ บางเขน

แหล่งทุน : ทุนอุดหนุนวิจัย มก.
สถาบันวิจัยและพัฒนาแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แบบรายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัย (Project)

โครงการวิจัยทุนอุดหนุนวิจัย มก. ปีงบประมาณ 2556

ส่วนที่ 1 ข้อมูลโครงการวิจัย

1.1 รหัส ว-ท(ด)16.56 ชื่อโครงการวิจัย สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k และการประยุกต์

1.2 ลักษณะโครงการ เป็นโครงการวิจัยเดี่ยว

1.3 ชื่อหัวหน้าโครงการ อ.กันตภณ คูหาพัฒนกุล

1.4 หน่วยงานต้นสังกัด ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ บางเขน

หน่วยงานหลัก ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ บางเขน

1.5 ประเภทโครงการ โครงการวิจัย 3 สาขา โครงการวิจัยสาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

1.6 ระยะเวลาดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการ 1 ปี ปีงบประมาณ 2556

1.7 สถานที่ดำเนินงานวิจัย/เก็บข้อมูล

- ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

1.8 งบประมาณรวมตลอดโครงการ 100,000.00 บาท ประกอบด้วย

ปีงบประมาณ 2556 ได้รับ 100,000.00 บาท

1.9 วัตถุประสงค์โครงการวิจัย

1 สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

2 หาสูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k โดยใช้สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k

3 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสูตรที่ได้จากข้อ2 กับสูตรที่มีผู้ค้นพบมาก่อน

4 หาบทประยุกต์ของสูตรที่ได้จากข้อ2 หรือพัฒนาสูตรไปสู่ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ k

1.10 เป้าหมายผลงานวิจัยตลอดโครงการ

ปีงบประมาณ	เดือนที่	ผลงานวิจัยที่คาดว่าจะได้
2556	1-6	1. สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k ได้ สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มที่ม 1
		2. ได้สูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k และบทประยุกต์
	7-12	1. สร้างสามเหลี่ยม n-tribonacci triangle ซึ่งนำไปสู่สูตรทั่วไปของจำโบนักชีอันดับ 3 หรือ จำนวนไตรโบนักชี
		2. ได้ตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารวิชาการนานาชาติ

1.11 สรุปผลการดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการ

- วัตถุประสงค์ (ตามแผน)

1.เดือนที่ 1-2 : สำรวจเอกสาร ข้อมูล และผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและนอกประเทศ

เดือนที่ 3-4 : สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k

เดือนที่ 5-7 : หาสูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k

เดือนที่ 8-9 : เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสูตรที่ได้กับสูตรที่มีผู้ค้นพบมาก่อน พร้อมหาบทประยุกต์ของสูตรที่ได้

เดือนที่ 10-11 : ติดต่อ สอบถาม แลกเปลี่ยน สิ่งที่ค้นพบกับผู้ทรงคุณวุฒิ

เดือนที่ 12 : รวบรวมผล และส่งตีพิมพ์เผยแพร่

- เป้าหมาย/ผลที่คาด (ตามแผน)

1.1. ได้สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k

2. ได้สูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k โดยใช้สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k

3. ได้เอกลักษณ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ k

- ผลการดำเนินงาน (ปฏิบัติได้จริง)

1.1. ได้สูตรทั่วไปซองผลคูณของจำนวนฟิโบนักชีนัยทั่วไป และตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารระดับนานาชาติ

2. ได้สามเหลี่ยม n-tribonacci triangle และบทประยุกต์ และตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารระดับนานาชาติ

1.12 ผลการดำเนินงานวิจัยเป็นไปตามแผนหรือไม่ อย่างไร

- เป็นไปตามแผน

1.13 ปัญหา อุปสรรคในการดำเนินงาน และแนวทางแก้ไข

- ไม่มีปัญหาและอุปสรรค

1.14 สรุปผลการดำเนินงานตามวัตถุประสงค์

- บรรลุ

1.15 ผลผลิต/สิ่งที่ได้จากการวิจัย (Outputs)

- สร้างนักวิจัย/สนับสนุนนิสิตปริญญาโท (ระบุจำนวนคน)

1 คน

1.16 จุดเด่นของผลงานวิจัย / ผลผลิต / สิ่งที่ได้จากการวิจัย (outputs)

- สร้างองค์ความรู้ใหม่/นวัตกรรมที่ทันสมัย

พัฒนาองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

1.17 การนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์ (Outcomes)

1. การนำผลการวิจัยไปเผยแพร่/ถ่ายทอด

1.1 วารสารวิชาการระดับชาติ/วารสารวิชาการระดับนานาชาติ 2 เรื่อง

ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

- ผู้แต่ง : Kantaphon Kuhapatanakul and Rattanapol Wasutharat
- ชื่อเรื่อง : Expressions for the products of the second order linear recurrences ชื่อวารสาร : The Fibonacci Quarterly
- ปีที่ตีพิมพ์ : 2556 เดือน: กุมภาพันธ์ ถึง กุมภาพันธ์ เล่มที่ : 51 ฉบับที่ : 1 หน้า : 49 ถึง 54

ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

- ผู้แต่ง : Kantaphon Kuhapatanakul and Lalitphat Sukruan
- ชื่อเรื่อง : n-tribonacci triangles and applications ชื่อวารสาร : International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
- ปีที่ตีพิมพ์ : 2557 เดือน: มีนาคม ถึง มีนาคม เล่มที่ : 0 ฉบับที่ : 0 หน้า : 0 ถึง 0

1.2 นำเสนอในการประชุม/สัมมนาระดับชาติและนานาชาติ 1 เรื่อง

นำเสนอในการประชุม/สัมมนาระดับชาติ

- ลักษณะเอกสาร/รูปแบบการนำเสนอ : บทคัดย่อ/ภาคบรรยาย
- ชื่อผู้เสนอผลงาน : Rattanapol Wasutharat and Kantaphon Kuhapatanakul
- ชื่อเรื่อง : Expansions and identities concerning the second order linear recurrences
- ชื่อการประชุมสัมมนา : Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2013
- วัน/เดือน/ปี : จาก 9 พ.ค. 2556 ถึง 10 พ.ค. 2556
- สถานที่/เมือง/ประเทศ : Department of Mathematics and Computer Science/ Chulalongkorn University/ Thailand
- หน้า : 127 ถึง 127

1.3 เผยแพร่ผลงานในรูปแบบการจัดนิทรรศการ

-

1.4 บทความ

-

1.5 จัดอบรมถ่ายทอด

-

1.6 นำเสนอทางสื่อผสม

-

1.7 ภาครัฐนำไปใช้กำหนดแผน/นโยบาย

-

1.9 อื่นๆ

-

2. เป้าหมายการนำผลลัพธ์ / ผลสำเร็จที่ได้ / หรือคาดว่าจะได้จากการวิจัยไปใช้ประโยชน์

1 . ด้านการศึกษา/เสริมการเรียนการสอน

- เพิ่มพูนความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์

2 . นำความรู้ไปวิจัย/พัฒนาขั้นต่อไป

- นำไปพัฒนาหรือขยายลำดับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ k

1.18 ผลกระทบ (Impact) ที่เกิดจากการนำผลการวิจัยไปใช้ สอดคล้องกับยุทธศาสตร์ด้านใด

- ยุทศาสตร์การบริหารราชการแผ่นดิน (พ.ศ.2548 - 2551)

1 . ยุทธศาสตร์การพัฒนาคุณภาพคนและสังคมไทยสู่สังคมแห่งภูมิปัญญาและการเรียนรู้

เป้าประสงค์ การพัฒนาคนให้มีคุณธรรมนำความรู้ เกิดภูมิคุ้มกัน

2 . ยุทธศาสตร์การพัฒนาบนฐานความหลากหลายทางชีวภาพและการสร้างความมั่นคงของฐานทรัพยากรและสิ่งแวดล้อม

เป้าประสงค์ การพัฒนาคุณค่าความหลากหลายทางชีวภาพ และภูมิปัญญาท้องถิ่น

3 . ยุทธศาสตร์การสร้างความเข้มแข็งของชุมชนและสังคมให้เป็นรากฐานที่มั่นคงของประเทศ

เป้าประสงค์ การเสริมสร้างศักยภาพของชุมชน ในการอยู่ร่วมกันกับทรัพยากรธรรมชาติ และสิ่งแวดล้อมอย่างสันติและเกื้อกูล

4 . ยุทธศาสตร์การเสริมสร้างธรรมาภิบาลในการบริหารจัดการประเทศ มุ่งเสริมสร้างความเป็นธรรมในสังคมอย่างยั่งยืน

เป้าประสงค์ การเสริมสร้างและพัฒนาวัฒนธรรมประชาธิปไตยและธรรมาภิบาล ให้เป็นส่วนหนึ่งของวิถีการดำเนินชีวิตในสังคมไทย

5 . ยุทธศาสตร์การปรับโครงสร้างเศรษฐกิจให้สมดุลและยั่งยืน

เป้าประสงค์ การสนับสนุนให้เกิดการแข่งขันที่เป็นธรรม และการกระจายผลประโยชน์จากการพัฒนาอย่างเป็นธรรม

- นโยบายและยุทธศาสตร์การวิจัยของชาติ(พ.ศ.2551 - 2553)

ยุทธศาสตร์การวิจัยที่ 4 การสร้างศักยภาพและความสามารถเพื่อการพัฒนานวัตกรรมและบุคลากรทางการวิจัย

กลยุทธ์การวิจัยที่ 1 พัฒนา วิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และนวัตกรรมสู่เชิงพาณิชย์ รวมทั้งองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ และการพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ในวิทยาการต่าง ๆ

แผนงานวิจัยที่ 3 การวิจัยและพัฒนาเกี่ยวกับนวัตกรรม สิ่งประดิษฐ์ และองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาการอื่น ๆ

1.19 การรับความคุ้มครองทรัพย์สินทางปัญญา

-

1.20 การได้รับรางวัล

-

1.21 งานที่จะทำต่อไป

- ค้นหาเอกลักษณ์ที่น่าสนใจของความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสอง พร้อมบทประยุกต์

1.22 คำชี้แจงแพิ่มเติม

-

1.23 ได้แนบรายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์ของโครงการ (Project) ตามหัวข้อในส่วนที่ 2 มาด้วยแล้ว

ลงชื่อ..หัวหน้าโครงการ

(อ.กันตภณ คูหาพัฒนกุล)

3 ก.ค. 2557

ส่วนที่ 2

รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์
โครงการวิจัยทุนอุดหนุนวิจัย มก. ปีงบประมาณ 2556

โครงการวิจัยรหัส ว-ท(ด)16.56

สามเหลี่ยมฟิโบนักซีอันดับ k และการประยุกต์

Generalized order-k Fibonacci triangles and applications

(1)กันตภณ คูหาพัฒนกุล,
(1)Kantaphon Kuhapatanakul,

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ในส่วนแรกจะสร้างสร้างเลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมปาสคาล เพื่อนำไปสูตรทั่วไปของกำลังสองและผลคูณของจำนวนฟิโบนักซีนัยทั่วไป ส่วนที่สองจะสร้างสามเหลี่ยม n -tribonacci triangle เพื่อนำไปสูตรทั่วไปของจำนวนไตรโบนักซี

คำสำคัญ : จำนวนฟิโบนักซี; จำนวนไตรโบนักซี

ABSTRACT

We first construct the generalized Pascal-like triangle to derive the explicit formulas for the second order linear recurrences by using some properties of this triangle. Second, we introduce n-tribonacci triangle, which is similar to Pascal's triangle, to derive an explicit formula for the tribonacci numbers.

Key words : Fibonacci numbers; tribonacci numbers

(1)ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ บางเขน
(1)Faculty of Science

ส่วนที่ 2 **รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์ (ฉบับจริง)**

โครงการวิจัยทุนอุดหนุนวิจัย มก. ปีงบประมาณ 2556

โครงการวิจัยรหัส ว-ท(ด)16.56

เรื่อง ***สามเหลี่ยมฟิโบนักซีอันดับ k และการประยุกต์***

Generalized order-k Fibonacci triangles and applications

ผู้วิจัย กันตภณ คูหาพัฒนกุล(1)

Kantaphon Kuhapatanakul

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ในส่วนแรกจะสร้างสร้างเลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมปาสคาล เพื่อนำไปสูตรทั่วไปของกำลังสองและผลคูณของจำนวนฟิโบนักซีนัยทั่วไป ส่วนที่สองจะสร้างสามเหลี่ยม n-tribonacci triangle เพื่อนำไปสูตรทั่วไปของจำนวนไตรโบนักซี

คำสำคัญ: จำนวนฟิโบนักซี; จำนวนไตรโบนักซี

ABSTRACT

We first construct the generalized Pascal-like triangle to derive the explicit formulas for the second order linear recurrences by using some properties of this triangle. Second, we introduce n-tribonacci triangle, which is similar to Pascal's triangle, to derive an explicit formula for the tribonacci numbers.

Key words: Fibonacci numbers; tribonacci numbers

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ให้ $\{F_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนฟิโบนักซี (Fibonacci numbers) ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสองซึ่งนิยามโดย

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{และ} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

เป็นที่รู้จักกันดีว่าจำนวนฟิโบนักซีสามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกแนวทแยงขึ้นของสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal triangle) (ดู [4]) นั่นคือ

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}$$

ในปี ค.ศ.1963 Feinberg (ดู [3]) ได้นิยามลำดับของจำนวนไตรโบนักซี (tribonacci numbers) ซึ่งเป็นลำดับที่ขยายมาจากลำดับของจำนวนฟิโบนักซี กล่าวคือ ให้ $\{t_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนไตรโบนักซีที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามโดย

$$t_0 = 0,\ t_1 = t_2 = 1 \quad \text{และ} \quad t_{n+2} = t_{n+1} + t_n + t_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

ในปี ค.ศ. 1977 Alladi และ Hoggatt (ดู [1]) ได้สร้างสามเหลี่ยมไตรโบนักซี (tribonacci triangle) ดังแสดงในรูปที่ 1 พิจารณาสามเหลี่ยมไตรโบนักซี ให้ $B(n,i)$ แทนสมาชิกในแถวที่ n และหลักที่ i จะได้ว่า

$$B(n,i) = B(n-1,i) + B(n-1,i-1) + B(n-2,i-1) \qquad (1)$$

Alladi และ Hoggatt ได้แสดงว่าผลบวกแนวทแยงขึ้นของสมาชิกในสามเหลี่ยมไตรโบนักซีจะได้เป็นจำนวนไตรโบนักซี กล่าวคือ

$$t_{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} B(n-i,i) \qquad (2)$$

ปี ค.ศ. 2006 Barry [2, ตัวอย่าง 16] ได้แสดงว่า

$$B(n,i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{n-j}{i} \qquad (3)$$

โดยใช้เอกลักษณ์ (3) ดังนั้นเอกลักษณ์ (2) สามารถเขียนได้ในรูป

$$t_{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-j}{i}$$

สำหรับสูตรทั่วไปของจำนวนไตรโบนักชีมีผู้ให้ความสนใจ ดู [8]

	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	3	1					
3	1	5	5	1				
4	1	7	13	7	1			
5	1	9	25	25	9	1		
6	1	11	41	63	41	11	1	
⋮			⋮					

รูปที่ 1

งานวิจัยนี้จะเริ่มด้วยนิยามลำดับของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k , $\{g_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ซึ่งสอดคล้อง

$$g_0^{(k)} = 0, g_1^{(k)} = 1 \quad \text{และ} \quad g_n^{(k)} = \begin{cases} g_{n-1}^{(k)} + \cdots + g_0^{(k)} & ; 2 \le n \le k \\ g_{n-1}^{(k)} + \cdots + g_{n-k}^{(k)} & ; n \ge k+1 \end{cases} \qquad (4)$$

ตารางแสดงลำดับของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k เมื่อ $2 \le k \le 5$

k	$\{g_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$	ชื่อสามัญ
2	0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…	ลำดับฟิโบนักชี (Fibonacci sequence)
3	0,1,1,2,4,7,13,24,44,81,149,…	ลำดับไตรโบนักชี(Tribonacci sequence)
4	0,1,1,2,4,8,15,29,56,108,208,…	ลำดับเตตระนักชี(Tetranacci sequence)
5	0,1,1,2,4,8,16,31,61,120,236,…	ลำดับเพนตะนักชี (Pentanacci sequence)

มีนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจลำดับของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k และได้สร้างเอกลักษณ์ต่างๆ ของลำดับนี้ (ดู [5]-[8])

จากนิยามที่ข้างต้นจะทำการสร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k และหาสูตรทั่วไปสำหรับจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k โดยใช้สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k และค้นหาบทประยุกต์ของสาม เหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1
2. หาสูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k โดยใช้สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k
3. เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสูตรที่ได้จากข้อ2 กับสูตรที่มีผู้ค้นพบมาก่อน
4. หาบทประยุกต์ของสูตรที่ได้จากข้อ2 หรือพัฒนาสูตรไปสู่ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ k

ขอบเขตของโครงการวิจัย

พิจารณาจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 บนโดเมนของเซตของจำนวนจริง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1 ได้พัฒนาและขยายลำดับฟิโบนัคชี และลำดับที่เกี่ยวข้อง

2 เป็นพื้นฐานของการวิจัยในอนาคต

3 เป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน การวิจัยทางคณิตศาสตร์

4 เผยแพร่ผลงานในวารสารใน และ/หรือ ต่างประเทศ

วิธีวิจัย

วิธีการดำเนินการวิจัย

1 *สำรวจเอกสาร ข้อมูล และผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและนอกประเทศ*

2 *สร้างสามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1*

3 *หาสูตรทั่วไปของจำนวนฟิโบนักชีอันดับ k โดยใช้สามเหลี่ยมฟิโบนักชีอันดับ k*

4 *เปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสูตรที่ได้จากข้อ3 กับสูตรที่มีผู้ค้นพบมาก่อน*

5 *ติดต่อ สอบถาม แลกเปลี่ยน สิ่งที่ค้นพบกับผู้ทรงคุณวุฒิ*

6 *รวบรวมผล และพิมพ์เผยแพร่*

สถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล

ภาควิชาคณิตศาสตร์ และสำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ห้องสมุดสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย

ผลและวิจารณ์

1. ได้สามเหลี่ยมปาลคาลนัยทั่วไป (Pascal-like triangle) และได้สูตรชัดแจ้งของจำนวนที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสอง ทำให้พัฒนาเอกลักษณ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสอง

2. ได้สูตรทั่วไปของจำนวนไตรโบนักชี โดยใช้สมบัติของ n-tribonacci triangle

3. งานวิจัยนี้ ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ คือ

- *Kuhapatanakul, K. and R. Wasutharat,, Expressions for the products of the second order linear recurrences. The Fibonacci Quarterly, Vol.51(1)(2013), 49-54.*

- *Kuhapatanakul, K. and L. Sukruan, n-tribonacci triangles and applications. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, doi: 10.1080/0020739X.2014.892164.*

สรุปและเสนอแนะ

ได้สามเหลี่ยมปาลคาลนัยทั่วไป และ n-tribonacci triangle ซึ่งนำไปสู่สูตรชัดแจ้งของจำนวนที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสองและจำนวนไตรโบนักชี ตามลำดับ ทำให้พัฒนาเอกลักษณ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสองและสาม

เอกสารอ้างอิง

[1] K. Alladi and V.E. Hoggatt, Jr., On tribonacci numbers and related functions, The Fibonacci Quarterly 15(1)(1977), 42-45.

[2] P. Barry, On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles, Journal of Integer Sequences 9(2006), Article 06.2.4.

[3] M. Feinberg, Fibonacci-Tribonacci, The Fibonacci Quarterly 1(3)(1963), 71-74.

[4] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, New York, 2001.

[5] G.Y. Lee, S.G. Lee, J.S. Kim and H.K. Shin, The Binet formula and representations of k-generalized Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly 39(2)(2001), 107-115.

[6] C. Levesque, On m-th-order linear recurrences, The Fibonacci Quarterly 23(4)(1985), 290-293.

[7] A.N. Philippou, A note on the Fibonacci sequence of order k and the multinomial coefficients, The Fibonacci Quarterly 21(2)(1983), 82-86.

[8] A.G. Shannon and A.F. Horadam, Some properties of third-order recurrence relations, The Fibonacci Quarterly 10(2) (1972), 135-145.

---

(1) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University

EXPRESSIONS FOR THE PRODUCTS OF THE SECOND ORDER LINEAR RECURRENCES

KANTAPHON KUHAPATANAKUL AND RATTANAPOL WASUTHARAT

Abstract. In this paper we consider the second order linear recurrent sequences and derive explicit formulas for the products of elements in these sequences which extend explicit formulas for the squared generalized Fibonacci numbers and the products of consecutive generalized Fibonacci numbers.

1. Introduction

The second order linear recurrence $W_n = W_n(p, q; a, b)$ is defined for $n > 0$ by

$$W_{n+1} = aW_n + bW_{n-1},$$

in which $W_0 = p$ and $W_1 = q$, where a, b, p, q are arbitrary real numbers.

As some special cases of $\{W_n\}$, define the generalized Fibonacci $\{U_n\}$ and Lucas $\{V_n\}$ sequences as $U_n = W_n(0, 1; a, b)$ and $V_n = W_n(2, a; a, b)$, respectively. If $a = b = 1$, then $U_n = F_n$ and $V_n = L_n$ are well-known Fibonacci and Lucas numbers, respectively.

It is well-known that explicit formulas for the generalized Fibonacci and Lucas numbers are

$$U_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} b^i,$$

$$V_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} b^i,$$

respectively, see equations (2.7) and (2.8) in [2].

Recently the author [1] found explicit formulas for the squares of generalized Fibonacci numbers and the products of consecutive generalized Fibonacci numbers.

$$U_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2(n-i-j)} b^{i+j},$$

$$U_n U_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor (2n-1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i} a^{2(n-i-j)-1} b^{i+j}.$$

The objectives here are to derive formulas for the numbers $W_n U_n$ and $W_n U_{n+1}$ which generalize the above two identities.

Research supported by a research grant for new scholars the Thailand Research Fund MRG56-0035 and Kasetsart University Research and Development Institute (KURDI).

2. Main Results

Definition 2.1. *Let n, i be integers with $n \geq 0$. The number $B(n,i)$ is defined as $B(0,0) = p$ and, for $n > 0$,*

$$B(n,i) = \begin{cases} qa^{n-1}, & i = 0; \\ pa^i b^i, & i = n; \\ aB(n-1,i) + ab(n-1,i-1) + b^2 B(n-2,i-1), & 0 < i < n; \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

We give an alternative definition of $B(n,i)$ in the binomial sums.

Theorem 2.2. *Let $n \in \mathbb{N}$ and i be non-negative integers with $i < n$. We have*

$$B(n,i) = \sum_{j=0}^{i} \frac{ipa + (n-i-j)q}{n-j} \binom{i}{j} \binom{n-j}{i} a^{n-2j-1} b^{i+j}. \tag{2.1}$$

Proof. For $n = 1$, we see that equation (2.1) holds for $i = 0$. Assume equation (2.1) is true for $n \geq 1$ and $0 \leq i < n$. By Definition 2.1 and the inductive hypothesis, we obtain

$$\begin{aligned} B(n+1,i) &= \sum_{j=0}^{i} \tfrac{ipa+(n-i-j)q}{n-j} \tbinom{i}{j} \tbinom{n-j}{i} a^{n-2j} b^{i+j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \tfrac{(i-1)pa+(n-i-j+1)q}{n-j} \tbinom{i-1}{j} \tbinom{n-j}{i-1} a^{n-2j} b^{i+j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \tfrac{(i-1)pa+(n-i-j)q}{n-j-1} \tbinom{i-1}{j} \tbinom{n-j-1}{i-1} a^{n-2j-2} b^{i+j+1} \\ &= \tfrac{ipa+(n-i)q}{n} \tbinom{n}{i} a^n b^i + \sum_{j=1}^{i-1} \tfrac{ipa+(n-i-j)q}{n-j} \tbinom{i}{j} \tbinom{n-j}{i} a^{n-2j} b^{i+j} + \tfrac{ipa+(n-2i)q}{n-i} \tbinom{n-i}{i} a^{n-2i} b^{2i} \\ &\quad + \tfrac{(i-1)pa+(n-i+1)q}{n} \tbinom{n}{i-1} a^n b^i + \sum_{j=1}^{i-1} \tfrac{(i-1)pa+(n-i-j+1)q}{n-j} \tbinom{i-1}{j} \tbinom{n-j}{i-1} a^{n-2j} b^{i+j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \tfrac{(i-1)pa+(n-i-j+1)q}{n-j} \tbinom{i-1}{j-1} \tbinom{n-j}{i-1} a^{n-2j} b^{i+j} + \tfrac{(i-1)pa+(n-2i+1)q}{n-i} \tbinom{n-i}{i-1} a^{n-2i} b^{2i}. \end{aligned}$$

From Pascal's identity $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$ and the definition of binomial coefficient, we obtain

$$\frac{i}{n}\binom{n}{i} + \frac{i-1}{n}\binom{n}{i-1} = \frac{i}{n}\binom{n+1}{i} - \frac{1}{n}\binom{n}{i-1} = \frac{i}{n+1}\binom{n+1}{i},$$

so

$$\begin{aligned}B(n+1,i) &= \tfrac{ipa+(n-i+1)q}{n+1}\tbinom{n+1}{i}a^n b^i + \sum_{j=1}^{i-1}\tfrac{ipa+(n-i-j+1)q}{n-j+1}\tbinom{i}{j}\tbinom{n-j+1}{i}a^{n-2j}b^{i+j}\\ &\quad + \tfrac{ipa+(n-2i+1)q}{n-i+1}\tbinom{n-i+1}{i}a^{n-2i}b^{2i}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\tfrac{ipa+(n-i-j+1)q}{n-j+1}\tbinom{i}{j}\tbinom{n-j+1}{i}a^{n-2j}b^{i+j}.\end{aligned}$$

Thus, equation (2.1) holds for $n+1$, thereby proving the theorem. $\square$

Notes: (1) If we take $p=0$ and $q=1$ in identity (2.1) of Theorem 2.2, then $B(n,i)$ is exactly $T(n+1,i)$ of Definition 3.1 in [1].
(2) We see that all the terms in the summation of $B(n,i)$ are zero when $j>\min\{i,n-i\}$. For completeness, we write $B(n,i)$, identity (2.1), as

$$B(n,i)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n+i}{3}\rfloor}\frac{ipa+(n-i-j)q}{n-j}\binom{i}{j}\binom{n-j}{i}a^{n-2j-1}b^{i+j}. \tag{2.2}$$

Now, we state explicit formulas for the numbers $U_{n+1}W_n$ and U_nW_n. Their proofs will be given in the next section.

Theorem 2.3. *For any positive integer n, we have*

(i) $U_{n+1}W_n = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor} B(2n-2i,i).$

(ii) $U_nW_n = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n-1}{3}\rfloor} B(2n-2i-1,i).$

By using identity (2.2), we obtain the following corollary.

Corollary 2.4. *For any positive integer n, we have*

(i) $$U_{n+1}W_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2n-i}{3}\rfloor}\frac{ipa+(2n-3i-j)q}{2n-2i-j}\binom{i}{j}\binom{2n-2i-j}{i}a^{2(n-i-j)-1}b^{i+j}.$$

(ii) $$U_nW_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n-1}{3}\rfloor}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2n-i-1}{3}\rfloor}\frac{ipa+(2n-3i-j-1)q}{2n-2i-j-1}\binom{i}{j}\binom{2n-2i-j-1}{i}a^{2(n-i-j-1)}b^{i+j}.$$

Corollary 2.5. *For any positive integer n, we have*

(1) $$U_{n+1}U_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2n-i}{3}\rfloor}\binom{i}{j}\binom{2n-2i-j-1}{i}a^{2(n-i-j)-1}b^{i+j}.$$

(2) $$U_n^2=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{2n-1}{3}\rfloor}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{2n-i-1}{3}\rfloor}\binom{i}{j}\binom{2n-2i-j-2}{i}a^{2(n-i-j-1)}b^{i+j}.$$

(3) $U_{n+1}V_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{2n-i-j}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2(n-i-j)} b^{i+j}.$

(4) $U_nV_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i-1}{3} \rfloor} \frac{2n-i-j-1}{2n-2i-j-1} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i} a^{2(n-i-j)-1} b^{i+j}.$

(5) $V_n^2 - b^2U_{n-1}^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{2n-j}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2n-2i-2j} b^{i+j}.$

(6) $U_{n-1}U_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{i}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2n-2i-2j} b^{i+j-1}.$

Proof. We write $w_n = W_n(3, a; a, b)$. The following identities are easily verified

$$V_n^2 - b^2U_{n-1}^2 = U_{n+1}w_n. \tag{2.3}$$

$$2bU_{n-1}U_{n+1} = U_{n+1}w_n - U_{n+1}^2. \tag{2.4}$$

For parts (1)–(4), simply apply Corollary 2.4 with $W_n = U_n$ or V_n. Taking $p = 3$ in Corollary 2.4(i) and using identities (2.3) and (2.4), we obtain parts (5)–(6). □

Identities (1) and (2) of Corollary 2.5 are the two identities which appeared in Section 1, i.e. see [1]. Specializing certain parameters in Corollary 2.5, several identities follow easily as we illustrate now. Taking $U_n = F_n$ and $V_n = L_n$, we can rewrite as

(1) $F_{n+1}F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i}.$

(2) $F_n^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i-1}{3} \rfloor} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-2}{i}.$

(3) $F_{n+1}L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{2n-i-j}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i}.$

(4) $F_nL_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i-1}{3} \rfloor} \frac{2n-i-j-1}{2n-2i-j-1} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i}.$

(5) $L_n^2 - F_{n-1}^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{2n-j}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i}.$

(6) $F_{n-1}F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2n-i}{3} \rfloor} \frac{i}{2n-2i-j} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i}.$

3. Proof of Theorem 2.3

We first provide an identity which extends the identities of Lemma 4.1 in [1].

Lemma 3.1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and k be non-negative integer. Then*

$$U_{n+k+2}W_{n+2} = (a^2+b)U_{n+k+1}W_{n+1} + (a^2b+b^2)U_{n+k}W_n - b^3U_{n+k-1}W_{n-1}.$$

Proof. By the definition of U_n and W_n, we obtain

$$\begin{aligned}
U_{n+k+2}W_{n+2} &= (aU_{n+k+1} + bU_{n+k})(aW_{n+1} + bW_n) \\
&= a^2U_{n+k+1}W_{n+1} + b^2U_{n+k}W_n + abU_{n+k+1}W_n + abU_{n+k}W_{n+1} \\
&= a^2U_{n+k+1}W_{n+1} + b^2U_{n+k}W_n + abW_n(aU_{n+k} + bU_{n+k-1}) \\
&\quad + bW_{n+1}(U_{n+k+1} - bU_{n+k-1}) \\
&= (a^2+b)U_{n+k+1}W_{n+1} + (a^2b+b^2)U_{n+k}W_n - b^3U_{n+k-1}W_{n-1},
\end{aligned}$$

as desired. □

Proof of Theorem 2.3. Since the proofs of both part (i) and part (ii) are quite similar, we only give a proof for part (i). By induction on n, we see that identity (i) holds for $n = 1, 2, 3$. Now assume identity (i) is true for all integers $n \geq 1$. By Lemma 3.1 and the inductive hypothesis, we obtain

$$\begin{aligned}
U_{n+2}W_{n+1} &= (a^2+b)U_{n+1}W_n + (a^2b+b^2)U_nW_{n-1} - b^3U_{n-1}W_{n-2} \\
&= (a^2+b)\sum_{i\geq 0} B(2n-2i, i) + (a^2b+b^2)\sum_{i\geq 0} B(2n-2i-2, i) \\
&\quad - b^3\sum_{i\geq 0} B(2n-2i-4, i) \\
&= a^2B(2n, 0) + bB(2n, 0) + (a^2+b)\sum_{i\geq 1} B(2n-2i, i) \\
&\quad + (a^2b+b^2)\sum_{i\geq 1} B(2n-2i, i-1) - b^3\sum_{i\geq 1} B(2n-2i-2, i-1) \\
&= B(2n+2, 0) + a^2\sum_{i\geq 1} B(2n-2i, i) + bB(2n, 0) + ab\sum_{i\geq 1} B(2n-2i-1, i) \\
&\quad + ab^2\sum_{i\geq 1} B(2n-2i-1, i-1) + b^3\sum_{i\geq 1} B(2n-2i-2, i-1) \\
&\quad + (a^2b+b^2)\sum_{i\geq 1} B(2n-2i, i-1) - b^3\sum_{i\geq 1} B(2n-2i-2, i-1) \\
&= B(2n+2, 0) + a\sum_{i\geq 1} B(2n-2i+1, i) + ab\sum_{i\geq 1} B(2n-2i+1, i-1) \\
&\quad + b^2\sum_{i\geq 1} B(2n-2i, i-1) \\
&= \sum_{i\geq 0} B(2n-2i+2, i).
\end{aligned}$$

Therefore, the result is true for every n.

References

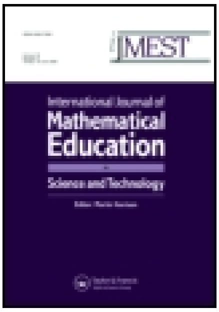
[1] K. Kuhapatanakul, *Some connections between a generalized tribonacci triangle and a generalized Fibonacci sequence*, The Fibonacci Quarterly, **50.1** (2012), 44–50.

[2] Z. H. Sun, *Expansions and identities concerning Lucas sequence*, The Fibonacci Quarterly, **44.2** (2006), 145–153.

MSC2010: 11B37, 11B39

Department of Mathematics, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand
E-mail address: fscikpkk@ku.ac.th

Department of Mathematics, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand
E-mail address: nung31@hotmail.com



International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.tandfonline.com/loi/tmes20

n-tribonacci triangles and applications

Kantaphon Kuhapatanakul[a] & Lalitphat Sukruan[b]

[a] Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok, Thailand

[b] Department of Mathematics, Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi, Suphanburi, Thailand

Published online: 07 Mar 2014.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2014
http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2014.892164

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

CLASSROOM NOTE

n-tribonacci triangles and applications

Kantaphon Kuhapatanakul[a*] and Lalitphat Sukruan[b]

[a]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok, Thailand;* [b]*Department of Mathematics, Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi, Suphanburi, Thailand*

(*Received 12 September 2013*)

In this note we introduce *n*-tribonacci triangle, which is similar to Pascal's triangle, to derive an explicit formula for the tribonacci numbers by using some properties of our triangle.

Keywords: tribonacci numbers; *n*-tribonacci triangle

1. Introduction

The tribonacci numbers T_n are defined by for $n \geq 1$

$$T_0 = 0, \quad T_1 = T_2 = 1 \quad \text{and} \quad T_{n+2} = T_{n+1} + T_n + T_{n-1}.$$

The following table displays the first 15 tribonacci numbers.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T_n	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705	3136

The tribonacci numbers are a well-known generalization of the Fibonacci numbers F_n defined for $n \geq 1$ by

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{and} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

It is well known that the Fibonacci numbers can be derived by summing elements on the rising diagonal lines in Pascal's triangle,

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i},$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the largest integer not exceeding x, see [1, chapter 12].

*Corresponding author. Email: fscikpkk@ku.ac.th

Shannon [2] gave an explicit formula for the tribonacci numbers,

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{i+j}{j} \binom{n-i-2j}{i+j}.$$

2. Tribonacci arrays

We can obtain the tribonacci numbers by computing the sum of the elements on the rising diagonals of some triangular arrays.

2.1. *Feinberg's array*

First, we find the trinomial expansions of $(1 + x + x^2)^n$ for $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^0 &= 1 \\
(1+x+x^2)^1 &= 1 + x + x^2 \\
(1+x+x^2)^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 \\
(1+x+x^2)^3 &= 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6 \\
(1+x+x^2)^4 &= 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8 \\
(1+x+x^2)^5 &= 1 + 5x + 15x^2 + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 \\
&\quad + 5x^9 + x^{10} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Now arrange the coefficients in the expansions to form a left-justified triangular array as follows:

1 1 2 4 7 13 24

1												
1	1	1										
1	2	3	2	1								
1	3	6	7	6	3	1						
1	4	10	16	19	16	10	4	1				
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

Observe that every row is symmetric and each number is the sum of the one above and two to the left of it.

Feinberg [3] showed that the sum of elements on each rising diagonal line of above triangular array gives the tribonacci numbers,

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = 1 + 1 = 2, \quad T_4 = 1 + 2 + 1 = 4, \quad T_5 = 1 + 3 + 3 = 7,$$
$$T_6 = 1 + 4 + 6 + 2 = 13, \quad T_7 = 1 + 5 + 10 + 7 + 1 = 24, \ldots.$$

			1				
			1	1			
		1	3	1			
		1	5	5	1		
	1	7	13	7	1		
	1	9	25	25	9	1	
1	11	41	63	41	11	1	
1	13	61	129	129	61	13	1

Figure 1. The generalized Pascal's triangle.

2.2. *Wong and Maddocks's array*

Wong and Maddocks [4] have shown another triangular array similar to Pascal's triangle and called it a generalized Pascal's triangle. To construct this array, every row begins and ends with 1, and any interior number in each row is the sum of three numbers from neighbouring elements in the two preceding row, see Figure 1.

Now arrange the elements of the generalized Pascal's triangle to form a left-justified triangular array as follows:

Diagonal sums: 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44

1							
1	1						
1	3	1					
1	5	5	1				
1	7	13	7	1			
1	9	25	25	9	1		
1	11	41	63	41	11	1	
1	13	61	129	129	61	13	1

In a similar way, the tribonacci numbers can be derived by summing elements on the rising diagonal lines in the above generalized Pascal's triangle (some authors also call this triangle the tribonacci triangle, e.g., see [5]).

3. The *n*-tribonacci triangle

Throughout this paper, the symbol $\binom{n}{k}$ is the *binomial coefficient*, that is,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & ; n \geq k \\ 0 & ; n < k \end{cases}, \qquad \binom{0}{0} = 1.$$

Definition 1: Let n be a positive integer. For any non-negative integers i, j, let

$$\binom{i}{j}_n = \binom{i}{j}\binom{n-i-j-1}{i}.$$

Note that if $2i \geq n-j$, then $\binom{i}{j}_n = 0$. We define the new n-tribonacci triangle, which leads us to an expression for the tribonacci numbers.

Definition 2: Let $n \in \mathbb{N}$. The n-tribonacci triangle is an array of the shape,

$$\begin{array}{lccccccccccc}
row\ 0: & & & & & & \binom{0}{0}_n & & & & & \\
row\ 1: & & & & & \binom{1}{0}_n & & \binom{1}{1}_n & & & & \\
row\ 2: & & & & \binom{2}{0}_n & & \binom{2}{1}_n & & \binom{2}{2}_n & & & \\
row\ 3: & & & \binom{3}{0}_n & & \binom{3}{1}_n & & \binom{3}{2}_n & & \binom{3}{3}_n & & \\
row\ 4: & & \binom{4}{0}_n & & \binom{4}{1}_n & & \binom{4}{2}_n & & \binom{4}{3}_n & & \binom{4}{4}_n & \\
row\ 5: & \binom{5}{0}_n & & \binom{5}{1}_n & & \binom{5}{2}_n & & \binom{5}{3}_n & & \binom{5}{4}_n & & \binom{5}{5}_n \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

For the n-tribonacci triangle, we get that

(1) the number of rows of non-zero elements equal to $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$;
(2) the number of non-zero elements in the ith row equal to $\min\{i+1, n-2i\}$;
(3) for $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ of last non-zero elements, the number of elements is equal to 1 or 2, if n is odd or even, respectively.

For clarity, we give an example of the 15-tribonacci triangle.

Example 1: The 15-tribonacci triangle is and then calculating the binomial coefficients to any element in this triangle, we get

$$\binom{0}{0}\binom{14}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{13}{1} \quad \binom{1}{1}\binom{12}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{12}{2} \quad \binom{2}{1}\binom{11}{2} \quad \binom{2}{2}\binom{10}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{11}{3} \quad \binom{3}{1}\binom{10}{3} \quad \binom{3}{2}\binom{9}{3} \quad \binom{3}{3}\binom{8}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{10}{4} \quad \binom{4}{1}\binom{9}{4} \quad \binom{4}{2}\binom{8}{4} \quad \binom{4}{3}\binom{7}{4} \quad \binom{4}{4}\binom{6}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{9}{5} \quad \binom{5}{1}\binom{8}{5} \quad \binom{5}{2}\binom{7}{5} \quad \binom{5}{3}\binom{6}{5} \quad \binom{5}{4}\binom{5}{5} \quad \binom{5}{5}\binom{4}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{8}{6} \quad \binom{6}{1}\binom{7}{6} \quad \binom{6}{2}\binom{6}{6} \quad \binom{6}{3}\binom{5}{6} \quad \binom{6}{4}\binom{4}{6} \quad \binom{6}{5}\binom{3}{6} \quad \binom{6}{6}\binom{2}{6}$$

$$\binom{7}{0}\binom{7}{7} \quad \binom{7}{1}\binom{6}{7} \quad \binom{7}{2}\binom{5}{7} \quad \binom{7}{3}\binom{4}{7} \quad \binom{7}{4}\binom{3}{7} \quad \binom{7}{5}\binom{2}{7} \quad \binom{7}{6}\binom{1}{7} \quad \binom{7}{7}\binom{0}{7}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & & & & \\
 & & & 13 \quad 12 & & & & \\
 & & & 66 \quad 110 \quad 45 & & & & \\
 & & & 165 \quad 360 \quad 252 \quad 56 & & & & \\
 & & & 210 \quad 504 \quad 420 \quad 140 \quad 15 & & & & \\
 & & & 126 \quad 280 \quad 210 \quad 60 \quad 5 \quad 0 & & & & \\
 & & & 28 \quad 42 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & & & & \\
 & & & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & & & &
\end{array}$$

It is interesting that the sum of all elements in the 15-tribonacci triangle is equal to 3136, which is T_{15}.

The following table displays the n-tribonacci triangles for $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$:

n	n-tribonacci triangle		Sums of all elements
	Standard form	After Calculating	
1	$\binom{0}{0}\binom{0}{0}$	1	1
2	$\binom{0}{0}\binom{1}{0}$	1	1
3	$\binom{0}{0}\binom{2}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	1 1	2
4	$\binom{0}{0}\binom{3}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{2}{1}$ $\binom{1}{1}\binom{1}{1}$	1 2 1	4
5	$\binom{0}{0}\binom{4}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{3}{1}$ $\binom{1}{1}\binom{2}{1}$ $\binom{2}{0}\binom{2}{2}$	1 3 2 1	7
6	$\binom{0}{0}\binom{5}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{4}{1}$ $\binom{1}{1}\binom{3}{1}$ $\binom{2}{0}\binom{3}{2}$ $\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1 4 3 3 2	13
7	$\binom{0}{0}\binom{6}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{5}{1}$ $\binom{1}{1}\binom{4}{1}$ $\binom{2}{0}\binom{4}{2}$ $\binom{2}{1}\binom{3}{2}$ $\binom{2}{2}\binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}\binom{3}{3}$	1 5 4 6 6 1 1	24
8	$\binom{0}{0}\binom{7}{0}$ $\binom{1}{0}\binom{6}{1}$ $\binom{1}{1}\binom{5}{1}$ $\binom{2}{0}\binom{5}{2}$ $\binom{2}{1}\binom{4}{2}$ $\binom{2}{2}\binom{3}{2}$ $\binom{3}{0}\binom{4}{3}$ $\binom{3}{1}\binom{3}{3}$	1 6 5 10 12 3 4 3	44

We will in fact prove that the sums of all elements in the n-tribonacci triangle give the nth tribonacci number, T_n, in the following section.

4. Main results

Denote $S_n(i)$ as the sums of elements in the ith row of n-tribonacci triangle, that is,

$$S_n(i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_n.$$

We begin with the relation of $S_n(i)$ in the following lemma.

Lemma 1: *Let n, i be two positive integers. We have*

$$S_{n+2}(i) = S_{n+1}(i) + S_n(i-1) + S_{n-1}(i-1). \tag{4.1}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
S_{n+2}(i) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\binom{n-i-j+1}{i} \\
&= \binom{n-i+1}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j}\binom{n-i-j+1}{i} + \binom{n-2i+1}{i} \\
&= \binom{n-i+1}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i} + \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j}{i-1}\right. \\
&\quad \left. + \binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-j}{i-1}\right] + \binom{n-2i+1}{i} \\
&= \binom{n-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i} + \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j}{i-1}\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j-1}{i-1} + \binom{n-2i}{i} + \binom{n-2i}{i-1} \\
&= \binom{i}{0}\binom{n-i}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i} + \binom{i}{i}\binom{n-2i}{i} \\
&\quad + \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j}{i-1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j-1}{i-1} + \binom{i-1}{i-1}\binom{n-2i}{i-1} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\binom{n-i-j}{i} + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j}\binom{n-i-j}{i-1}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\binom{n-i-j-1}{i-1}$$
$$= S_{n+1}(i) + S_n(i-1) + S_{n-1}(i-1),$$

as desired. □

Now, we state an explicit formula for T_n by summing all row sums of the n-tribonacci triangle and prove the following theorem.

Theorem 1: *For $n \geq 0$, we have*

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} S_{n+1}(i). \tag{4.2}$$

Proof. We will prove by induction. We see that

$$T_1 = S_1(0) = 1, \quad T_2 = S_2(0) = 1 \text{ and } T_3 = S_3(0) + S_3(1) = 1 + 1 = 2.$$

Assume that Equation (4.2) holds for all integers $n = 3, 4, 5, \ldots, k-1$. By the inductive hypothesis and Lemma 1, we get

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= T_k + T_{k-1} + T_{k-2} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor k-1/2 \rfloor} S_k(i) + \sum_{i=0}^{\lfloor k-2/2 \rfloor} S_{k-1}(i) + \sum_{i=0}^{\lfloor k-3/2 \rfloor} S_{k-2}(i) \\
&= S_k(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor k-1/2 \rfloor} S_k(i) + \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} S_{k-1}(i-1) + \sum_{i=1}^{\lfloor k-1/2 \rfloor} S_{k-2}(i-1) \\
&= \begin{cases} S_{k+1}(0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{(k-1)/2} S_{k+1}(i), & \text{if } k \text{ is odd} \\ S_{k+1}(0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{(k-2)/2} S_{k+1}(i) + S_{k+1}(k/2), & \text{if } k \text{ is even} \end{cases} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} S_{k+1}(i),
\end{aligned}$$

showing that Equation (4.2) holds for $n = k$. □

In the fourth line of the proof for k is even, we were able to replace $S_{k-1}(k/2 - 1)$ by $S_{k+1}(k/2)$ because both are equal to 1.

The formula (4.2) contains a previously known identity as a special case, summing only the first element of all rows ($j = 0$) in the $(n + 1)$-tribonacci triangle, gives

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{i}{0}_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

The identity (4.2) can then be re-written in terms of binomial coefficients as follows:

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-j}{i}.$$

Acknowledgements

The first author is supported by the Kasetsart University Research and Development Institute (KURDI), Thailand.

References

[1] Koshy T. Fibonacci and Lucas numbers with applications. New York: Wiley; 2001.
[2] Shannon AG. Tribonacci numbers and Pascal's pyramid. Fibonacci Q. 1977;15(3):268–275.
[3] Feinberg M. New slants. Fibonacci Q. 1964;2(3):223–227.
[4] Wong CK, Maddocks TW. A generalized Pascal's triangle. Fibonacci Q. 1975;13(2):134–136.
[5] Alladi K, Hoggatt VE Jr. On tribonacci numbers and related functions. Fibonacci Q. 1977;15(1):42–45.

Chulalongkorn University
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Pillar of the Kingdom

Proceedings of

Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2013

การประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ ประจำปี 2556

9-10 พฤษภาคม 2556

APAM 2013

คณิตศาสตร์การเงิน

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
www.math.sc.chula.ac.th

Expansions and Identities Concerning the Second Order Linear Recurrences

Rattanapol Wasutharat[1,*] and Kantaphon Kuhapatanakul[2,†]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of science, Kasetsart University,
Bangkok 10900, Thailand
[1]nung31@hotmail.com, [2]fscikpkk@ku.ac.th

Abstract

The second order linear recurrent sequence $\{W_n\}$ is defined by

$$W_{n+1} = aW_n + bW_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

in which where $W_0 = p$ and $W_1 = q$, where a, b, p, q are arbitrary real numbers. We derive the explicit formulas for the products of elements in this sequence. Applications to earlier results about generalized Fibonacci and Lucas numbers.

Mathematics Subject Classification: 11B37, 11B39

Keywords: linear recurrences, Fibonacci numbers, Lucas numbers

* *Corresponding author*

† *The author is supported by the Kasetsart University Research and Development Institute. (KURDI)*