

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

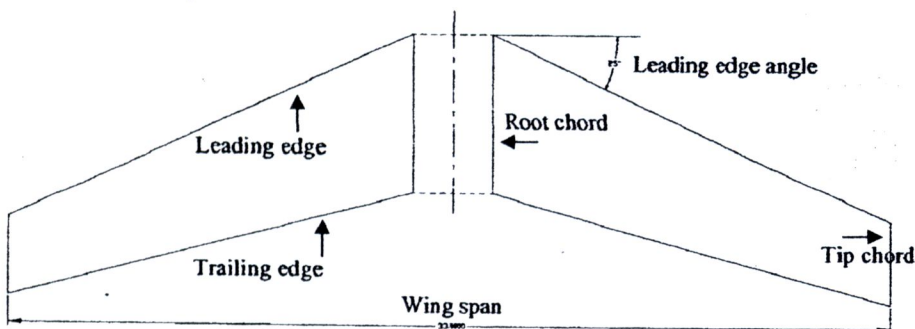
3.1 บทนำ

ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างปีกเครื่องบินแบบเปลี่ยนรูปได้นั้น จำเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องในหลายๆด้านประกอบเข้าด้วยกัน โดยส่วนใหญ่แล้วทฤษฎีที่เกี่ยวข้องจะอยู่ในความรู้ด้านแอโรไดนามิกส์ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ซึ่งเกิดจากการปฏิสัมพันธ์ (interaction) ของแรงเฉื่อย แรงยืดหยุ่นและแรงอากาศพลศาสตร์ ซึ่งการพิจารณาในการออกแบบนั้นจะอยู่ในข้อจำกัดของตัวแปรต่างๆที่มีผลต่อเสถียรภาพของปีกเครื่องบิน เช่น การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง, การโก่งเคาะ (buckling) หรือค่าความเค้น เป็นต้น ในส่วนนี้จะอธิบายถึงทฤษฎีที่มีผลต่อเสถียรภาพของปีกเครื่องบิน, วิธีการวิเคราะห์ทางอากาศพลศาสตร์, การคำนวณหาค่าตัวแปรต่างๆที่จะนำไปใช้ในการออกแบบ ในส่วนของสมการที่เกี่ยวข้องต่อเสถียรภาพของปีกเครื่องบินนั้น ในการออกแบบและคำนวณจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งจะต้องนำสมการที่เกี่ยวข้องมาปรับเปลี่ยนตามสภาวะขอบเขตเพื่อให้สะดวกในการออกแบบทางวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ ซึ่งเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาค่าตัวแปรต่างๆที่มีผลในการออกแบบและสามารถหาผลจากการออกแบบที่ดีที่สุดได้ต่อไป

3.2 ปีกเครื่องบินเบื้องต้น

ในการออกแบบปีกเครื่องบิน จำเป็นต้องทำความเข้าใจในรูปทรงของปีกเครื่องบิน การเรียกชื่อส่วนประกอบต่างๆ คำนิยามที่เกี่ยวข้อง รายละเอียดมีดังนี้

3.2.1 แปลนปีก (Plane form) คือ รูปทรงของปีกที่มองจากผิวบนของปีก มีหลายแบบ เช่น delta, swept forward, canard, elliptical, rectangular, tapered โดยในภาพที่ 10 เป็นรูปทรงของปีกแบบลู่อหลัง (Swept-back wing) ส่วนประกอบต่างๆในภาพที่ 10 มีดังนี้



ภาพที่ 10 รูปทรงแปลนปีกของเครื่องบิน

- ชายปีกด้านหน้า (Leading Edge) คือ ขอบชายหน้าของปีก เป็นส่วนแรกของปีกที่สัมผัสกระแสลมและแยกกระแสลมให้เดินทางไปด้านบนและด้านล่างของปีก

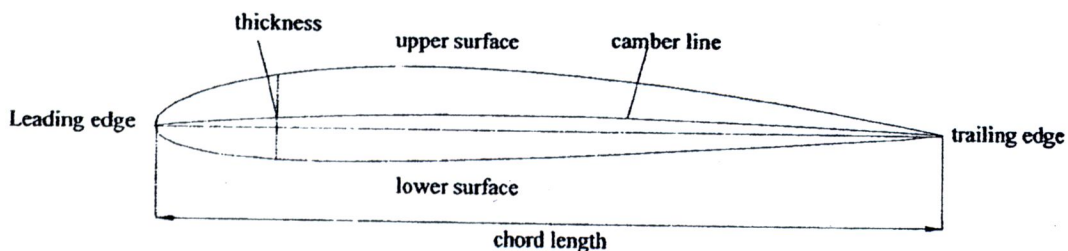
- ชายปีกด้านหลัง (Trailing Edge) คือ ขอบชายหลังของปีก เป็นขอบท้ายสุดของปีกที่สัมผัสลมก่อนลงด้านบนและด้านล่างของปีกจะไหลมารวมตัวกัน

- ความยาวกางปีก (Wing Span) คือ ความยาวซึ่งวัดจากปลายปีกด้านหนึ่งถึงปลายปีกอีกด้านหนึ่ง

- คอร์ด (Chord) มีสองค่าคือ คอร์ดโคนปีก (Root Chord) คือ ระยะจากชายปีกด้านหน้าไปถึงชายปีกด้านหลังที่โคนปีก และคอร์ดปลายปีก (Tip Chord) คือ ระยะจากชายหน้าปีกไปถึงชายหลังปีกที่ปลายปีก

- มุมถูหลัง (Swept-back Angle) คือ มุมวัดที่โคนชายหน้าปีกจากเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ดโคนปีกจนถึงแนวชายปีกด้านหน้า

3.2.2 ภาคตัดขวางของปีก (Airfoil section geometry) หรือแผนอากาศ เมื่อวางปีกในแนวระดับ แนวตัดขวางตั้งฉากจากชายหน้าไปถึงชายหลังปีกก็คือภาคตัดปีก ดังภาพที่ 11 โดยมีรายละเอียดดังนี้



ภาพที่ 11 รูปทรงภาคตัดปีก

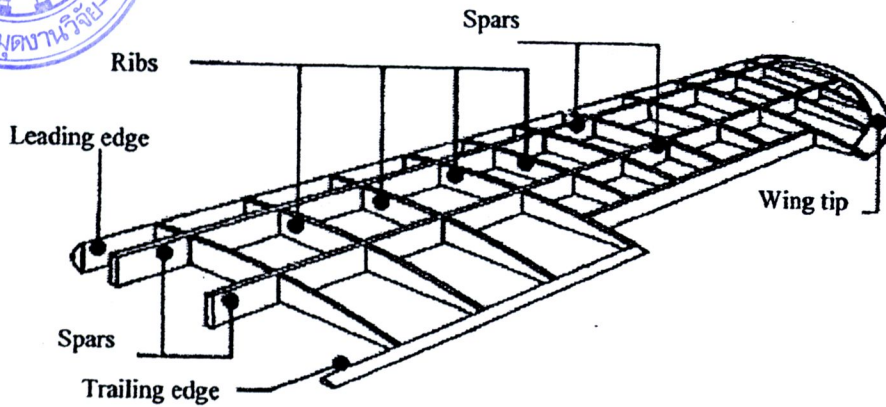
- ความยาวคอร์ด (Chord length) คือ ความยาวจากขอบชายหน้าถึงขอบชายหลัง

- ผิวปีก มีสองส่วน คือ ผิวบน (Upper surface) เป็นผิวด้านบนของปีก และ ผิวด้านล่าง (Lower surface) เป็นผิวด้านล่างของปีก

- ความหนาของปีก (Thickness) คือ เส้นที่ลากจากผิวบนสู่ผิวด้านล่างของปีก โดยตั้งฉากกับเส้นคอร์ด

- เส้นแคมเบอร์ (Camber line) คือ เส้นที่ลากจากจุดทุกจุดที่แบ่งครึ่งเส้นความหนาของปีกตั้งแต่ขอบชายหน้าไปถึงขอบชายหลัง

3.2.3 โครงสร้างภายในของปีก (Internal aircraft wing structure) คือ โครงสร้างภายในปีกเครื่องบินดังภาพที่ 12 ซึ่งเป็นส่วนหลักที่ทำให้ปีกเครื่องบินคงรูปอยู่ได้ ซึ่งจะมีโครงสร้างหลักๆ ดังนี้



ภาพที่ 12 โครงสร้างภายในปีกเครื่องบิน

- สปาร์ (Spars) คือ คานส่วนแกนของโครงสร้างภายในตามแนวขอบขาหน้าและขอบขาหลังของปีก เพื่อยึดโครงสร้างภายในของปีกตลอดความยาวปีก
- ริป (Ribs) คือ คานส่วนแกนของโครงสร้างภายในตามแนวคอร์ดของปีก เพื่อยึดโครงสร้างภายในของปีกตลอดความยาวคอร์ด

3.2.4 การเรียกชื่อแผนอากาศ

การเรียกชื่อแผนอากาศนั้นมีจุดเริ่มต้นมาจากคณะกรรมการที่ปรึกษาด้านอากาศยานแห่งชาติ (The National Advisory Committee for Aeronautics, NACA) ของสหรัฐอเมริกา หรือที่เรียก NASA ในปัจจุบัน ได้รับมอบภารกิจในการสร้างระบบที่เหมาะสมของแผนอากาศ ในปลายปี ค.ศ. 1920 จากผลการทดลองในอุโมงค์ลมแสดงให้เห็นว่า คุณสมบัติเบื้องต้นทางอากาศพลศาสตร์ของแผนอากาศจะขึ้นอยู่กับ ความหนา และลักษณะของเส้นกึ่งกลาง (mean line) จึงได้มีการตกลงกำหนดคุณลักษณะของแผนอากาศด้วยระบบตัวเลข กรณีระบบตัวเลขสี่ตัว จะขึ้นต้นด้วย NACA แล้วตามด้วยเลขสี่หลัก เช่น NACA2415 โดยตัวเลขแต่ละตัวจะมีความหมายดังนี้

หลักที่ 1 ตัวเลข 2 หมายถึงค่ามากที่สุดของแคมเบอร์เป็นเปอร์เซ็นต์ของความยาวคอร์ดในที่นี้คือ 0.02C

หลักที่ 2 ตัวเลข 4 หมายถึง ค่าแ่งที่ค่าแคมเบอร์มากที่สุดอยู่ที่ 4/10 ของความยาวคอร์ด โดยวัดจากขอบขาหน้าของแผนอากาศ คือ 0.4C

หลักที่ 3 และ 4 หมายถึง ความหนาของแผนอากาศเป็นเปอร์เซ็นต์ของความยาวคอร์ด คือ 0.15C โดยของผิวปีกเครื่องบินในระบบ NACA แบบสี่หลักสามารถหาได้ดังนี้

- 1) กำหนดค่า X ตั้งแต่ 0 ถึงความยาวคอร์ด, c
- 2) หาค่าแ่งเส้นแคมเบอร์ในแนวแกน y จากสมการดังนี้

$$y_c = \frac{m}{p^2} (2px - x^2) \quad ; \text{จาก } x = 0 \text{ ถึง } x = p \quad (3.1)$$



$$y_c = \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2] \quad ; \text{ จาก } x = p \text{ ถึง } x = c \quad (3.2)$$

โดย x คือพิกัดความยาวคอร์คจาก 0 ถึงคอร์ค, c

y คือพิกัดแกนตั้งบนและล่างของเส้นผิวปีกเครื่องบินตามความยาว x

y_c คือพิกัดแกนตั้งของเส้นแคมเบอร์

t คือความหนาสูงสุดเป็นร้อยละของความยาวคอร์ค

m คือค่ามากสุดของแคมเบอร์เป็นสัดส่วนในสิบส่วนของความยาวคอร์ค

p คือตำแหน่งของค่าแคมเบอร์มากที่สุดเป็นสัดส่วนในสิบส่วนของความยาวคอร์ค

y_t คือพิกัดแกนตั้งของความหนาระหว่างเส้นแคมเบอร์กับผิวปีกเครื่องบิน ณ ตำแหน่ง x

3) คำนวณหาค่าตำแหน่งความหนาในพิกัดแนวตั้งจากสมการดังนี้

$$\pm y_t = \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (3.3)$$

4) หาค่าพิกัดผิวปีกเครื่องบินด้านบน (x_u, y_u) และพิกัดผิวปีกเครื่องบินด้านล่าง (x_L, y_L) เป็นพิกัดสุดท้ายจากสมการดังนี้

$$x_u = x - y_t \sin \theta \quad (3.4)$$

$$y_u = y_c + y_t \cos \theta \quad (3.5)$$

$$x_L = x + y_t \sin \theta \quad (3.6)$$

$$y_L = y_c - y_t \cos \theta \quad (3.7)$$

โดย $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dy_c}{dx} \right) \quad (3.8)$

3.3 การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของระบบโครงสร้างปีกเครื่องบิน

การสั่นสะเทือนเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดจากการปฏิสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉื่อยและแรงยืดหยุ่นภายในโครงสร้าง การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งสามารถใช้ได้เฉพาะกับโครงสร้างที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนเท่านั้น แต่โครงสร้างที่ใช้ในงานจริงโดยส่วนมากแล้วจะมีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อนเป็นผลให้ไม่สามารถหาผลเฉลย แม่นตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ได้ อย่างไรก็ตามจากความก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เป็นผลให้สามารถวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างได้อย่างแม่นยำด้วยการวิเคราะห์โดยการประมาณด้วยวิธีการระเบียบวิธีเชิงตัวเลข วิธีการที่นิยมใช้อย่างกว้างขวางก็คือ ระเบียบวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ (finite element method)

3.3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ จะเกิดประโยชน์สูงสุดเมื่อนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีโดเมน (หรือรูปทรงของโครงสร้าง) สลับซับซ้อน หลักการเบื้องต้นคือการประมาณโดเมนนั้นด้วยโดเมนย่อยที่มีรูปทรงอย่างง่ายขนาดเล็กจำนวนมาก ซึ่งเรียกว่า อีเลเมนต์ ผลเฉลยโดยประมาณสำหรับโดเมนย่อยนั้นแสดงในรูปของฟังก์ชันอย่างง่ายเช่นฟังก์ชันพหุนาม เมื่อทำการพิจารณาผลกระทบของอีเลเมนต์เหล่านั้นในภาพรวมต่อพลวัตของโครงสร้าง ทำให้ได้ผลเฉลยเชิงอนุพันธ์โดยประมาณจากการแก้ระบบสมการพีชคณิต

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ในที่นี้ คือ การวิเคราะห์ด้วยวิธีการกระจัด (displacement – based approach) โดยยึดตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton's laws of motion) ซึ่งเมื่อประยุกต์ใช้กับระบบโครงสร้างที่ถูกแบ่งออกเป็นอีเลเมนต์ย่อยๆ สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการของลาگرانจ์ดังนี้ [16]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i \quad (3.9)$$

เมื่อ q_i คือการกระจัดเสมือนของโครงสร้าง

T คือ พลังงานจลน์รวมของโครงสร้าง

U คือ พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของโครงสร้าง

f_i คือ แรงภายนอกที่กระทำสอดคล้องกับการกระจัด q_i

อีเลเมนต์ใดๆจะมีองค์ประกอบพื้นฐานคือ รูปทรงของอีเลเมนต์ จุดต่อ (node) และขอบเขตของอีเลเมนต์ การคำนวณทางไฟไนต์อีเลเมนต์เป็นการทำนายค่าการกระจัดที่จุดต่อของอีเลเมนต์เหล่านั้น เมื่อประยุกต์ใช้การอินเตอร์โพลชันด้วยฟังก์ชันพหุนาม ค่าการกระจัดที่จุด P ใดๆ ภายในอีเลเมนต์ ($\mathbf{r}_i(P)$) มีความสัมพันธ์กับการกระจัดที่จุดต่อ $\mathbf{r}_{e,i}$ ดังนี้

$$\mathbf{r}_i(P) = \mathbf{N}\mathbf{r}_{e,i} \quad (3.10)$$

พลังงานจลน์คือ

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_{e,i}^T \left(\rho \iiint_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \dot{\mathbf{r}}_{e,i} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_{e,i}^T \mathbf{m}_i^0 \dot{\mathbf{r}}_{e,i} \quad (3.11)$$

พลังงานศักย์ยืดหยุ่นคำนวณจาก

$$U_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{e,i}^T \left(\iiint_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{r}_{e,i} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{e,i}^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{r}_{e,i} \quad (3.12)$$

เมื่อ $\mathbf{D}$ คือเมตริกซ์อีลาสติซิตีใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น $\boldsymbol{\sigma}$ และความเครียด $\boldsymbol{\epsilon}$ ที่จุดใดๆ

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$$
(3.13)

$$\boldsymbol{\epsilon}(P) = \mathbf{B}\mathbf{r}_{e,i}$$
(3.14)

การกระทำที่จุดต่อของอีเลเมนต์สามารถเขียนอยู่ในรูปของการกระทำทั้งหมดของโครงสร้างโดยใช้เมตริกซ์แปลงดังนี้

$$\mathbf{r}_{e,i} = \mathbf{T}_i \mathbf{r}$$
(3.15)

ดังนั้น ค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์อีลหุ่่นสามารถเขียนได้เป็น

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \left(\sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{m}_i \right) \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}$$
(3.16)

และ

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \left(\sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{k}_i \right) \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r}$$
(3.17)

ตามลำดับ เมื่อ

- $\mathbf{m}_i$ คือเมตริกซ์มวล (mass matrix) ของอีเลเมนต์ที่ i
 - $\mathbf{k}_i$ คือเมตริกซ์ความแข็ง (stiffness matrix) ของอีเลเมนต์ที่ i
 - $\mathbf{M}$ คือเมตริกซ์มวลของโครงสร้าง
 - $\mathbf{K}$ คือเมตริกซ์ความแข็งของโครงสร้าง
 - เมื่อรวมงานเนื่องจากแรงภายนอก $\mathbf{r}^T \mathbf{f}$ และแทนค่าในสมการลากรางจ์ จะได้ระบบสมการ
- $$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}$$
(3.18)

สมการ (3.18) คือสมการพลวัตหรือสมการการสั่นสะเทือนของระบบโครงสร้างโดยวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างในรูปแบบต่างๆ ดังนี้

3.3.2 การวิเคราะห์โครงสร้าง

3.3.2.1 การวิเคราะห์เชิงสถิต

การวิเคราะห์ทางกลศาสตร์ของโครงสร้างที่การกระทำและพลังงานต่างๆ ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นการวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างกรณีที่ไม่มีการเคลื่อนที่หรือไม่พิจารณาเมตริกซ์มวลในสมการ (3.18) จะได้

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}$$
(3.19)

ในปัญหาการวิเคราะห์เชิงสถิตเวกเตอร์การกระทำและแรงภายนอกจะมีขนาดเท่ากับระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ของโครงสร้าง โดยทั่วไปมักจะรู้ค่าขอบเขตหรือรู้ค่าการกระทำบางจุดต่อ $\mathbf{r}_b$ ซึ่ง ณ ที่จุดต่อเหล่านี้จะไม่รู้ค่าแรงกระทำ ค่าแรงที่เป็นตัวแปรเหล่านี้คือแรงปฏิกิริยาที่จุดต่อเงื่อนไขขอบเขต $\mathbf{r}_f$ ใน

ขณะเดียวกัน ก็รู้ค่าแรงภายนอกที่จุดต่อส่วนที่เหลือ $\mathbf{f}_b$ และมีการกระจัดที่จุดต่อเหล่านั้นเป็นค่าแปรที่จะต้องหาผลเฉลย $\mathbf{r}_a$ ทำการจัดรูปเมตริกซ์ใน (3.19) ให้สอดคล้องกับเวกเตอร์เหล่านี้ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ทำการแก้สมการจะได้การกระจัดของโครงสร้าง

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1}(\mathbf{f}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{r}_b) \quad (3.21)$$

และแรงปฏิกิริยา

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{K}_{ba}\mathbf{r}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{r}_b \quad (3.22)$$

เมื่อทราบค่าการกระจัดทุกจุดต่อแล้วสามารถคำนวณหาค่าความเครียดและความเค้นที่ทุกจุดของโครงสร้างได้ การวิเคราะห์เชิงสถิตสามารถขยายผลไปยังการทำนายอายุการล้าของชิ้นงาน ซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญประการหนึ่งในการออกแบบได้

3.3.2.2 การวิเคราะห์เชิงพลวัต

การวิเคราะห์เชิงพลวัตหรือการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนคือการแก้ระบบสมการ (3.18) โดยตรง แรงภายนอกในที่นี้หมายถึงแรงพลวัตที่มีการเปลี่ยนขนาดเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ส่วนแรงสถิตจะไม่มีผลต่อการสั่นสะเทือนของระบบ เมื่อมีเงื่อนไขขอบเขตเหมือนกับในกรณีการวิเคราะห์เชิงสถิต สามารถจัดกลุ่มสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ba} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_a \\ \ddot{\mathbf{r}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

สมมติให้เงื่อนไขขอบเขต $\mathbf{r}_b = \mathbf{0}$ จะได้ระบบสมการดังนี้

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{r}_a = \mathbf{f}_a \quad (3.24)$$

และ

$$\mathbf{M}_{ba}\ddot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{r}_a = \mathbf{f}_b \quad (3.25)$$

ในสมการที่ (3.24) สามารถเพิ่มเทอมความหน่วงเข้าไปในระบบ ความหน่วงที่นิยมใช้ในการออกแบบเชิงพลวัตของโครงสร้างในขั้นต้นคือความหน่วงแบบสัดส่วน (Proportional damping) สามารถแสดงได้ดังนี้ [20]

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.26)$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ (3.24) เมื่อพิจารณาผลของความหน่วงในระบบจะได้ว่า

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{r}_a = \mathbf{f}_a \quad (3.27)$$

การวิเคราะห์สมการ (3.27) ทำให้หลายวิธีแต่ในที่นี้จะนำเสนอการวิเคราะห์โดยใช้ปริภูมิสเตต (State space approach) ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ได้ในทุกกรณี โดยแทนค่าตัวแปรสเตต

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \dot{\mathbf{r}}_a \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

เมตริกซ์สเตต

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{aa} & -\mathbf{M}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

และเวกเตอร์แรงภายนอก

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{aa}^{-1}\mathbf{f}_a \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

จะได้สมการสเตตซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{F} \quad (3.31)$$

ถ้าไม่คิดผลเนื่องจากแรงภายนอก $\mathbf{F}$ ในสมการ (3.31) และแทนค่า

$$\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{z}} \exp(\lambda t) \quad (3.32)$$

ในสมการ สามารถแปลงระบบสมการอนุพันธ์ไปเป็นปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue problem)

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\bar{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

เมื่อ λ_i คือค่าเฉพาะของระบบต้นสะเทือน

$\bar{\mathbf{z}}_i$ คือเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะ λ_i

ฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ของโครงสร้างหรืออัตราค่าตอบสนองของโครงสร้างเมื่อมีการกระตุ้น

แบบฮาร์โมนิก จากแรงภายนอกคือ

$$\bar{\mathbf{r}}_a = \mathbf{H}(i\omega)\bar{\mathbf{f}}_a \quad (3.34)$$

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{U}_{upper} \left[\text{diag} \left(\frac{1}{i\omega - \lambda_j} \right) \right] \mathbf{U}_{right}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad (3.35)$$

เมื่อ

$$\mathbf{U} = [\bar{\mathbf{z}}_1, \dots, \bar{\mathbf{z}}_{2N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{upper} \\ \mathbf{U}_{lower} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{upper} \\ \mathbf{U}_{upper} [\text{diag}(\lambda_j)] \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{U}_{left}^{-1} \quad \mathbf{U}_{right}^{-1}]$$

ถ้าค่าการส่งถ่ายแรง (Force transmissibility) คืออัตราค่าการส่งถ่ายแรงฮาร์โมนิกภายนอกไปยังแรงปฏิกิริยาแบบฮาร์โมนิก สามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{\mathbf{f}}_b = \mathbf{T}(i\omega)\bar{\mathbf{f}}_a \quad (3.36)$$

แทนค่าจาก (3.25) และ (3.34) จะได้

$$\mathbf{T}(i\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M}_{ba} + \mathbf{K}_{ba})\mathbf{H} \quad (3.37)$$

ในการออกแบบโครงสร้าง ต้องคำนึงถึงผลกระทบทั้งจากการวิเคราะห์เชิงสถิตและพลวัต ทั้งนี้ก็จะอยู่ในเงื่อนไขที่ว่าโครงสร้างจะต้องปลอดภัยและมีเสถียรภาพเมื่อรับภาระสถิตและพลวัต

3.4 การวิเคราะห์ระบบสมการอากาศพลศาสตร์

เมื่ออากาศไหลผ่านปีกเครื่องบินจะเกิดการไหลแยกและเบี่ยงเบนเป็นสองส่วนตามรูปทรงของปีกเครื่องบิน คือส่วนผิวปีกด้านบนและส่วนผิวปีกด้านล่าง จากการไหลดังกล่าวทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความเร็วของการไหลซึ่งส่งผลต่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความดันที่กระทำต่อพื้นผิวปีก และเกิดแรงยกตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี แรงยกดังกล่าวเกิดได้โดยการไหลของอากาศตามพื้นผิวปีกเครื่องบินด้านบนมีความดันมากกว่าการไหลของอากาศตามพื้นผิวปีกเครื่องบินด้านล่าง ซึ่งเกิดจากอากาศที่ไหลผ่านผิวปีกด้านบนจะต้องไหลเป็นระยะทางที่มากกว่าอากาศที่ไหลผ่านผิวปีกด้านล่างในเวลาเท่ากัน นั่นคือที่ผิวปีกด้านบนอากาศจะมีความเร็วในการไหลมากกว่าอากาศที่ผิวปีกด้านล่าง ทำให้เมื่อปีกเครื่องบินเคลื่อนที่ผ่านอากาศด้วยความเร็วทำให้เกิดระบบแรงอากาศพลศาสตร์กระทำกับปีกเครื่องบิน

3.4.1 สมการพลศาสตร์ของไหลเต็มรูปแบบ

พิจารณาของไหลเป็นอากาศ แรงอากาศพลศาสตร์คือการศึกษาแรงที่กระทำกับโครงสร้างหรือวัตถุอันเนื่องมาจากการไหลของอากาศผ่านโครงสร้างหรือวัตถุนั้น สำหรับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหลเมื่อไหลผ่านวัตถุที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางอากาศพลศาสตร์ สมการจะแสดงในรูปอนุพันธ์ (differential form) ซึ่งจะถูกสร้างขึ้นภายใต้หลักการพื้นฐานของการอนุรักษ์มวลและกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน โดยสมการดังกล่าวเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho dV + \int_{c.s.} \rho(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (3.38)$$

แบบจำลองจะถูกสร้างขึ้นภายใต้หลักการพื้นฐานของการอนุรักษ์มวลโดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) จะได้

$$\int_{c.v.} \nabla \cdot \mathbf{q} dV + \int_{c.s.} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (3.39)$$

ประยุกต์สมการ (3.39) โดยเปลี่ยนการอินทิเกรตพื้นผิวเป็นการอินทิเกรตปริมาตรจะได้

$$\int_{c.v.} (\nabla \cdot \rho \mathbf{q}) dV + \int_{c.v.} \rho (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (3.40)$$

สมการที่ได้จากการเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตปริมาตร จะอยู่ในรูปของสมการดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{q} = 0 \quad (3.41)$$

เรียกสมการ (3.41) ว่าสมการต่อเนื่อง (continuity equation) และสามารถพัฒนาเป็นสมการโมเมนตัมในรูปแบบอนุพันธ์จากหลักการของกฎข้อที่สองของนิวตัน ดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (3.42ก)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (3.42ข)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (3.42ค)$$

และสามารถเขียนให้สั้นได้เป็น

$$\rho \frac{Dq_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.43)$$

สมการ (3.43) คือสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในรูปของฟังก์ชันอนุพันธ์หรือกฎข้อที่สองของนิวตันต่อหน่วยปริมาตร โดยด้านซ้ายของสมการคือผลคูณของมวลต่อปริมาตรกับความเร่ง ส่วนด้านขวาของสมการเป็นผลลัพธ์ของแรงต่อหน่วยปริมาตร

3.4.2 สมการการไหลศักย์ (potential flow equation)

การวิเคราะห์โดยใช้สมการการไหลคือสมการต่อเนื่อง (3.41) นั้น การหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลขค่อนข้างซับซ้อนและต้องใช้เวลาในการคำนวณเป็นเวลานาน ทำให้ไม่คุ้มค่ากับเวลาที่เสียไป จึงใช้วิธีลดรูปสมการต่อเนื่องให้อยู่ในรูปของสมการการไหลศักย์เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์และสะดวกต่อการคำนวณ โดยการกำหนดสภาวะการไหลของอากาศเป็นของไหลที่ไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible flow) การไหลลื่น (inviscid flow) และเป็นการไหลแบบไม่หมุนตัว (irrotational flow) เพื่อให้เป็นสมการการไหลศักย์และง่ายต่อการคำนวณหาผลเฉลย และเหมาะสมกับสภาวะการไหลที่ความเร็วต่ำ

ค่าศักย์ความเร็ว (velocity potential, $\phi(x, y, z, t)$) เป็นฟังก์ชันพิกัดตำแหน่งเทียบกับเวลา โดยความสัมพันธ์ของค่าความเร็วและศักย์ความเร็วของอนุภาคของของไหลแต่ละตำแหน่งเป็นการไหลในระบบ 3 มิติที่ไม่สามารถอัดตัวได้, ไม่มีความหนืด และเป็นการไหลแบบไม่หมุนตัว โดยรูปแบบองค์ประกอบย่อยของความเร็วในแกนพิกัด x, y, z เป็น u, v, w ดังนี้

$$q = \nabla\phi = \left(u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (3.44)$$

จากเงื่อนไขการไหลแบบไม่หมุนตัวซึ่งเป็นการไหลที่ไม่มีเงื่อนไขคือค่าเวอร์ทิซิตี้ (vorticity, ζ) มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\zeta = \nabla \times q = 0 \quad (3.45ก)$$

หรือ

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.45ข)$$

จากเงื่อนไขสำหรับการไหลอัดตัวไม่ได้จะได้อสมการต่อเนื่องลครูปดังนี้

$$\nabla \cdot q = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.46)$$

แทนค่า u, v, w จากสมการ (3.44) ลงในสมการ (3.46) จะได้สมการอนุพันธ์ของศักย์ความเร็วดังนี้

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.47)$$

เรียกสมการ (3.47) ว่าสมการการไหลศักย์หรือสมการลาปลาซ (Laplace's equation) โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ของปัญหาการไหลศักย์คือความเร็วในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัสโครงสร้างวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\nabla \phi \cdot n = 0 \quad (3.48)$$

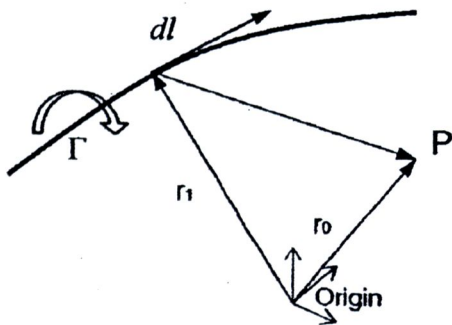
ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบแรงอากาศพลศาสตร์จะใช้สมการการไหลที่ได้ในสมการ (3.47) ภายใต้สภาวะเงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (3.48) จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์ระบบแรงอากาศพลศาสตร์ต่อไป

3.5 การวิเคราะห์ระบบแรงอากาศพลศาสตร์

การไหลของอากาศตามผิวโค้งของปีกก่อให้เกิดแรงยกตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี ซึ่งมีการแจกแจงความดันและความเร็วของอากาศที่ตำแหน่งต่างๆบนพื้นผิวปีกจะเกิดการเปลี่ยนแปลงด้วย ซึ่งเป็นไปตามรูปทรงของภาคตัดปีก ในการพิจารณาจะใช้พื้นผิวแรงยกแทนรูปร่างปีกจริง ซึ่งลักษณะการไหลของอากาศที่ออกจากพื้นผิวแรงยกหรือเวค (wake) จะก่อตัวเป็นเวอร์ทิกซ์ ดังนั้นวิธีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลขทางอากาศพลศาสตร์ที่ความเร็วต่ำคือวิธีเวอร์ทิกซ์ริงอีเลเมนต์ (vortex ring element method) ร่วมกับกฎไบออต-สวาต (Biot-Savart) รายละเอียดมีดังนี้

3.5.1 กฎของไบออต-ซาวาท (Biot-Savart law)

ปัญหาการไหลที่มีการหาความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P ที่มีการกระจายของกระแสการไหลวนของอากาศซึ่งจะถูกขบรวมให้อยู่ในรูปของเส้นเวอร์เทกซ์ (Γ) ดังภาพที่ 13

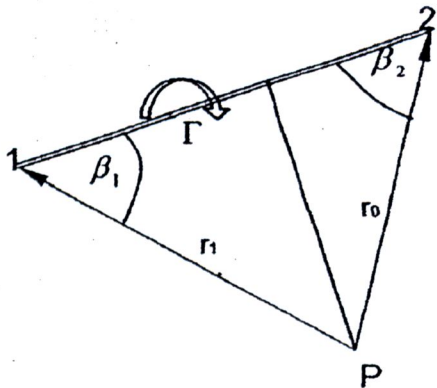


ภาพที่ 13 เวอร์เท็กซ์แบบเส้นและการแสดงทิศทางด้วยกฎมือขวา

ดังนั้นความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P ของเส้นเวอร์เทกซ์ในช่วง dl สามารถหาได้ดังนี้

$$q = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{dl \times (r_0 - r_1)}{|r_0 - r_1|^3} \tag{3.49}$$

โดยปกติเวอร์เทกซ์จะเป็นเส้นโค้ง แต่ในการคำนวณจริงแล้วมักจะแทนเวอร์เทกซ์เส้นโค้งด้วยการเชื่อมกันของเวอร์เทกซ์เส้นตรงสั้นๆหลายๆเส้น ดังภาพที่ 14



ภาพที่ 14 ความเร็วเหนี่ยวนำจากเวอร์เทกซ์เส้นตรงจากจุด 1 ไป 2

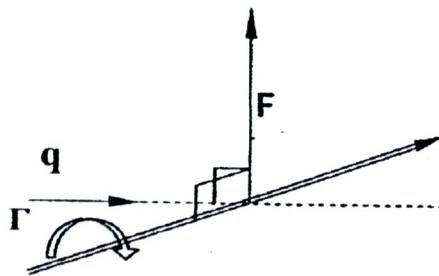
ดังนั้นค่าความเร็วเหนี่ยวนำที่จุด P ของเวอร์เทกซ์เส้นตรงจากจุด P1 ไปยังจุด P2 แสดงในสมการที่ (3.50)

$$q = \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \hat{u} \tag{3.50}$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{r_0}, & \cos \beta_1 &= \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1}{r_0 r_1}, \\ \cos \beta_2 &= \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2}{r_0 r_2}, & \hat{\mu} &= \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \end{aligned} \quad (3.50\text{ก})$$

โดยปกติการคำนวณทางอากาศพลศาสตร์ด้วยวิธีเวอร์เทกซ์จะได้ค่าความแข็งแรงของเวอร์เทกซ์ (vortex strength) ซึ่งอาจแสดงในรูปของเวกเตอร์เป็น Γ การคำนวณหาแรงกระทำอันเนื่องมาจากอากาศไหลผ่านเวอร์เทกซ์ Γ ด้วยความเร็ว $\mathbf{q}$ หาได้จากทฤษฎีของ Kutta-Joukowski ดังสมการที่ (3.51) และแสดงในภาพที่ 15

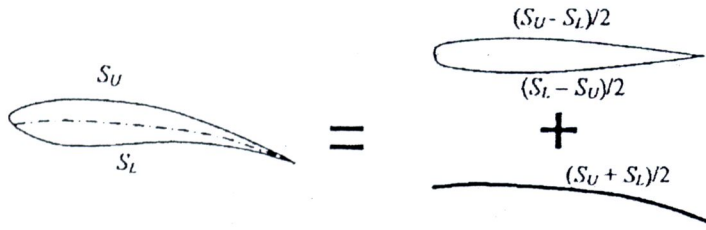


ภาพที่ 15 ทฤษฎีของ Kutta-Joukowski

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{q} \times \Gamma \quad (3.51)$$

3.5.2 การวิเคราะห์ปีกแผ่นบางโดยใช้วิธีพื้นผิวแรงยก

การวิเคราะห์อากาศพลศาสตร์ด้วยอีเลเมนต์พานจะเหมาะกับปีกเครื่องบินที่มีแผนอากาศขนาดบาง การไหลของอากาศผ่านปีกเครื่องบินที่มีแผนอากาศบางจะพิจารณาแยกได้เป็นสองส่วนคือ ส่วนของแผนอากาศที่มีหน้าตัดสมมาตรแสดงความหนาของหน้าตัดตามแนวคอร์ด และส่วนของแผนอากาศแบบแผ่นที่มีรูปทรงเป็นเส้นโค้งตามแนวกึ่งกลางของหน้าตัดของปีกจริงซึ่งเรียกว่าเส้นแคมเบอร์ (camber line) เมื่อแผนอากาศมีขนาดบางแรงกระทำที่ปีกแผนอากาศสมมาตรจะมีเฉพาะแรงต้านซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้นการวิเคราะห์แรงอากาศพลศาสตร์ของปีกแผนอากาศจึงสามารถวิเคราะห์ได้จากปีกที่มีรูปทรงเป็นเส้นแคมเบอร์ ซึ่งเทคนิคดังกล่าวจะเป็นผลให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาอากาศพลศาสตร์ได้ง่ายกว่าการวิเคราะห์จากปีกจริง ปีกเป็นเส้นแคมเบอร์นี้จะถูกเรียกว่า พื้นผิวแรงยก (lifting surface) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 16



ภาพที่ 16 แสดงปีกเครื่องบินที่มีแผนอากาศขนาดบางแยกพิจารณาเป็นสองส่วนคือ ส่วนของแผนอากาศที่มีหน้าตัดสมมาตร และพื้นผิวแรงยก

3.5.3 การหาผลเฉลยพื้นผิวแรงยกไม่คงตัวโดยใช้โอเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ริง

3.5.3.1 จินส่วนเวอร์เท็กซ์เส้นตรงที่มีค่าความเข้มเวอร์เท็กซ์คงที่ (constant-strength vortex line segment)

การจำลองปีกเครื่องบินเป็นพื้นผิวแรงยกการหากระอากาศพลศาสตร์ที่กระทำกับปีกเครื่องบินจะพิจารณาแบ่งพื้นผิวแรงยกออกเป็นพานเกล็กๆ ขนาดเท่าๆ กัน และวางโอเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ริงลงบนพานเกล็ก โดยที่โอเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ริงจะประกอบขึ้นจากจินส่วนเวอร์เท็กซ์ริงเส้นตรงที่มีค่าความเข้มของเวอร์เท็กซ์คงที่จำนวนสี่ชิ้น เพื่อใช้อเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ริงในการหาผลเฉลยของปีกเครื่องบินในสามมิติจะต้องหาผลเฉลยในสามมิติของปัญหาดังกล่าวจะทำได้โดยการใช้จินส่วนของเส้นเวอร์เท็กซ์ความเข้มคงที่ ซึ่งสามารถใช้ในการจำลองปีกเครื่องบินหรือเวกความเร็วเหนือยานโดยจินส่วนเวอร์เท็กซ์ของเซอร์คูเรชัน Γ ดังในสมการ (3.52) ดังนี้

$$\Delta q = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3} \quad (3.52)$$

ถ้าจินส่วนเวอร์เท็กซ์จากจุดที่หนึ่งถึงจุดที่สองจะแสดงดังในภาพที่ 8 ดังนั้นความเร็วเหนือยานที่จุด P จะสามารถหาได้จากสมการที่ (3.53)

$$q_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|^2} r_0 \cdot \left(\frac{r_1}{r_1} - \frac{r_2}{r_2} \right) \quad (3.53)$$

สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขในระบบแกนคาร์ทีเซียน เมื่อทราบตำแหน่ง (x, y, z) ของจุด 1 และ 2 และ P สามารถคำนวณความเร็วที่จุด P ได้ดังนี้

(1) คำนวณ $r_1 \times r_2$:

$$(r_1 \times r_2)_x = (y_p - y_1)(z_p - z_2) - (z_p - z_1)(y_p - y_2)$$

$$(r_1 \times r_2)_y = -(x_p - x_1)(z_p - z_2) - (z_p - z_1)(x_p - x_2)$$

$$(r_1 \times r_2)_z = (x_p - x_1)(y_p - y_2) - (y_p - y_1)(x_p - x_2)$$

ดังนั้นค่าสมบูร์นของผลคูณเวกเตอร์ดังกล่าวจะเป็นดังนี้

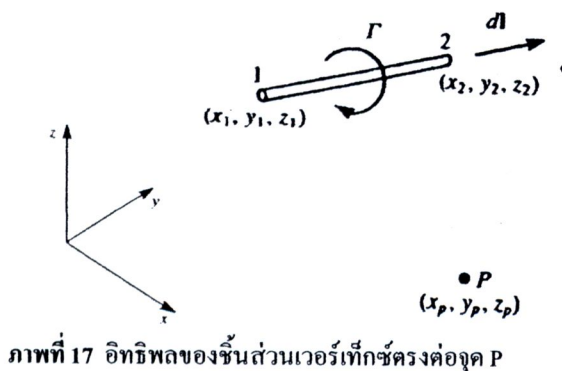
$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z^2$$

(2) คำนวณระยะทาง r_1, r_2 :

$$r_1 = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_p - x_2)^2 + (y_p - y_2)^2 + (z_p - z_2)^2}$$

(3) ตรวจสอบเงื่อนไข singular ถ้าผลเฉลยเวอร์เท็กซ์เป็น singular จุด P จะอยู่บนเวอร์เท็กซ์ ดังนั้นจะต้องมีการปรับปรุงเป็นพิเศษ ในส่วนของชิ้นส่วนเวอร์เท็กซ์ ซึ่งในเชิงตัวเลขจะสมมติให้มีค่ารัศมีน้อยๆ เป็น ε นั่นก็คือถ้า r_1 หรือ r_2 หรือ $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 < \varepsilon$ เมื่อ ε คือขนาดของแกนเวอร์เท็กซ์ (vortex core) ดังนั้น ($u = v = w = 0$)



(4) การคูณกันของเวกเตอร์แบบสเกลาร์

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)(x_p - x_1) + (y_2 - y_1)(y_p - y_1) + (z_2 - z_1)(z_p - z_1)$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2 = (x_2 - x_1)(x_p - x_2) + (y_2 - y_1)(y_p - y_2) + (z_2 - z_1)(z_p - z_2)$$

(5) องค์ประกอบของความเร็วลัพธ์ก็คือ

$$u = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x$$

$$v = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y$$

$$w = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z$$

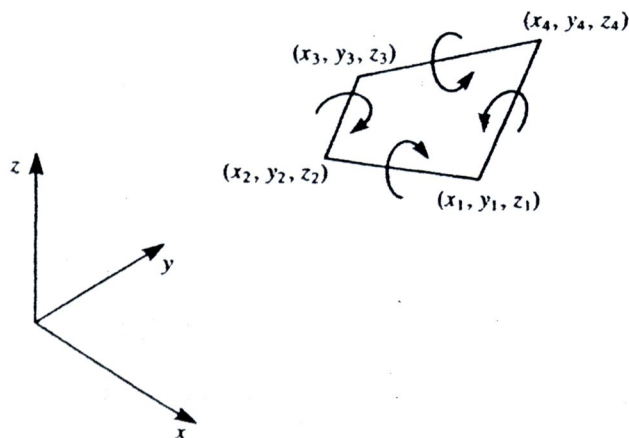
เมื่อ
$$K = \frac{\Gamma}{4\pi|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2} \right)$$

จากขั้นตอนที่กล่าวมาสามารถนำไปสร้างสมการย่อย VORTXL ในการคำนวณหาความเร็วเหนี่ยวนำ (u, v, w) ที่จุด $P(x, y, z)$ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของความเข้มของเส้นเวอร์เท็กซ์และตำแหน่งพิกัดฉาก สามารถแสดงได้ดังนี้

$$(u, v, w) = VORTXL(x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \Gamma) \quad (3.54)$$

3.5.3.2 เวอร์เทกซ์ริง (Vortex Ring)

จากที่เราได้ทำการสร้างโปรแกรมย่อย VORTXL ก่อนหน้านี้ ดังนั้นเราสามารถสร้างอีเลเมนต์เวอร์เทกซ์ริงได้อย่างหลากหลาย กรณีพิจารณาเป็นอีเลเมนต์เวอร์เทกซ์ริงดังแสดงในภาพที่ 18



ภาพที่ 18 อิทธิพลของอีเลเมนต์เวอร์เทกซ์ริง

สามารถคำนวณหาความเร็วเหนี่ยวนำได้โดยการเรียกโปรแกรมย่อย VORTXL ที่สร้าง การคำนวณความเร็วดังกล่าวจะให้ผลเทียบเท่ากับ doublet ที่มีค่าความเข้มคงที่

เพื่อหาความเร็วเหนี่ยวนำโดยชิ้นส่วนสี่ส่วนที่ประกอบขึ้นเป็นเวอร์เทกซ์ริงรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีเซอร์คูเรชันเป็น Γ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$(u_1, v_1, w_1) = VORTXL(x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \Gamma)$$

$$(u_2, v_2, w_2) = VORTXL(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \Gamma)$$

$$(u_3, v_3, w_3) = VORTXL(x, y, z, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4, \Gamma)$$

$$(u_4, v_4, w_4) = VORTXL(x, y, z, x_4, y_4, z_4, x_1, y_1, z_1, \Gamma)$$

และความเร็วเหนี่ยวนำที่ P คือ

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) + (u_4, v_4, w_4)$$

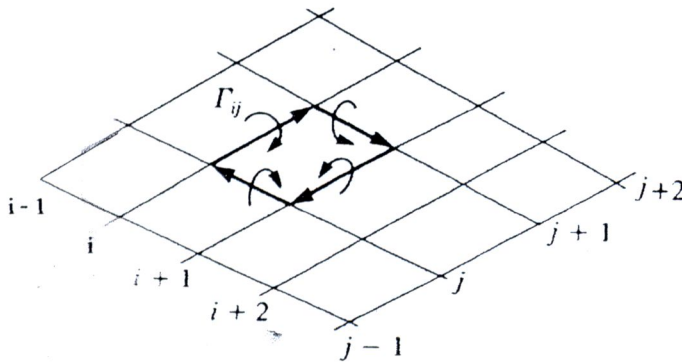
ซึ่งสามารถเขียนเป็นโปรแกรมย่อยได้ดังนี้



$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = VORING \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ \Gamma \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

โดยส่วนใหญ่เวอร์เท็กซ์จริงจะวางอยู่บนตาราง i, j ดังแสดงในภาพที่ 19 ในสถานะดังกล่าวนี้อินพุตของโปรแกรมย่อยสามารถเขียนในรูปสั้นๆ โดยการจำแนกแต่ละพานดด้วยมุมจุดอันดับ i และ j th

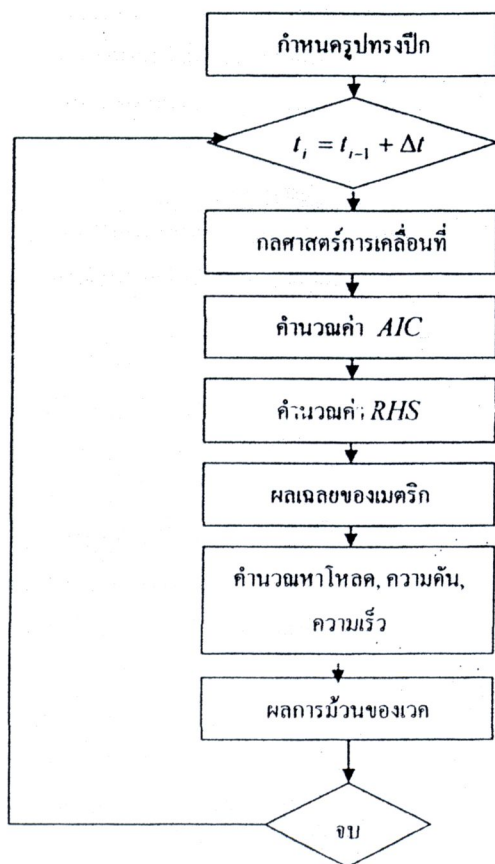
$$(u, v, w) = VORING(x, y, z, i, j, \Gamma_{ij}) \quad (3.56)$$



ภาพที่ 19 วิธีการคำนวณอิทธิพลของเวอร์เท็กซ์จริงโดยการรวมอิทธิพลของชั้นส่วนเวอร์เท็กซ์เส้นตรง

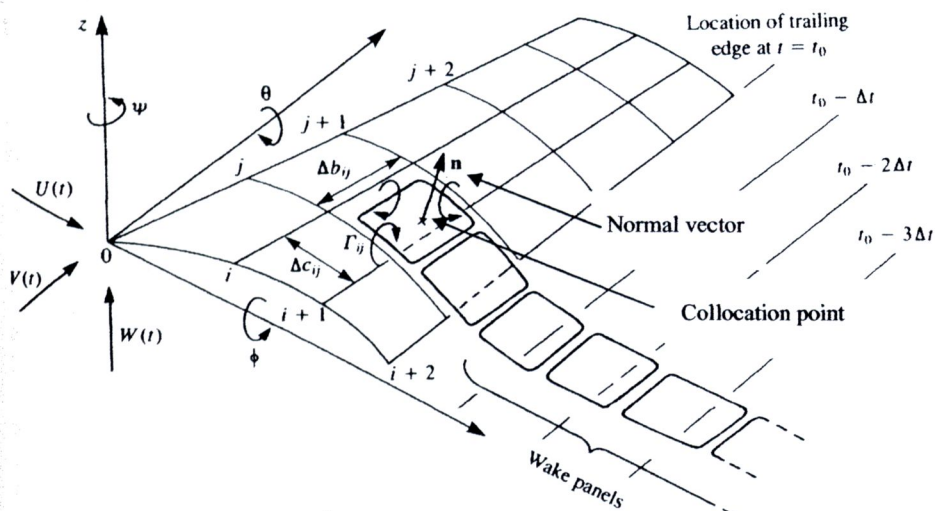
3.5.3.3 กระบวนการหาผลเฉลยพื้นผิวแรงยกไม่คงตัวโดยใช้โอเลเมนต์เวอร์เท็กซ์จริง

การหาผลเฉลยพื้นผิวแรงยก 3 มิติไม่คงตัวโดยใช้โอเลเมนต์เวอร์เท็กซ์จริงของปัญหาการไหลศักย์ โดยมีเงื่อนไขความเร็วตั้งฉากกับผิวสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์ การหาผลเฉลยพื้นผิวแรงยกไม่คงตัวจะมีพื้นฐานอยู่บนเทคนิค time-stepping loop โดยมีกระบวนการดังแสดงในภาพที่ 20

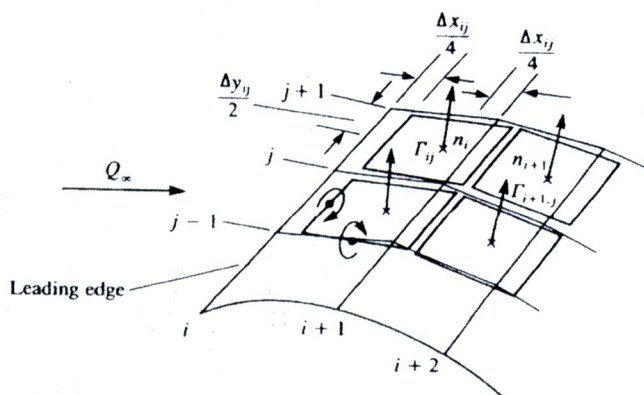


ภาพที่ 20 แสดงผังการทำงานของ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของอากาศพลศาสตร์แบบไม่คงที่

จากแผนภาพการทำงานของ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของอากาศพลศาสตร์แบบไม่คงที่โดยใช้เทคนิครอบช่วงเวลา (time stepping loop) คือการแบ่งเวลาออกเป็นช่วงๆ ในการคำนวณ ในแต่ละช่วงเวลาจะทำการจัดวางอีเลเมนต์โดยขอบหน้าของอีเลเมนต์เวอร์เทกซ์ซึ่งอยู่ที่ 1/4 ของพาดานพื้นผิวแรงยกในทิศทางคอร์ค และจุดคอดโลเคชันซึ่งเป็นตำแหน่งของเวกเตอร์ปกติจะอยู่ที่กึ่งกลางอีเลเมนต์เวอร์เทกซ์ซึ่ง และทิศทางของ Γ จะเป็นไปตามกฎมือขวา ดังแสดงในภาพที่ 21 และ 22



ภาพที่ 21 สัญลักษณ์ของพื้นผิวแรงยกแผ่นบางที่มีการเคลื่อนที่ไม่คงตัวบนเส้นทางการบินไปทางซ้ายมือ

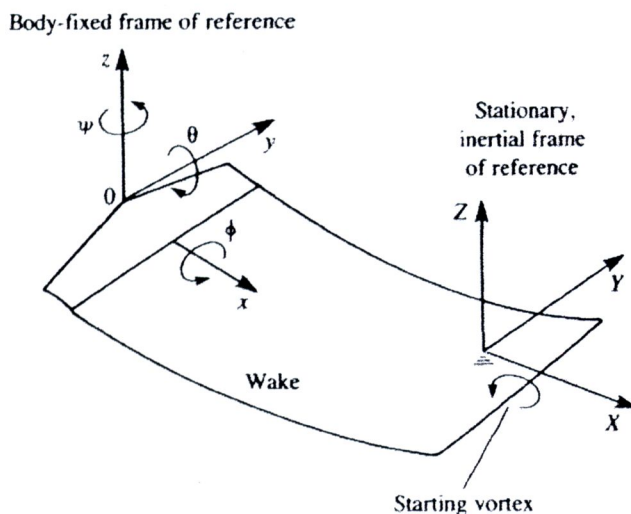


ภาพที่ 22 แสดงสัญลักษณ์ของอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์

จากนั้นทำการคำนวณหาค่ากลศาสตร์การเคลื่อนที่โดยการหาการเปลี่ยนแปลงความเร็วและการหมุนตัวของปีกเครื่องบิน จากสมการหลักดังนี้

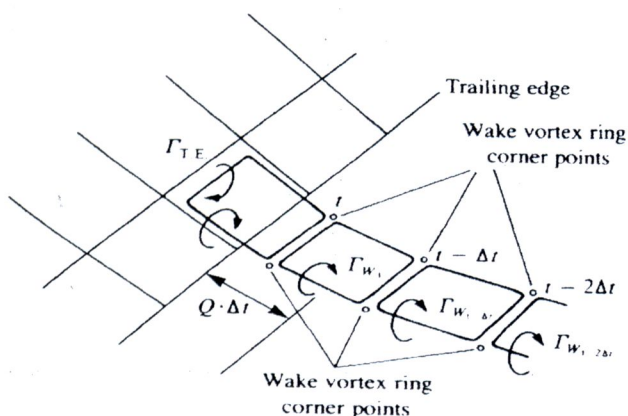
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(X_0, Y_0, Z_0, \phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

โดย (X_0, Y_0, Z_0) เป็นพิกัดอ้างอิงเริ่มต้น (ϕ, θ, ψ) เป็นพิกัดการหมุนของแต่ละแกน (x, y, z) ตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 23 โดยเมื่อทราบค่าการหมุนและการเปลี่ยนแปลงความเร็ว ก็จะทราบกลศาสตร์การเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบินในแต่ละช่วงเวลา



ภาพที่ 23 แกนเฉื่อยและแกนวัตถุที่ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

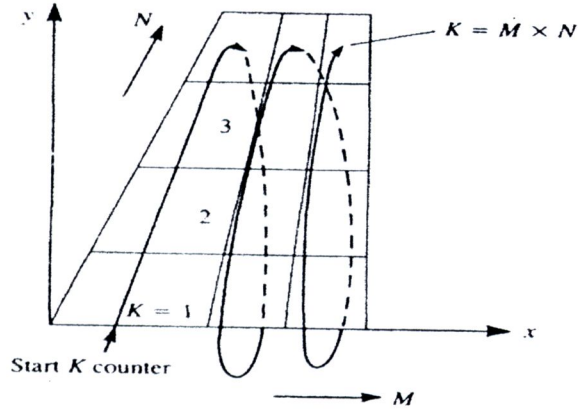
เมื่อทราบลักษณะการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบินแล้วจะทำการจัดรูปสมการหลักให้เข้ากับแต่ละอีเลเมนต์ และทำการสร้างเวกเตอร์เท็กซ์ (wake vortex) อีเลเมนต์ที่เกิดจากความเร็วเหนี่ยวนำจากการไหลผ่านปีกเครื่องบินของอากาศ โดยลักษณะการเรียงตัวของอีเลเมนต์จะเป็นดังภาพที่ 24



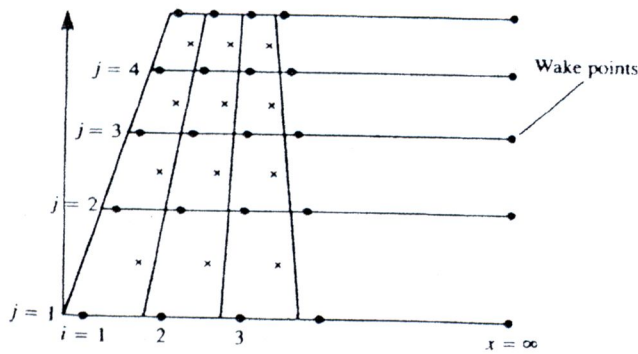
ภาพที่ 24 สัญลักษณ์สำหรับอธิบายกระบวนการปลดปล่อยเวก

จากนั้นทำการคำนวณหาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์อิทธิพลของอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics Influence Coefficients Matrix, [AIC]) โดยกำหนดเงื่อนไขให้ความเร็วการไหลคงที่ทุกพื้นที่เป็นศูนย์ในแต่ละช่วงเวลา

พิจารณา โดยความเร็วตั้งฉากแต่ละจุดจะประกอบด้วยความเร็วเหนี่ยวนำของตัวเอง, ความเร็วกลศาสตร์ของการเคลื่อนที่ และความเร็วเหนี่ยวนำของเวก ในส่วนนี้จะทำการสร้างจุดคอลโลเคชันโดยกำหนดจุดให้เรียงกันดังภาพที่ 25 และ 26 เพื่อทำการหาความเร็วเหนี่ยวนำจากกฎไบออต-สวาทของแต่ละพานอลและนำไปหาค่าสัมประสิทธิ์อิทธิพล ซึ่งจะได้ดังสมการที่ (3.58)



ภาพที่ 25 ลำดับการสแกนอีเลเมนต์พานอล



ภาพที่ 26 การจัดวางตำแหน่งบนปีก จุดมุมของเวกพานอล (dots) และจุดคอลโลเคชัน (x)

$$[AIC] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{โดย } m = M \times N \quad (3.58)$$

เมื่อได้เมตริกซ์ $[AIC]$ แล้วทำการหาค่าเวกเตอร์ขวามือ (Right-Hand Side Vector, $\{RHS\}$) โดยกำหนดให้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวมีความเร็วตั้งฉากเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้ค่าเวกเตอร์ขวามืออยู่ในรูปของความเร็ว

จากการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบิน $([U(t), V(t), W(t)]_k)$ และความเร็วจากการเหนี่ยวนำของเวก $((u_w, v_w, w_w)_k)$ ดังสมการที่ (3.59)

$$RHS_K = -[U(t) + u_w, V(t) + v_w, W(t) + w_w]_k \cdot \vec{n}_k \quad (3.59)$$

เมื่อได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์อิทธิพลอากาศพลศาสตร์และเวกเตอร์ขวามือแล้วสามารถหาค่าความแข็งแรงของเวอร์เท็กซ์ (Γ) ได้จากสมการ (3.60) ดังนี้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ a_{13} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ RHS_m \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

ต่อจากนั้นจะทำการคำนวณหาความดันและแรงของแต่ละพานελได้จากสมการ (3.61) และ (3.62) ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \Delta p_{ij} = & \rho \left\{ [U(t) + u_w, V(t) + v_w, W(t) + w_w]_{ij} \cdot \vec{\tau}_i \frac{\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}}{\Delta c_{ij}} \right. \\ & \left. + [U(t) + u_w, V(t) + v_w, W(t) + w_w] \cdot \vec{\tau}_j \frac{\Gamma_{ij} - \Gamma_{i,j-1}}{\Delta b_{ij}} + \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\Delta F = -(\Delta p \Delta s)_{ij} n_{ij} \quad (3.62)$$

สุดท้ายจะทำการคำนวณการหมุนของเวกเวอร์เท็กซ์ โดยความเร็วเหนี่ยวนำแต่ละเวกเวอร์เท็กซ์จะเป็นผลรวมของอิทธิพลบนปีกและเวก ดังสมการที่ (3.63)

$$\begin{aligned} (u, v, w)_l = & \sum_{k=1}^m VORING(x_l, y_l, z_l, i, j, \Gamma_k) \\ & + \sum_{k=1}^{N_w} VORING(x_l, y_l, z_l, i_w, j_w, \Gamma_{wk}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.6 การวิเคราะห์แอโรเอลลาสติก

การสร้างแบบจำลองแอโรเอลลาสติกของโครงสร้างปีกเครื่องบินในการวิจัยนี้จะอาศัยพื้นฐานจากงานวิจัย [19], [22], [23], [24] และ [25] ร่วมกับเทคนิคการลดลำดับชั้นแบบจำลองโดยใช้วิธีการฐานนิยม (modal analysis) [26]

3.6.1 แบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบิน (structural model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงการสั่นสะเทือนของโครงสร้างปีกเครื่องบินจะหาได้จากการวิเคราะห์ระบบซึ่งประกอบไปด้วยพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ยืดหยุ่น และแรงภายนอก และใช้วิธีไฟไนต์อีเลเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง ดังได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 3.2 ดังนั้นแบบจำลองการสั่นสะเทือนของโครงสร้างสามารถแสดงได้ดังนี้

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = F_e \quad (3.64)$$

โดย M คือ เมตริกซ์มวล

C คือ เมตริกซ์ความหน่วง

K คือ สติฟเนสเมตริกซ์

r คือ เวกเตอร์การกระจัด

F_e คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอก

จากระบบของโครงสร้างปีกเครื่องบินที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนประกอบที่ซับซ้อน ดังนั้นการวิเคราะห์แบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบินด้วยวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์จะประกอบไปด้วยเมตริกซ์มวล เมตริกซ์ความหน่วง และเมตริกซ์สติฟเนสที่มีขนาดใหญ่ ทำให้มีจำนวนลำดับชั้นองศาอิสระสูงมาก เพราะฉะนั้นในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของระบบตามสมการที่ (3.64) โดยตรงจำเป็นต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก เพื่อลดเวลาในการคำนวณให้น้อยลง จึงจำเป็นต้องใช้วิธีฐานนิยมในการลดอันดับความอิสระของแบบจำลองการสั่นสะเทือนของโครงสร้างลง เพื่อประหยัดเวลาในการคำนวณ โดยพิจารณาสมการที่ (3.64) เป็นปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระที่ไม่มีเวกเตอร์ของแรงภายนอกมากระทำกับระบบ สามารถวิเคราะห์โดยใช้วิธีการปริภูมิสเปคตรัมที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.2 ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาค่าเฉพาะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$(A - \lambda_i I)\bar{z}_i = 0 \quad (3.65)$$

เมื่อ λ_i คือค่าเฉพาะของระบบสั่นสะเทือน

$\bar{z}_i$ คือเวกเตอร์ค่าเฉพาะที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะ λ_i

เพื่อลดอันดับความอิสระของแบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบินโดยใช้เมตริกซ์ฐานนิยม เมตริกซ์ฐานนิยมคือเมตริกซ์ที่มีแต่ละหลักเป็นเวกเตอร์ค่าเฉพาะ โดยหลักแรกจะแทนเวกเตอร์ค่าเฉพาะที่โหมคแรก และหลักต่อมาจะแทนเวกเตอร์ค่าเฉพาะที่โหมคถัดไปตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 27

$$\begin{array}{c}
 \text{mod } e \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \\
 [z_m] = \begin{bmatrix} z_{m11} & z_{m12} & \dots & z_{m1N} \\ z_{m21} & z_{m22} & \dots & z_{m2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{mn1} & z_{mn2} & \dots & z_{mnN} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{DOF 1} \\ \leftarrow \text{DOF 2} \\ \leftarrow \text{DOF } N \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_n \end{array}
 \end{array}$$

ภาพที่ 27 การสร้างเมตริกซ์ฐานนิยม

เมื่อระบบการสั่นสะเทือนของปีกเครื่องบินมีอันดับความอิสระทั้งหมดเป็น N โดยปกติเราจะใช้จำนวนโหมดในการลดอันดับความอิสระของระบบไม่เกิน 10 ก็เพียงพอแล้วที่จะให้ความแม่นยำที่เพียงพอ $n < 10$ โดยที่จำนวนของ $n \ll N$ ดังนั้นสมการการกระจัดในการบอกตำแหน่งคือ

$$r = [z_m]x \quad (3.66)$$

แทนค่าสมการที่ (3.66) ลงในสมการที่ (3.65) และคูณสมการที่ (3.65) ด้วย $[z_m]^T$ เพื่อทำการลดอันดับความอิสระของแบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบินลง จะได้ว่า

$$M_g \ddot{x} + C_g \dot{x} + K_g x = F_g \quad (3.67)$$

โดยที่ค่า

$$M_g = [z_m]^T M [z_m]$$

$$C_g = [z_m]^T C [z_m]$$

$$K_g = [z_m]^T K [z_m]$$

$$F_g = [z_m]^T F_e [z_m]$$

จากสมการที่ (3.67) สามารถที่จะปรับให้อยู่ในรูปแบบสมการต่อเนื่องกับเวลา (continuous time) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_g & C \\ 0 & M_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_g \\ -M_g & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_g \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.68)$$

หรือ

$$A_c \dot{q} + B_c q - F_c = 0 \quad (3.69)$$

โดยกำหนดให้เวกเตอร์คัวแปร $q = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$ แต่รูปแบบลักษณะสมการที่ (3.69) สามารถที่จะเปลี่ยนกลับไปอยู่ใน

รูปแบบสมการ ไม่ต่อเนื่องกับเวลา (discrete-time) ด้วยสมการต่อไปนี้

$$q = \frac{q^{n+1} + q^n}{2}, \dot{q} = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} \quad (3.70)$$

แทนสมการก่อนหน้ากลับในสมการที่ (3.70) จะได้ว่า

$$[DEOM_2] q^{n+1} + [DEOM_1] q^n + F^{n+1/2} = 0 \quad (3.71)$$

เมื่อ

$$[DEOM_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_g & \frac{1}{\Delta t} C_g + \frac{1}{2} K_g \\ -\frac{1}{2} M_g & \frac{1}{\Delta t} M_g \end{bmatrix}$$

$$[DEOM_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t} M_g & -\frac{1}{\Delta t} C_g + \frac{1}{2} K_g \\ -\frac{1}{2} M_g & -\frac{1}{\Delta t} M_g \end{bmatrix}$$

$$F^{n+1/2} = \begin{bmatrix} -F_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

แบบจำลองโครงสร้างไม่ต่อเนื่องกับเวลา (discrete-time structure model) นี้จะถูกนำไปเชื่อมกับแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ไม่ต่อเนื่องกับเวลา เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ทางแอโรอีลาสติคต่อไป

3.6.2 แบบจำลองอากาศพลศาสตร์

การไหลผ่านปีก 3 มิติ จะสมมติให้เป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ ไม่มีความหนืด และไม่มีการหมุน ดังนั้นสนามการไหลไม่คงตัวจะจำลองโดยใช้เทคนิคการไหลศักย์ และคำนวณโดยใช้วิธีอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ซึ่งเราได้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานไว้ในหัวข้อที่ 5.3 แบบจำลองอากาศพลศาสตร์ไม่ต่อเนื่องกับเวลา ซึ่งใช้ร่วมกับวิธีการอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ การดิสกรีทไฟเซชันและการจัดวางอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ซึ่งที่ได้แสดงไว้ในภาพที่ 13 และ 14 นั้น กำหนดให้ M_{ab} คือจำนวนของอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์บนปีกในทิศทางคอร์ด M_{aw} คือจำนวนของอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์บนเวคในทิศทางคอร์ด M_a คือจำนวนอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ทั้งหมดทั้งที่อยู่บนปีกและบนเวคในทิศทางคอร์ด และ N_a คือจำนวนของอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์ในทิศทางสเปน

ความเร็วเหนือปีกเนื่องจากอีเลเมนต์เวอร์เท็กซ์บนปีกเครื่องบินจะต้องเท่ากับการไหลตก สมการพื้นฐานของแบบจำลองพานลเวอร์เท็กซ์ที่ลำดับเวลา $n+1$ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.72)

$$[AIC]\Gamma^{n+1} = W^{n+1} \quad (3.72)$$

โดยที่ $[AIC]$ คือเมตริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์อิทธิพลของอากาศพลศาสตร์

Γ^{n+1} คือเวกเตอร์ค่าความเข้มเวอร์เท็กซ์ที่ลำดับเวลา $n+1$

W^{n+1} คือเวกเตอร์การไหลตก (downwash) ที่จุดคอลโลเคชัน ที่ลำดับเวลา $n+1$

ต่อจากนั้นเราจะพิจารณาแบบจำลองของเวอร์ติคัลในเวกเมื่อเวอร์ติคัลไม่คงตัวที่เกิดใน เวกความเข้มของมันจะเป็นสัดส่วนเชิงเส้นกับการเปลี่ยนแปลงของเซอร์คูเรชัน เทียบกับเวลารอบปีก ถ้าช่วงเวลาเป็น Δt เท่ากับเวลาที่ เวอร์ติคัล พากจากจุดเวอร์เท็กซ์หนึ่งไปยังจุดถัดไป ($\Delta t = \Delta x / Q$) ดังนั้นค่าความเข้มของจุดเวอร์เท็กซ์แรกในเวลาที่เวลา $n+1$ จะเป็นดังนี้

$$\Gamma_{M_{ab}+1}^{n+1} = -\sum_{j=1}^{N_a} (\Gamma_{M_{ab}+1,j}^{n+1} - \Gamma_{M_{ab}+1,j}^n) \quad (3.73)$$

จากครั้งแรกที่เวอร์ติคัล ได้ถูกสร้างเข้าไปในเวก มันจะถูกพาไปในเวกด้วยความเร็วอิสระของของไหล สำหรับกรณีพิเศษ $\Delta t = \Delta x / Q$ การพานี้จะอธิบายด้วยวิธีเชิงตัวเลข ดังนี้

$$\Gamma_{ij}^{n+1} = \Gamma_{i-1,j}^n, \quad i = M_{ab} + 2, \dots, M_a - 1 \quad (3.74)$$

สุดท้ายเนื่องจากเวกจะยาว ไม่จำกัดแค่แบบจำลองการคำนวณจะพิจารณาให้ เวกมีความยาวจำกัด ดังนั้นจะต้องมีการปรับปรุง อิเลเมนต์เวอร์เท็กซ์อันดับสุดท้าย ในทางกลับกันเวอร์เท็กซ์เริ่มต้นจะต้องหายไป เมื่อมันมาถึงจุดสิ้นสุดของการคำนวณ เวก ที่สร้างให้เกิดการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ต่อเนื่องในการไหลตกที่ปีกเครื่องบิน เพื่อลดความยุ่งยากการเหนี่ยวนำเวอร์ติคัล เมื่อมาถึงจุดสิ้นสุดของเวกมันจะต้องเกิดการหายไปอย่างราบเรียบโดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\Gamma_{M_a,j}^{n+1} = \Gamma_{M_a-1,j}^n + \alpha \Gamma_{M_a,j}^n \quad (3.75)$$

เมื่อ α คือแฟกเตอร์ผ่อนคลาย (relaxation factor) สำหรับปัญหาปีกเครื่องบินเดี่ยว แฟกเตอร์ผ่อนคลายจะเป็นไปตาม Wagner indicial response function ซึ่งปกติจะมีค่าอยู่ระหว่าง $0.95 < \alpha < 1.0$ จากสมการที่ (3.72), สมการอนุพันธ์ของเซอร์คูเรชัน (3.73) และสมการการพาเวก (3.74) และ (3.75) สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$[CDR_2]\Gamma^{n+1} + [CDR_1]\Gamma^n = W^{n+1} \quad (3.76)$$

ส่วนความดันแตกต่างระหว่างผิวด้านบนและด้านล่างของแต่ละพานบนพื้นผิวแรงยกได้มาจากสมการเบอร์นูลลีแบบไม่คงที่ (unsteady Bernoulli's equation) ดังนี้

$$\Delta P^{n+1/2} = \rho \left[U \frac{\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}}{\Delta c_{i,j}} + \frac{d\Gamma_{i,j}}{dt} \right] \quad (3.77)$$

จัดให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องกับเวลาได้ดังนี้

$$\Delta P^{n+1/2} = \rho U \left[\frac{\Gamma_{i,j}^{n+1} + \Gamma_{i,j}^n - \Gamma_{i-1,j}^{n+1} - \Gamma_{i-1,j}^n}{2\Delta c_{i,j}} + \frac{\Gamma_{i,j}^{n+1} - \Gamma_{i,j}^n}{\Delta x} \right] \quad (3.78)$$

จัดรูปสมการที่ (3.78) ใหม่จะได้ว่า

$$\Delta P^{n+1/2} = [C2P_2]\Gamma^{n+1} + [C2P_1]\Gamma^n \quad (3.79)$$

ในการคำนวณหาผลเฉลยของแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ในสมการ (3.76) ต้องใช้เวลานาน ดังนั้นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณและเพื่อประหยัดเวลาจึงต้องทำการลดชั้นลำดับของแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ให้มีขนาดลดลง โดยเราจะทำการลดชั้นลำดับของแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ของเวอร์เท็กซ์ริง โดยสมมติว่าผลเฉลยของเวอร์เท็กซ์ริงเป็นแบบฮาร์โมนิกในรูปความสัมพันธ์ $\Gamma = xe^{i\omega t}$ โดยจากสมการปัญหาค่าเฉพาะ (eigenvalue problem) ของสมการแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ $[CDR_2]\Gamma^{n+1} + [CDR_1]\Gamma^n = W^{n+1}$ จะได้ดังนี้

$$[CDR_2]XZ + [CDR_1]X = 0 \quad (3.80)$$

โดยที่ Z คือเมตริกซ์ค่าเฉพาะแบบทแยงมุม (diagonal matrix) ของสมการปัญหาค่าเฉพาะ และ X คือ เมตริกซ์เวกเตอร์ค่าเฉพาะทางขวา สำหรับปัญหาค่าเฉพาะทางซ้ายสามารถแสดงได้ดังนี้

$$[CDR_2]^T YZ + [CDR_1]^T Y = 0 \quad (3.81)$$

เมื่อ Y คือเวกเตอร์ค่าเฉพาะทางซ้าย ซึ่งมีคุณสมบัติที่สำคัญสามารถแสดงได้ดังนี้

$$Y_n^T [CDR_2]X_n = \mu_n \quad (3.82)$$

$$Y_n^T [CDR_1]X_n = -\sigma_n \quad (3.83)$$

เพื่อทำการลดอันดับความอิสระของแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ลงโดยใช้วิธีการฐานนิยม สร้างเมตริกซ์ฐานนิยม X_n เช่นเดียวกับที่ได้กล่าวไปในการลดอันดับความอิสระของแบบจำลองการสั่นสะเทือนของโครงสร้างเครื่องบิน เมตริกซ์ฐานนิยมคือเมตริกซ์ที่มีแต่ละหลักของเมตริกซ์เป็นเวกเตอร์ค่าเฉพาะที่โหมดต่ำๆ ซึ่งจะใช้จำนวนโหมด n ไม่เกิน 10 โหมด ก็จะทำให้ความแม่นยำที่เพียงพอ ซึ่งสามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Gamma = X_n \bar{c} \quad (3.84)$$

โดยค่า $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในระบบแกนฐานนิยมน แทนสมการที่ (3.84) ลงในสมการ (3.76) จะได้ว่า

$$[CDR_2]X_n c^{n+1} + [CDR_1]X_n c^n = W^{n+1} \quad (3.85)$$

คูณเข้าข้างหน้าสมการ (3.85) ด้วย Y_n^T จะได้ว่า

$$Y_n^T [CDR_2]X_n c^{n+1} + Y_n^T [CDR_1]X_n c^n = Y_n^T W^{n+1} \quad (3.86)$$

จากคุณสมบัติในสมการ (3.82) และ (3.83) แทนกลับในสมการ (3.86) จะได้ว่า

$$\mu_n c^{n+1} - \sigma_n c^n = Y_n^T W^{n+1} \quad (3.87)$$

ระบบสมการ (3.87) เป็นระบบสมการไม่คู่ควมกับเวลาจำนวน $n \times (M_a \times N_a)$ สมการ เมื่อ μ_n เป็น identity matrix และ σ_n เป็นเมตริกซ์ลดรูปขนาด $n \times (M_a \times N_a)$ และ Y_n^T เป็นเมตริกซ์ลดรูปขนาด $n \times (M_a \times N_a)$ แต่ละสมการในสมการ (3.87) สามารถหาผลเฉลยได้โดยตรง สามารถรวมผลเฉลยเข้าด้วยกันโดยใช้สมการที่ (3.84) จากการศึกษาพบว่าแบบจำลองลดอันดับอย่างง่ายจะให้ผลในการจำลองที่ไม่ดีนัก จึงปรับปรุงให้สมการที่ (3.84) ประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนที่กล่าวไว้แล้วในสมการ (3.84) และเทอม static correction สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\Gamma^n = \Gamma_s^n + \bar{\Gamma}^n = \Gamma_s^n + X_n \bar{c}^n \quad (3.88)$$

แทนสมการที่ (3.88) ลงในสมการที่ (3.76) และใช้คุณสมบัติในสมการที่ (3.82) และ (3.83) จะได้ว่า

$$\mu_n \bar{c}^{n+1} - \sigma_n \bar{c}^n = Y_n^T W^{n+1} - Y_n^T ([CDR_2]\Gamma_s^{n+1} + [CDR_1]\Gamma_s^n) \quad (3.89)$$

เมื่อ $\Gamma_s^n = ([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} W^n$

สมการที่ (3.89) จะดีกว่าสมการที่ (3.87) ตรงที่จะใช้จำนวนโหนดที่น้อยกว่าเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ

3.6.3 การเชื่อมต่อระหว่างแรงอากาศพลศาสตร์เข้ากับแบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบิน

เนื่องจากแบบจำลองโครงสร้างปีกเครื่องบินจำลองและแบบจำลองการะอากาศพลศาสตร์จะได้มาจากวิธีการที่ต่างกันดังนั้นการเชื่อมต่อโดยตรงของตำแหน่งของพารามิเตอร์ของอากาศพลศาสตร์และอีเลเมนต์ของโครงสร้างไม่สามารถจะสอดคล้องกันได้จึงจำเป็นต้องอาศัยเทคนิคที่สามารถทำให้ระบบแบบจำลองทั้งสองดังกล่าวเชื่อมต่อกันได้โดยใช้เทคนิค surface spline interpolation โดยให้ r_A เป็นเวกเตอร์ของการกระจัดของจุดเวอร์เท็กซ์คือเป็นตำแหน่งที่สอดคล้องกันกับตำแหน่งทิศทางที่แรงกระทำบนช่องพารามิเตอร์พื้นผิวแรงยก จากหลักการของเทคนิค surface spline interpolation จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการกระจัดของจุดต่ออีเลเมนต์ของโครงสร้างปีกเครื่องบินกับระยะการกระจัดของจุดเวอร์เท็กซ์กระทำดังนี้

$$r_A = [G]r \quad (3.90)$$

โดยที่ $[G]$ คือเมตริกซ์ถ่ายโอน

จากสมการที่ (3.64) เวกเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำกับโครงสร้างเปรียบเสมือนกับงานที่เกิดจากแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างค่า F_e กับ F_A สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F_e = [G]^T F_A \quad (3.91)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างการไหลตกที่จุดคอลโลเคชันและการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบิน [25] จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$W'' = Q_\infty [H]r'' \quad (3.92)$$

โดยที่ $[H]$ คือเมตริกซ์ถ่ายโอนที่ได้มาจากการใช้เทคนิค surface spline interpolation [29] และ Q_∞ คือความเร็วของอากาศอิสระ จากความสัมพันธ์ $r = [\Phi]x$ ดังในสมการที่ (3.66) และค่าระยะการกระจัด

$x = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = T_0 q$ ดังนั้นสมการ (3.92) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$W'' = Q_\infty [H][\Phi]T_0 q'' \quad (3.93)$$

หรือ

$$W'' = [WDR]q'' \quad (3.94)$$

เมื่อ $[WDR]$ คือเมตริกซ์ที่อธิบายความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างการเคลื่อนที่ของปีกและผลการไหลตกที่จุดคอลโลเคชัน

ค่าของความดันแตกต่างระหว่างผิวด้านบนและด้านล่างของแต่ละพารามิเตอร์พื้นผิวแรงยกสามารถเปลี่ยนรูปไปอยู่ในรูปของแรงอากาศพลศาสตร์กระทำที่จุดโหนดของโครงสร้างปีกได้ดังนี้

$$F_A^{n+1/2} = [S]\Delta P^{n+1/2} \quad (3.95)$$

โดยที่ $[S]$ คือพื้นที่ผิวของพาดลทั้งหมดบนโครงสร้างปีก จัดรูปแบบสมการเพื่อหาค่า F_g ในสมการ (3.67) จากการแทนค่าสมการ (3.79), (3.91) และ (3.92) จะได้ว่า

$$F_g = [\Phi]^T [G]^T [S] \Delta P^{n+1/2} \quad (3.96)$$

แทนค่า

$$F_g = [\Phi]^T [G]^T [S] [C2P_2] \Gamma^{n+1} + [\Phi]^T [G]^T [S] [C2P_1] \Gamma^n \quad (3.97)$$

หรือ

$$F_g = [C2F_2] \Gamma^{n+1} + [C2F_1] \Gamma^n \quad (3.98)$$

จากสมการที่ (3.71)

$$F^{n+1/2} = \begin{bmatrix} -F_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

แทนค่าสมการที่ (3.98) ในสมการที่ (3.99) จะได้ว่า

$$F^{n+1/2} = [CNFR_2] \Gamma^{n+1} + [CNFR_1] \Gamma^n \quad (3.100)$$

เมื่อ

$$[CNFR_2] = \begin{bmatrix} -[C2F_2] \\ 0 \end{bmatrix}, [CNFR_1] = \begin{bmatrix} -[C2F_1] \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.6.4 แบบจำลองแอโรอีลาสติกแบบพลวัต

การกระพือ (Flutter) การกระพือ เป็นการศึกษาเพื่อที่จะทำนายความเร็วกระพือ (flutter speed) เมื่อโครงสร้างปีกเครื่องบินเกิดความไม่เสถียรทางพลศาสตร์ ปรากฏการณ์นี้เกิดจากการที่ความหน่วง (damping) ของระบบถูกดึงให้ลดลงเนื่องจากปรากฏการณ์แอโรอีลาสติก โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการกระพือแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง จะประกอบไปด้วย 4 ส่วนคือ

ส่วนที่หนึ่งคือความสัมพันธ์ระหว่างเซอร์คูเรชันและการไหลตก (circulation-downwash) ดังสมการที่ (3.76)

ส่วนที่สองคือความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนไหวของปีกกับการไหลตก (wing motion-downwash) ดังสมการที่ (3.94)

ส่วนที่สามคือสมการแสดงการเคลื่อนที่ของโครงสร้างปีกเครื่องบินไม่ต่อเนื่องกับเวลาซึ่งจะหาได้จากวิธีการไฟไนต์อีเลเมนต์ ดังแสดงดังในสมการที่ (3.71)

ส่วนที่สี่คือสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำกับโครงสร้างจะเป็นผลมาจากความแตกต่างของความดัน ดังสมการที่ (3.100)

รวมความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.76) และสมการที่ (3.94) และจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$[CDR_2]\Gamma^{n+1} + [CDR_1]\Gamma^n - [WDR]q^{n+1} = 0 \quad (3.101)$$

รวมความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.71) และสมการที่ (3.100) และจัดสมการใหม่ได้ดังนี้

$$[CNFR_2]\Gamma^{n+1} + [CNFR_1]\Gamma^n + [DEOM_2]q^{n+1} + [DEOM_1]q^n = 0 \quad (3.102)$$

รวมทั้งสองส่วนคือสมการ (3.101) และ (3.102) เข้าด้วยกัน สุดท้ายจะได้สมการที่อยู่ในรูปแบบสมการเมทริกซ์ไม่ต่อเนื่องกับเวลาเป็น

$$\begin{bmatrix} [CDR_2] & -[WDR] \\ [CNFR_2] & [DEOM_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ q \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} [CDR_1] & [0] \\ [CNFR_1] & [DEOM_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ q \end{bmatrix}^n = 0 \quad (3.103)$$

สมการแบบจำลองการวิเคราะห์การกระพือที่มีการลดอันดับความอิสระแต่ไม่มีส่วน static correction สามารถหาได้โดยการแทน $\Gamma_n = X_n \bar{c}$ ลงในสมการ (3.103) และคูณเข้าข้างหน้าเฉพาะสมการแรกด้วย Y_n^T และใช้คุณสมบัติในสมการที่ (3.82) และ (3.83) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \mu_n & -Y_n^T [WDR] \\ [CNFR_2]X_n & [DEOM_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ q \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} -\sigma_n & 0 \\ [CNFR_1]X_n & [DEOM_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ q \end{bmatrix}^n = 0 \quad (3.104)$$

ส่วนของสมการแบบจำลองการวิเคราะห์การกระพือที่มีการลดลำดับขั้นแบบจำลองอากาศพลศาสตร์ที่มีส่วน static correction สามารถทำได้ดังนี้
จากสมการที่ (3.94), $W^n = [WDR]q^n$ และ Γ_s^n จะสามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Gamma_s^n &= ([CDR_1] + [CDR_2])^{-1} W^n \\ &= ([CDR_1] + [CDR_2])^{-1} [WDR]q^n \end{aligned} \quad (3.105)$$

แทนค่าสมการ (3.105) ลงในสมการ (3.89) พร้อมกับจัดรูปจะได้ว่า



$$\mu_n \bar{c}^{n+1} - \sigma_n \bar{c}^n =$$

$$Y_n^T [WDR] q^{n+1} - Y_n^T \left(\begin{aligned} &[CDR_2]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^{n+1} \\ &+ [CDR_1]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^n \end{aligned} \right) \quad (3.106)$$

จัดรูปสมการก่อนหน้าใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\mu_n \bar{c}^{n+1} - \sigma_n \bar{c}^n - Y_n^T [WDR] q^{n+1} \\ &+ Y_n^T \left(\begin{aligned} &[CDR_2]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^{n+1} \\ &+ [CDR_1]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^n \end{aligned} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

จัดรูปสมการก่อนหน้าใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\mu_n \bar{c}^{n+1} - \sigma_n \bar{c}^n + Y_n^T [-I + [CDR_2]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1}] [WDR] q^{n+1} \\ &+ Y_n^T [CDR_1]([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^n = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

ต่อจากนั้นพิจารณาสมการที่ (3.102)

$$[CNFR_2] \Gamma^{n+1} + [CNFR_1] \Gamma^n + [DEOM_2] q^{n+1} + [DEOM_1] q^n = 0 \quad (3.109)$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (3.105) ลงในสมการ (3.88) จะได้ว่า

$$\Gamma^{n+1} = ([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^{n+1} + X_n \bar{c}^{n+1} \quad (3.110)$$

และ

$$\Gamma^n = ([CDR_2] + [CDR_1])^{-1} [WDR] q^n + X_n \bar{c}^n \quad (3.111)$$

แทนค่าสมการ (3.110) และ (3.111) ลงในสมการ (3.109) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& [CNFR_2] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] q^{n+1} + X_n \bar{c}^{n+1} \} + [DEOM_2] q^{n+1} \\
& + [CNFR_1] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] q^n + X_n \bar{c}^n \} + [DEOM_1] q^n = 0
\end{aligned} \tag{3.112}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\begin{aligned}
& [CNFR_2] X_n \bar{c}^{n+1} + \{ [DEOM_2] + [CNFR_2] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \} q^{n+1} \\
& + [CNFR_1] X_n \bar{c}^n + \{ [DEOM_1] + [CNFR_1] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \} q^n = 0
\end{aligned} \tag{3.113}$$

สมการแบบจำลองการวิเคราะห์การกระพือที่มีการลดอันดับความอิสระและมีส่วน static correction สามารถทำได้โดยรวมสมการ (3.108) และ (3.113) และจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mu_n & Y_n^T [-I + [CDR_2] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \} \\ [CNFR_n] X_n & [DEOM_2 + [CNFR_2] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ q \end{bmatrix}^{n+1} \\
& + \begin{bmatrix} -\sigma_n & Y_n^T [CDR_1] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \\ [CNFR_1] X_n & [DEOM_1] + [CNFR_1] \{ [(CDR_2) + [CDR_1]^{-1} [WDR] \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ q \end{bmatrix}^n = 0
\end{aligned} \tag{3.114}$$

ค่าความเร็วกระพือสามารถหาได้โดยการหาผลเฉลยของสมการที่ (3.114) เพื่อหาค่าเฉพาะของระบบที่มีอินพุตเป็นศูนย์ ปัญหาดังกล่าวจะเป็นปัญหาค่าเฉพาะ ความไม่เสถียรจะเกิดขึ้นเมื่อมีค่าเฉพาะอย่างน้อยหนึ่งค่ามีค่ามากกว่าศูนย์

3.6.5 แบบจำลองแอโรอีลาสติกแบบสถิต

3.6.5.1 การเบนออก (Divergence)

การเบนออก คือ การศึกษาความไม่เสถียรแอโรอีลาสติกแบบสถิตเพื่อหาความเร็วลู่ออก (Divergence speed) อันเป็นผลจากแรงอากาศพลศาสตร์ที่ค่ามากกว่าความยึดหยุ่นของโครงสร้างจะสามารถรับได้ จากการวิเคราะห์แอโรอีลาสติกแบบสถิตเป็นการศึกษาการปฏิสัมพันธ์ระหว่างแรงยึดหยุ่นและแรงอากาศพลศาสตร์เท่านั้น พิจารณาสมดุลทางโครงสร้าง นั่นก็คือให้แรงยึดหยุ่นภายในโครงสร้างเท่ากับแรงอากาศพลศาสตร์ $Kr = F_a$ จะได้ว่า

$$Kr = qG^T S[AIC]Hr = qA_s r \tag{3.115}$$

จัดรูปสมการที่ (3.140) ให้อยู่ในรูปสมการปัญหาค่าเฉพาะจะได้ว่า

$$[A_s - \lambda K]r = 0 \quad (3.116)$$

เมื่อ $\lambda = 1/q$ คือค่าเฉพาะจริง

โดยค่าเฉพาะที่มากที่สุดที่ได้จากสมการค่าเฉพาะคือค่าความเร็วลู่ออกที่น้อยที่สุด ส่วนแอมพลิจูดค่าเฉพาะที่ได้จากค่าเฉพาะที่มากที่สุดคือรูปร่างโหมดการลู่ออก (divergence mode shape) ค่าความเร็วลู่ออกที่สามารถหาได้จากสมการที่ (3.116) จะหาได้ก็ต่อเมื่อแรงอากาศพลศาสตร์มีค่าเท่ากับแรงยืดหยุ่น หรือเกิดสมดุลแบบหมื่นหมื่น (neutral equilibrium) แต่สมการสมดุลของระบบสามารถที่จะเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งโดยการพิจารณาสมดุลแบบหมื่นหมื่นซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อแรงเหนี่ยวนำอากาศพลศาสตร์สมดุลกับแรงเหนี่ยวนำโครงสร้าง ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$qS[AIC]_r \{\Delta\alpha\} = [SIC]^T \{\Delta\alpha\} \quad (3.117)$$

จัดรูปสมการที่ (3.117) ให้อยู่ในรูปสมการปัญหาค่าเฉพาะ จะได้ว่า

$$[SIC]S[AIC]_r - \lambda I \{\Delta\alpha\} = 0 \quad (3.118)$$

เมื่อ $\lambda = 1/q$

เช่นเดียวกัน ค่าเฉพาะมากที่สุดที่ได้จากสมการค่าเฉพาะก็คือค่าความเร็วการเบนออกที่น้อยที่สุด ซึ่งค่าที่ได้ควรที่จะมีผลลัพธ์เหมือนกันกับผลลัพธ์ที่ได้จากสมการที่ (3.116) ด้วย แต่จุดที่น่าสนใจคือเหตุผลในการตัดสินใจว่าควรที่จะใช้สมการ ใดในการหาผลเฉลย ถ้าจำนวนพารามิเตอร์ของอากาศพลศาสตร์น้อยกว่าจำนวนอันดับความอิสระของโครงสร้าง ควรใช้สมการที่ (3.118) เพราะจะทำให้ประหยัดเวลาในการคำนวณมากกว่าการใช้สมการที่ (3.116)

3.6.5.2 ประสิทธิภาพแรงยก (Lift Effectiveness) [19],[24]

ประสิทธิภาพของแรงยก คือ ความสามารถของโครงสร้างทั้งหมดในการสร้างแรงยกเมื่อมีแรงยกที่ไม่ปกติกระทำ ดังนั้นค่าประสิทธิภาพแรงยกสามารถคำนวณได้เป็นอัตราส่วนระหว่างแรงยกที่พิจารณาให้โครงสร้างพื้นผิวแรงยกมีความยืดหยุ่นตัวต่อแรงยกที่พิจารณาให้โครงสร้างพื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุแข็ง โดยแรงยกที่เป็นผลให้พื้นผิวแรงยกมีการโก่งตัวสามารถแสดงได้ดังนี้

$$L_F = qS[AIC]_F \alpha \quad (3.119)$$

เมื่อ L_F คือแรงยกที่กระทำบนพาเนลที่พิจารณาให้พื้นผิวแรงยกมีการโค้งตัว, q คือความเร็วลม, S คือพื้นที่พาเนล, α คือมุมติดตั้งของแต่ละพาเนล และ $[AIC]_F$ คือค่าสัมประสิทธิ์อิทธิพลอากาศพลศาสตร์ที่พิจารณาให้พื้นผิวแรงยกมีการโค้งตัว ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

ความดันที่กระทำทำบนพาเนลของพื้นผิวแรงยกที่มีการโค้งตัวจะเป็นดังนี้

$$p = q[AIC]_F \alpha \quad (3.120)$$

จะเห็นว่าความดันดังกล่าวนั้นจะขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ $[AIC]_F$ ซึ่งจะต้องทำการหาที่มาต่อไป จากวิธีการเวอร์เทกซ์จึงเราสามารถหาสัมประสิทธิ์อิทธิพลกรณีพิจารณาให้พื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุเกร็ง $[AIC]_R$ ได้ ดังนั้นเราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์อิทธิพล $[AIC]_R$ แสดงความดันที่กระจายบนพื้นผิวแรงยกที่มีการโค้งตัวโดยให้เป็นผลรวมของความดันเนื่องจากมุมติดตั้งของพาเนลเมื่อพื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุเกร็งรวมกับความดันเนื่องจากพื้นผิวแรงยกเกิดการโค้งตัวไป $\Delta\alpha$ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$p = q[AIC]_R (\alpha + \Delta\alpha) \quad (3.121)$$

เมื่อมุมติดตั้งที่เปลี่ยนไป $\Delta\alpha$ สามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ของการกระจายความดันและสัมประสิทธิ์อิทธิพลของโครงสร้าง (Structure Influence Coefficient matrix) $[SIC]$ ซึ่งเมทริกซ์ดังกล่าวจะมีคอลัมน์เป็นมุมติดตั้งพาเนลเนื่องจากแรงหนึ่งหน่วย สามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Delta\alpha = [SIC]Sp \quad (3.122)$$

เมทริกซ์ $[SIC]$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์อิทธิพลของโครงสร้าง จะอยู่ในเทอมของสติเฟนสมเมทริกซ์ K ของโครงสร้าง ร่วมกับการใช้เทคนิค surface spline interpolation จะได้ว่า

$$[SIC] = HK^{-1}G^T \quad (3.123)$$

จากสมการที่ (3.122) แทนค่ากลับในสมการที่ (3.121) ทำให้สามารถหาค่า $[AIC]_F$ ได้ดังนี้

$$[AIC]_F = (I - q[AIC]_R[SIC]S)^{-1}[AIC]_R \quad (3.124)$$

เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

แรงยกที่กระทำกับพาเนลเมื่อพิจารณาให้พื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุเกร็งคือ

$$L_R = q\bar{S}^T[AIC]_R\bar{\alpha} \quad (3.125)$$

เมื่อ $\bar{S}$ คือ เวกเตอร์ของพื้นที่พานและ $\bar{\alpha}$ คือเซตของมุมคดโค้งหนึ่งหน่วยของพาน

จากแรงยกที่พิจารณาให้พื้นผิวแรงยกมีการโค้งตัวดังในสมการที่ (3.119) และแรงยกที่พิจารณาให้พื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุเกร็งดังในสมการที่ (3.125) ดังนั้นประสิทธิภาพแรงยกสามารถหาได้ดังนี้

$$\eta_L = \frac{L_F}{L_R} \quad (3.126)$$

3.7 ผลเนื่องจากแรงภายนอกต่อปรากฏการณ์แอโรอีลาสติก (Effects of External Forces to Aeroelastic Axis)

ในเครื่องบินที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างปีกได้ (morphing wing) หรือสามารถปรับรูปร่างได้ขณะทำการบิน (adaptive wing) นั้นมีวัตถุประสงค์ในการปรับปรุงสมรรถนะทางการบินให้เพิ่มสูงขึ้นและสามารถปรับเปลี่ยนตามสภาพการบินที่เปลี่ยนแปลงไป ในการปรับรูปร่างปีกในขณะที่ทำการบินนั้นจะต้องมีแรงกระตุ้น (actuator) จากภายนอกกระทำกับระบบ เพื่อออกแรงกระทำกับชิ้นส่วนโครงสร้างภายในปีกเครื่องบินซึ่งจะเป็นผลให้โครงสร้างปีกเครื่องบินเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปตามที่ต้องการ แรงกระตุ้นที่กระทำกับโครงสร้างปีกเครื่องบินจะมีผลต่อปรากฏการณ์แอโรอีลาสติก นั่นก็คือ ประสิทธิภาพแรงยก (lift effectiveness) ดังนั้นในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงการสร้างสมการการวิเคราะห์ผลของแรงภายนอกที่มีผลต่อประสิทธิภาพแรงยก

จากที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้ ความดันที่กระทำบนพานของพื้นผิวแรงยกที่มีการโค้งตัวจะเป็นดังสมการที่ (3.120)

$$p = q[AIC]_F \alpha$$

ความดันที่กระจายบนพานที่อยู่บนพื้นผิวแรงยกที่มีการโค้งตัวนั้นสามารถพิจารณาเป็นผลรวมของความดันเนื่องจากมุมคดโค้งของพานเมื่อพื้นผิวแรงยกเป็นวัตถุเกร็งรวมกับความดันเนื่องจากพื้นผิวแรงยกเกิดการโค้งตัวไป $\Delta\alpha$ ดังสมการที่ (3.121)

$$p = q[AIC]_R (\alpha + \Delta\alpha)$$

เมื่อมุมคดโค้งที่เปลี่ยนไป $\Delta\alpha$ นั้นจะเป็นความสัมพันธ์ของการกระจายความดันและสัมประสิทธิ์อิทธิพลของโครงสร้าง $[SIC]$ รวมกับมุมคดโค้งที่เปลี่ยนแปลงไปอันเป็นผลจากแรงกระตุ้น สามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Delta\alpha = [SIC](F_a + F_e) \quad (3.127)$$

เมื่อ $[SIC]$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์อิทธิพลของโครงสร้าง
 F_a คือ แรงอากาศพลศาสตร์
 F_e คือ แรงกระตุ้น

แรงอากาศพลศาสตร์เป็นผลคูณของความดันอากาศพลศาสตร์และพื้นที่ผิวของพาเนล ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$F_a = pS \quad (3.128)$$

ดังนั้นแทน (3.128) กลับในสมการที่ (3.127) จะได้ว่า

$$\Delta\alpha = [SIC](pS + F_e) \quad (3.129)$$

แทน (3.129) กลับในสมการ (3.121) จะได้ว่า

$$p = q[AIC]_R(\alpha + [SIC]pS + [SIC]F_e) \quad (3.130)$$

จัดรูปสมการก่อนหน้าเพื่อย้ายข้างหา p จะได้ว่า

$$p(I - q[AIC]_R[SIC]S) = q[AIC]_R(\alpha + [SIC]F_e) \quad (3.131)$$

ย้ายข้างสมการเพื่อหา p จะได้ว่า

$$p = (I - q[AIC]_R[SIC]S)^{-1} q[AIC]_R(\alpha + [SIC]F_e) \quad (3.132)$$

จัดรูปสมการที่ (3.132) โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.124) จะได้ว่า

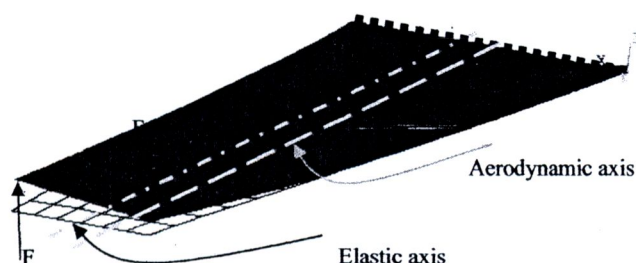
$$p = q[AIC]_F(\alpha + [SIC]F_e) \quad (3.133)$$

จากความสัมพันธ์ที่ได้ในสมการที่ (3.133) แสดงให้เห็นว่าความดันที่กระจายบนพาเนลของพื้นผิวแรงยกที่มีการโค้งตัวเมื่อมีแรงกระตุ้นกระทำกับชิ้นส่วนโครงสร้างนั้นจะแตกต่างจากกรณีไม่มีแรงกระตุ้นกระทำดังสมการที่ (3.120) อันเป็นผลจากเทอม $[SIC]F_e$ ดังนั้นจะสามารถหาประสิทธิภาพแรงยกได้ดังนี้ โดยแทนค่าต่างๆ กลับในสมการที่ (3.126) จะได้ว่า

$$\eta_L = \frac{q\bar{S}^T[AIC]_F(\bar{\alpha} + [SIC]F_e)}{L_R} \quad (3.134)$$

3.8 แกนอีลาสติก (Elastic Axis)

แกนอีลาสติกคือแกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางแรงเฉือน (shear center) ของแต่ละหน้าตัดปีก จุดศูนย์กลางแรงเฉือนของแต่ละหน้าตัดจะคำนวณได้โดยการหาจุดในระนาบหน้าตัดปีกที่แรงเฉือนกระทำแล้วเป็นผลให้ไม่เกิดการบิดของหน้าตัดปีก เนื่องจากโครงสร้างของปีกเครื่องบินมีความซับซ้อนสูงจึงเป็นผลให้การหาจุดศูนย์กลางแรงเฉือนนั้นทำได้ยาก ดังนั้นจากนิยามของแกนอีลาสติก เราสามารถประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ในการวิเคราะห์หาตำแหน่งแกนอีลาสติกได้โดยการบิดที่ปลายโครงสร้างด้วยแรงคู่ควบแกนอีลาสติกก็คือแกนที่ลากผ่านจุดในโครงสร้างที่ไม่มีการขยับตัว



ภาพที่ 28 แสดงแกนอีลาสติก

แกนอีลาสติกได้ถูกใช้เป็นคุณสมบัติตัวหนึ่งในการออกแบบปีกเครื่องบินที่สามารถปรับเปลี่ยนรูปร่างได้ นั่นเพราะตำแหน่งของแกนอีลาสติกนั้นจะมีผลต่อปรากฏการณ์แอโรอีลาสติกเช่น ความไม่เสถียรแบบลู่ออก โดยที่ตำแหน่งของแกนอีลาสติกจะส่งผลต่อความไม่เสถียรของปีกเครื่องบิน ถ้าตำแหน่งแกนอีลาสติกทับกับแกนอากาศพลศาสตร์ (aerodynamic axis) หรือแกนอากาศพลศาสตร์อยู่ด้านหลังแกนอีลาสติกจะเป็นผลให้ระบบโครงสร้างปีกเครื่องบินมีความเสถียรที่ทุกๆ ความเร็วการบิน

3.9 การวิเคราะห์การโก่งเดาะ (Buckling Analysis)

การโก่งเดาะเป็นการวิเคราะห์ค่าเสถียรภาพทางสถิตยศาสตร์อันเนื่องมาจากแรงกระทำตามแนวแกนของโครงสร้างเสาและคานและในแรงแนวระนาบของโครงสร้างแผ่น หลักการของเสถียรภาพส่วนใหญ่อธิบายได้โดยพิจารณาจากสมการสถิตยศาสตร์

การประยุกต์ไฟไนต์เอเลเมนต์เพื่อแก้ปัญหาการโก่งเดาะหมายถึงแรงสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อเกิดงานจากแรงตามแนวแกนของคานและแผ่นจากแรงคด กระบวนการทั่วไปในการวิเคราะห์การโก่งเดาะคือเมื่อโครงสร้างได้รับแรงภายใน (พิจารณาเป็น โครงสร้างแผ่น) ขั้นตอนแรกคือการหาความเค้นภายในจากการแก้สมการสถิตยศาสตร์ทั่วไป จากนั้นจะเกิดงานโดยความเค้นภายในเนื่องจากแรงคดในแต่ละอีเลเมนต์โดยใช้สมการดังนี้

$$W_i^G = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_i} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta} d\Omega \tag{3.135}$$

โดย $\boldsymbol{\theta}$ คือเวกเตอร์ของการหมุนของแกน และ $\boldsymbol{\sigma}$ คือความเค้นภายในที่จุดต่างๆในแผ่นอีเลเมนต์
สำหรับโครงสร้างแผ่นในพิกัดฉาก เวกเตอร์การหมุนอธิบายได้ในเทอมของอนุพันธ์การเสียรูปด้านข้าง, w ดังนี้

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.136}$$

และเมตริกซ์ความเค้นภายในที่เกิดจากแรงภายนอกคือ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{3.137}$$

การหมุนที่จุดต่างๆในอีเลเมนต์ที่ i^{th} เขียนได้เป็น

$$\boldsymbol{\theta}(P) = \mathbf{B}_G \mathbf{r}_{e,i} \tag{3.138}$$

โดย $\mathbf{B}_G$ คือ ค่าที่ได้จากการประมาณภายในช่วงของฟังก์ชันพหุนาม
นั่นคือ งานที่เกิดขึ้นจากแรงภายในเนื่องจากแรงคัดในอีเลเมนต์เป็นดังนี้

$$W_i^G = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{e,i}^T \left(\iint_{\Omega_i} \mathbf{B}_G^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_G d\Omega \right) \mathbf{r}_{e,i} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{e,i}^T \mathbf{g}_i^0 \mathbf{r}_{e,i} \tag{3.139}$$

และส่วนขยายนี้จะรวมกับระบบรวมดังนี้

$$W_G = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \left(\sum_{i=1}^{N_K} \mathbf{T}_i^T \mathbf{g}_i^0 \mathbf{T}_i \right) \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \tag{3.140}$$

โดย $\mathbf{T}_i$ คือ เมตริกซ์ส่งผ่าน

ในขั้นตอนการหาแรงสูงสุด จะกำหนดให้ค่าตัวแปรการปรับค่าแรงเป็นสัดส่วนกับแรงภายนอกสูงสุดในเชิงเส้น เป็น λ นั่นคือค่า W_G เป็นฟังก์ชันของ λ ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$W_G = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad (3.141)$$

โดยค่าพลังงานความเค้นและงานจากแรงค้ำของแผ่นอีเลเมนต์จะใช้วิธีงานพลังงานในการหาค่าการโก่งเคาะ ดังนี้

$$[\mathbf{K} + \lambda \mathbf{G}] \mathbf{r} = 0 \quad (3.142)$$

โดย $\mathbf{K}$ คือค่าเมทริกซ์สติฟเนส, $\mathbf{G}$ เรียกว่า เมทริกซ์สติฟเนสรูปร่าง และ λ เป็นสัดส่วนของแรงสูงสุดต่อแรงกระทำ เมื่อค่า $\mathbf{r}$ เป็นอิสระ ระบบจะเป็นปัญหาค่าเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับค่าเฉพาะ n ที่จะเป็นค่าบวกหรือลบ ค่าเฉพาะจะกำหนดค่าแรงสูงสุด (โดยปกติจะกำหนดค่าเฉพาะค่าที่สูงสุดที่เพียงพอต่อข้อจำกัดของโครงสร้าง) เมื่อเวกเตอร์เฉพาะของปัญหาให้รูปร่างการโก่งเคาะตรงกับค่าเฉพาะ

แนวคิดในการวิเคราะห์การโก่งเคาะเป็นแผ่นบางของโครงสร้างคานและเสาหรือแม้กระทั่งโครงสร้างแบบเปลือก สมการ (3.142) จะใช้สำหรับการหาค่าโก่งเคาะที่อยู่ในรูปทั่วไป, อย่างไรก็ตาม โครงสร้างที่มีขนาดใหญ่ เช่น ส่วนประกอบของเครื่องบิน ความไม่เสถียรภาพเนื่องจากการโก่งเคาะจะนิยมใช้กับพื้นที่บางส่วน เช่น ผิวนอกปีกเครื่องบิน การโก่งเคาะเฉพาะที่มักจะใช้วิธีการใส่ชิ้นส่วนแผ่นบางของโครงสร้างในการวิเคราะห์ค่าโก่งเคาะที่เหมาะสมกับเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบในการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการโก่งเคาะทั่วไป