รายงานวิจัย

ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร
Resource Allocation Model

ผศ.ดร. พัชราภรณ์ เนียมมณี

พฤษภาคม 2551

สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
118 ถนนเสรีไทยคลองจั่น บางกะปิ
กรุงเทพมหานคร 10240

โทร : 662-375-8972
โทรสาร : 662-374-2759
E-mail : **rcadmin@nida.ac.th**

© ปี พ.ศ. 2551 โดยสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

สงวนลิขสิทธิ์ : *การคัดลอก การจัดเก็บไว้ในระบบที่จะเรียกกลับมาใช้ใหม่ หรือการส่งผ่านในรูปแบบใดหรือวิธีการใด ไม่ว่าทางไฟฟ้า เครื่องกล การถ่ายสำเนา การอัดเสียง หรือวิธีการอื่นใด ต้องขออนุญาตจากสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์*

ยกเว้น การนำเสนอที่ประชุมวิชาการและนำไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารทางวิชาการทั้งในประเทศและต่างประเทศ และการเผยแพร่อื่น ๆ ที่ไม่ใช่การหาผลประโยชน์เชิงพาณิชย์

ข้อความและความคิดเห็นใด ในสิ่งพิมพ์ฉบับนี้ เป็นของผู้เขียน/คณะวิจัย มิใช่ของสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ขอสงวนลิขสิทธิที่จะไม่รับผิดชอบต่อความเสียหายที่เกิดขึ้นกับบุคคลหรือทรัพย์สินอันเป็นผลมาจากสิ่งใดในรายงานฉบับนี้

คำนำ

ตำรา “ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร” เล่มนี้ ผู้เขียนได้แต่งขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์สำหรับนักศึกษาและผู้สนใจทั่วไปที่ต้องการค้นคว้าและนำไปประยุกต์ใช้งานของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรต่างๆ ทั้งในองค์กรธุรกิจและอุตสาหรรม

ตำราเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหา 4 ส่วนหลักคือ ส่วนแรกเกี่ยวกับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ส่วนที่สองเกี่ยวกับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม ส่วนที่สามเกี่ยวกับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ส่วนสุดท้ายเกี่ยวข้องกับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย โดยในแต่ละส่วนมีการแสดงวิธีการสร้างตัวแบบสำหรับปัญหาทางธุรกิจและอุตสาหกรรม และวิธีการประมวลผลทั้งในเชิงทฤษฎี เทคนิคและวิธีการประมวลผลด้วยโปรแกรม Excel Solver และโปรแกรม SAS สำหรับการโปรแกรมเชิงเส้นเป็นพื้นฐานสำคัญของการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์แบบอื่น ๆ หนังสือเล่มนี้ได้แสดงการวิเคราะห์หลังจากที่ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด โดยการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์พร้อมกับแสดงถึงปัญหาควบคู่ที่มีความหมายในเชิงเศรษฐศาสตร์ด้วย

ตำราฉบับนี้ ได้รับการทุนสนับสนุนจากสำนักวิจัย สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ผู้เขียนขอขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

ตำราฉบับนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และยินดีที่จะรับทราบความผิดพลาดเพื่อนำไปใช้ในการปรับปรุงตำรานี้ต่อไป

พัชราภรณ์ เนียมมณี

พฤษภาคม 2551

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	**บทนำ (Introduction)**	1
	1.1 องค์ประกอบของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร	2
	1.2 ประเภทของตัวแบบ	3
	1.3 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร	4
	แบบฝึกหัดท้ายบท	11
	บรรณานุกรม	12
บทที่ 2	**ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Model)**	13
	2.1 ขั้นตอนในการสร้างตัวแบบของปัญหา	13
	2.2 ตัวอย่างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น	15
	2.3 ข้อตกลงของการโปรแกรมเชิงเส้น	18
	2.4 ปัญหาการจัดสรร	21
	2.5 ปัญหาการผสม	27
	2.6 การวางแผนทางการเงินและปฏิบัติการ	39
	2.7 ปัญหาการขนส่งและข่ายงาน	56
	2.8 การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (DEA)	66
	2.9 ตัวแบบการวางแผนหลายคาบเวลา	70
	แบบฝึกหัดท้ายบท	75
	บรรณานุกรม	79
บทที่ 3	**วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Method)**	81
	3.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ	81
	3.2 รูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง	85
	3.3 แนวคิดของวิธีซิมเพล็กซ์	88
	3.4 การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต	92
	3.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์	100
	3.6 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง	109
	3.7 ผลเฉลยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงในกรณีต่าง ๆ	118
	3.8 เทคนิคตัวแปรเทียม	129

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

	3.9 การแก้ปัญหาสภาพซ้อนสถานะ	139
	3.10 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วย Excel Solver	144
	3.11 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยโปรแกรม SAS	151
	แบบฝึกหัดท้ายบท	167
	บรรณานุกรม	172
บทที่ 4	**การวิเคราะห์ความไวและปัญหาควบคู่ (Sentivity Analysis and Dual Problem)**	173
	4.1 ปัญหาควบคู่	175
	4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่	181
	4.3 การแปลความหมายในเชิงเศรษฐศาสตร์ของปัญหาควบคู่	190
	4.4 ดูอัลซิมเพล็กซ์อัลกอริทึม	192
	4.5 วิธีคารมาร์คาร	194
	4.6 ปัญหาควบคู่และ DEA	205
	4.7 การวิเคราะห์ความไวโดยวิธีกราฟ	208
	4.8 การวิเคราะห์ความไวด้วยวิธีซิมเพล็กซ์	213
	4.9 การวิเคราะห์ความไวด้วยโปรแกรม Excel Solver	225
	4.10 การวิเคราะห์ความไวด้วยโปรแกรม SAS	229
	4.11 การวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัวแปร	234
	แบบฝึกหัดท้ายบท	241
	บรรณานุกรม	247
บทที่ 5	**ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (Integer Linear Programming Model)**	249
	5.1 ปัญหาการเลือกโครงการลงทุน	250
	5.2 ปัญหาการครอบคลุมเซตและการแบ่งเซต	252
	5.3 ปัญหาการหาเส้นทางการขนส่ง	256
	5.4 การเลือกรูปแบบ	262
	5.5 การจัดตารางปฏิบัติงาน	264

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
5.6 การจัดสมดุลสายการประกอบ	267
แบบฝึกหัดท้ายบท	271
บรรณานุกรม	274
บทที่ 6 วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (Integer Linear Programming Method)	275
6.1 กรีดี้อัลกอริทึม	276
6.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีการแจงนับ	280
6.3 วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต	283
6.4 การหาผลเฉลยสำหรับการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค	297
6.5 วิธีระนาบตัด	306
6.6 การผ่อนคลายแบบลากรานเจียน	318
6.7 การหาผลเฉลยด้วย Microsoft Excel Solver	320
6.8 การหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม SAS	323
แบบฝึกหัดท้ายบท	326
บรรณานุกรม	328
บทที่ 7 ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม (Mixed Integer Programming Model)	331
7.1 ปัญหาการหาตำแหน่งของศูนย์บริการหรืออุปกรณ์	331
7.2 ตัวแบบการออกแบบข่ายงาน	334
7.3 การวางแผนการผลิต	337
แบบฝึกหัดท้ายบท	340
บรรณานุกรม	342
บทที่ 8 วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม (Mixed Integer Programming Method)	343
8.1 รูปแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม	343
8.2 วิธีการสร้างระนาบตัดแบบผสม	344
8.3 วิธีการแบ่งแยก	350

สารบัญ (ต่อ)

		หน้า
	แบบฝึกหัดท้ายบท	359
	บรรณานุกรม	361
บทที่ 9	**ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย (Goal Programming Model)**	363
	9.1 การโปรแกรมที่มีหลายวัตถุประสงค์	364
	9.2 การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย	368
	9.3 การประยุกต์การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย	374
	แบบฝึกหัดท้ายบท	389
	บรรณานุกรม	391
บทที่ 10	**วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย (Goal Programming Method)**	393
	10.1 การแก้ปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์	393
	10.2 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายด้วยวิธีซิมเพล็กซ์	397
	10.3 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์	403
	แบบฝึกหัดท้ายบท	401
	บรรณานุกรม	412
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท		413
ดัชนี		419
คำศัพท์ที่สำคัญ		422
ภาคผนวก		427
	ภาคผนวก ก	428
	ภาคผนวก ข	438

บทนำ
Introduction

1

ทรัพยากร หมายถึง สิ่งที่มีไว้ใช้งานในองค์กรหรือบริษัท เพื่อเพิ่มผลิตหรือผลประโยชน์ให้แก่องค์กร ซึ่งทรัพยากรนี้รวมถึง โรงงาน พนักงาน วัตถุดิบและทรัพย์สินต่าง ๆ โดยทั่วไปทรัพยากรในองค์กรมักมีอยู่อย่างจำกัด เช่น จำนวนพนักงานที่ควบคุมเครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่ง จำนวนเงินสดทุนหมุนเวียนในการดำเนินงานของบริษัท จำนวนรถบรรทุกที่มีไว้ขนส่งสินค้าของบริษัทขนส่งและโลจิสติกส์ เป็นต้น โดยทั่วไป ทรัพยากรเหล่านี้มีอยู่จำนวนจำกัดในองค์กรทำให้องค์กรต้องมีการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากรเหล่านี้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งประสิทธิภาพในการจัดสรรทรัพยากรอาจวัดในรูปของปริมาณการผลผลิตสูงสุด หรือ กำไรสูงสุด วิธีการจัดสรรทรัพยากรให้ได้ประโยชน์สูงสุด การสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจ (Decision model) ของปัญหาปัจจุบัน ผลของตัวแบบเป็นการประมวลผลโดยในเชิงตัวเลข โดยไม่มีอคติของผู้ตัดสินใจ หรืออารมณ์ของผู้ตัดสินใจ เราเรียกตัวแบบประเภทนี้ว่า *ตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical model)* ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ของสิ่งต่าง ๆ ที่เราสนใจหรือเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องคำนึงถึงในสถานการณ์ของปัญหานั้น ซึ่งการใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการตัดสินใจทำให้การตัดสินใจของผู้บริหารดีขึ้น หรือเพื่อทำให้เข้าใจสถานการณ์ปัจจุบันได้ดีขึ้น ((Klingman, Phillips, & Young, 1987; Wintson, 2004) ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดนี้ จึงเรียกว่า *ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร (Resource allocation model)*

โดยทั่วไปปัญหามักมีความซับซ้อน และอาจมีความขัดแย้งในเชิงของนโยบาย หรือความรู้สึกของคน เป้าหมายของการนำตัวแบบจัดสรรทรัพยากรไปใช้กับปัญหาจริงจะต้อง (1) ระบุวัตถุประสงค์ของการตัดสินใจที่ต้องการทำ (2) ตั้งเกณฑ์ที่จะใช้วัดความประสิทธิผลของทางเลือกต่าง ๆ และ (3) กำหนดข้อจำกัดหรือเงื่อนไขที่ผู้ตัดสินใจจะต้องเผชิญ เป้าหมายที่สำคัญที่สุดของการใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร นี้คือ เพื่อช่วยองค์กรและผู้บริหารให้สามารถตัดสินใจ

ได้ดีขึ้น วิธีการนี้จะประสบความสำเร็จหรือไม่ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหา ประสบการณ์ของผู้ประยุกต์ใช้ และสิ่งแวดล้อมต่าง ๆที่ผู้ตัดสินใจประยุกต์ใช้ แม้ว่าเครื่องมือทางคณิตศาสตร์จะมีมานานนับพันปี แต่การประยุกต์ที่ใช้เทคนิคการสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติก็มีการใช้อย่างแพร่หลายในช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมา

1.1 องค์ประกอบของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร

ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร มีองค์ประกอบสำคัญ 3 ส่วน คือ

(1) ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variables)

ตัวแปรที่แทนกิจกรรมต่างๆ ของปัญหาที่เราสนใจ การหาค่าของตัวแปรตัดสินใจ เป็นการหาว่าเราควรกระทำกิจกรรมมากน้อยในระดับใด เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น เช่น ในการผลิตสินค้าในโรงงานแห่ง ผู้มีหน้าที่รับผิดชอบในเรื่องการวางแผนการผลิตต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าใดในแต่ละสัปดาห์ สำหรับปัญหาการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังลูกค้า ผู้รับผิดชอบต้องการทราบว่าจะส่งสินค้าไปตามเส้นทางใด จำนวนเท่าใด เป็นต้น

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function)

ในการตัดสินใจแก้ปัญหาหนึ่ง ๆ เราอาจมีผลเฉลย (Solution) ของปัญหาได้หลายผลเฉลย ผู้ตัดสินใจต้องการเลือกผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเกณฑ์ในการเลือกผลเฉลยนี้จะสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการจัดสรรทรัพยากร ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัดสินใจต่าง ๆ กับวัตถุประสงค์ของปัญหา ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะสะท้อนว่าผลเฉลยนั้นความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของจัดสรรทรัพยากรมากน้อยเพียงใด เช่น ปัญหาการจัดสรรเงินทุน 5 ล้านบาท เพื่อลงทุนในธุรกิจ 4 ประเภท เราอาจกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจ x_k แทนปริมาณเงินลงทุนในธุรกิจที่ i โดย i = 1, 2, 3, 4 การพิจารณาการลงทุนนี้ ผู้ตัดสินใจต้องการให้ผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเงินลงทุนในธุรกิจทั้ง 4 ประเภทกับร้อยละของผลตอบแทนรายปีของธุรกิจแต่ละประเภท สำหรับการหาผลเฉลยจะเลือกจากผลเฉลยที่ทำให้ผลรวมของผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด ดังนั้นเราจึงเรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ ว่าเป็น *ค่าสูงสุด (Maximization)* เป็นต้น ในทางกลับกัน ปัญหาการขนส่งสินค้าจำนวนหนึ่งจากโรงงานไปยังลูกค้า เราอาจกำหนดตัวแปรตัดสินใจ x_j แทนปริมาณสินค้าที่ส่งผ่านเส้นทาง j โดย j = 1, 2, …, 5 เพื่อให้ผลรวมค่าขนส่งต่ำที่สุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าขนส่งสินค้ากับปริมาณขนส่งในแต่ละเส้นทาง ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด จะเลือกจากผลเฉลยที่ให้ผลรวมของค่าขนส่งต่ำที่สุด เราจึงเรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในลักษณะนี้ว่า *ค่า*

ต่ำสุด (Minimization) นอกจากนี้ ปัญหาหนึ่ง ๆ นักวิเคราะห์สามารถกำหนดฟังก์วัตถุประสงค์ได้มากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ถ้าปัญหาที่ต้องการศึกษามีเป้าหมายหรือวัตถุประสงค์หลายประการ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 9

(3) ข้อจำกัด (Constraints)

เงื่อนไขข้อจำกัดหรือของปัญหา บอกให้ผู้วิเคราะห์ทราบว่าทำอะไรได้บ้างไม่ได้บ้าง เช่น ในการวางแผนการผลิตสินค้าที่กล่าวไว้ข้างต้น อาจมีข้อจำกัดด้านแรงงานที่ใช้ในการผลิตในแต่ละสัปดาห์ หรือ ปริมาณความต้องการสูงสุดของสินค้าแต่ละชนิด ในตัวอย่างการลงทุน อาจมีนโยบายในการลงทุนว่า การลงทุนในธุรกิจประเภทที่ 2 มีความเสี่ยงสูงผู้บริหารอาจไม่ต้องการที่จะลงทุนมาก จึงกำหนดเป็นนโยบายว่าการลงทุนประเภทที่ 2 จะไม่เกิน 1 ล้านบาท เป็นต้น

1.2 ประเภทของตัวแบบ

การแบ่งประเภทของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรนั้นมีหลายแบบ ขึ้นอยู่กับเกณฑ์ในการแบ่งตัวแบบ (Balakrishnan, 2007) ได้เสนอการแบบตัวแบบโดยเกณฑ์ต่าง ๆ ดังนี้

(1) ตัวแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

จากตัวแบบข้างต้น จะเห็นว่าตัวแปรตัดสินใจอยู่ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ หรือในข้อจำกัดของตัวแบบ ตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัวแปรมักจะคูณด้วยค่าคงที่แล้วนำมาบวกกันเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ หรือ สมการหรืออสมการของข้อจำกัด ซึ่งความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ นี้มีความสัมพันธ์กันเชิงเส้นตรง ตัวแบบในลักษณะนี้เรียกว่า *ตัวแบบเชิงเส้น (Linear model)* เช่น x_1 และ x_2 แทนปริมาณการขายสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 โดยที่ z แทนผลกำไรจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด ความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามคือ $z = 50x_1 + 40x_2$ หมายความว่า กำไรจากการขายสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 1 ชิ้นเท่ากับ 50 บาท หากขายสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 100 ชิ้น โรงงานยังคงได้กำไรจากการขายเท่ากับ 50 บาทต่อชิ้นเสมอ ในทำนองเดียวกัน กำไรจากการขายสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 1 ชิ้นเท่ากับ 50 บาท ไม่ว่าปริมาณการขายสินค้าชนิดที่ 2 จะมีจำนวนมากน้อยเพียงใด ถ้าตัวแบบมีตัวแปรตัดสินใจที่มีความสัมพันธ์กันแบบไม่เป็นเชิงเส้น เรียกว่า *ตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear model)* ตัวอย่างเช่น การผลิตยางรถยนต์ต้องทดสอบความต้านแรงดึง (Tensile Strength) แทนด้วย T ซึ่ง $T = 12.5 - 0.10Q - 0.001Q^2$ m โดยที่ Q เท่ากับจำนวนปอนด์ของน้ำมันที่เป็นส่วนผสมของยางรถยนต์ จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างน้ำมันที่ผสมกับความต้านแรงดึงไม่เป็นเชิงเส้นตรง ดังนั้น ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่มีฟังก์ชันในลักษณะนี้จะเป็นตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น

(2) ตัวแบบเชิงจำนวนเต็มและไม่เป็นจำนวนเต็ม

ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นมาอาจจำเป็นต้องระบุให้ตัวแปรตัดสินใจมีค่าตัวเลขจำนวนเต็มเท่านั้น เช่น การในการศึกษาที่ตั้งของคลังสินค้าเพื่อการกระจายสินค้าสู่จังหวัดต่าง ๆ ในประเทศไทย อาจกำหนดตัวแปร x_i แทน การตั้งคลังสินค้าที่บริเวณ i หรือไม่ ถ้า $x_2 = 1$ แสดงว่าควรตั้งคลังสินค้าในบริเวณที่ 2 ถ้า $x_2 = 0$ แสดงว่าไม่ควรตั้งคลังสินค้าในบริเวณที่ 2 เราเรียกตัวแบบที่มีตัวแปรตัดสินใจต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็มนี้ว่า *ตัวแบบเชิงจำนวนเต็ม (Integer model)* หากตัวแบบไม่มีข้อจำกัดเรื่องค่าของตัวแปรตัดสินใจต้องเป็นจำนวนเต็ม ตัวแบบนี้จะเป็น *ตัวแบบไม่เป็นจำนวนเต็ม(Noninteger programming)*

(3) ตัวแบบเชิงกำหนด และตัวแบบความน่าจะเป็น

ตัวแบบเชิงกำหนด (Deterministic model) เป็นตัวแบบที่ประกอบด้วยค่าข้อมูลนำเข้าเป็นค่าคงที่ที่เราทราบค่าแน่นอน ดังนั้นการใช้ตัวแบบเชิงกำหนด จะมีสมมติฐานว่าข้อมูลนำเข้าที่ต้องการหรือค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบต้องมีค่าคงที่และเราสามารถทราบค่าที่แท้จริงนี้ได้ สำหรับ*ตัวแบบความน่าจะเป็น (Stochastic models)* เป็นตัวแบบที่มีค่าข้อมูลนำเข้านั้นไม่ทราบค่าแต่มีอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ของปัจจัยอื่น หรืออาจกล่าวได้ว่าค่าของพารามิเตอร์จะมีการแจกแจงอย่างใดอย่างหนึ่ง

(4) ตัวแบบเชิงสถิต และตัวแบบเชิงพลวัต

ตัวแบบเชิงสถิต (Static model) เป็นตัวแบบที่มีตัวแปรตัดสินใจ ที่ตัวแปรตัดสินใจไม่มีความเกี่ยวข้องกับลำดับของการตัดสินใจที่มีหลายช่วงแวลา ในทางกลับกัน *ตัวแบบเชิงพลวัต (Dynamic model)* ที่ตัวแปรตัดสินใจมีความเกี่ยวข้องลำดับของการตัดสินใจที่มีหลายช่วงเวลา ตัวแบบเชิงสถิติจะใช้สำหรับปัญหาที่มีการตัดสินใจขั้นเดียว เช่น บริษัทต้องการทราบปริมาณการผลิตต่อปี ในปีหน้า เป็นต้น แต่ตัวแบบเชิงพลวัติจะใช้ในสำหรับปัญหาหลายขั้น เช่น การหาว่าบริษัทควรจะผลิตสินค้าในแต่ละเดือน เป็นเวลาสี่เดือนข้างหน้านี้ ในกรณีนี้ปริมาณการผลิตสินค้าในเดือนที่หนึ่งอาจจะสูงส่งผลให้มีสินค้าหลือในคลังและจำนวนสินค้านี้ส่งผลต่อการตัดสินใจผลิจสินค้าในเดือนถัด ๆ ไป

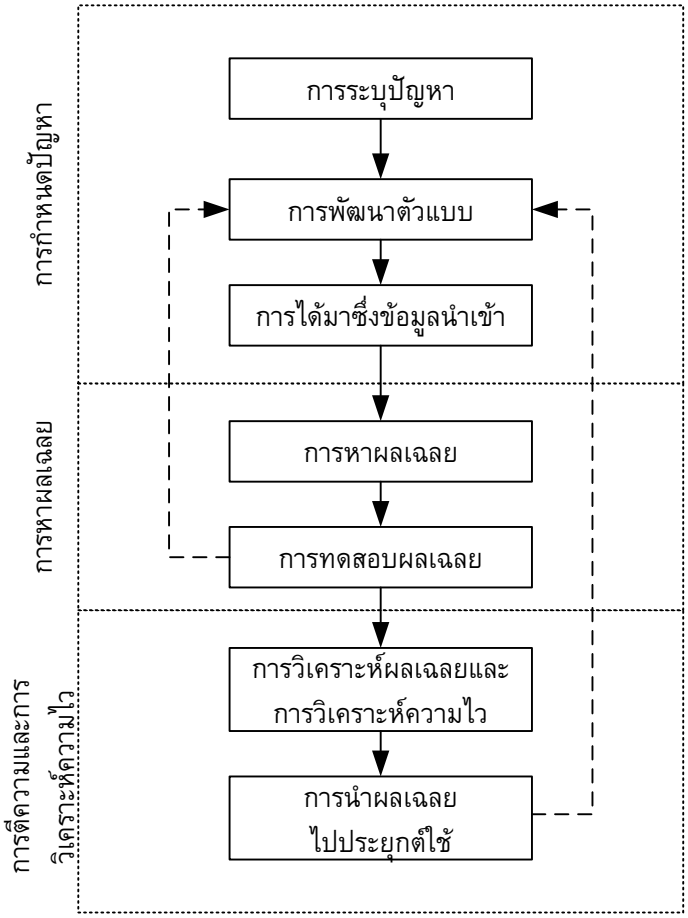
1.3 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร

ขั้นตอนการสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจแบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ ดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Formulation)
2. การหาคำตอบ (Solving)

3. การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ (Interpretation and sensitivity analysis)

ซึ่งแต่ละขั้นตอนประกอบด้วยขั้นตอนย่อยดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ขั้นตอนย่อยในการแก้ปัญหา

1.3.1 การกำหนดปัญหา

เป็นกระบวนการในการพิจารณาสถานการณ์ของปัญหาแล้วแปลงไปสู่ตัวแบบคณิตศาสตร์ ในส่วนนี้เป็นที่สำคัญที่สุด เนื่องจากผลของขั้นตอนนี้อาจทำให้เราได้ตัวแบบที่ไม่ดี ซึ่งจะส่งผลทำให้ผลเฉลย (Solution) นั้นผิดไป ดังนั้น ความสามารถของนักวิเคราะห์ผู้สร้างตัวแบบจึงมีส่วนที่สำคัญมาก ถึงแม้ในปัจจุบันเราจะมีโปรแกรมสำเร็จรูป (Software program) ที่ช่วยในการแก้ปัญหาตัวแบบคณิตศาสตร์ ที่แต่โปรแกรมสำเร็จรูปเหล่านั้น ไม่สามารถสร้างตัวแบบของปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างอัตโนมัติ วัตถุประสงค์ของการกำหนดปัญหานี้เพื่อให้แน่ใจว่าตัวแบบคณิตศาสตร์นี้สามารถกล่าวถึงปัญหาในประเด็นที่สำคัญ ๆ ได้อย่างครบถ้วน ดังนั้นการกำหนดปัญหาจึงสามารถแบ่งได้เป็น 3 ส่วน

(1) การระบุปัญหา (Defining the problem) ส่วนที่แรกของการกำหนดปัญหานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างคำจำกัดความที่สั้น กระทัดรัดและได้ใจความ ซึ่งข้อความนี้มีความหมายและระบุส่วนต่าง ๆ ของปัญหา การระบุปัญหาอาจเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดและยากที่สุด ในหลายๆ กรณี เราอาจไม่ได้คำนึงถึงเฉพาะลักษณะปัญหาที่เกิดขึ้น แต่ต้องพิจารณาถึงสาเหตุของปัญหาที่แท้จริง ปัญหาหนึ่งอาจมีความสัมพันธ์กับอีกปัญหาหนึ่ง ทำให้การแก้ปัญหานี้โดยไม่คำนึงถึงปัญหาที่เกี่ยวข้องอาจทำให้ปัญหาซับซ้อนขึ้น หากเราแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งเพียงปัญหาเดียวผลเฉลยที่ได้อาจไม่เหมาะสมกับสถานการณ์จริง ดังนั้น จึงควรมีการวิเคราะห์ว่าผลลัพธ์จากปัญหาหนึ่งมีผลต่อปัญหาอื่น ๆที่เกี่ยวข้องอย่างไร

การกำหนดวัตถุประสงค์ของตัวแบบ เราต้องกำหนดให้สามารถวัดค่าได้ ตัวอย่าง เช่น ปัญหาการบริการของโรงพยาบาล (Health care delivery) ว่ามีความรวดเร็วและทันเวลาในโรงพยาบาล ตัววัด (วัตถุประสงค์) ที่อาจมีได้หลายอย่าง เช่น การเพิ่มขึ้นของจำนวนเตียง การลดจำนวนวันโดยค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยอยู่ในโรงพยาบาล การเพิ่มขึ้นของสัดส่วนแพทย์กับคนไข้ และอื่น ๆ เมื่อตัววัด(วัตถุประสงค์)เหล่านี้ได้ถูกนำมาพิจารณา (Blake and Carter, 2002) ปัญหาที่แท้จริงควรจะถูกนำมาพิจารณาด้วย

(2) การพัฒนาตัวแบบ (Developing a model) การพัฒนาตัวแบบ เมื่อเราสามารถเลือกปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ขั้นตอนต่อไปคือ การสร้างตัวแบบตัดสินใจ ส่วนหนึ่งของตัวแบบคณิตศาสตร์ ก็คือ เซตของความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงในรูปสมการหรืออสมการ โดยทั่วไป ตัวแบบมักจะมีตัวแปรตัดสินใจและพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว ตัวแปรตัดสินใจหมายถึงปริมาณของสิ่งหรือกิจกรรมที่ต้องการวัด พารามิเตอร์ของปัญหาเป็นข้อมูลเชิงปริมาณของปัญหา เช่น ในการผลิตขนมเค็กชนิดหนึ่ง ต้นทุนในการสั่งซื้อสินค้า ปริมาณส่วนผสม ซึ่งประกอบด้วย แป้ง น้ำตาล และไข่ไก่ โดยทั่วไป ค่าตัวแปรตัดสินใจ ก็คือปริมาณของสิ่งของหรือกิจกรรมที่ผู้ตัดสินใจต้องการทราบค่า ขณะที่พารามิเตอร์เป็นปริมาณที่เราทราบค่าจากนโยบายขององค์กร หรือสภาพสถานการณ์ปัจจุบัน

หากตัวแบบมีการสร้างอย่างระมัดระวัง ที่จะรวบรวมรายละเอียดของปัญหาจำนวนหนึ่งได้อย่างเหมาะสม ส่วนรายละเอียดที่เหลืออาจสร้างเป็นข้อตกลงของตัวแบบไว้ ตัวแบบที่ดีนั้นควรจะสามารถหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ในสถานการณ์จริงและง่ายในการทำความเข้าใจและปรับปรุง รวมทั้งข้อมูลนำเข้าสามารถหาได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูล

ปัญหาหนึ่ง ๆ อาจง่ายหรือซับซ้อนขึ้นอยู่กับผู้พัฒนาตัวแบบว่าต้องการรวบรวมรายละเอียดของปัญหาไว้ในตัวแบบมากน้อยเพียงใด หากรวบรวมรายละเอียดไว้มาก ส่วนที่เหลือกก็จะสร้างเป็นข้อตกลงไว้ ตัวแบบลักษณะนี้จะความซับซ้อนมากขึ้น การสร้างตัวแบบลักษณะนี้อาจยุ่งยากมากกว่าตัวแบบที่มีรายละเอียดน้อยและสร้างข้อตกลงไว้มาก รวมทั้งเวลาในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยก็อาจจะมากตามไปด้วย อย่างไรก็ตาม การสร้างข้อตกลงกับปัญหาไว้จำนวนมาก อาจทำให้ตัวแบบของเราขาดความยืดหยุ่นเหมือนกับปัญหาจริง ซึ่งอาจส่งผลให้ผล

เฉลยที่ได้สอดคล้องกับปัญหาจริงได้น้อยลงไป ดังนั้นผู้พัฒนาตัวแบบจะต้องพิจารณาว่าจะรวมรายละเอียดของปัญหาไว้มากน้อยเพียงใด เพื่อให้ตัวแบบที่ได้สามารถหาผลเฉลยได้และยังคงเหมาะสมสำหรับปัญหาจริง

(3) การได้มาซึ่งข้อมูลนำเข้า (Acquiring input data) หลังจากที่สร้างตัวแบบแล้ว ทำให้ทราบว่าข้อมูลอะไรบ้างที่จำเป็นต้องรวบรวมเพื่อนำมาใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในตัวแบบ โดยทั่วไปคือค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ นั่นเอง การรวบรวมข้อมูลเหล่านี้มีความสำคัญมากอีกประการหนึ่ง ถ้าเราได้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ไม่ถูกต้องแม่นยำ ก็จะส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ผิดพลาดไป ข้อมูลที่ต้องการเก็บรวบรวมเพื่อมาใช้ในตัวแบบมักมาจากหลายแห่ง ในบางกรณี รายงานหรือเอกสารของบริษัทอาจนำมใช้เป็นข้อมูลสำหรับตัวแบบได้ บางครั้งอาจต้องใช้การสัมภาษณ์พนักงานในบริษัทหรือผู้เชี่ยวชาญหรือบุคคลที่เกี่ยวข้อง ตัวอย่างเช่น หัวหน้าแผนก อาจบอกกับเราถึงระดับความถูกต้องของเวลาที่ใช้ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง บางครั้งอาจต้องใช้ข้อมูลเชิงสำรวจโดยการสุ่มตัวอย่างจากประชากรเป้าหมาย การสุ่มตัวอย่างและการวัดโดยตรงจากการทำงานจริง อาจเป็นอีกแหล่งข้อมูลสำหรับตัวแบบ ตัวอย่างเช่น เราอาจต้องการทราบว่าวัตถุดิบกี่กิโลกรัมที่ใช้ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งจำนวน 1 ชิ้น ข้อมูลส่วนนี้อาจได้จากการไปที่โรงงานและทำการวัดปริมาณการใช้วัตถุดิบจากสายการผลิตโดยตรงโดยการสุ่มตัวอย่างและใช้เทคนิคทางสถิติเพื่อหาปริมาณวัตถุที่ใช้ อีกกรณีหนึ่งอาศัยข้อมูลทุติยภูมิจากฝ่ายผลิตหรือฝ่ายบัญชี เพื่อหาปริมาณดังกล่าว

1.3.2 การหาคำตอบ

ปัจจุบันการหาผลเฉลยอาจใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (Software package) ดังนั้นในขั้นตอนนี้ประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 2 ขั้นตอนคือ การหาผลเฉลย (Developing a solution) และการทดสอบผลเฉลย (Testing a solution)

(1) การหาผลเฉลยเป็นการหาคำตอบที่ดีที่สุดให้กับปัญหา ในบางกรณีอาจใช้การลองผิดลองถูกวิธีการต่าง ๆ เพื่อกำหนดผลเฉลยที่เป็นไปได้แล้วจำนวนหนึ่งเลือกหนึ่งผลเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาบางอย่าง เราอาจต้องการทดลองทุก ๆ ค่าของตัวแปรในตัวแบบเพื่อให้การตัดสินใจที่ดีที่สุด ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่า *วิธีการแจงนับ (Enumerative method)* สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนและยาก เราอาจใช้อัลลอริทึมเข้ามาช่วยแก้ปัญหา อัลกอริทึมหนึ่งอาจประกอบด้วยอนุกรมของขั้นตอนที่มีการทำซ้ำจนกระทั่งเราสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุด หากไม่คำนึงถึงวิธีการที่ใช้ความถูกต้องของผลเฉลยนี้ ขึ้นอยู่กับความถูกต้องของข้อมูลนำเข้าและตัวแบบ

(2) การทดสอบผลเฉลย ก่อนที่จะนำผลเฉลยมาวิเคราะห์และนำผลเฉลยที่ใช้ ควรมีการทดสอบ เพราะว่าผลเฉลยขึ้นอยู่กับข้อมูลนำเข้าและตัวแบบ ซึ่งทั้งสองส่วนนี้จะต้องมีการทดสอบความถูกต้อง การทดสอบข้อมูลนำเข้าอาจทได้หลายวิธี วิธีการหนึ่งคือการเก็บรวบรวม

ข้อมูลเพิ่มเติมจากแหล่งอื่น ๆ และใช้สถิติในการทดสอบ เพื่อเปรียบเทียบว่า ข้อมูลที่เก็บได้ใหม่กับข้อมูลเดิมมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ หากมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญแสดงว่าเรามีความจำเป็นต้องหาข้อมูลที่มีความถูกต้องมากกว่านี้ ถ้าข้อมูลนำเข้านี้มีความถูกต้อง แต่ผลเฉลยมีความไม่แน่นอน เที่ยงตรง หรือ สอดคล้องกับปัญหา แสดงว่าตัวแบบอาจไม่เหมาะสม ในกรณีนี้ เราควรตรวจสอบตัวแบบว่าสามารถแสดงถึงสถานการณ์จริงหรือไม่

1.3.3 การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์

การแปลความหมายและการวิเคราะห์ความไว ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนย่อย คือ (1) การวิเคราะห์ผลเฉลยและการวิเคราะห์ความไว และ (2) การนำผลเฉลยไปประยุกต์ใช้

(1) การวิเคราะห์ผลเฉลยและการวิเคราะห์ความไว เริ่มจากการระบุความหมายโดยนัย (Implication) ของผลลัพธ์ ส่วนใหญ่ผลเฉลยของปัญหา อาจเป็นผลจากชนิดของกิจกรรมหรือการเปลี่ยนแปลงแนวทางในการที่องค์กรจะดำเนินงาน กิจกรรมหรือการเปลี่ยนแปลงจะถูกกำหนดและวิเคราะห์ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้

เนื่องจากตัวแบบคณิตศาสตร์ เป็นเพียงการประมาณของความจริง (Reality) การวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงในตัวแบบ หรือข้อมูลนำเข้าจะเป็นส่วนสำคัญของการวิเคราะห์ผลเฉลย ซึ่งการวิเคราะห์นี้เรียกว่า การวิเคราะห์ความไว หรือ การวิเคราะห์หลังได้ค่าเหมาะสมที่สุดแล้ว (Post-optimality) หรือ What-if Analysis การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis) นำมาใช้เพื่อระบุการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลย เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ หรือเงื่อนไขต่าง ๆ ของตัวแบบ การวิเคราะห์ความไว เป็นการทดสอบเพิ่มเติมที่จะนำมาใช้ เพื่อให้มั่นใจว่า ผลเฉลยยังคงเหมาะสมหรือไม่อยู่เมื่อค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขเปลี่ยนไป

(2) การนำผลเฉลยไปประยุกต์ใช้ ส่วนนี้เป็นส่วนที่สำคัญอีกส่วนหนึ่งที่สำหรับคณะนักวิเคราะห์ ถึงแม้ว่าบริษัทผลเฉลยจากตัวแบบจะระบุว่าบริษัทสามารถทำกำไรได้เพิ่มขึ้นเป็นหลักล้านบาท แต่ผู้บริหารอาจยังคงปฏิเสธผลเฉลยนี้ ทำให้ตัวแบบที่สร้างขึ้นนั้น สูญเปล่า เมื่อมีการทำผลเฉลยไปใช้แล้วจะต้องมีการคอยตรวจดูอย่างใกล้ชิด บ่อยครั้งเมื่อเวบาเปลี่ยนไปค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ต้องเปลี่ยนแปลงไป เช่น การเปลี่ยนแปลงทางเศรษฐศาสตร์ ความต้องการสินค้า เป็นต้น ทำให้ผู้วิเคราะห์ต้องมีการปรับตัวแบบให้เหมาะสมอยู่เสมอ

ตัวอย่าง บทความของ (Klingman, Phillips, and Young, 1987) ได้ประยุกต์ใช้เทคนิคต่าง ๆ ทางด้านการจัดการเพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อจัดสรรทรัพยากรของบริษัท CITGO จำกัด ทำให้บริษัทฯสามารถประหยัดค่าใช้จ่ายไปได้ 70 ล้านบาทต่อปี ซึ่งบริษัทแห่งนี้เป็นบริษัทกลั่นน้ำมัน และจัดจำหน่ายน้ำมัน ซึ่งซื้อมาจากบริษัท เซ้าแลนด์ จำกัด กลุ่มนักวิเคราะห์ของบริษัทฯมีเป้าหมายสองประการ คือ

1. การสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ เพื่อหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด สำหรับการดำเนินการกลั่น
2. การสร้างตัวแบบสำหรับระบบการกระจายสินค้าให้แก่ลูกค้า ซึ่งตัวแบบนี้สามารถใช้สำหรับการส่งสินค้าให้ลูกค้าใน 11 สัปดาห์

การหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการดำเนินการกลั่นน้ำมัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คลิงแมนและคณะ ได้ศึกษากระบวนการกลั่น และผลิตภัณฑ์ที่ได้จากการกลั่น ซึ่งพบว่า ผลิตภัณฑ์ที่ได้จากกระบวนการกลั่นคือ น้ำมันเชื้อเพลิง น้ำมันเตา เนฟต้า และน้ำมันหล่อลื่น จากนั้นได้กำหนดวัตถุประสงค์ในการพัฒนาตัวแบบ คือ เพื่อทำให้การดำเนินการกลั่นมีต้นทุนที่ต่ำที่สุด

ขั้นตอนที่ 2 สร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เพื่อทำให้การดำเนินการกลั่นเหมาะสมที่สุด ตัวแบบนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำให้ทุนการผลิตผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ นั้นต่ำที่สุด โดยตัวแบบที่ได้จะมีข้อจำกัด เพื่อทำให้มั่นใจว่าน้ำมันดิบที่ใช้เป็นวัตถุดิบนี้มีคุณภาพ เพื่อให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพตามต้องการ นอกจากนี้ ยังมีข้อจำกัดของการผสมข้อน้ำมันดิบ (ดังในตัวอย่างที่ 2.6 ในบทที่ 2) ข้อกำหนดเกี่ยวกับความสามารถของโรงกลั่นและอนุญาตให้มีการมีการเก็บรักษาสินค้าคงคลังของผลิตภัณฑ์ประเภทต่าง ๆ

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจากบริษัทนี้มีหลายโรงกลั่น ทางคณะผู้ศึกษาจึงได้ไปศึกษาที่โรงกลั่นในรัฐหลุยซีอาน่าร์ ซึ่งเป็นโรงกลั่นที่ใกล้ที่สุด เพื่อพยายามจะประมาณความสัมพันธ์ที่สำคัญต่างๆ เช่น

(1) เพื่อศึกษาปัจจัยนำเข้าที่ใช้มีผลต่อต้นทุนการผลิตอย่างไรสำหรับแต่ละผลิตภัณฑ์ที่ได้จากการกลั่น

(2) ปริมาณพลังงานที่จำเป็นในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิด ทำให้ทางคณะผู้วิเคราะห์ต้องติดตั้งระบบมิเตอร์ใหม่

(3) ปริมาณผลผลิตที่ได้เมื่อเทียบกับปริมาณปัจจัยนำเข้าและปัจจัยผลผลิต เช่น ถ้าใช้น้ำมันดิบ 1 แกลลอนน่าจะได้ให้น้ำมันเชื้อเพลิง 0.65 แกลลอน ดังนั้นอัตราการกลั่นเท่ากับ 0.65

(4) เพื่อลดต้นทุนในการซ่อมบำรุง ทางคณะผู้วิเคราะห์ได้เก็บรวมรวมชิ้นส่วนเครื่องจักรที่เก็บไว้ในคลัง และจำนวนครั้งที่อุปกรณ์ และเครื่องจักรเสีย เพื่อให้เกิดความถูกต้องของข้อมูลจึงจำเป็นต้องติดตั้งระบบการจัดการฐานข้อมูล รวมทั้งระบบข้อมูลการซ่อมเครื่องจักร ระบบการควบคุมกระบวนการผลิตก็ต้องมีเฝ้าสังเกตการณ์ปัจจัยนำเข้าและแหล่งวัตถุดิบต่าง ๆ ที่ใช้ในกระบวนการผลิต

ขั้นตอนที่ 4 ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ โดยนำปัจจัยนำเข้า และปัจจัยผลผลิตของกระบวนการกลั่นที่ได้จากการเก็บรวมรวมข้อมูลจริงในการผลิตในเดือนใดเดือนหนึ่ง กับผลเฉลยที่ได้จากตัวแบบ

ขั้นตอนที่ 5 วิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์หรือปัจจัยนำเข้า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของปัจจัยนำเข้าแล้วส่งผลให้ผลผลิตที่ได้แตกต่างจากปัจจัยผลผลิตที่เกิดขึ้นจริง
ขั้นตอนที่ 6 ประมวลผลตัวแบบเพื่อให้แผนการกลั่นรายวัน
ขั้นตอนที่ 7 เมื่อมีระบบฐานข้อมูลและการควบคุมกระบวนการผลิตแล้ว ตัวแบบสามารถนำมาใช้เป็นแนวทางในการดำเนินการกลั่นในแต่ละวัน บริษัทได้ประเมินผลประโยชน์ของระบบการกลั่นพบว่ามีผลประโยชน์มากกว่า 50 ล้านเหรียญสหรัฐต่อปี

ระบบการจัดนำหน่ายผลิตภัณฑ์ให้ลูกค้า
ขั้นตอนที่ 1 บริษัทต้องการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดส่ง กระจายสินค้าและการตลาด ดังนี้

(1) ควรซื้อน้ำมันดิบจากผู้ผลิตรายใด
(2) สินค้าที่ผลิตได้ควรขายที่ใด
(3) ควรตั้งราคาขายเท่าใด
(4) สินค้าแต่ละชนิดควรมีการเก็บสินค้าคงคลังสำรองเท่าใด

โดยวัตถุประสงค์ที่ต้องการเหล่านี้ มีความเกี่ยวข้องกับการทำกำไรของบริษัท
ขั้นตอนที่ 2 สร้างตัวแบบข่ายงานเพื่อหาต้นทุนการขนส่งที่ประหยัดที่สุด เพื่อระบุว่าควรซื้อวัตถุดิบจากผู้ผลิตรายใด กำหนดตลาดไว้ที่ใด และมีการกระจายสินค้าอย่างไร ในกรณีศึกษานี้มีตัวแปรตัดสินใจ ซึ่งก็คือตัวแปรที่เราต้องการทราบค่าเพื่อนำไปใช้ในการตัดสินใจ จำนวนทั้งสิน 15,000 ตัวแปร และข้อจำกัดจำนวน 3,000 ข้อจำกัด
ขั้นตอนที่ 3 มีการติดตั้งระบบฐานข้อมูลเพื่อเก็บรวมรวมยอดขาย สินค้าคงคลัง การขาย และอัตราแลกเปลี่ยนของสินค้าที่ผลิตได้ การวิเคราะห์การถดถอย (Regression analysis) สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ราคาขายส่ง และความต้องการของผู้ค้าส่งของบริษัท
ขั้นตอนที่ 4 ทำการพยากรณ์ว่าในอนาคตค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ อาจมีการเปลี่ยนแปลงเป็นค่าใดได้บ้าง หรือมีค่าอยู่ในช่วงใด จากนั้นค่าเหล่านี้ไปทดลองประมวลผลดับตัวแบบ เพื่อหาผลเฉลยที่ได้ ต้องมีพิจารณาว่าผลเฉลยที่ได้เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร และในกรณีที่เกิดเหตุการณ์นั้นบริษัทควรจะมีนโยบายหรือแผนอย่างไร
ขั้นตอนที่ 5 ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ
ขั้นตอนที่ 6 และ 7 นำผลเฉลยที่ได้ไปใช้ ซึ่งในที่นี้ต้องมีการประสานงานระหว่างการดำเนินการกลั่นและระบบการตลาด แผนกการส่งสินค้าและการวางแผนการผลิตรวมกันเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการสื่อสารและการไหลของข้อมูล

นอกจากนี้ ยังมีตัวอย่างการประยุกต์ใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุดในด้านต่าง ๆ ได้แก่ วงการแพทย์และสาธารณสุข Chu, et al. (2000) Blake and Carter (2002)

และ Azaiez and Sharif (2005) ใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรช่วยในการจัดตารางการทำงานของพยาบาลและแพทย์ Smith (1993) ใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรในการวางแผนการผลิตไฟฟ้า และคิดค่าไฟฟ้าที่เหมาะสมแก่ผู้รับบริการ Guo and He (1999) และ Agha (2006) ได้นำตัวแบบการจัดสรรทรัพยกรมาใช้ในการบริหารจัดการภาคการเกษตร Milan, Fernandez, and Aragones (2006) และ Ronen (2002) ได้นำตัวแบบไปใช้ในการวางแผนการขนส่งและจัดการสินค้าคงคลัง

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงอธิบายถึงองค์ประกอบของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร
2. พร้อมยกตัวอย่างปัญหาการจัดสรรทรัพยากร พร้อมระบุวัตถุประสงค์ของการตัดสินใจและข้อจำกัดต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับผลเฉลยของปัญหา
3. จงอธิบายถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรมาพอสังเขป
4. ในฐานะที่ท่านเป็นนักวิเคราะห์ระบบงาน การแก้ปัญหาการจัดทรัพยากรมีประโยชน์ในการวิเคราะห์ระบบงานของท่านอย่างไร

บรรณานุกรม

Agha, S.R. (2006). Use of goal programming and integer programming for water quality management—A case study of Gaza Strip. *European Journal of Operational Research*, 174, 1991-1998.

Azaiez, M.N., Sharif, S.S.A (2005). A 0-1 goal programming model for nurse scheduling. *Computers & Operations Research*, 32, 491-507.

Balakrishnan, N. (2007) *Managerial decision modeling with spreadsheets* (2 ed.): Prentice Hall.

Blake, J. T., Carter, M.W. (2002). A goal programming approach to strategic resource allocation in a cute care hospital. *European Journal of Operational Research*, 140, 541-561.

Chu, SCK., Ho, MPP., Lee, KKY., Lo, HP. (2000). Nurses allocation models for maternal and child health service. *Journal of the Operational Research Society*, 51,1193-1204.

Guo, L.S., He, Y.S. (1999). Integrated multi-criteria decision model: a case study for the allocation of facility in Chinese agriculture. *Engineering Research*, 73, 87-94.

Klingman, D, Phillips, D S, and Young, W. (1987). The successful development of management science throughout CITGIO corporation. *Interfaces* 17, 4-25.

Milan, E.L., Fernandez, S.M., and Aragones, L.M.P. (2006). Sugar cane transportation in Cuba, a case study. *European Journal of Operational Research*, 174, 374-386.

Ronen, D. (2002). Marine inventory routing: shipments planning. *Journal of Operational Research Society*, 53, 108-114.

Smith, S.A.(1993). A linear programming model for real-time pricing of electric power service. *Operations Research*, 41(3), 470-483.

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

Linear Programming Model

2

Linear Programming Model

การโปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในอุตสาหกรรม การธนาคาร การศึกษา การขนส่ง การเกษตร และการปิโตรเลียม การวางแผนการจัดสรรทรัพยากรโดยนำปัญหามาเขียนในรูปของตัวแบบคณิตศาสตร์ จะเรียกว่า *การโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical programming)* โดยคำว่า*การโปรแกรม (Programming)* ในที่นี้หมายถึง การ*วางแผน (Planning)* ส่วนคำว่า *คณิตศาสตร์ (Mathematical)* หมายถึงตัวแบบคณิตศาสตร์ของปัญหาที่เกิดขึ้น ดังนั้น การโปรแกรมเชิงเส้น จึงเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในวางแผนเพื่อจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์ที่สุดตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้

โดยทั่วไปการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย *ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variable)* ซึ่งแทนปริมาณของกิจกรรมต่าง ๆ ที่พิจารณา ข้อจำกัด(Constraint) เป็นเงื่อนไขที่ระบุว่าปัญหานี้จะทำอะไรได้บ้าง หรือทำกิจกรรมอะไรไม่ได้บ้าง ส่วนใหญ่ *ข้อจำกัดของทรัพยากรที่มีอยู่ (Resource constraint)* ซึ่งเขียนในรูปความสัมพันธ์ของอัตราการใช้ทรัพยากรของแต่ละกิจกรรม และ *ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function)* แสดงถึงประสิทธิผลของการใช้ทรัพยากรเพื่อทำกิจกรรมเหล่านี้ ในกรณีที่ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจในข้อจำกัดและฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นแบบเชิงเส้นตรง จะเรียกการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์นี้ว่า *การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming)* ในบทนี้ จะกล่าวถึงการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับปัญหาต่าง ๆ และข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

2.1 ขั้นตอนในการสร้างตัวแบบของปัญหา

การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในทางธุรกิจ อุตสาหกรรม หรือภาครัฐ นักวิเคราะห์ระบบต้องศึกษาปัญหาที่เกิดขึ้น เพื่อให้เข้าใจถึงปัญหาอย่างแท้จริง พิจารณาข้อจำกัด สมมติฐาน และ

วัตถุประสงค์ของการศึกษาปัญหาเสียก่อน แล้วจึงนำรายละเอียดต่าง ๆ มาสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ขั้นตอนการสร้างตัวแบบของปัญหาสามารถสรุปได้ดังนี้

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ (Defining decision variables) ตัวแปรตัดสินใจหมายถึงกิจกรรมที่ผู้ตัดสินใจสนใจ ค่าของตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสมคือปริมาณของกิจกรรมที่ควรจะกระทำ ผู้ตัดสินใจจะนำค่าของตัวแปรนี้เพื่อไปใช้ประกอบการตัดสินใจ ในแต่ละปัญหาตัวแปรตัดสินใจอาจแตกต่างกันไป ตามลักษณะเฉพาะของปัญหา เช่น ปัญหาด้านการลงทุน เราอาจต้องการทราบว่าควรลงทุนในธุรกิจแต่ละประเภทจำนวนเท่าใด ปัญหาด้านการผลิต เราต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดในแต่ละช่วงเวลาเป็นจำนวนเท่าใด เป็นต้น ตัวแปรตัดสินใจอาจเป็นตัวแปรมิติเดียวหรือหมายมิติก็ได้ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา เช่น ปัญหาการลงทุนข้างต้น อาจกำหนดให้ x_j เป็นตัวแปรตัดสินใจ แทนจำนวนเงินลงทุนที่จัดสรรให้กับธุรกิจประเภทที่ j สำหรับปัญหาการวางแผนการผลิตที่กล่าวข้างต้น อาจกำหนดให้ x_{ij} เป็นตัวแปรตัดสินใจ แทนปริมาณการผลิตสินค้า i ในช่วงเดือนที่ j เป็นต้น

(2) กำหนดฟังก์ชันเป้าหมายหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Defining objective function) เป็นการกำหนดเป้าหมายของตัวแบบ เพื่อให้สามารถหาค่าของตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งทำให้บรรลุวัตถุประสงค์ได้มากที่สุด โดยทั่วไปเราจะต้องระบุถึงทิศทางของฟังก์ชันนี้ เช่น เป้าหมายการหาค่าสูงสุด หรือ เป้าหมายการหาค่าต่ำสุด เป็นต้น

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา (Identifying constraints) เป็นการกำหนดข้อจำกัดของปัญหาในเทอมของตัวแปรตัดสินใจ โดยทั่วไป ข้อจำกัดพื้นฐานของปัญหาการหาค่าสูงสุด คือ ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ ปริมาณสูงสุดที่เป็นไปได้ของตัวแปรตัดสินใจ ข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ (Product specifications) เป็นต้น ข้อจำกัดพื้นฐานสำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุด ได้แก่ ปริมาณต่ำสุดของตัวแปรตัดสินใจ ข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ เป็นต้น

(4) สร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Developing linear programming models) หลังจากได้กำหนดตัวแปรตัดสินใจและข้อจำกัดต่าง ๆ แล้ว จะนำเอาฟังก์ชันวัตถุประสงค์และจำกัดมาพิจารณาร่วมกัน เพื่อให้สามารถหาผลเฉลย (Solution) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดและทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าดีที่สุด

(5) ตรวจสอบความถูกต้อง (Validation) เป็นการตรวจสอบว่าตัวแบบที่สร้างขึ้นนี้มีความถูกต้องหรือไม่ กล่าวคือ ต้องตรวจสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจ ข้อจำกัดต่างๆ และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ระบุไว้นั้นว่าสอดคล้องกับปัญหาที่กำหนดไว้และครบถ้วนหรือไม่ ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ มีค่าที่ถูกต้องหรือไม่ หากตัวแบบที่สร้างขึ้นมีความผิดพลาดอันเนื่องมาจากสาเหตุต่าง ๆ เช่น ระบุความสัมพันธ์ไม่ครบถ้วน ความสัมพันธ์ไม่ถูกต้อง ค่าพารามิเตอร์ผิดพลาด เป็นต้น ผลเฉลยที่ได้จากตัวแบบนี้ไม่สามารถนำไปใช้ในการตัดสินใจหรือนำไปใช้วางแผนได้

2.2 ตัวอย่างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ตัวอย่างการวางแผนการผลิตของโรงงานเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่ง ผู้จัดการแผนกวางแผนการผลิต ต้องการวางแผนการผลิตสินค้า 3 ชนิดคือ โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ และ เก้าอี้มีพนักพิง ในสัปดาห์หน้า โดยมีข้อจำกัดทางด้านเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 4 ขั้นตอน คือ การตัด การขัด การทา-พ่นสี และการประกอบ ข้อมูลเกี่ยวกับเวลาที่ใช้ในการผลิต และจำนวนชั่วโมงเครื่องจักรที่สามารถใช้ได้ในแต่ละขั้นตอน แสดงดังตารางที่ 2.1 ส่วนราคาขายต่อหน่วย ต้นทุนต่อหน่วย และปริมาณความต้องการสูงสุดแสดงดังตารางที่ 2.2 สำหรับปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตและปริมาณวัตถุดิบคงคลังที่สามารถนำมาใช้ในการผลิตสินค้าทั้งสองชนิด แสดงดังตารางที่ 2.3 ในที่นี้ผู้จัดการต้องการตัดสินใจว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าใด

ตารางที่ 2.1 ข้อมูลเกี่ยวกับเวลาที่ใช้ในการผลิต และเวลาทำงานของเครื่องจักร

ขั้นตอน	เวลาที่ใช้ในการผลิตต่อหน่วย (นาที)			เวลาทำงานของเครื่องจักรที่มีอยู่ (นาที)
	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่	เก้าอี้มีพนักพิง	
การตัด	8	12	10	2,400
การขัด	4	5	5	2,400
การทา-พ่นสี	6	10	5	2,200
การประกอบ	5	5	6	2,200

ตารางที่ 2.2 ข้อมูลเกี่ยวกับสินค้า

	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่	เก้าอี้มีพนักพิง
ราคาขาย (บาทต่อตัว)	370	550	350
ต้นทุน (บาทต่อตัว)	250	350	260
ปริมาณความต้องการสูงสุด(ตัว)	70	50	80

ตารางที่ 2.3 ข้อมูลด้านวัตถุดิบ

วัตถุดิบ	ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ต่อตัว			ปริมาณที่มีอยู่ในคลัง (หน่วย)
	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก	โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่	เก้าอี้มีพนักพิง	
ไม้แผ่น (ตารางฟุต)	2.5	7	3	700
ท่อเหล็ก (ฟุต)	5	8	–	800
แผ่นเหล็ก (ตารางฟุต)	–	–	6	500

(1) กำหนดตัวแปร

x_1 แทน จำนวนโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กที่ผลิตใน 1 สัปดาห์

x_2 แทน จำนวนโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ที่ผลิตใน 1 สัปดาห์

x_3 แทน จำนวนเก้าอี้มีพนักพิงที่ผลิตใน 1 สัปดาห์

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ในการวางแผนนี้อาจมีผลเฉลยที่เป็นไปได้หลายผลเฉลย ผู้วิเคราะห์จะต้องการเปรียบเทียบคุณภาพผลเฉลยต่าง ๆ เพื่อหาผลเฉลยที่ดีที่สุด ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะนำมาใช้เป็นตัววัดประสิทธิภาพของผลเฉลย ในที่นี้เราใช้กำไรรวมสูงสุดเป็นตัววัดประสิทธิภาพ กำไรต่อหน่วยของสินค้าแต่ละชนิด สามารถหาได้จากราคาขายสินค้าต่อตัวลบด้วยต้นทุนสินค้าต่อตัว ดังนั้น

$$\text{กำไร} = (370-250)x_1 + (550-350)x_2 + (350-260)x_3$$
$$= 120x_1 + 200x_2 + 90x_3$$

ให้ z เป็นตัวแปรแทนผลกำไรรวม ซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะได้

$$\text{ค่าสูงสุด} \quad z = 120x_1 + 200x_2 + 90x_3 \qquad (1)$$

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

จำนวนชั่วโมงเครื่องจักรที่มีสามารถใช้ในการผลิต และจำนวนวัตถุดิบที่มีอยู่ในคลังที่สามารถนำมาใช้ผลิตใน 1 สัปดาห์ ในการผลิตสินค้าจะต้องผ่านขั้นตอนการผลิตในแต่ละขั้นตอนต้องใช้เครื่องจักรแต่ละประเภทจำนวน 1 เครื่องเท่านั้น ข้อจำกัดเกี่ยวกับชั่วโมงเครื่องจักรและวัตถุดิบ สามารถเขียนได้ดังนี้

1. ข้อจำกัดด้านเวลาในขั้นตอนการตัด

การผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก 1 ตัว เวลาที่ใช้ในการตัดเท่ากับ 8 นาที ขณะที่การผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ 1 ตัวใช้เวลาในการตัด 12 นาทีและเก้าอี้มีพนักพิง 1 ตัวใช้เวลาในการตัด 10 นาที ดังนั้นปริมาณเวลารวมในการผลิตของขั้นตอนการตัด เท่ากับผลรวมของเวลาในการตัดต่อตัวคูณกับปริมาณการผลิตสินค้าแต่ละชนิด โดยปริมาณเวลารวมในการตัดจะต้องไม่เกิน 2,400 นาที ดังนั้นสามารถเขียนข้อจำกัดได้ดังนี้

$$8x_1 + 12x_2 + 10x_3 \leq 2,400 \qquad (2)$$

ทำนองเดียวกันกับข้อจำกัดเวลาในขั้นตอนการตัด ข้อจำกัดเวลาในขั้นตอนการขัด การทา-พ่นสี และการประกอบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 2,400 \qquad (3)$$
$$6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 2,200 \qquad (4)$$
$$5x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 2,200 \qquad (5)$$

2. ข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณวัตถุดิบ

ในการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก 1 ตัวต้องใช้ไม้แผ่นจำนวน 2.5 ตารางฟุต เช่นเดียวกับโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่และเก้าอี้มีพนักพิง 1 ตัวต้องใช้ไม้แผ่นจำนวน 7 และ 3 ตารางฟุต ดังนั้น ปริมาณไม้แผ่นที่ต้องการในการผลิต เท่ากับ ผลรวมของปริมาณการใช้ไม้แผ่นต่อหน่วยคูณกับจำนวนสินค้าที่ต้องผลิต โดยที่ปริมาณไม้แผ่นที่มีอยู่สำหรับใช้ในการผลิตต้องไม่เกิน 700 ตารางฟุต ดังนั้น ข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณไม้แผ่น คือ

$$2.5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 700 \quad (6)$$

ทำนองเดียวกันกับปริมาณไม้แผ่น ข้อจำกัดปริมาณเหล็กท่อน และแผ่นเหล็กมีดังนี้

$$5x_1 + 8x_2 \leq 800 \quad (7)$$

$$6x_3 \leq 500 \quad (8)$$

3. ข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณความต้องการสูงสุด

ข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณความต้องการสูงสุดของสินค้าแต่ละชนิด โดยปริมาณความต้องการของโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่และเก้าอี้มีพนักพิง เท่ากับ 70 50 และ 80 ตัวต่อสัปดาห์ตามลำดับ ซึ่งบริษัทควรจะต้องผลิตสินค้าไม่ควรเกินต้องการนี้ ดังนั้นเราสามารถเขียนข้อจำกัด (9) ถึง (11) ได้ดังนี้

$$x_1 \leq 70 \quad (9)$$

$$x_2 \leq 50 \quad (10)$$

$$x_3 \leq 80 \quad (11)$$

4. ข้อจำกัดของตัวแปรมีค่ามากกว่าศูนย์

เนื่องจากปริมาณการผลิตสินค้าแต่ละชนิดจะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ ทำให้เราต้องสร้างข้อกัดที่จะทำให้ปริมาณการผลิตสินค้า มีค่าไม่เป็นจำนวนลบ (Non–negative) นั่นคือ

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3 \quad (12)$$

(4) ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ดังนั้นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับปัญหานี้คือ

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z = 120x_1 + 200x_2 + 90x_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 + 10x_3 &\leq 2,400 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 2,400 \\ 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 &\leq 2,200 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 2,200 \\ 2.5x_1 + 7x_2 + 3x_3 &\leq 700 \end{aligned} \quad (13)$$

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 8x_2 &\le 800 \\
6x_3 &\le 500 \\
x_1 &\le 70 \\
x_2 &\le 50 \\
x_3 &\le 80 \\
x_i &\ge 0 \qquad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

ตัวแบบคณิตศาสตร์นี้ใช้สำหรับพิจารณาหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดต่าง ๆ มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง เราจึงเรียกตัวแบบคณิตศาสตร์นี้ว่า *ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming model)*

การหาค่าผลเฉลยสามารถกระทำได้ โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้แก่ โปรแกรม Microsoft Excel ซึ่งจะแสดงวิธีหาผลเฉลยในบทที่ 3 ทำให้ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 70$ $x_2 = 40.71$ และ $x_3 = 80$ โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) เท่ากับ 23,742.86 บาท นั่นคือ ควรผลิต โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่และเก้าอี้มีพนักพิง เท่ากับ 70 40.71 และ 80 ตัวต่อสัปดาห์ ตามลำดับ เนื่องจากปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่และเก้าอี้มีพนักพิงไม่เป็นจำนวนเต็ม ในทางปฏิบัติผู้จัดการฝ่ายวางแผนการผลิตอาจใช้ผลเฉลยนี้เป็นกรอบการตัดสินใจว่าควรผลิตในปริมาณนี้หรือปริมาณที่ใกล้เคียง เช่น อาจผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่เพียง 40 ตัว แทนจำนวน 40.71 ตัว เมื่อนำปริมาณโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ 40 ตัว ไปแทนค่าในตัวแบบเพื่อตรวจสอบว่าข้อจำกัดด้านแรงงาน และวัตถุดิบเป็นไปได้หรือไม่ จะได้ผลเฉลยคือ $x_1 = 70$ $x_2 = 40$ และ $x_3 = 80$ ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 23,600 บาทก็ได้ ซึ่งจะได้กำไรน้อยกว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุด เพียง 142.86 บาท ดังนั้นจากผลเฉลยที่ได้นี้ทำให้ผู้จัดการแผนกวางแผนการผลิต ทราบปริมาณการผลิตสินค้าแต่ละชนิด ปริมาณการใช้เครื่องจักรแต่ละประเภทและปริมาณวัตถุดิบแต่ละชนิดที่ใช้ในการผลิตสินค้าทั้งสามชนิด

2.3 ข้อตกลงของการโปรแกรมเชิงเส้น

จากหัวข้อที่ผ่านมา ผู้จัดการแผนกวางแผนการผลิต สามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้แล้ว ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติปัญหามักมีลักษณะเฉพาะของปัญหาแตกต่างกันไป เช่น ราคาขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก ตัวละ 370 บาท ราคาต่อหน่วยนี้ไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณที่ขาย แต่ในทางปฏิบัติอาจมีการลดราคาสินค้าให้ลูกค้าบางรายที่ซื้อสินค้าจำนวนมากถึงระดับหนึ่ง เพื่อเป็นการส่งเสริมการขาย การ

ใช้โปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการวางแผนการผลิตในภาพรวมจึงมิได้คำนึงถึงประเด็นนี้ ดังนั้นการนำการโปรแกรมเชิงเส้นมาแก้ปัญหา จึงควรพิจารณาถึงข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นดังนี้

(1) ความสามารถในการแบ่งแยกได้ (Divisibility)

ตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัวสามารถมีค่าเป็นเศษส่วน หรือ มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ จากตัวอย่างการวางแผนการผลิตจะพบว่าปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ เท่ากับ 40.71 ตัว ซึ่งมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตาม โรงงานไม่สามารถผลิตสินค้านี้ จำนวน 40.71 ตัวได้จึงต้องมีการปัดเศษ (Round off) ค่าผลเฉลยที่ได้ให้เป็นจำนวนเต็ม

หากมีความต้องการให้ค่าของตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น จะต้องแก้ปัญหาโดยใช้ *การโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม (Integer programming)* ซึ่งจะกล่าวถึงเรื่องนี้ในบทที่ 6 อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาขนาดใหญ่การหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มอาจต้องใช้เวลาประมวลผลนาน

(2) ความเป็นสัดส่วนกัน (Proportionality)

การโปรแกรมเชิงเส้นมีหลักสำคัญคือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงของตัวแปรตัดสินใจ กล่าวคือ

1. ผลประโยชน์ที่ได้รับของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าของตัวแปรตัดสินใจ เช่น กำไรจากการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก จำนวน 1 ตัวเท่ากับ 120 บาท ถ้าขายโต๊ะประเภทนี้ 5 ตัวจะได้กำไรทั้งสิ้น $5 \times 120 = 600$ บาท เป็นต้น

2. หากพิจารณาที่ข้อจำกัดต่าง ๆ เช่น ข้อจำกัดเกี่ยวกับวัตถุดิบประเภทไม้แผ่น ในการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก 1 ตัวใช้ไม้แผ่น จำนวน 2.5 ตารางฟุต หากมีการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กนี้ จำนวน 10 ตัว จะต้องใช้ไม้แผ่นจำนวน จำนวน $2.5 \times 10 = 25$ ตารางฟุต

(3) การบวกกันได้ (Additivity)

ผลประโยชน์จากการกระทำกิจกรรมต่าง ๆ สามารถนำมาบวกกันได้เป็นผลประโยชน์รวม จากตัวอย่างจะเห็นว่าปริมาณผลกำไรต่อหน่วยที่ได้รับจากการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ และ เก้าอี้มีพนักพิง คือ 120 200 และ 90 บาทตามลำดับ ถ้าผลิตสินค้าแต่ละประเภทจำนวน 10 ตัว กำไรที่ได้รับจาการผลิตสินค้าทั้งสามประเภทนี้สามารถรวมกัน ทำให้ผลกำไรรวมเท่ากับ $10 \times 120 + 10 \times 200 + 10 \times 90 = 4{,}100$ บาท สำหรับปริมาณของปัจจัยการผลิตหรือปัจจัยในการดำเนินกิจกรรมหนึ่งสามารถรวมกับปัจจัยการผลิตประเภทเดียวกันนี้เพื่อดำเนินกิจกรรมอื่น ๆ ได้ เช่น ปริมาณไม้แผ่นที่ใช้ในการผลิตเป็นต้น ปริมาณไม้แผ่นจำนวน 2.5 ตารางฟุตที่ใช้สำหรับการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก จำนวน 1 ตัว ปริมาณไม้แผ่นจำนวน 7 ตารางฟุตสำหรับผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่จำนวน 1 ตัว และ

ปริมาณไม้แผ่นจำนวน 3 ตารางฟุตสำหรับการผลิตเก้าอี้มีพนักพิงจำนวน 1 ตัว ถ้าผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กจำนวน 10 หน่วย โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่จำนวน 15 หน่วย และเก้าอี้มีพนักพิงจำนวน 20 หน่วย แล้วปริมาณไม้แผ่นที่นำมาใช้ผลิตนี้สามารถบวกกันได้ ทำให้ทราบปริมาณความต้องการไม้แผ่นเพื่อการผลิตทั้งหมดเท่ากับ $10 \times 2.5 + 15 \times 7 + 20 \times 3 = 190$ ตารางฟุต เป็นต้น

(4) ความแน่นอน (Certainty)

ในทางปฏิบัติ พารามิเตอร์และค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในตัวแบบ มีค่าไม่แน่นอน เช่น ราคาขายสินค้าแต่ละชนิดในช่วงเวลาหนึ่ง อาจมีค่าสูงหรือต่ำขึ้นอยู่กับความต้องการของลูกค้าในช่วงเวลานั้นและ/หรือจำนวนการสั่งซื้อของลูกค้าแต่ละราย ชั่วโมงเครื่องจักรที่มีไว้เพื่อการผลิตอาจมีค่าไม่คงที่ เนื่องจากเครื่องจักรเสียในช่วงเวลานั้นหรือไม่ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม การใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดและนำผลเฉลยนี้ไปใช้ในการวางแผนในอนาคต เช่น การวางแผนการผลิตรวมจะเป็นการมองภาพรวมของโรงงาน ซึ่งมิได้พิจารณายอดการสั่งซื้อของลูกค้าแต่ละคน ดังนั้น การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจะต้องประมาณค่าของพารามิเตอร์หรือสัมประสิทธิ์ให้เป็นค่าคงที่ที่เราสามารถทราบค่าได้อย่างแน่นอน

(5) ความเป็นเชิงเส้น (Linearity)

ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจในตัวแบบจะต้องมีความสัมพันธ์กันเป็นเชิงเส้น ทั้งในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และข้อจำกัดต่าง ๆ ไม่มีการเขียนความสัมพันธ์อยู่ในรูปของค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ฟังก์ชันเอกโปรแนลเชียล (Exponential function) หรือลอการิทึม (Logarithmn)

(6) ความเป็นอิสระกัน (Independence)

ปริมาณยอดขายสินค้าทั้งสามประเภทเป็นอิสระจากกัน ถ้ายอดขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะไม่มีผลกระทบต่อยอดขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ หรือเก้าอี้มีพนักพิง ดังนั้น ผลประโยชน์ที่ได้รับในฟังก์ชันวัตถุประสงค์สำหรับแต่ละตัวแปรตัดสินใจนั้น เป็นอิสระจากกัน กล่าวคือ ไม่ว่าจะขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ หรือเก้าอี้ได้ในปริมาณเท่าใดก็ตาม กำไรจากการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก ยังคงหาได้จากการนำเอา กำไรต่อหน่วย ซึ่งมีค่าเท่ากับ 120 บาทต่อตัว คูณกับปริมาณขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โดยไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่หรือเก้าอี้ดังกล่าว

2.4 ปัญหาการจัดสรร

ทรัพยากรในทางอุตสาหกรรมได้แก่ แรงงานพนักงาน แรงงานเครื่องจักร วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิต เงินทุนหมุนเวียนในการผลิต เป็นต้น ทรัพยากรในทางธุรกิจได้แก่ เวลาทำงานของพนักงาน วัสดุอุปกรณ์ในสำนักงานและธุรกิจ เงินลงทุน เงินทุนหมุนเวียนการประกอบธุรกิจ เป็นต้น ในช่วงของการวางแผนงานทางธุรกิจหรืออุตสาหกรรม ทรัพยากรเหล่านี้มีอยู่อย่างจำกัด อาจทำให้ไม่สามารถดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ ในปริมาณที่ต้องการได้ องค์กรจึงต้องพิจารณาว่าควรจะทำกิจกรรมใดบ้างในปริมาณเท่าใด เพื่อให้ได้ประสิทธิภาพ หรือประสิทธิผลสูงสุด ตัวอย่างในทางธุรกิจ ได้แก่ การเลือกสื่อโฆษณา บริษัทต้องการทราบว่าควรจะมีแผนการโฆษณาในสื่อใดบ้างเพื่อให้เข้าถึงกลุ่มเป้าหมายได้สูงสุด โดยคำนึงถึงรายจ่ายในการโฆษณาในแต่ละสื่อ ซึ่งบริษัทมีงบประมาณรวมในการโฆษณาจำนวนหนึ่ง ตัวอย่างทางธุรกิจถัดไป เป็นการเลือกพอร์ตลงทุน (Portfolio) ว่าภายใต้จำนวนเงินทุนที่มีอยู่ ธุรกิจควรเลือกลงทุนในกลุ่มธุรกิจใด เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายผลตอบแทนในการลงทุน (Expected return on investment, E(ROI)) มีค่าสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดทางกฎหมาย นโยบายของบริษัท หรือความเสี่ยงในปริมาณที่ยอมรับได้ สำหรับตัวอย่างในทางอุตสาหกรรมและระบบโลจิสติกส์ เป็นการเลือกเครื่องจักร หรือพนักงานที่ทำงานให้เหมาะสมกับงานที่มีอยู่ โดยมีเป้าหมายหรือตัวชี้วัดผลสัมฤทธิ์คือ ต้นทุนรวมในการจัดสรรงานทั้งหมด

Mohammadpour and Khanzadi (2008) ได้สร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อใช้ในการวางแผนการรับพนักงานเข้าทำงานในบริษัทก่อสร้าง การจัดสรรพนักงานเข้าทำงานในหน้าที่ต่าง ๆ ตามความชำนาญและการวางแผนการฝึกอบรมพนักงานเพื่อให้สามารถทำงานแทนกันได้ ทำให้บริษัทสามารถจัดสรรพนักงานได้ตามความชำนาญ และฝึกอบรมพนักงานได้ตรงกับความต้องการแรงงานของบริษัท

ตัวอย่างในหัวข้อนี้เป็นการเลือกลงทุนในการโฆษาณาตามสื่อต่าง ๆ (Media selection) และการเลือกกลุ่มหลักทรัพย์หรือเลือกพอร์ตลงทุน (Portfolio selection) โดยการจัดสรรเงินทุนหรือค่าใช้จ่ายที่มีอยู่ให้ได้ประโยชน์สูงสุด นอกจากนี้ยังมีการจัดสรรพนักงานเข้าทำงานตามวันและเวลาต่าง ๆ เพื่อให้มีจำนวนพนักงานที่สุด ซึ่งนำไปสู่ค่าใช้จ่ายในการจ้างพนักงานต่ำที่สุด

ตัวอย่างที่ 2.1 โทรศัพท์มือถือเครือข่ายหนึ่งมีงบประมาณ 3,000,000 บาทต่อสัปดาห์ สำหรับการโฆษณาในประเทศ โดยบริษัทต้องการโฆษณาใน 5 สื่อ คือ การโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำของสถานีหนึ่ง การโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคกลางวันของสถานีหนึ่ง หนังสือพิมพ์รายวันฉบับหนึ่ง หนังสือพิมพ์รายสัปดาห์ฉบับหนึ่ง และการโฆษณาทางวิทยุช่วงรายการหลังข่าวภาคค่ำของสถานีวิทยุแห่งหนึ่ง จากการประเมินของฝ่ายการตลาดถึงปริมาณลูกค้าเป้าหมายที่ได้รับข่าวสารของบริษัท เทียบกับต้นทุนการโฆษณาในแต่ละสื่อ ดังตารางที่ 2.4

บริษัทมีนโยบายที่จะโฆษณาทางโทรทัศน์ช่วงรายการละครภาคค่ำอย่างน้อย 3 ครั้งต่อสัปดาห์ และโฆษณาทางโทรทัศน์ช่วงละครภาคกลางวันไม่ควรเกิน 5 ครั้งต่อสัปดาห์ นอกจากนี้การโฆษณาในหนังสือพิมพ์รายวันไม่น้อยกว่า 4 วันต่อสัปดาห์ บริษัทต้องการทราบว่าควรโฆษณาในสื่อแต่ละชนิดเป็นระยะเวลานานเท่าใด

ตารางที่ 2.4 รายะเอียดการโฆษณาด้วยสื่อต่าง ๆ

	ปริมาณลูกค้าที่ได้รับข่าวสาร(คน)	ค่าใช้จ่ายต่อหน่วย (บาท)	จำนวนโฆษณาสูงสุดต่อสัปดาห์
โทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำ (1 ครั้ง ครั้งละ 3 นาที)	50,000	300,000	10 ครั้ง
โทรทัศน์ในช่วงละครภาคกลางวัน (1 ครั้ง ครั้งละ 3 นาที)	38,000	120,000	10 ครั้ง
หนังสือพิมพ์รายวัน 1 หน้า (ขนาด 6 คอลัมน์- 5นิ้ว จำนวน 1 วัน)	20,000	80,000	7 วัน
หนังสือพิมพ์รายสัปดาห์ 1 หน้า (ขนาด 6 คอลัมน์- 5 นิ้ว จำนวน 1 สัปดาห์)	28,000	100,000	1 หน้า
วิทยุช่วงรายการหลังข่าวภาคค่ำ (1 ครั้ง ครั้งละ 3 นาที)	18,000	90,000	6 ครั้ง

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทน จำนวนครั้งโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำต่อสัปดาห์

x_2 แทน จำนวนครั้งโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคกลางวันต่อสัปดาห์

x_3 แทน จำนวนหน้าโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายวันต่อสัปดาห์

x_4 แทน จำนวนหน้าโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายสัปดาห์ต่อสัปดาห์

x_5 แทน จำนวนครั้งโฆษณาทางวิทยุช่วงรายการหลังข่าวภาคค่ำต่อสัปดาห์

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อทำให้เข้าถึงลูกค้าได้สูงสุดในสื่อต่าง ๆ ที่เลือก

ค่าสูงสุด $z = 50,000x_1 + 38,000x_2 + 20,000x_3 + 28,000x_4 + 18,000x_5$

หรือ

ค่าสูงสุด $z = 50x_1 + 38x_2 + 20x_3 + 28x_4 + 18x_5$ (14)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ค่าใช้จ่ายในสื่อต่าง ๆ ต้องไม่เกินงบประมาณที่มีอยู่คือ 3,000,000 บาท

$$300,000x_1 + 120,000x_2 + 80,000x_3 + 100,000x_4 + 90,000x_5 \quad \leq \quad 3,000,000$$

หรือ

$$30x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 9x_5 \quad \leq \quad 300 \qquad (15)$$

2. การโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำอย่างน้อย 3 ครั้ง

$$x_1 \quad \geq \quad 3 \qquad (16)$$

3. การโฆษณาทางโทรทัศน์ช่วงละครภาคกลางวันไม่ควรเกิน 5 ครั้ง

$$x_2 \quad \leq \quad 5 \qquad (17)$$

4. การโฆษณาในหนังสือพิมพ์รายวันไม่น้อยกว่า 4 วัน นอกจากนี้

$$x_3 \quad \geq \quad 4 \qquad (18)$$

5. ระยะเวลามากสุดในการโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำ

$$x_1 \quad \leq \quad 10 \qquad (19)$$

6. ระยะเวลามากสุดในการโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคกลางวัน

$$x_2 \quad \leq \quad 10 \qquad (20)$$

7. จำนวนหน้าสูงสุดในการโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายวัน

$$x_3 \quad \leq \quad 7 \qquad (21)$$

8. จำนวนหน้าสูงสุดในการโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายสัปดาห์

$$x_4 \quad \leq \quad 1 \qquad (22)$$

9. ระยะเวลามากสุดในการโฆษณาทางวิทยุช่วงรายการหลังข่าวภาคค่ำ

$$x_5 \quad \leq \quad 6 \qquad (23)$$

10. เวลาในการโฆษณาทางโทรทัศน์และวิทยุ และจำนวนหน้าโฆษณาทางหนังสือพิมพ์จะไม่เป็นค่าลบ

$$x_i \quad \geq \quad 0 \qquad i = 1,2,...,5 \qquad (24)$$

จากการนำตัวแบบนี้ มาประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ พบว่า $x_1 = 4$ $x_2 = 5$ $x_3 = 7$ $x_4 = 1$ $x_5 = 6$ และ $z = 660,000$ กล่าวคือ การโฆษณาทางโทรทัศน์ในช่วงละครภาคค่ำ 4 ครั้ง การโฆษณาทางโทรทัศน์ช่วงละครภาคกลางวัน 5 ครั้ง การโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายวัน 7 หน้า การโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายสัปดาห์ 1 ครั้งและการโฆษณาทางวิทยุช่วงรายการหลังข่าวภาคค่ำ 6 ครั้ง โดยใช้งบประมาณทั้งสิ้น 660,000 บาท

ตัวอย่างที่ 2.2 บริษัทเงินทุนแห่งหนึ่งต้องการลงทุน ซึ่งเป็นสินเชื่อระยะสั้น พันธบัตร ซื้อหุ้น และสินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย ในการตัดสินใจนี้ กรรมการผู้จัดการใหญ่ได้ให้เงื่อนไขการลงทุนว่า มีเงินลงทุนเพียง 500 ล้านบาท และต้องการบรรลุวัตถุประสงค์ สองประการ คือ ให้ผลตอบแทนในการลงทุนในช่วง 12 เดือนข้างหน้านี้มีค่าสูงสุด และสามารถกระจายการลงทุนไปตามแหล่งต่าง ๆ โดยคณะกรรมการบริหารของบริษัทมีข้อกำหนดในการลงทุน คือ บริษัทจะต้องลงทุนในหุ้น และ

สินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย อย่างน้อยร้อยละ 55 ของการลงทุนทั้งหมด ส่วนเงินลงทุนในสินเชื่อธุรกิจซึ่งการลงทุนระยะสั้นไม่น้อยกว่าร้อยละ 15 ของการลงทุนทั้งหมด

จากการประมาณสภาพการลงทุน พบว่า ค่าคาดหมายผลตอบแทนและปริมาณสูงสุดของการลงทุนในแต่ละธุรกิจแสดงในตารางที่ 2.5 บริษัทต้องการทราบว่า การลงทุนครั้งนี้ควรลงทุนในแต่ละธุรกิจจำนวนเท่าใด

ตารางที่ 2.5 ค่าคาดหมายผลตอบแทนและปริมาณการลงทุนสูงสุด

	ค่าคาดหมาย ผลตอบแทน (%)	ปริมาณการลงทุนสูงสุด (ล้านบาท)
สินเชื่อระยะสั้น	8.0	190
พันธบัตร	10.0	250
หุ้น	18.0	100
สินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย	14.0	160

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทน จำนวนเงินลงทุนในสินเชื่อระยะสั้น

x_2 แทน จำนวนเงินลงทุนในพันธบัตร

x_3 แทน จำนวนเงินลงทุนในการหุ้น

x_4 แทน จำนวนเงินลงทุนในสินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อทำให้ค่าคาดหมายผลตอบแทนสูงสุด

ค่าสูงสุด $z = \frac{8}{100}x_1 + \frac{10}{100}x_2 + \frac{18}{100}x_3 + \frac{14}{100}x_4$

หรือ

ค่าสูงสุด $z = 8x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 14x_4$ (25)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. จำนวนเงินสูงสุดไม่เกิน 500 ล้านบาท

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500 \quad (26)$$

2. จำนวนเงินลงทุนในหุ้นและสินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย อย่างน้อยร้อยละ 55 ของการลงทุนทั้งหมด

$$x_3 + x_4 \geq 0.55(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (27)$$

3. เงินลงทุนในสินเชื่อธุรกิจไม่น้อยกว่าร้อยละ 15 ของการเงินลงทุนทั้งหมด

$$x_1 \geq 0.15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (28)$$

4. ปริมาณการลงทุนสูงสุดของแต่ละธุรกิจ

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 190 && \text{(สินเชื่อระยสั้น)} \\ x_2 &\leq 250 && \text{(พันธบัตร)} \\ x_3 &\leq 100 && \text{(หุ้น)} \\ x_4 &\leq 160 && \text{(สินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย)} \end{aligned} \qquad (29)$$

5. ข้อจำกัดของจำนวนเงินลงทุนแต่ละประเภทธุรกิจจะไม่เป็นค่าลบ

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad (30)$$

จากการประมวลผลของตัวแบบ พบว่า $x_1 = 70.91$ $x_2 = 141.92$ $x_3 = 100$ $x_4 = 100$ และ $z = 60.26$ นั่นคือ บริษัทควรลงทุนในธุรกิจประเภท สินเชื่อระยะสั้น พันธบัตร หุ้น และสินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย เท่ากับ 70.91 141.92 100 และ 100 ล้านบาท ตามลำดับ โดยที่ค่าคาดหมายผลตอบแทนสูงสุด หรือ ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) เท่ากับ 60.26 ล้านบาท

ตัวอย่างที่ 2.3 การจัดตารางการทำงานของพนักงานขับรถบริการนักศึกษา อาจารย์ และเจ้าหน้าที่ในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ตั้งแต่เวลา 6.00 น. ถึง 22.00 น. เพื่อให้เพียงพอกับความต้องการของนักศึกษา จากการสำรวจความต้องการใช้บริการของนักศึกษา อาจารย์ และเจ้าหน้าที่พบว่า จำนวนพนักงานขับรถที่ให้บริการในแต่ละช่วงเวลาสามารถแสดงดังตารางที่ 2.6 โดยที่รถหนึ่งคันใช้พนักงานขับรถหนึ่งคน พนักงานขับรถแต่ละคนจะเข้างาน 8 ชั่วโมง โดยจะทำงาน 2 ชั่วโมงพัก 1 ชั่วโมงแล้วทำงาน 2 ชั่วโมง พักอีก 1 ชั่วโมงและทำงานอีก 2 ชั่วโมง ทางมหาวิทยาลัยต้องการทราบว่าในแต่ละชั่วโมงจะมีพนักงานขับรถเข้างานใหม่จำนวนเท่าใด โดยมีข้อกำหนดว่าไม่มีพนักงานคนใดเข้างานหลัง 14.00 น. และจำนวนพนักงานขับรถต้องมีอย่างเพียงพอกับความต้องการและสามารถปฏิบัติตามเงื่อนไขของ 8 ชั่วโมงทำงานดังกล่าว

ตารางที่ 2.6 ความต้องการพนักงานในแต่ละช่วงเวลา

ช่วงเวลา	จำนวนพนักงานขับรถ (คน)	ช่วงเวลา	จำนวนพนักงานขับรถ (คน)
6.00-7.00 น.	5	14.00-15.00 น.	13
7.00-8.00 น.	17	15.00 -16.00 น.	13
8.00-9.00 น.	23	16.00 -17.00 น.	12
9.00-10.00 น.	18	17.00 -18.00 น.	18
10.00-11.00 น.	14	18.00 – 19.00 น.	18
11.00-12.00 น.	12	19.00 – 20.00 น.	16
12.00-13.00 น.	23	20.00 – 21.00 น.	10
13.00-14.00 น.	18	21.00 – 22.00 น.	5

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 6.00 น.ซึ่งจะเลิกงานเวลา 14.00 น.

x_2 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 7.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 15.00 น.

x_3 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 8.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 16.00 น.

x_4 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 9.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 17.00 น.

x_5 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 10.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 18.00 น.

x_6 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 11.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 19.00 น.

x_7 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 12.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 20.00 น.

x_8 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 13.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 21.00 น.

x_9 แทนจำนวนพนักงานที่เริ่มงานเวลา 14.00 น. ซึ่งจะเลิกงานเวลา 22.00 น.

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อทำให้มีจำนวนพนักงานต่ำที่สุด

ค่าต่ำสุด $$z = \sum_{i=1}^{9} x_i \qquad (31)$$

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. จำนวนพนักงานที่ต้องการในแต่ละช่วงเวลาเพียงพอกับความต้องการ ซึ่งพนักงานแต่ละคนจะทำงาน พักในชั่วโมงที่สามและชั่วโมงที่หก

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq 5\\
x_1 + x_2 &\geq 17\\
x_2 + x_3 &\geq 23\\
x_1 + x_3 + x_4 &\geq 18\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &\geq 14\\
x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &\geq 12\\
x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 23\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &\geq 18\\
x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &\geq 13\\
x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 &\geq 13\\
x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &\geq 12\\
x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &\geq 18\\
x_6 + x_7 + x_9 &\geq 18\\
x_7 + x_8 &\geq 16\\
x_8 + x_9 &\geq 10\\
x_9 &\geq 5
\end{aligned} \qquad (32)$$

2. จำนวนพนักงานที่ต้องการต้องไม่เป็นค่าลบ

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,...,9 \qquad (33)$$

จากการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ผลเฉลยคือ $x_1 = 6$ $x_2 = 11$ $x_3 = 12$ $x_4 = 0$ $x_5 = 0$ $x_6 = 5$ $x_7 = 8$ $x_8 = 8$ และ $x_9 = 5$ โดยที่ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือจำนวนพนักงานต่ำสุด (z) เท่ากับ 55 คน

2.5 ปัญหาการผสม

ปัญหาการผสมสูตรอาหารสัตว์ สูตรอาหารเสริม และสูตรอาหารสำหรับคนที่ต้องการควบคุมน้ำหนักและดูแลสุขภาพ การผสมเคมีภัณฑ์ต่าง ๆ การผลิตน้ำมันปิโตรเลียม เป็นปัญหาที่พบเห็นกันโดยทั่วไป ปัญหาเหล่านี้จัดอยู่ในกลุ่ม *ปัญหาการผสม (Blending or ingredient problem)* ปัญหาการผสมสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ปัญหาการผสมนี้ต้องการทราบว่าปริมาณผลิตภัณฑ์ผสมมีจำนวนเท่าใด โดยคำนึงถึงสัดส่วนการผสมของสิ่งของ (หรือวัตถุดิบ) ตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไป และปริมาณวัตถุดิบที่มีอยู่ เพื่อที่จะผลิตเป็นผลิตภัณฑ์ผสมหนึ่งชนิดหรือมากกว่า โดยมีต้นทุนต่ำที่สุดหรือให้ได้ปริมาณของผสมสูงสุด

Polimeno, et al.(1990) ได้ประยุกต์ใช้การโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการวางแผนการให้อาหารแก่วัวตามหลักโภชนา เพื่อให้ต้นทุนการผลิตต่ำสุด โดยพิจารณาข้อจำกัด 2 ประการหลัก คือ (1) ค่าสูงสุดและต่ำสุดของปริมาณสารอาหารที่วัวต้องการ และ (2) ปริมาณน้ำนมที่วัวผลิตได้ในแต่ละวันต้องเพียงพอกับความต้องการ ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นการประยุกต์ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาการผสมสูตรอาหารเสริม สูตรอาหารสัตว์ และการผสมทางเคมีเพื่อผลิตน้ำมันเชื้อเพลิง นอกจากนี้ Briend, Ferguson and Darmon (2001) ได้นำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นไปช่วยในการกำหนดแผนการรับประทานอาหารที่เหมาะสมสำหรับครอบครัวเพื่อให้มีค่าใช้จ่ายต่ำสุด และได้สารอาหารครบตามที่ร่างการต้องการ

ตัวอย่างที่ 2.4 ฟาร์มปศุสัตว์แห่งหนึ่งซึ่งเลี้ยงทั้ง นก ไก่ และแกะ วัตถุดิบที่ใช้ผสมเป็นอาหารสัตว์ที่มีอยู่ได้แก่ ข้าวโพด รำข้าว ถั่วเหลือง และปลาป่น โดยอาหารซึ่งมีส่วนผสมของวัตถุดิบเหล่านี้จะต้องมีปริมาณสารอาหารที่จำเป็นต่อการเจริญเติบโตของสัตว์ได้แก่ วิตามิน โปรตีน แคลเซียมและไขมัน จากการตรวจสอบในห้องทดลอง พบว่า ปริมาณสารอาหารที่มีอยู่ในวัตถุดิบทั้ง 4 ประเภทแสดงดังตารางที่ 2.7

ฟาร์มแห่งนี้ต้องการผลิตอาหารสำหรับ นก ไก่ และแกะ จำนวน 10 6 และ 8 ตัน ตามลำดับ ด้วยปริมาณวัตถุดิบมีอยู่จำกัดในช่วงเวลานี้ ทางฟาร์มสามารถจัดหา ข้าวโพด รำข้าว

ถั่วเหลือง และปลาป่น ได้จำนวน 6 10 4 และ 5 ตันตามลำดับ โดยที่ราคาวัตถุดิบแต่ละชนิดคือ 10 6 12 และ 6 บาทต่อกิโลกรัมตามลำดับ นอกจากนี้ปริมาณสารอาหารต่ำสุดและสูงสุดที่ใช้ในการเลี้ยงสัตว์แต่ละประเภทสามารถแสดงในตารางที่ 2.8

ตารางที่ 2.7 ปริมาณสารอาหารที่มีอยู่ในวัตถุดิบ

วัตถุดิบ	วิตามิน	โปรตีน	แคลเซียม	ไขมัน
ข้าวโพด	8	8	6	8
รำข้าว	6	5	10	6
ถั่วเหลือง	10	12	6	6
ปลาป่น	4	10	10	9

ตารางที่ 2.8 ปริมาณสารอาหารต่ำสุดและสูงสุดที่ใช้ในการเลี้ยงสัตว์

อาหารเลี้ยงสัตว์	สารอาหาร (หน่วย : โดยน้ำหนัก)							
	ปริมาณวิตามิน		ปริมาณโปรตีน		ปริมาณแคลเซียม		ปริมาณไขมัน	
	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด	ต่ำสุด	สูงสุด
นก	6	∞	7	∞	5	∞	4	6
ไก่	7	∞	7	∞	6	∞	5	7
แกะ	4	∞	7	∞	6	∞	4	∞

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการการผสมวัตถุดิบแต่ละประเภทลงในอาหารสัตว์ทั้ง 3 ชนิดในช่วงเวลาดังกล่าว เพื่อต้นทุนการผลิตต่ำที่สุด

(1) กำหนดตัวแปร

X_{ij} แทนปริมาณวัตถุดิบ ชนิดที่ i ซึ่งใช้ในการผสมเป็นสูตรอาหาสำหรับสัตว์ชนิดที่ j โดย $i = 1, 2, 3, 4$ แทน ข้าวโพด รำข้าว ถั่วเหลือง และปลาป่น ตามลำดับ และ $j = 1, 2, 3$ แทน สูตรอาหารสำหรับ นก ไก่ และแกะ ตามลำดับ

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad z = 10\left(\sum_{j=1}^{3} X_{1j}\right)+6\left(\sum_{j=1}^{3} X_{2j}\right)+12\left(\sum_{j=1}^{3} X_{3j}\right)+6\left(\sum_{j=1}^{3} X_{4j}\right) \qquad (34)$$

(3) ข้อจำกัดของปัญหา

1. ปริมาณวัตถุดิบที่ฟาร์มสามารถจัดหาได้

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1j} \leq 6,000 \quad \text{(ปริมาณข้าวโพด)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2j} \leq 10,000 \quad \text{(ปริมาณรำข้าว)} \qquad (35)$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{3j} \leq 4,000 \quad \text{(ปริมาณถั่วเหลือง)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{4j} \leq 5,000 \quad \text{(ปริมาณปลาป่น)}$$

2. ปริมาณความต้องการอาหารสัตว์ทั้ง 3 ชนิด

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i1} \geq 10,000 \quad \text{(ปริมาณอาหารนก)}$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i2} \geq 6,000 \quad \text{(ปริมาณอาหารไก่)} \qquad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i3} \geq 8,000 \quad \text{(ปริมาณอาหารแกะ)}$$

3. ปริมาณสารอาหารสำหรับอาหารนก

3.1 วิตามิน

$$\frac{8X_{11}+6X_{21}+10X_{31}+4X_{41}}{X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}} \geq 6$$

$$8X_{11}+6X_{21}+10X_{31}+4X_{41} \geq 6X_{11}+6X_{21}+6X_{31}+6X_{41}$$

$$2X_{11}+0X_{21}+4X_{31}-2X_{41} \geq 0 \qquad (37)$$

3.2 โปรตีน

$$8X_{11}+5X_{21}+12X_{31}+10X_{41} \geq 7\left(X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}\right)$$

$$X_{11}+2X_{21}+5X_{31}+3X_{41} \geq 0 \qquad (38)$$

3.3 แคลเซียม

$$6X_{11}+10X_{21}+6X_{31}+10X_{41} \geq 5\left(X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}\right)$$

$$X_{11}+5X_{21}+X_{31}+5X_{41} \geq 0 \qquad (39)$$

3.4 ไขมัน

ปริมาณต่ำสุด

$$8X_{11}+6X_{21}+6X_{31}+9X_{41} \geq 4\left(X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}\right)$$

$$4X_{11}+2X_{21}+2X_{31}+5X_{41} \geq 0 \qquad (40)$$

ปริมาณสูงสุด

$$8X_{11}+6X_{21}+6X_{31}+9X_{41} \leq 6(X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41})$$
$$2X_{11}+3X_{41} \leq 0 \quad (41)$$

4. ปริมาณสารอาหารสำหรับอาหารไก่

4.1 วิตามิน

$$8X_{12}+6X_{22}+10X_{32}+4X_{42} \geq 7(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42})$$
$$X_{12}-X_{22}+3X_{32}-3X_{42} \geq 0 \quad (42)$$

4.2 โปรตีน

$$8X_{12}+5X_{22}+12X_{32}+10X_{42} \geq 7(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42})$$
$$X_{12}-2X_{22}+5X_{32}+3X_{42} \geq 0 \quad (43)$$

4.3 แคลเซียม

$$6X_{12}+10X_{22}+6X_{32}+10X_{42} \geq 6(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42})$$
$$4X_{22}+4X_{42} \geq 0 \quad (44)$$

4.4 ไขมัน

ปริมาณต่ำสุด

$$8X_{12}+6X_{22}+6X_{32}+9X_{42} \geq 5(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42})$$
$$3X_{12}+X_{22}+X_{32}+4X_{42} \geq 0 \quad (45)$$

ปริมาณสูงสุด

$$8X_{12}+6X_{22}+6X_{32}+9X_{42} \leq 7(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42})$$
$$X_{12}-X_{22}-X_{32}+2X_{42} \leq 0 \quad (46)$$

5. ปริมาณสารอาหารแกะ

5.1 วิตามิน

$$8X_{13}+6X_{23}+10X_{33}+4X_{43} \geq 4(X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43})$$
$$4X_{13}+2X_{23}+6X_{33} \geq 0 \quad (47)$$

5.2 โปรตีน

$$8X_{13}+5X_{23}+12X_{33}+10X_{43} \geq 7(X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43})$$
$$X_{13}-2X_{23}+5X_{33}+3X_{43} \geq 0 \quad (48)$$

5.3 แคลเซียม

$$\begin{aligned} 6X_{13}+10X_{23}+6X_{33}+10X_{43} &\geq 6\left(X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}\right) \\ 4X_{23}+4X_{43} &\geq 0 \end{aligned} \tag{49}$$

5.4 ไขมัน

$$\begin{aligned} 8X_{13}+6X_{23}+6X_{33}+9X_{43} &\geq 4\left(X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}\right) \\ 4X_{13}+2X_{23}+2X_{33}+5X_{43} &\geq 0 \end{aligned} \tag{50}$$

6. เงื่อนไขบังคับไม่เป็นลบ

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, 4 \text{ และ } j = 1, 2, 3 \tag{51}$$

จากการประมวลผลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป พบว่า

$X_{11} = 3$ $X_{12} = 3$ $X_{13} = 0$
$X_{21} = 4.914$ $X_{22} = 0.285$ $X_{23} = 4.8$
$X_{31} = 0.286$ $X_{32} = 2.714$ $X_{33} = 0$
$X_{41} = 1.8$ $X_{42} = 0$ $X_{43} = 3.2$
$z = 186,000$

ซึ่งหมายความว่าในการผสมสูตรอาหารสำหรับนก มีสัดส่วนการผสมคือ ข้าวโพด:รำข้าว: ถั่วเหลือง:ปลาป่น เท่ากับ 3:4.914:0.286:1.8 ตัน สำหรับสูตรอาหารของไก่ และ แกะ มีสัดส่วนการผสม คือ 3:0.285:2.714:0 และ 0:4.8:0:3.2 ตัน ตามลำดับ ซึ่งจะทำให้ต้นทุนรวมในการผลิตอาหารทั้งสามสูตรเท่ากับ 186,000 บาท

ตัวอย่างที่ 2.5 ศูนย์ควบควบอาหารเพื่อสุขภาพ (Whole food nutrition center) แห่งหนึ่งมีเมล็ดธัญพืช 3 ชนิด เพื่อให้ผสมเป็น ซีเรียลรูปแบบแท่ง ขนาดแท่งละ 2 ออนซ์ ในการขายซีเรียลรูปแบบแท่ง จะมีขนาดบรรจุ 1 ปอนด์ต่อถุง โดยมีภายในแต่ละถุงจะบรรจุด้วยซองขนาดเล็ก ซองละหนึ่งแท่ง ในการโฆษณาของศูนย์สุขภาพแห่งนี้ได้ระบุว่า การรับประทาน ซีเรียลนี้ 1 แท่ง จะได้สารอาหารโดยเฉลี่ย คือ โปรตีน วิตมินบี 2 (Riboflavin) ฟอสฟอรัส (Phoshorus) และ แมกนีเซียม 3 2 1 และ 0.425 หน่วย ตามลำดับ โดยต้นทุนของเมล็ดธัญพืชและองค์ประกอบของสารอาหารในเมล็ดธัญพืชแต่ละชนิด แสดงดังตารางที่ 2.9 ผู้จัดการศูนย์แห่งนี้ต้องการผลิต ซีเรียลรูปแบบแท่งที่มีสารอาหารตามที่ได้ระบุไว้ โดยคำนึงถึงค่าใช้จ่ายรวมที่ต่ำที่สุด จงหาสัดส่วนของการผสมที่เหมาะสม

ตารางที่ 2.9 ต้นทุน และองค์ประกอบของสารอาหารในเมล็ดธัญพืช

เมล็ดธัญพืช ชนิดที่	ต้นทุน (บาทต่อปอนด์)	องค์ประกอบของสารอาหาร (หน่วยต่อปอนด์)			
		โปรตีน	วิตมินบี 2	ฟอสฟอรัส	แมกนีเซียม
A	33	22	16	8	5
B	47	28	14	7	0
C	38	21	25	9	6

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_A แทน จำนวนปอนด์ของธัญพืชชนิด A ของการผลิตแท่งธัญพืช

x_B แทน จำนวนปอนด์ของธัญพืชชนิด B ของการผลิตแท่งธัญพืช

x_C แทน จำนวนปอนด์ของธัญพืชชนิด C ของการผลิตแท่งธัญพืช

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 33x_A + 47x_B + 38x_C$ (52)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ปริมาณโปรตีน

$$22x_A + 28x_B + 21x_C \geq 3 \quad (53)$$

2. ปริมาณวิตมินบี 2

$$16x_A + 14x_B + 25x_C \geq 2 \quad (54)$$

3. ปริมาณฟอสฟอรัส

$$8x_A + 7x_B + 9x_C \geq 1 \quad (55)$$

4. ปริมาณแมกนีเซียม

$$5x_A + 6x_C \geq 0.425 \quad (56)$$

5. ปริมาณผสมรวม

$$x_A + x_B + x_C \geq \frac{1}{8} \quad (57)$$

6. ปริมาณเมล็ดธัญพืชในการผลิตไม่เป็นค่าลบ

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

ดังนั้น ส่วนผสมคือ ผสมเมล็ดธัญพืชชนิด A B และ C จำนวน 0.25 0.50 และ 0.50 ปอนด์ ตามลำดับ หรืออาจกล่าวได้ว่าแท่งซีเรียล 1 แท่ง จะมี 2.5 ออนซ์ ของธัญพืช A 5 ออนซ์ ของธัญพืช B และ 5 ออนซ์ ของธัญพืช C โดยมีต้นทุนแท่งละ 0.50 บาท

ตัวอย่างที่ 2.6 ในการกลั่นน้ำมันของบริษัทออยล์สยาม บริษัทได้มีการสั่งซื้อน้ำมันดิบสองชนิด คือ น้ำมันดิบชนิดที่ 1 และ น้ำมันดิบชนิดที่ 2 ซึ่งน้ำมันดิบทั้งสองประเภทจะผ่านขั้นตอนการผลิตสี่ขั้นตอน คือ การกลั่น (Distillation) การเปลี่ยนรูป (Reforming) การแตกตัว (Cracking) และการผสม (Blending) เพื่อผลิตน้ำมันปิโตรเลียม และเชื้อเพลิง โดยผลผลิตในแต่ละขั้นตอนมีดังนี้

ขั้นตอนการกลั่น : ขั้นตอนนี้จะแยกน้ำมันดิบแต่ละชนิดออกมาจนได้ผลผลิต 6 ชนิดคือ ไลท์แนฟท้า (Light Naptha) มีเดียมแนฟท้า (Medium Naptha) เฮฟวี่แนฟท้า (Heavy Naptha) ไลท์ออยล์ (Light Oil) เฮฟวี่ออยล์ (Heavy Oil) และ กากที่เหลือ (Residuum) ซึ่งไลท์แนฟท้า มีเดียมแนฟท้า เฮฟวี่แนฟท้า มีสัดส่วนของอ๊อกเทน(Octane) หมายเลข 90 80 และ 70 ตามลำดับ ในการกลั่นน้ำมันดิบแต่ละชนิดจำนวน 1 บาร์เรล จะได้ปริมาณผลผลิตทั้ง 6 ชนิดตามตารางที่ 2.10

ตารางที่ 2.10 ปริมาณสารที่ได้จากกลั่นน้ำมันดิบ หน่วย : บาร์เรล

น้ำมันดิบ	ไลท์แนฟท้า	มีเดียมแนฟท้า	เฮฟวี่แนฟท้า	ไลท์น้ำมัน	เฮฟวี่น้ำมัน	กากที่เหลือ
ชนิดที่ 1	0.12	0.2	0.21	0.14	0.21	0.11
ชนิดที่ 2	0.16	0.24	0.18	0.10	0.19	0.12

หมายเหตุ : ในการกลั่นมีบางส่วนระเหยไป

ขั้นตอนการเปลี่ยนรูป : สารแนฟท้าทั้ง 3 ชนิดที่ได้จากการกลั่นจะถูกนำมาผสมเป็นน้ำมันเบนซินชนิดต่าง ๆ ทันที โดยผ่านกระบวนการเปลี่ยนรูปนี้ จะเปลี่ยนแกโซลีนที่เปลี่ยนรูป (Reformed Gasoline) ที่มีอ๊อกเทนหมายเลข 115 ปริมาณผลผลิตที่ได้จากขั้นตอนนี้แสดงดังตารางที่ 2.11

ตารางที่ 2.11 ผลผลิตจากกระบวนการเปลี่ยนรูป

วัตถุดิบ	ผลผลิต
ไลท์แนฟท้า จำนวน 1 บาร์เรล	แกโซลีนที่เปลี่ยนรูปจำนวน 0.62 บาร์เรล
มีเดียมแนฟท้า จำนวน 1 บาร์เรล	แกโซลีนที่เปลี่ยนรูปจำนวน 0.55 บาร์เรล
เฮฟวี่แนฟท้าจำนวน 1 บาร์เรล	แกโซลีนที่เปลี่ยนรูปจำนวน 0.46 บาร์เรล

ขั้นตอนการแตกตัว : ไลท์ออยล์และเฮฟวี่ออยล์หลังจากการกลั่นจะผ่านมายังขั้นตอนการแตกตัวเพื่อจะผสมให้เป็น เชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น (Jet fuel) และ น้ำมันเชื้อเพลิง หรือผ่านกระบวนการแตกตัวแบบแคตต้าไลติก (Catalytic cracking) ซึ่งขั้นตอนนี้ผลิตน้ำมันที่แตกตัว

(Cracked oil) และแกโซลีนที่แตกตัว (Cracked gasoline) โดยแกโซลีนที่แตกตัวมีอ๊อกเทนหมายเลข 105 ผลผลิตที่ได้จากขั้นตอนนี้แสดงในตารางที่ 2.12

ตารางที่ 2.12 แสดงผลผลิตจากกระบวนการแตกตัว

วัตถุดิบ	ผลผลิต
ไลท์ออยล์ จำนวน 1 บาร์เรล	น้ำมันที่แตกตัว จำนวน 0.70 บาร์เรล และ แกโซลีนที่แตกตัว จำนวน 0.30 บาร์เรล
เฮฟวี่ออยล์ จำนวน 1 บาร์เรล	น้ำมันที่แตกตัว จำนวน 0.77 บาร์เรล และ แกโซลีนที่แตกตัว จำนวน 0.25 บาร์เรล

นอกจากนี้กากที่เหลือจะสามารถนำมาผลิตน้ำมันหล่อลื่นได้หลังจากผ่านขั้นตอนนี้ โดย 1 บาร์เรลของกากที่เหลือจะสามารถผลิตน้ำมันหล่อลื่นได้ 0.5 บาร์เรล แต่หากนำกากที่เหลือไปผสมกับผลผลิตอื่น ๆ ในขั้นตอนถัดไปก็จะสามารถทำไปผลิตเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องบินไอพ่นและน้ำมันเชื้อเพลิงต่อไป

<u>ขั้นตอนการผสม</u> : การผสมนี้ทำให้ได้ผลผลิต 3 ประเภทคือ

(1) น้ำมันเบนซิน ซึ่งมีอยู่สองสูตร คือ สูตรทั่วไปและซูพรีม ซึ่งในการผสมต้องใช้ แนฟท้า แกโซลีนที่เปลี่ยนรูป และ แกโซลีนที่แตกตัว โดยการผสมต้องมีอ๊อกเทนอย่างน้อยหมายเลข 80 สำหรับน้ำมันเบนซินสูตรธรรมดาและอ๊อกเทนอย่างน้อยหมายเลข 95 สำหรับน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีม (โดยสมมติว่าหมายเลขของอ๊อกเทนแปรผันตรงกับปริมาตรการผสม)

(2) เชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น สำหรับเครื่องยนต์ไอพ่นจะต้องนำส่วนผสมต่าง ๆ มาอัดด้วยความดันสูงจนเป็นไอ เพื่อให้ได้เชื่อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่นไม่เกิน 1 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ต้องมีปริมาณการผสมของไลท์ออยล์ เฮฟวี่ออยล์ น้ำมันที่แตกตัว กากที่เหลือ เท่ากับ 1 0.7 1.6 และ 0.05 กิโลกรัม ตามลำดับ

(3) น้ำมันเชื้อเพลิง ซึ่งได้จากการผสม ไลท์ออยล์:เฮฟวี่ออยล์:น้ำมันที่แตกตัว:กากที่เหลือ เท่ากับ 10 : 3 : 4 : 1

ในการกลั่นน้ำมันมีข้อจำกัดดังนี้

(1) ปริมาณน้ำมันดิบชนิดที่ 1 และ 2 เท่ากับ 10,000 และ 12,000 บาร์เรล

(2) ความสามารถสูงสุดในการกลั่นน้ำมันดิบเท่ากับ 18,000 บาร์เรลต่อวัน

(3) ปริมาณแนฟท้าที่ผ่านกระบวนการเปลี่ยนรูปไม่เกิน 15,000 บาร์เรลต่อวัน

(4) ปริมาณน้ำมัน (ไลท์ออยล์ และเฮฟวี่ออลย์) ที่ผ่านกระบวนการแตกตัวไม่เกิน 12,000 บาร์เรล

(5) ปริมาณการผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมอยู่ระหว่าง 1,200 ถึง 2,000 บาร์เรล

(6) ปริมาณการผลิตน้ำมันหล่อลื่นอยู่ระหว่าง 1,000 ถึง 1,500 บาร์เรล

(7) น้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมจะต้องผลิตอย่างน้อย 40% ของปริมาณการผลิตน้ำมันเบนซินสูตรธรรมดา

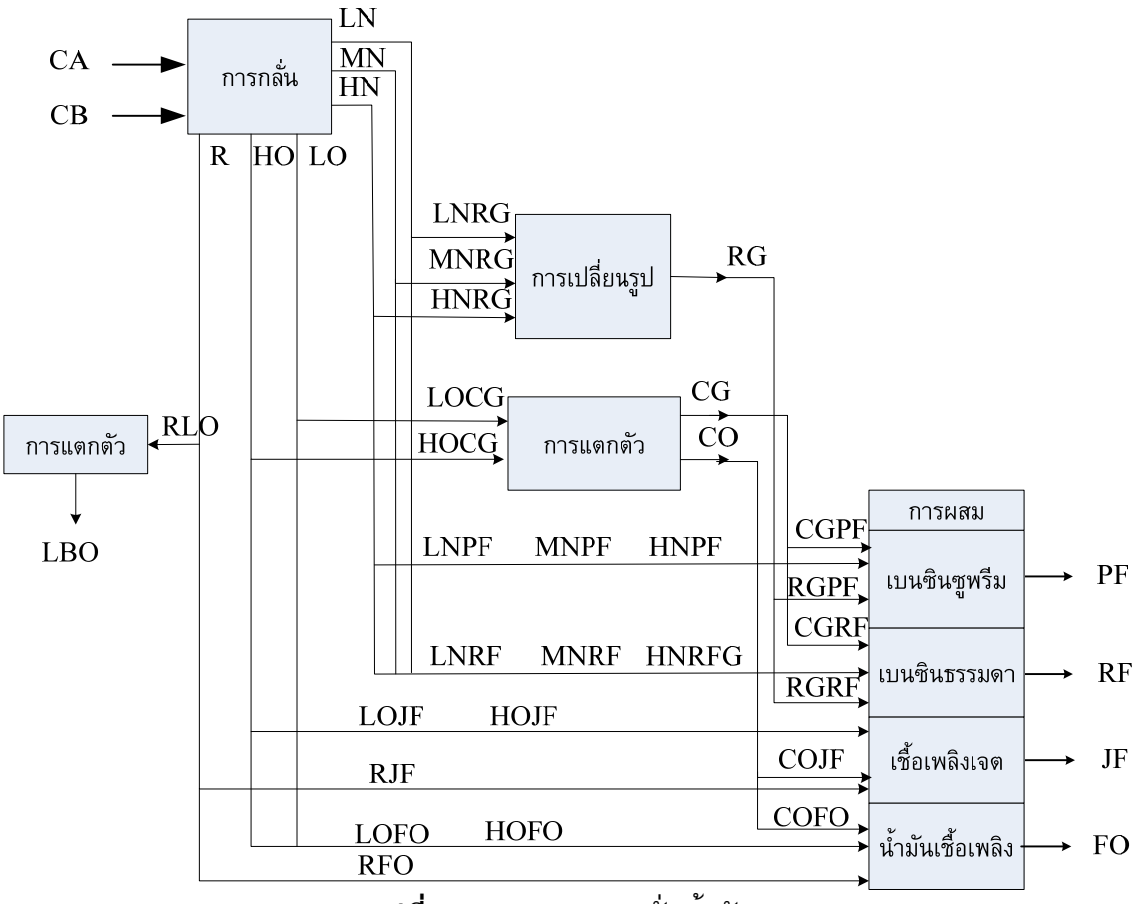
ผลกำไรจากการขายผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดต่อบาร์เรลคือ น้ำมันเบนซินสูตรซูพรีม 28,000 บาท น้ำมันเบนซินสูตรธรรมดา 24,000 บาท เชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น 16,000 บาท น้ำมันเชื้อเพลิง 14,000 บาท และน้ำมันหล่อลื่น 6,000 บาท จงหาปริมาณการกลั่นที่เหมาะสมเพื่อให้ได้ผลกำไรรวมสูงสุด

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

PF และ RF	แทนปริมาณน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดาที่ผลิต
JF	แทนปริมาณเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่นที่ผลิตได้
FO	แทนปริมาณน้ำมันเชื้อเพลิงที่ผลิต
LBO	แทนปริมาณน้ำมันหล่อลื่นที่ผลิต
CA และ CB	แทนปริมาณน้ำมันดิบชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ตามลำดับ
LN MN และ HN	แทนปริมาณ ไลท์แนฟท้า มีเดียมแนฟท้า และ เฮฟวี่แนฟท้า ตามลำดับ
LO HO และ R	แทนปริมาณ ไลท์ออยล์ เฮฟวี่ออยล์ และ กากที่เหลือตามลำดับ
RG	แทนปริมาณแกโซลีนที่เปลี่ยนรูปที่ได้จากกระบวนการเปลี่ยนรูป
CG และ CO	แทนปริมาณแกโซลีนที่แตกตัวและปริมาณน้ำมันที่แตกตัว
LNRG	แทนปริมาณไลท์แนฟท้า ที่ใช้ในการผลิตแกโซลีนที่เปลี่ยนรูป
MNRG	แทนปริมาณมีเดียมแนฟท้า ที่ใช้ในการผลิตแกโซลีนที่เปลี่ยนรูป
HNRG	แทนปริมาณ เฮฟวี่แนฟท้า ที่ใช้ในการผลิตแกโซลีนที่เปลี่ยนรูป
LOCG และ HOCG	แทนปริมาณไลท์ออยล์และเฮฟวี่ออยล์ เพื่อผลิตแกโซลีนและน้ำมันที่แตกตัว
LNPF และ LNRF	แทนปริมาณไลท์แนฟท้าเพื่อผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดา
MNPF และ MNRF	แทนปริมาณมีเดียมแนฟท้าเพื่อผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดา
HNPF และ HNRF	แทนปริมาณเฮฟวี่แนฟท้าเพื่อผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดา
RGPF และ RGRF	แทนปริมาณแกโซลีนที่เปลี่ยนรูปเพื่อผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดา
CGPF และ CGRF	แทนปริมาณแกโซลีนที่แตกตัวเพื่อผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดา
LOJF และ HOJF	แทนปริมาณไลท์ออยล์และเฮฟวี่ออยล์เพื่อผลิตเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น

RJF และ COJF	แทนปริมาณกากที่เหลือและน้ำมันที่แตกตัวที่ใช้ในการผลิตเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น
COFO	แทนปริมาณน้ำมันที่แตกตัวที่ใช้ในการผลิตน้ำมันเชื้อเพลิง
LOFO และ HOFO	แทนปริมาณไลท์ออยล์และเฮฟวี่ออยล์ที่ใช้ในการผลิตน้ำมันเชื้อเพลิง
RFO	แทนปริมาณกากที่เหลือที่ใช้ในการผลิตน้ำมันเชื้อเพลิง
RLO	แทนปริมาณกากที่เหลือที่ใช้เพื่อผลิตน้ำมันหล่อลื่น

จากการกำหนดตัวแปรทั้งหมดนี้สามารถนำมาเขียนแผนภาพแสดงกระบวนการกลั่นน้ำมันของบริษัทได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กระบวนการกลั่นน้ำมัน

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อให้ได้กำไรรวมสูงสุด ให้ z แทนกำไรรวม

ค่าสูงสุด $z = 28PF + 24RF + 16JF + 14FO + 6LBO$

(3) กำหนดข้อจำกัด

1. กำลังการผลิต

1.1 ปริมาณน้ำมันดิบ

$$\begin{aligned} CA &\leq 25,000 \\ CB &\leq 35,000 \end{aligned} \tag{58}$$

1.2 กำลังการผลิตในกระบวนการกลั่นไม่เกิน 55,000 บาร์เรลต่อวัน

$$CA + CB \leq 55,000 \tag{59}$$

1.3 กำลังการผลิตในกระบวนการเปลี่ยนรูปไม่เกิน 15,000 บาร์เรลต่อวัน

$$LNRG + MNRG + HNRG \leq 15,000 \tag{60}$$

1.4 กำลังการผลิตในกระบวนการแตกตัวไม่เกิน 12,000 บาร์เรล

$$LOCG + HOCG \leq 12,000 \tag{61}$$

1.5 ปริมาณการผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมอยู่ระหว่าง 1,200 ถึง 2,000 บาร์เรล

$$\begin{aligned} PF &\geq 1,200 \\ PF &\leq 2,000 \end{aligned} \tag{62}$$

1.6 ปริมาณการผลิตน้ำมันหล่อลื่นอยู่ระหว่าง 800 ถึง 1,200 บาร์เรล

$$\begin{aligned} LBO &\geq 800 \\ LBO &\leq 1,200 \end{aligned} \tag{63}$$

2. ความต่อเนื่อง

2.1 ปริมาณผลผลิตสารแนฟท้า และน้ำมันรวมถึงปริมาณกากที่เหลือที่กระบวนการกลั่น

$$\begin{aligned} -0.12CA - 0.16CB + LN &= 0 \\ -0.20CA - 0.24CB + MN &= 0 \\ -0.21CA - 0.18CB + HN &= 0 \\ -0.14CA - 0.10CB + LO &= 0 \\ -0.21CA - 0.19CB + HO &= 0 \\ -0.11CA - 0.12CB + R &= 0 \end{aligned} \tag{64}$$

2.2 ปริมาณผลผลิตแกโซลีนที่เปลี่ยนรูปจากกระบวนการเปลี่ยนรูป

$$-0.62LNRG - 0.55MNRG - 0.46HNRG + RG = 0 \tag{65}$$

2.3 ปริมาณผลผลิตแกโซลีนและน้ำมันที่แตกตัวจากกระบวนการแตกตัว

$$\begin{aligned} -0.70LOCG - 0.77HOCG + CO &= 0 \\ -0.30LOCG - 0.25HOCG + CG &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

2.4 ปริมาณผลผลิตน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมและธรรมดาจากกระบวนการผสม

$$\begin{aligned} -LNPF - MNPF - HNPF - RGPF - CGPF + PF &= 0 \\ -LNRF - MNRF - HNRF - RGRF - CGRF + RF &= 0 \end{aligned} \tag{67}$$

2.5 ปริมาณผลผลิตเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่นจากกระบวนการผสม

$$-COJF - LOJF - HOJF - RJF + JF = 0 \tag{68}$$

2.6 ปริมาณผลผลิตน้ำมันเชื้อเพลิงจากกระบวนการผสม

$$-\mathrm{COFO} - \mathrm{LOFO} - \mathrm{HOFO} - \mathrm{RFO} + \mathrm{FO} = 0 \qquad (69)$$

2.7 ปริมาณผลผลิตน้ำมันหล่อลื่นจากกากที่เหลือ

$$-0.5\,\mathrm{RLO} + \mathrm{LBO} = 0 \qquad (70)$$

2.8 ปริมาณไลท์แนฟท้าที่ผ่านกระบวนการแปรรูปและการผสมน้ำมันเบนซิน

$$\begin{aligned} -\mathrm{LN} + \mathrm{LNRG} + \mathrm{LNPF} + \mathrm{LNRF} &= 0 \\ -\mathrm{MN} + \mathrm{MNRG} + \mathrm{MNPF} + \mathrm{MNRF} &= 0 \\ -\mathrm{HN} + \mathrm{HNRG} + \mathrm{HNPF} + \mathrm{HNRF} &= 0 \end{aligned} \qquad (71)$$

2.9 ปริมาณไลท์ออยล์ เฮฟวี่ออยล์ น้ำมันที่แตกตัว และกากที่เหลือที่ผ่านกระบวนการผสมเป็นเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น และ น้ำมันเชื้อเพลิง

$$\begin{aligned} -\mathrm{LO} + \mathrm{LOCG} + \mathrm{LOJF} + \left(\frac{10}{18}\right)\mathrm{FO} &= 0 \\ -\mathrm{HO} + \mathrm{HOCG} + \mathrm{HOJF} + \left(\frac{3}{18}\right)\mathrm{FO} &= 0 \\ -\mathrm{CO} + \mathrm{COJF} + + \left(\frac{4}{18}\right)\mathrm{FO} &= 0 \\ -\mathrm{R} + \mathrm{RLO} + \mathrm{RFO} + \left(\frac{10}{18}\right)\mathrm{FO} &= 0 \end{aligned} \qquad (72)$$

2.10 ปริมาณแกโซลีนที่เปลี่ยนรูปและปริมาณแกโซลีนที่แตกตัวที่ผ่านกระบวนการกลั่นน้ำมันเบนซิน

$$\begin{aligned} -\mathrm{RG} + \mathrm{RGPF} + \mathrm{RGRF} &= 0 \\ -\mathrm{CG} + \mathrm{CGPF} + \mathrm{CGRF} &= 0 \end{aligned} \qquad (73)$$

3. ปริมาณน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมต้องไม่น้อยกว่า 40 เปอร์เซนต์ของน้ำมันเบนซินสูตรธรรมดา

$$\mathrm{PF} - 0.4\,\mathrm{RF} \geq 0 \qquad (74)$$

4. คุณภาพ

4.1 ปริมาณอ๊อกเทนในน้ำมันเบนซินสูตรซูพรีมต้องไม่น้อยกว่า 95

$$-90\,\mathrm{LNPF} - 80\,\mathrm{MNPF} - 70\,\mathrm{HNPF} - 115\,\mathrm{RGPF} - 105\,\mathrm{CGPF} + 95\,\mathrm{PF} \leq 0 \qquad (75)$$

4.2 ปริมาณอ๊อกเทนในน้ำมันเบนซินสูตรธรรมดาต้องไม่น้อยกว่า 80

$$-90\,\mathrm{LNRF} - 80\,\mathrm{MNRF} - 70\,\mathrm{HNRF} - 115\,\mathrm{RGRF} - 105\,\mathrm{CGRF} + 80\,\mathrm{PF} \leq 0 \qquad (76)$$

4.3 ปริมาณการระเหย (vopour pressure) ของเชื้อเพลิงสำหรับเครื่องยนต์ไอพ่น

$$-\mathrm{LOJF} - 0.7\,\mathrm{HOJF} - 1.6\,\mathrm{COJF} - 0.05\,\mathrm{RJF} + \mathrm{JF} \geq 0 \qquad (77)$$

5. ค่าของตัวแปรไม่ติดลบ

ตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

จากการประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้ CA = 6,000 CB = 12,000 CG = CGPF = 885 CO = COJF = 2,725 HN = HNRG = 3,420 HO = HOJF = 3,540 JF = 6,487.36 LBO = 1,050 LN = LNRG = 2,640 LO = LOJF = 2,040 MN = 4,080 MNPF = 890 MNRF = 578.89 MNRG = 2,611.11 PF = 2,000 R = 2,100 RF = 5,000 RG = 4,646.11 RGPF = 225 RGRF = 4,421.11 RJF = 1,721.56 RLO = 2,100 ส่วนตัวแปรตัดสินใจอื่น ๆ มีค่าเท่ากับ 0 โดยที่ z = 286,097.73 ซึ่งเท่ากับ 286,097,730 บาท

Miller and Forrest (2001) ได้นำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นไปใช้ในการวางแผนการกลั่นน้ำมันเบนซิน จากน้ำมันดิบ ซึ่งมีคุณสมบัติมากกว่า 130 คุณลักษณะ และมีผลิตภัณฑ์จากการกลั่นได้มากกว่า 10 ชนิด นอกจากนี้ยังได้แสดงถึงการประยุกต์ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงกับอุตสาหรรมปิโตรเลียมได้ดี

2.6 การวางแผนทางการเงินและปฏิบัติการ

การโปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำมาใช้ในการตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาทางการเงิน (Optimal financial decisions) ซึ่งแบ่งตามระยะเวลาของแผนได้เป็น 2 ประเภทคือ แผนระยะสั้น และแผนระยะยาว สองตัวอย่างแรกจะเป็นการนำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ไปใช้สำหรับการวางแผนทางการเงินและการผลิตระยะสั้น การวางแผนการเงินระยะสั้น (Short-term financial planning) เพื่อให้การปฏิบัติงานสอดคล้องกับเกณฑ์และตัวชี้วัดต่าง ๆ ทางการเงิน สำหรับการวางแผนการปฏิบัติงานในอุตสาหกรรมมักเกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรในการผลิต ได้แก่ แรงงาน วัตถุดิบ เป็นต้น เพื่อใช้ในการผลิตสินค้าให้สอดคล้องกับความต้องการและให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งในปัจจุบันสินค้าที่ผลิตมักผ่านกระบวนการผลิตหลายขั้นตอนและใช้วัตถุดิบหลายชนิดทำให้การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมีความซับซ้อนมากขึ้น ส่วนตัวอย่างที่สามจะเป็นตัวอย่างการนำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ในการจัดงบประมาณเงินทุน (Capital budgeting) อย่างง่าย ในหัวข้อนี้จะขออธิบายเกี่ยวกับแนวคิดของมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value, NPV) ซึ่งจะใช้เป็นตัวชี้วัดประสิทธิภาพของการลงทุนในโครงการต่าง ๆ

สำหรับการวางแผนการปฏิบัติงานของพนักงานและเครื่องจักรอุปกรณ์ในการผลิตก็มีการนำการตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมาใช้ ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Smith (1993) ได้เสนอตัวแบบการข้อจำกัดของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการผลิตไฟฟ้าและประมาณต้นทุนไฟฟ้าที่ผลิตในแต่ละคาบเวลาโดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ ต้นทุนรวมต่ำสุด และ

ข้อจำกัด 4 ประการคือ ปริมาณความต้องการใช้ไฟฟ้า ความสามารถสูงสุดในการผลิต ปริมาณผลิตในแต่ละช่วงเวลาต้องไม่เกินปริมาณที่ได้รับสัมปทาน และพลังงานที่ต้องใช้ในการผลิต

ตัวอย่างที่ 2.7 บริษัทผลิตเครื่องทำความเย็น 3 รุ่น คือ รุ่น 10,000 บีทียู 15,000 บีทียูและ 20,000 บีทียู โดยการผลิตเครื่องทำความเย็นทั้งสามรุ่นมีต้นทุนต่อหน่วยของวัตถุดิบ ค่าแรงงานและค่าใช้จ่ายอื่นๆ รวมทั้งราคาขายแต่ละรุ่นดังแสดงในตารางที่ 2.13

จากข้อมูลทางด้านการตลาดทำให้สามารถกำหนดปริมาณการผลิตขั้นต่ำและปริมาณการผลิตสูงสุดในช่วงเดือนมีนาคม แสดงดังตาราง 2.14 เนื่องจากช่วงเดือนมีนาคมและเมษายนความต้องการเครื่องทำความเย็นมีแนวโน้มสูงขึ้น ทำให้สินค้าที่ผลิตได้สามารถส่งขายให้ลูกค้าได้หมด ดังนั้น บริษัทสามารถผลิตตามความสามารถในการผลิตสูงสุดได้ โดยความสามารถในการผลิตขึ้นอยู่กับชั่วโมงแรงงาน ซึ่งเท่ากับ 3,000 ชั่วโมง จำนวนชั่วโมงแรงงานที่ใช้ในการผลิตเครื่องทำความเย็นแต่ละรุ่น แสดงดังตารางที่ 2.14 อย่างไรก็ตาม การผลิตควรต้องพิจารณาถึงสภาพคล่องทางธุรกิจด้วย จากการตรวจสอบของมูลทางบัญชี พบว่า งบดุลของกิจการ ณ วันที่ 28 กุมภาพันธ์ 2552 แสดงดังตารางที่ 2.15 นอกจากนี้การขายสินค้าจะให้เครดิต 2 เดือน กล่าวคือ เครื่องทำความเย็นที่ขายในเดือนมีนาคมจะได้รับเงินสดในเดือนพฤษภาคม ในปลายเดือนมีนาคมบริษัทจะได้รับเงินจากการขายสินค้าในเดือนมกราคมทั้งสิ้น 480,000 บาท ขณะเดียวกันบริษัทต้องจ่ายค่าประกันภัยอาคารและรถยนต์ ในเดือนมีนาคม 30,000 บาท ค่าดอกเบี้ยเงินกู้อีกเดือนละ 50,000 บาท เงินเดือนพนักงานระดับบริหาร 200,000 บาท เงินเดือนพนักงานในสำนักงานและพนักงานดูแลทั่วไปอีก 200,000 บาท ในเรื่องของวัตถุดิบคงคลัง ซึ่งส่วนใหญ่บริษัทจะได้รับเครดิต 2 เดือน กล่าวคือ หากซื้อวัตถุดิบในวันที่ 1 มีนาคม จะต้องจ่ายเงินสดให้ผู้ขายวัตถุดิบในวันที่ 1 พฤษภาคม จากข้อมูลฝ่ายบัญชีพบว่าได้มีการซื้อวัตถุดิบเข้ามาในวันที่ 5 มีนาคม เป็นเงินทั้งสิ้น 300,000 บาท

ตารางที่ 2.13 ต้นทุนวัตถุดิบ ค่าแรงงาน ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ และราคาขายเครื่องทำความเย็น

หน่วย : (พันบาทต่อเครื่อง)

	เครื่องทำความเย็นรุ่น		
	10,000 บีทียู	15,000 บีทียู	20,000 บีทียู
ค่าวัตถุดิบ	6.0	8.0	10.0
ค่าแรงงาน	3.5	4.0	4.4
ค่าใช้จ่ายอื่นๆ	2.5	3.2	3.8
ราคาขาย	20	27	32

บริษัทต้องการให้เงินสด ณ วันที่ 1 เมษายนมีไม่น้อยกว่า 400,000 บาทและอัตราส่วนเงินทุนหมุนเวียน (Current ratio) ไม่น้อยกว่า 2.5 บริษัทต้องการทราบว่าควรผลิตเครื่องทำความเย็นแต่ละรุ่นจำนวนเท่าใด เพื่อให้ได้กำไรสูงที่สุดและสอดคล้องกับข้อจำกัดต่าง ๆ ที่กำหนด

ตารางที่ 2.14 ปริมาณการผลิตขั้นต่ำและสูงสุดเครื่องทำความเย็น และแรงงานที่ใช้

	เครื่องทำความเย็นรุ่น		
	10,000 บีทียู	15,000 บีทียู	20,000 บีทียู
ปริมาณการผลิตขั้นต่ำ (เครื่องต่อเดือน)	15	20	15
ปริมาณการผลิตสูงสุด (เครื่องต่อเดือน)	25	30	25
จำนวนชั่วโมงแรงงาน (ชั่วโมงต่อเครื่อง)	20	24	34

ตารางที่ 2.15 งบดุล ณ วันที่ 28 กุมภาพันธ์ 2552 (หน่วย :พันบาท)

	ทรัพย์สิน	หนี้สิน
เงินสด	800	
ลูกหนี้การค้า	600	
วัตถุดิบคงคลัง	120	
เจ้าหนี้-เงินกู้ธนาคาร		220
เจ้าหนี้การค้า		200

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_i แทน จำนวนเครื่องทำความเย็นที่ผลิตในเดือนมีนาคม โดยที่ i = 1, 2, 3 แทนเครื่องทำความเย็นรุ่น 10,000 บีทียู 15,000 บีทียู และ 20,000 บีทียู

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อทำให้ได้ผลกำไรสูงสุด

พิจารณาผลกำไรต่อหน่วยของเครื่องทำความเย็นรุ่น 10,000 บีทียู พบว่า

กำไรต่อหน่วย = ราคาขายต่อหน่วย – ต้นทุนและค่าใช้จ่ายต่อหน่วย

= $20-6-3.5-2.5$ = 8 พันบาทต่อหน่วย

สำหรับผลกำไรต่อหน่วยของเครื่องทำความเย็นรุ่น 15,000 บีทียู พบว่า

กำไรต่อหน่วย = ราคาขายต่อหน่วย – ต้นทุนและค่าใช้จ่ายต่อหน่วย

= $27-8-4-3.2$ = 11.8 พันบาทต่อหน่วย

พิจารณาผลกำไรต่อหน่วยของเครื่องทำความเย็นรุ่น 20,000 บีทียู พบว่า

กำไรต่อหน่วย = ราคาขายต่อหน่วย – ต้นทุนและค่าใช้จ่ายต่อหน่วย

= $32-10-4.4-3.8$ = 13.8 พันบาทต่อหน่วย

ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ

ค่าสูงสุด $z = 8\,x_1+11.8\,x_2+13.8\,x_3$ (78)

(3) ข้อจำกัดของปัญหา

ในที่นี้ได้ใช้ผังแสดงจำนวนทรัพย์สินหมุนเวียนและหนี้สินหมุนเวียน สำหรับทรัพยสินหมุนเวียน ลูกศรลงแทนปริมาณทรัพย์สินที่ต้องรายจ่ายออก ส่วนลูกศรขึ้นแสดงปริมาณทรัพย์สินที่รับเข้า สำหรับหนี้สิน ลูกศรลงแทนปริมาณหนี้สินที่กิจการชำระหนี้ ส่วนลูกศรขึ้นแทนปริมาณหนี้สินที่เพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 2.2 เมื่อมีการผลิต จะต้องจ่ายค่าแรงงานและค่าใช้จ่ายอื่น ๆ รวมทั้งเบิกวัตถุดิบคงคลัง เมื่อการผลิตเสร็จแล้วสินค้าจะส่งให้ลูกค้า โดยบริษัทจะออกใบส่งของและวางบิลเพื่อเรียกเก็บเงินในอีก 2 เดือนข้างหน้า การรับวัตถุดิบเข้าคลังสินค้า บริษัทมิได้จ่ายเงินทันที แต่จะบันทึกปริมาณวัตถุดิบคลังที่ได้รับและบันทึกยอดเจ้าหนี้การค้าไว้ ในการผลิตจะมีการจ่ายค่าแรงงานและค่าใช้จ่ายในการผลิตเป็นเงินสด ดังนั้น ปริมาณเงินสดจ่ายมีดังนี้

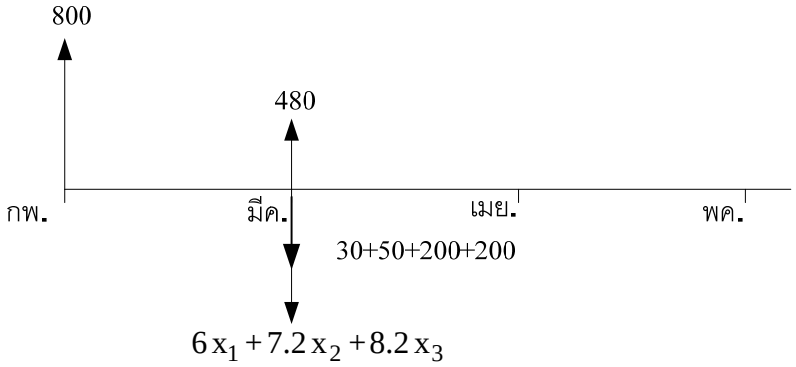
ค่าแรงและค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ต้องจ่ายเป็นเงินสด = $(3.5\,x_1+4\,x_2+4.4\,x_3)$

$+(2.5\,x_1+3.2\,x_2+3.8\,x_3)$

= $6\,x_1+7.2\,x_2+8.2\,x_3$

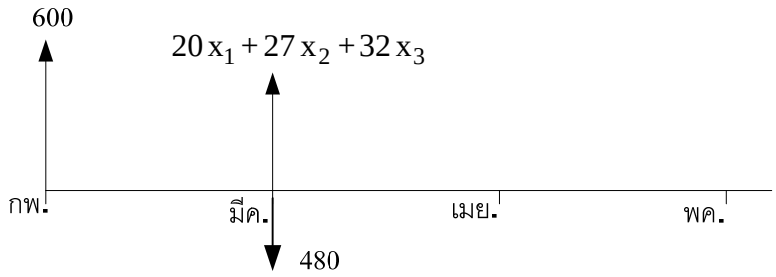
สำหรับผังการไหลของเงินสดสำหรับลูกหนี้การค้า วัตถุดิบคงคลัง เจ้าหนี้การค้า และเจ้าหนี้เงินกู้ธนาคาร แสดงดังรูปที่ 2.2 (ข) ถึง 2.2 (จ)

<u>เงินสด</u>



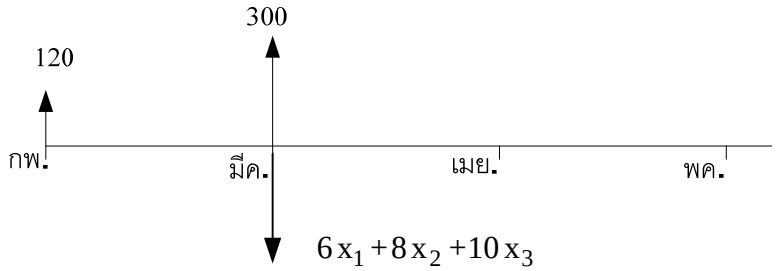
รูปที่ 2.2 (ก) ผังแสดงการไหลของเงินสด

ลูกหนี้การค้า



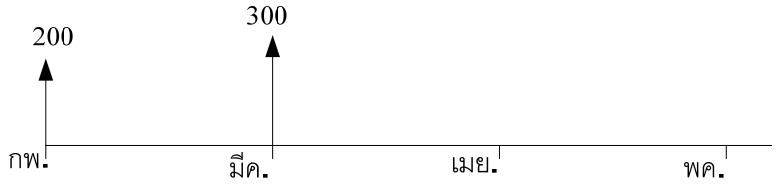
รูปที่ 2.2 (ข) ผังแสดงการไหลของเงินสดสำหรับลูกหนี้การค้า

วัตถุดิบคงคลัง



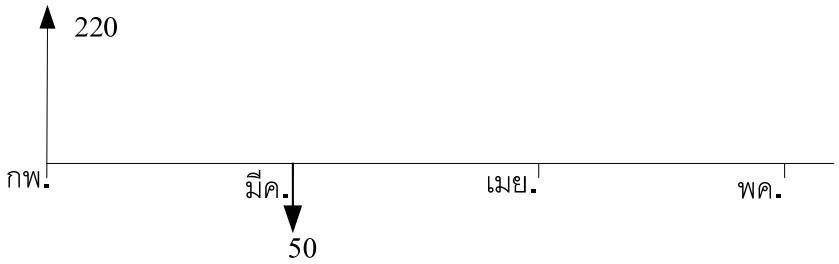
รูปที่ 2.2 (ค) ผังแสดงการไหลของเงินสดสำหรับวัตถุดิบคงคลัง

เจ้าหนี้การค้า



รูปที่ 2.2 (ง) ผังแสดงการไหลของเงินสดสำหรับเจ้าหนี้การค้า

เจ้าหนี้เงินกู้ธนาคาร



รูปที่ 2.2 (จ) ผังแสดงการไหลของเงินสดสำหรับเจ้าหนี้เงินกู้ธนาคาร

จากผังแสดงการไหลของทรัพย์สิน และหนี้สินดังรูปที่ 2.2 ทำให้สามารถสร้างข้อจำกัด ได้ดังนี้

1. ปริมาณแรงงานไม่เกิน 3,000 ชั่วโมง

$$20x_1 + 24x_2 + 34x_3 \quad \leq \quad 3,000 \tag{79}$$

2. ปริมาณความต้องการสินค้าขั้นต่ำและปริมาณสูงสุดในเดือนมีนาคม

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 15 \\ x_2 &\geq 20 \\ x_3 &\geq 15 \\ x_1 &\leq 25 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_3 &\leq 25 \end{aligned} \tag{80}$$

3. เงินสดหมุนเวียน ณ วันที่ 1 เมษายน 2552 ไม่น้อยกว่า 400,000 บาท

$$800 + 480 - (30 + 50 + 200 + 200) - (6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3) \quad \geq \quad 400$$

$$6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3 \quad \leq \quad 400 \tag{81}$$

4. อัตราส่วนเงินทุนหมุนเวียน ณ วันที่ 1 เมษายน 2552 ไม่น้อยกว่า 2.5

4.1 ปริมาณทรัพยสินหมุนเวียน

เงินสดหมุนเวียน $= 800 + 480 - (30 + 50 + 200 + 200) - (6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3)$

$= 1,280 - 480 - (6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3)$

$= 800 - (6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3)$

ลูกหนี้การค้า $= 600 - 480 + (20x_1 + 27x_2 + 32x_3)$

$= 120 + (20x_1 + 27x_2 + 32x_3)$

วัตถุดิบคงคลัง $= 120 + 300 - (6x_1 + 8x_2 + 10x_3)$

$= 420 - (6x_1 + 8x_2 + 10x_3)$

ทรัพย์สินหมุนเวียนรวม $= 800 - (6x_1 + 7.2x_2 + 8.2x_3) + 120$

$+ (20x_1 + 27x_2 + 32x_3) + 420 - (6x_1 + 8x_2 + 10x_3)$

$= 1,340 + (8x_1 + 11.8x_2 + 13.8x_3)$

4.2 ปริมาณหนี้สินหมุนเวียน

เจ้าหนี้การค้า $= 200 + 300 = 500$

เจ้าหนี้เงินกู้ธนาคาร $= 220 - 50 = 170$

หนี้สินหมุนเวียนรวม $= 500 + 170 = 670$

อัตราส่วนเงินทุนหมุนเวียน เท่ากับอัตราส่วนระหว่างทรัพย์สินหมุนเวียนกับ หนี้สินหมุนเวียนรวม ดังนั้น

$$\frac{1,340 + (8x_1 + 11.8x_2 + 13.8x_3)}{670} \quad \geq \quad 2.5$$

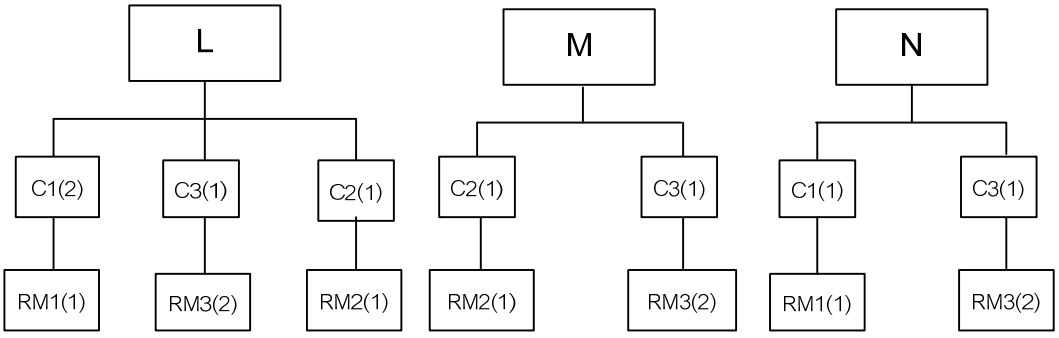
$$1{,}340 + (8x_1 + 11.8x_2 + 13.8x_3) \geq 1{,}675$$
$$8x_1 + 11.8x_2 + 13.8x_3 \geq 335 \quad (82)$$

5. ปริมาณการผลิตสินค้าทั้ง 3 ชนิดไม่เป็นค่าลบ

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \quad (83)$$

จากการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้ผลเฉลยดังนี้ $x_1 = 15$ $x_2 = 20$ $x_3 = 20.24$ และ $z = 635.366$ กล่าวคือบริษัทควรผลิตเครื่องทำความเย็นรุ่น 10,000 15,000 และ 20,000 บีทียู ในเดือนมีนาคมจำนวน 15 20 และ 20.24 เครื่อง ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.8 ในการผลิตอุปกรณ์อิเล็กทรอนิค 3 ชนิดคือ อุปกรณ์ L M และ N ข้อมูลการใช้วัตถุดิบของสินค้าแต่ละชนิดแสดงดังรูปที่ 2.3 ตัวอย่างเช่น อุปกรณ์ L จำนวน 1 ชิ้น ประกอบด้วยชิ้นส่วน C2 และ C3 อย่างละ 1 ชิ้นและ ชิ้นส่วน C1 จำนวน 2 ชิ้น(ดูตัวเลขในวงเล็บ) ในการผลิตชิ้นส่วน C1 ต้องชิ้นวัตถุดิบ RM1 จำนวน 1 หน่วย การผลิตชิ้นส่วน C2 ต้องชิ้นวัตถุดิบ RM2 จำนวน 1 หน่วย ขณะที่การผลิตชิ้นส่วน C3 ต้องชิ้นวัตถุดิบ RM3 จำนวน 2 หน่วย เป็นต้น



รูปที่ 2.3 ข้อมูลการใช้วัตถุดิบของสินค้า L M และ N

ในการผลิตชิ้นส่วน C1 C2 และ C3 ต้องผ่านขั้นตอนการผลิต ด้วยเครื่องจักร A B และ C โดยเวลาในการผลิตบนเครื่องจักรทั้งสามเครื่องแสดงดังตารางที่ 2.16

ตารางที่ 2.16 เวลาผลิตชิ้นส่วน C1 C2 และ C3 บนเครื่องจักรทั้งสามประเภท

ชิ้นส่วน	เวลาที่ใช้ในการผลิต (นาทีต่อชิ้น)		
	เครื่องจักร A	เครื่องจักร B	เครื่องจักร C
C1	15	–	8
C2	–	10	10
C3	8	12	–

หลังจากได้ชิ้นส่วนต่าง ๆ แล้วจะนำชิ้นส่วนมาประกอบเป็นสินค้า L M และ N เวลาในการประกอบชิ้นส่วนและเครื่องจักรที่ใช้ในการประกอบแสดงดังตารางที่ 2.17 ปริมาณชั่วโมงเครื่องจักร A B C และ D สูงสุดต่อสัปดาห์เท่ากับ 375 375 300 และ 300 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ตามลำดับ ต้นทุนการผลิตชิ้นส่วน C1 C2 และ C3 เท่ากับ 40 20 และ 30 บาทต่อชิ้น ตามลำดับ ต้นทุนในการประกอบชิ้นส่วนต่างบนเครื่องจักร D ขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้ในการประกอบ โดยเฉลี่ยนาทีละ 5 บาท ข้อมูลเกี่ยวกับกำไรต่อหน่วยสินค้าและปริมาณการขายต่อสัปดาห์แสดงดังตารางที่ 2.18 จากการตรวจสอบปริมาณวัตถุดิบคงคลัง และความสามารถในการผลิต พบว่า วัตถุดิบที่สามารถนำมาใช้ได้ในช่วงเวลาที่วางแผนและราคาวัตถุดิบต่าง ๆ แสดงดังตาราง 2.19 จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับวางแผนการผลิตเพื่อให้บริษัทได้กำไรสูงที่สุด

ตารางที่ 2.17 เวลาในการประกอบชิ้นส่วนและเครื่องจักรที่ใช้ในการประกอบ

อุปกรณ์	ชิ้นส่วน			เครื่องจักร	เวลาที่ใช้ (นาทีต่อชิ้น)
L	C1	C2	C3	D	7
M	C2	C3		D	8
N	C1	C3		D	6

ตารางที่ 2.18 กำไรต่อหน่วยสินค้า และ ปริมาณการขายต่อสัปดาห์

	อุปกรณ์ L	อุปกรณ์ M	อุปกรณ์ N
ราคาขาย (บาทต่อชิ้น)	225	140	170
ปริมาณขายสูงสุด (ชิ้นต่อสัปดาห์)	1,000	600	800
ปริมาณการผลิตขั้นต่ำ (ชิ้นต่อสัปดาห์)	100	100	100

ตารางที่ 2.19 ปริมาณวัตถุดิบในคลังและราคาวัตถุดิบ

วัตถุดิบ	ปริมาณวัตถุดิบในคลัง (ชิ้น)
RM1	2,000
RM2	1,800
RM3	3,400

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

ให้ L แทน ปริมาณการผลิตสินค้า L ในหนึ่งสัปดาห์

M แทน ปริมาณการผลิตสินค้า M ในหนึ่งสัปดาห์

N แทน ปริมาณการผลิตสินค้า N ในหนึ่งสัปดาห์

C_i แทน ชิ้นส่วนประกอบชนิดที่ i โดยที่ $i = 1, 2, 3$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

พิจารณาอุปกรณ์ L ต้นทุนการผลิตชิ้นส่วนเท่ากับ $2\times40+20+30=130$ บาท ต้นทุนการประกอบชิ้นส่วนเหล่านี้บนเครื่องจักร D เท่ากับ $7\times5=35$ บาท ต้นทุนรวมในการผลิตอุปกรณ์นี้เท่ากับ 130+35 = 165 บาท สำหรับอุปกรณ์ M และ N สามารถคำนวณหาต้นทุนได้ในทำนองเดียวกัน ทำให้ได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด}\quad z &= (225\text{-}165)\,L + (140-90)\,M + (170\text{-}100)\,N \\ &= 60\,L + 50\,M + 70\,N \end{aligned} \tag{84}$$

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ข้อจำกัดตัวแปรแสดงความสัมพันธ์ เป็นตัวแปรที่แสดงความสัมพันธ์ของชิ้นส่วนประกอบแต่ละชนิดและสินค้าที่ผลิต

$$\begin{aligned} C_1 &= 2L + 1N && \text{(ชิ้นส่วนประกอบชนิดที่ 1)} \\ C_2 &= 1L + 1M && \text{(ชิ้นส่วนประกอบชนิดที่ 2)} \\ C_3 &= 1L + 1M + 1N && \text{(ชิ้นส่วนประกอบชนิดที่ 3)} \end{aligned} \tag{85}$$

2. ข้อจำกัดด้านปริมาณวัตถุดิบที่มีในการผลิตชิ้นส่วน

$$\begin{aligned} 1C_1 &\le 2{,}000 && \text{(วัตถุดิบชนิดที่ 1)} \\ 1C_2 &\le 1{,}800 && \text{(วัตถุดิบชนิดที่ 2)} \\ 2C_3 &\le 3{,}400 && \text{(วัตถุดิบชนิดที่ 3)} \end{aligned} \tag{86}$$

3. ข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณชั่วโมงเครื่องจักร

$$\begin{aligned} 15C_1 + 8C_3 &\le 375\times60 && \text{(ชั่วโมงเครื่องจักร A)} \\ 10C_2 + 12C_3 &\le 375\times60 && \text{(ชั่วโมงเครื่องจักร B)} \\ 8C_1 + 10C_2 &\le 300\times60 && \text{(ชั่วโมงเครื่องจักร C)} \\ 7L + 8M + 6N &\le 300\times60 && \text{(ชั่วโมงเครื่องจักร D)} \end{aligned} \tag{87}$$

4. ข้อจำกัดด้านปริมาณการขายสูงสุด

$$L \le 1{,}000 \qquad \text{(สำหรับสินค้า L)}$$

$$M \leq 600 \quad \text{(สำหรับสินค้า M)} \qquad (88)$$
$$N \leq 800 \quad \text{(สำหรับสินค้า N)}$$

5. ข้อจำกัดด้านปริมาณการขายต่ำสุด

$$L, M, N \geq 100 \qquad (90)$$

จากการประมวลผลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป จะได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ $L = 100$ $M = 591.46$ $N = 607.32$ $C_1 = 807.32$ $C_2 = 691.46$ และ $C_3 = 1,298.78$ โดยค่า $z = 78,085.37$ บาท นั่นคือ ปริมาณผลิตอุปกรณ์ L M และ N เท่ากับ 100 591.46 และ 607.32 ชิ้นต่อสัปดาห์ ตามลำดับ สำหรับชิ้นส่วนประกอบ C1 C2 และ C3 เท่ากับ 807.32 691.46 และ 1,298.78 ชิ้นต่อสัปดาห์ ตามลำดับโดยจะได้กำไรเท่ากับ 78,085.37 บาท

ตัวอย่างที่ 2.9 (ปรียาภรณ์ ชรัญญา และ พัชราภรณ์, 2549) ต้นชวนชมเป็นไม้ดอกชนิดหนึ่งที่ได้รับความนิยมไม่น้อยกว่าไม้ประดับชนิดอื่นๆ ปัจจุบันต้นชวนชมมีสายพันธุ์มากกว่า 1,000 สายพันธุ์ แต่สามารถแบ่งได้เป็น 2 สายพันธุ์หลักๆ คือ สายพันธุ์ที่มีขนาดลำต้นธรรมดา และสายพันธุ์ที่มีขนาดลำต้นใหญ่หรือเรียกอีกอย่างว่า สายพันธุ์ยักษ์ ปัญหาหนึ่งที่พบในสวนแห่งนี้คือ ในบางครั้งมีต้นไม้ไม่ตรงตามความต้องการของลูกค้า ทั้งด้านขนาดและสายพันธุ์ หรือมีต้นไม้ขนาดใด หรือสายพันธุ์ใดมากจนเกินไป ซึ่งทำให้ค่าใช้จ่ายในการจัดเก็บและทุนจมเพิ่มมากขึ้น สำหรับสวนตัวอย่างในงานวิจัยนี้จะมีการซื้อต้นกล้า(ต้นชวนชมขนาดเล็ก)แล้วเลี้ยงจนได้ขนาดเหมาะสมจึงนำออกขายลูกค้า นอกจากนี้ส่วนแห่งนี้ยังมีการซื้อต้นชวนชมที่โตเต็มที่มาขายในราคาที่สูงขึ้นด้วย ดังนั้น ควรมีการวางแผนการผลิตต้นชวนชมเพื่อทำให้ได้กำไรสูงสุดในการวางแผนการผลิตทำการ โดยการวางแผนการผลิตเริ่มจากการพยากรณ์ยอดขาย ซึ่งเป็นข้อมูลนำเข้าของตัวแบบผลการพยากรณ์ยอดขายแสดงดังรูปที่ 2.4 ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้กำไรสูงสุดในแต่ละไตรมาส โดยมีข้อจำกัดเกี่ยวกับความต้องการ ปริมาณวัตถุดิบต่ำสุด ปริมาณและสัดส่วนการสั่งซื้อต้นไม้สำเร็จรูปเพื่อนำมาขาย และข้อจำกัดด้านแรงงาน ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

การวางแผนการผลิตต้องใช้ข้อมูล 3 ส่วนคือ ข้อมูลสภาพปัจจุบันในการผลิต ข้อมูลข้อจำกัดด้านการผลิต และปริมาณความต้องการลูกค้า ซึ่งจำแนกเป็นดังนี้

1. ข้อมูลสภาพการผลิตปัจจุบัน ได้แก่ ราคาขาย อัตราการผลิต และขนาดของแรงงาน
2. ข้อมูลข้อจำกัดด้านการผลิต ได้แก่ ปริมาณการสั่งซื้อต้นกล้า แต่ละขนาด และแต่ละสายพันธุ์ ด้านแรงงาน และวัตถุดิบ
3. ปริมาณความต้องการลูกค้า เป็นปริมาณความต้องการลูกค้าทั้งในและต่างประเทศ โดยการพยากรณ์จะแยกตามขนาดและสายพันธุ์

(1) กำหนดตัวแปรและตัวแปรตัดสินใจ

i แทน ดัชนีขนาดต้นไม้ โดย $i = 1, 2, 3, 4, 5$ แทนขนาดของต้นชวนชม 4 6 8 11 และ 16 นิ้ว ตามลำดับ

j แทน ดัชนีสายพันธุ์ต้นไม้โดย $j = 1, 2$ แทนสายพันธุ์ธรรมดาและสายพันธุ์ยักษ์

k แทน ดัชนีไตรมาส โดยที่ $k = 1, 2, 3, 4$ แทนไตรมาสที่ 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ

Z_k แทน กำไรที่ได้จากการขายต้นชวนชมทั้งหมดในไตรมาสที่ k

S_{ijk} แทน กำไรต่อต้น เมื่อขายต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ที่ทำการผลิต ในไตรมาสที่ k

B_{ijk} แทน กำไรต่อต้นจากการขายต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ที่ทำการสั่งซื้อ ในไตรมาสที่ k

QD_{ijk} แทน ปริมาณความต้องการต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ในไตรมาสที่ k

QT_{ijk} แทน ปริมาณการซื้อต้นกล้าที่ใช้ในการผลิตขั้นต่ำของต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ในไตรมาสที่ k

$QB1_k$ แทน ปริมาณรวมของการสั่งซื้อต้นชวนชมเพื่อนำมาขายขนาด 4 6 และ 8 นิ้ว สายพันธุ์ธรรมดา ในไตรมาสที่ k

$QB2_k$ แทน ปริมาณรวมของการสั่งซื้อต้นชวนชมเพื่อนำมาขายขนาด 11 และ 16 นิ้ว สายพันธุ์ธรรมดา ในไตรมาสที่ k

$QB3_k$ แทน ปริมาณรวมของการสั่งซื้อต้นไม้ดอกชวนชมเพื่อนำมาขายทุกขนาด สายพันธุ์ยักษ์ในไตรมาสที่ k

G_{ijk} แทน เวลาที่ใช้ในการปลูกต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ในไตรมาสที่ k

P_{ijk} แทน เวลาที่ใช้ในการปลูกต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ในไตรมาสที่ k

TG_k แทน เวลาที่ใช้ในการปลูกต้นชวนชมทั้งหมดในไตรมาสที่ k

TP_k แทน เวลาที่ใช้ในการห่อต้นชวนชมทั้งหมดในไตรมาสที่ k

$X_{i,j,k}$ แทน ปริมาณต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ที่ทำการผลิต ในไตรมาสที่ k

$Y_{i,j,k}$ แทน ปริมาณต้นชวนชมขนาด i สายพันธุ์ที่ j ที่ทำการสั่งซื้อ ในไตรมาสที่ k

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต้องการวางแผนการผลิตและสั่งซื้อต้นชวนชมในไตรมาส ที่ k ให้ได้กำไรสูงสุด

$$\text{ค่าสูงสุด} \qquad Z_k = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2}(S_{i,j,k}\, X_{i,j,k} + B_{i,j,k}\, Y_{i,j,k}) \qquad (90)$$

(3) กำหนดข้อจำกัด

1. ความต้องการสินค้า เป็นข้อจำกัดในด้านความต้องการต้นชวนชม โดยที่ความต้องการสินค้าทั้งหมดต้องไม่เกินความต้องการสินค้าที่พยากรณ์ไว้ในไตรมาสที่ k (หน่วย: ต้น)

$$X_{i,j,k} \leq QD_{ijk} \qquad \forall i,\ j \tag{91}$$

2. ปริมาณการซื้อต้นกล้าที่ใช้ในการผลิตขั้นต่ำ เป็นปริมาณต้นกล้าที่สวนจำเป็นต้องซื้อจากผู้จำหน่ายในแต่ละครั้งของการสั่งซื้อ ซึ่งปริมาณขั้นต่ำนี้มีความแตกต่างกันไปตามขนาดและแต่ละสายพันธุ์ (หน่วย: ต้น)

$$X_{ijk} \geq QT_{ijk} \qquad \forall i,\ j \tag{92}$$

3. ปริมาณการสั่งซื้อต้นไม้สำเร็จรูปเพื่อนำมาขาย เป็นข้อจำกัดด้านปริมาณการสั่งซื้อต้นไม้สำเร็จรูปเพื่อนำมาขาย ซึ่งเท่ากับผลต่างระหว่างค่าพยากรณ์ความต้องการสินค้าในไตรมาสที่ k กับปริมาณที่ทำการผลิตเอง (หน่วย: ต้น)

$$Y_{ijk} = QD_{ijk} - X_{ijk} \quad ;\ \forall i, j \tag{93}$$

4. สัดส่วนการสั่งซื้อต้นไม้สำเร็จรูปแต่ละขนาดและสายพันธุ์ เป็นข้อจำกัดในด้านสัดส่วนการสั่งซื้อต้นไม้ เพื่อนำมาขายที่มีความแตกต่างกันในแต่ละขนาดและสายพันธุ์ (หน่วย:ต้น)

$$\begin{aligned}
Y_{1,1,k} &\geq 2Y_{2,1,k} & Y_{4,2,k} &\geq 2Y_{3,2,k} \\
Y_{3,1,k} &\geq 2Y_{2,1,k} & Y_{5,2,k} &\geq 2Y_{1,2,k} \\
Y_{4,2,k} &\geq 2Y_{1,2,k} & Y_{5,2,k} &\geq 2Y_{2,2,k} \\
Y_{4,2,k} &\geq 2Y_{2,2,k} & Y_{5,2,k} &\geq 2Y_{3,2,k}
\end{aligned} \tag{94}$$

5. ปริมาณในการสั่งซื้อต้นไม้ดอกชวนชมเพื่อนำมาขาย **:** เป็นข้อจำกัดในด้านปริมาณรวมในการสั่งซื้อมาจากสวนอื่นเพื่อนำมาขาย (หน่วย: ต้น)

$$\begin{aligned}
Y_{1,1,k} + Y_{2,1,k} + Y_{3,1,k} &\leq QB1_k \\
Y_{4,1,k} + Y_{5,1,k} &\leq QB2_k \\
Y_{1,2,k} + Y_{2,2,k} + Y_{3,2,k} + Y_{4,2,k} + Y_{5,2,k} &\leq QB3_k
\end{aligned} \tag{95}$$

6. ปริมาณแรงงานที่มีอยู่ เป็นข้อจำกัดด้านแรงงานที่ใช้ในการผลิต ซึ่งจะพิจารณาเป็นชั่วโมงทำงานจากจำนวนคนงานที่มีอยู่ในสวน แบ่งการทำงานได้เป็น 2 ส่วน ได้แก่ กิจกรรมการปลูกต้นไม้และกิจกรรมที่ใช้ในการห่อต้นไม้เพื่อส่งขาย

6.1 เวลาที่ใช้ในการปลูก (หน่วย : ชั่วโมง)

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{5} G_{ijk}X_{ijk} \leq TG_k \tag{96}$$

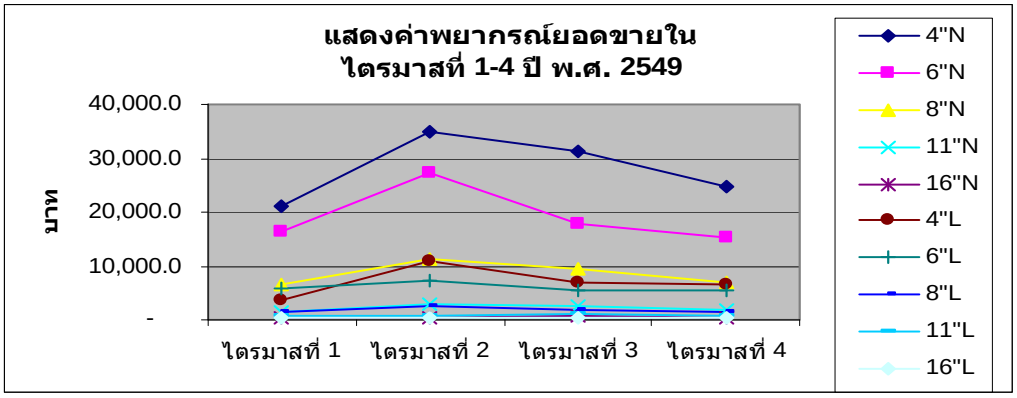
6.2 เวลาที่ใช้ในการห่อ (หน่วย : ชั่วโมง)

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{5} P_{ijk}X_{ijk} \leq TP_k \tag{97}$$

7. ข้อจำกัดค่าไม่ติดลบ เป็นข้อจำกัดที่กำหนดว่าปริมาณการผลิตต้นไม้และปริมาณการสั่งซื้อต้นไม้ จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$$X_{ijk},\ Y_{ijk} \geq 0 \ ; \quad \forall i, j \qquad (98)$$

ผลลัพธ์จากการพยากรณ์ยอดขายดังรูปที่ 2.4 และเวลาที่ใช้ในปลูกและห่อในไตรมาสที่ 2 ดังตารางที่ 2.20 จากตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นดังกล่าวข้างต้นมาประมวลผล 4 ไตรมาส ด้วยโปรแกรม Excel Solver 2003 ซึ่งเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลายและเหมาะสมกับการใช้งานสำหรับปัญหาที่มีขนาดไม่ใหญ่มากนัก (Baker, 2006; Taha, 2007) สำหรับงานวิจัยนี้ได้ผลเฉลยดังตารางที่ 2.21 และ 2.22 ซึ่งสามารถนำมาใช้วางแผนการผลิตและการสั่งซื้อได้ เช่น ควรทำการผลิตมากที่สุดในไตรมาสที่ 1 คือต้นไม้ขนาด 4 นิ้วสายพันธุ์ธรรมดา จำนวน 16,468 ต้น และขนาด 6 นิ้วสายพันธุ์ยักษ์ จำนวน 5,720 ต้น และทำการสั่งซื้อขนาด 8 นิ้วสายพันธรรมดา 2,000 ต้น ขนาด 11 นิ้วสายพันธ์ยักษ์ 240 ต้น เป็นต้น



รูปที่ 2.4 ค่าพยากรณ์ยอดขาย

ตารางที่ 2.20 เวลาที่ใช้ในการปลูกและการห่อ (หน่วย: ชั่วโมงต่อต้น)

ประเภท	เวลาที่ใช้ในการปลูก	เวลาที่ใช้ในการห่อ	ประเภท	เวลาที่ใช้ในการปลูก	เวลาที่ใช้ในการห่อ
4" ธรรมดา	0.233	0.033	4" ยักษ์	0.233	0.033
6" ธรรมดา	0.233	0.033	6" ยักษ์	0.233	0.033
8" ธรรมดา	0.416	0.066	8" ยักษ์	0.416	0.066
11" ธรรมดา	0.616	0.116	11" ยักษ์	0.616	0.116
16" ธรรมดา	0.750	0.250	16" ยักษ์	0.750	0.250

ตารางที่ 2.21 ปริมาณต้นไม้ที่ต้องสั่งซื้อแต่ละขนาดและแต่ละสายพันธุ์ ในไตรมาสที่ 1-4 ปี

ไตรมาสที่	สายพันธุ์	ปริมาณที่ทำการสั่งซื้อของขนาด (หน่วย:ต้น)				
		4 นิ้ว	6 นิ้ว	8 นิ้ว	11 นิ้ว	16 นิ้ว
1	ธรรมดา	16,454	16,430	4,370	1,490	330
	ยักษ์	3,540	5,720	1,610	500	200
2	ธรรมดา	5,000	27,160	2,000	2,478	300
	ยักษ์	3,000	7,310	2,390	500	200
3	ธรรมดา	5,000	17,960	6,535	2,400	430
	ยักษ์	6,815	5,465	1,785	500	200
4	ธรรมดา	13,702	15,330	4,820	1,800	300
	ยักษ์	6,510	5,540	1,350	500	200

ตารางที่ 2.22 ปริมาณต้นไม้ที่ต้องสั่งซื้อแต่ละขนาดและแต่ละสายพันธุ์

ไตรมาสที่	สายพันธุ์	ปริมาณที่ทำการสั่งซื้อของขนาด (หน่วย:ต้น)				
		4 นิ้ว	6 นิ้ว	8 นิ้ว	11 นิ้ว	16 นิ้ว
1	ธรรมดา	0	0	2,000	0	150
	ยักษ์	0	0	0	240	0
2	ธรรมดา	0	0	2,000	20	130
	ยักษ์	40	40	40	330	80
3	ธรรมดา	0	0	2,000	0	150
	ยักษ์	115	115	115	440	230
4	ธรรมดา	0	0	2,000	50	100
	ยักษ์	0	0	0	210	0

ตัวอย่างที่ 2.10 บริษัทเดลต้าไทย จำกัด กำลังพิจารณาที่จะลงทุนโครงการ 3 โครงการ คือ A B และ C ซึ่งมีระยะเวลา 5 ปี โดยการลงทุน 1 หน่วยลงทุนของโครงการต่าง ๆ จะมีค่าใช้จ่ายเงินลงทุนในช่วงเวลาต่างๆ และผลกำไร (ผลตอบแทน) ที่คาดว่าจะได้รับจากการลงทุนในแต่ละปี แสดงในตารางที่ 2.23 ที่อัตราผลตอบแทนขั้นต่ำ 5 เปอร์เซนต์ บริษัทต้องการให้วิเคราะห์ว่าควรลงทุนโครงการใดบ้าง จำนวนกี่หน่วยลงทุน เพื่อให้ได้ค่าเทียบเท่าปีปัจจุบัน (NPV) สูงที่สุด โดยมีเงื่อนไขการลงทุนดังนี้

(1) ปริมาณเงินที่สามารถลงทุนโครงการต่าง ๆ ณ ปัจจุบัน ไม่เกิน 2 ล้านบาท

(2) ปริมาณเงินที่สามารถลงทุนโครงการต่าง ๆ ในปีที่ 1 เท่ากับ 1 ล้านบาท

(3) ปริมาณเงินที่สามารถลงทุนโครงการต่าง ๆ ในปีที่ 2 เท่ากับ 0.5 ล้านบาท

ตารางที่ 2.23 ค่าใช้จ่าย เงินลงทุนในช่วงเวลาต่างๆ และผลกำไร (ผลตอบแทน)

	โครงการ A	โครงการ B	โครงการ C
ปีที่ 0			
เงินลงทุน	10,000	15,000	12,000
ปีที่ 1			
เงินลงทุน	5,000	–	8,000
ค่าใช้จ่ายดำเนินงาน	3,000	4,000	–
ผลกำไร	5,000	6,000	–
ปีที่ 2			
เงินลงทุน	5,000	10,000	8,000
ค่าใช้จ่ายดำเนินงาน	3,000	4,000	5,000
รายได้	7,000	5,000	8,000
ปีที่ 3			
ค่าใช้จ่ายดำเนินงาน	3,000	4,000	5,000
รายได้	9,000	12,000	15,000
ปีที่ 4			
ค่าใช้จ่ายดำเนินงาน	3,000	4,000	5,000
รายได้	11,000	12,000	15,000
ปีที่ 5			
ค่าใช้จ่ายดำเนินงาน	3,000	4,000	5,000
รายได้	11,000	12,000	15,000
มูลค่าซาก	–	9,000	6,000

ผังแสดงการไหลของเงินสด (Cash flow diagram) ในแต่ละโครงการ A B และ C แสดงดังรูปที่ 2.5 ถึง 2.7 ตามลำดับ สำหรับโครงการ A จากสูตร $P = \frac{F}{(1+i)^n}$ เมื่อ P แทนเงินต้น F แทนเงินปลายงวดที่ n และ i แทนอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราผลตอบแทน (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมจาก ภาคผนวก ก) จะสามารถหาผลรวมของมูลค่าเทียบเท่าปัจจุบันที่จุดเริ่มต้นของโครงการ (NPV) ได้ดังนี้

$$\text{NPV} = -10,000 - \frac{3,000}{(1+0.05)^1} - \frac{1,000}{(1+0.05)^2} + \frac{6,000}{(1+0.05)^3} + \frac{8,000}{(1+0.05)^4} + \frac{8,000}{(1+0.05)^5}$$

$$= 4,268.682$$

หรือสามารถใช้แฟคเตอร์การคำนวณ (ตามภาคผนวก ก) จะได้

NPV = $-10{,}000 - 3{,}000(P/F, 5\%, 1) - 1{,}000(P/F, 5\%, 2) + 6{,}000(P/F, 5\%, 3) + 8{,}000(P/F, 5\%, 4) + 8{,}000(P/F, 5\%, 5)$

= 4,268.682 (ใช้ตารางดอกเบี้ยท้ายเล่ม)

หรือใช้แฟคเตอร์การคำนวณที่คิดรายได้หรือรายจ่ายเท่ากันเป็นรายปี (ตามภาคผนวก ก) จะได้

NPV = $-10{,}000 - 3{,}000(P/A, 5\%, 5) - 5{,}000(P/A, 5\%, 2) + 5{,}000(P/F, 5\%, 1) + 7{,}000(P/F, 5\%, 2) + 9{,}000(P/F, 5\%, 3) + 11{,}000(P/A, 5\%, 2)(P/F, 5\%, 3)$

= 4,268.682 (ใช้ตารางดอกเบี้ยท้ายเล่ม)

สำหรับโครงการ B สามารถคำนวณค่า NPV ได้ในทำนองเดียวกัน

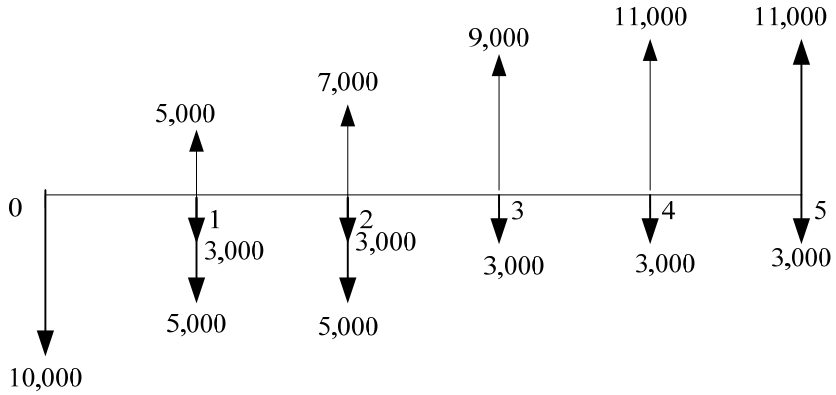
$$NPV = -15{,}000 + \frac{2{,}000}{(1+0.05)^1} - \frac{9{,}000}{(1+0.05)^2} + \frac{8{,}000}{(1+0.05)^3} + \frac{8{,}000}{(1+0.05)^4} + \frac{17{,}000}{(1+0.05)^5}$$

= 5,553.762

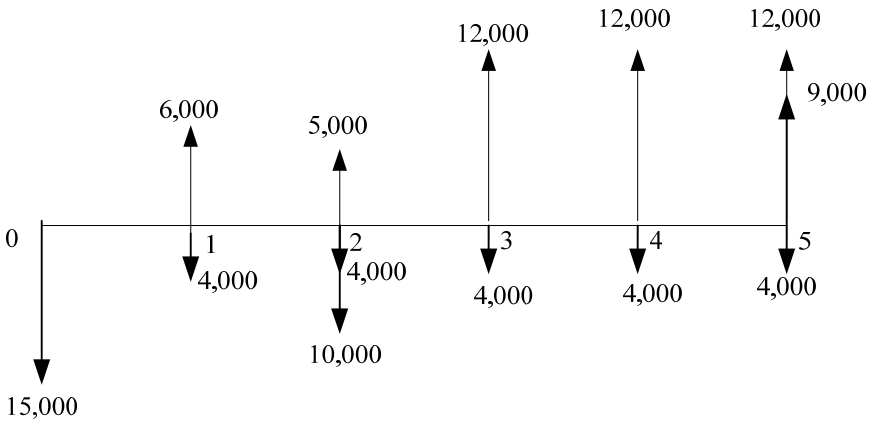
สำหรับโครงการ C สามารถคำนวณค่า NPV ได้ในทำนองเดียวกัน

$$NPV = -12{,}000 - \frac{8{,}000}{(1+0.05)^1} - \frac{5{,}000}{(1+0.05)^2} + \frac{10{,}000}{(1+0.05)^3} + \frac{10{,}000}{(1+0.05)^4} + \frac{16{,}000}{(1+0.05)^5}$$

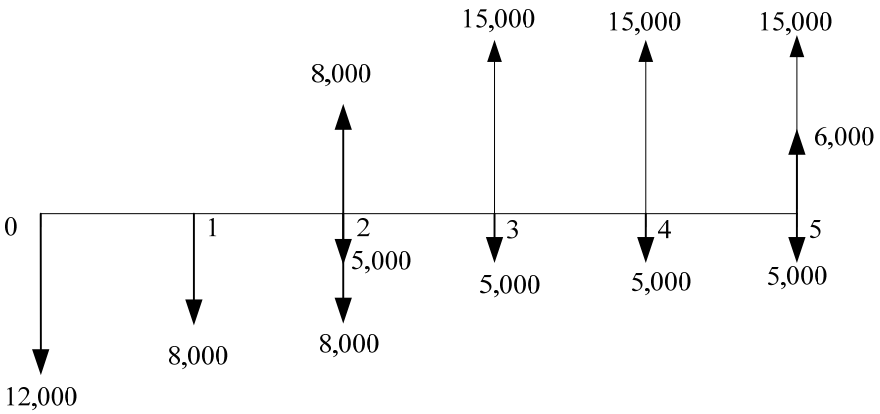
= 5,247.624



รูปที่ 2.5 ผังการไหลของเงินสดสำหรับโครงการ A



รูปที่ 2.6 ผังการไหลของเงินสดสำหรับโครงการ B



รูปที่ 2.7 ผังการไหลของเงินสดสำหรับโครงการ C

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_t แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการที่ t โดยที่ t = 1, 2, 3 แทนโครงการลงทุน A B และ C

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z = 4{,}268.682\ x_1 + 5{,}553.762\ x_2 + 5{,}247.624\ x_3$ (99)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ปริมาณเงินลงทุน ณ ปีปัจจุบัน

$$10{,}000\ x_1 + 15{,}000\ x_2 + 12{,}000\ x_3 \leq 2{,}000{,}000 \quad (101)$$

2. ปริมาณเงินลงทุนในปีที่ 1

ปริมาณเงินที่ต้องลงทุนในโครงการ A เท่ากับเงินลงทุน 5,000 บาทค่าใช้จ่ายดำเนินงาน 3,000 บาทและผลกำไร 5,000 บาท ดังนั้นในปีที่ 1 ต้องลงทุนโครงการ A เท่ากับ 3,000 บาทในทำนองเดียวกันโครงการ B และ C จะต้องลงทุนเพิ่มในปีที่ 1 อีก 2,000 และ 8,000 บาท

$$3{,}000\ x_1 - 2{,}000\ x_2 + 8{,}000\ x_3 \leq 1{,}000{,}000 \quad (102)$$

3. ปริมาณเงินลงทุนในปีที่ 2

$$1{,}000\ x_1 + 9{,}000\ x_2 + 5{,}000\ x_3 \leq 500{,}000 \quad (103)$$

4. จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการต่าง ๆ ไม่เป็นค่าลบ

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \quad (104)$$

เมื่อประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ พบว่า $x_1 = 105.263$ $x_2 = 0$ $x_3 = 78.947$ และ $z = 863{,}621.053$ กล่าวคือ บริษัทควรลงทุนในโครงการ A จำนวน 105.263

หน่วยลงทุน และโครงการ C จำนวน 78.947 หน่วยลงทุน ทำให้มูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบันเท่ากับ 863,621.053 บาท

2.7 ปัญหาการขนส่งและข่ายงาน

ปัญหาการขนส่งสินค้าเกี่ยวข้องกับการระบุว่าปริมาณขนส่งสินค้าจากแหล่งกำเนิด (Origin) ไปยังจุดหมายปลายทาง (Destination) ซึ่งจำนวนจุดเริ่มต้นและจุดปลายอาจมีจำนวนหลายแห่ง โดยทั่วไป วัตถุประสงค์ของปัญหาการขนส่ง คือ พยายามที่จะทำให้ต้นทุนค่าขนส่งมีค่าต่ำที่สุด หรือพยายามทำให้ระยะทางสั้นที่สุด ข้อจำกัดของปัญหาเหล่านี้มักเกี่ยวข้องกับความสามารถในการผลิตการจัดเก็บของแหล่งกำเนิดและปลายทาง ระยะเวลาในการขนส่งไปยังลูกค้า รวมทั้งความต้องการสินค้าของแต่ละจุดหมายปลายทาง ปัญหาการบรรทุกสินค้า (Truck loading) เป็นปัญหาในการตัดสินใจว่าจะนำสินค้าชนิดใดบรรทุกไปในรถบรรทุกคันแต่ละคันเพื่อทำให้มูลค่าของการขนส่งมีค่าสูงที่สุด

ปัญหาการขนส่งเป็นปัญหาเฉพาะของปัญหาขนถ่ายสินค้า จากยานพาหนะหนึ่งไปยังอีกยานพาหนะหนึ่ง หรือไปยังอีกแหล่งหนึ่ง ถ้าสินค้าขนส่งจากแหล่งกำเนิด แล้วผ่านจุดขนถ่ายสินค้า (Transshipment point) ก่อนที่จะส่งถึงจุดหมายปลายทาง (Destination point) ในปัจจุบันในการผลิตสินค้าของโรงงานต่าง ๆ มักจะส่งสินค้าจำนวนมาก ๆ ผ่านจุดตัวกลางซึ่งเป็นจุดกระจายสินค้า ไปยังพ่อค้าปลีกต่าง ๆ ซึ่งที่จุดกระจายสินค้านี้อาจมีการจัดแบ่งหีบห่อสินค้าให้มีขนาดตามที่ลูกค้าหรือร้านค้าปลีกต้องการแล้วจึงจัดรถบรรทุกที่มีขนาดเหมาะสมไปส่งยังลูกค้าหรือร้านค้าปลีก ทั้งนี้พยายามที่จะลดต้นทุนค่าขนส่งสินค้ารวม Mathur, Chanda and Tezuka (2003) ได้พัฒนาตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับแก้ปัญหาการขนส่งถ่านหินในประเทศอินเดีย โดยพิจารณาทั้งทางด้านเศรษฐศาสตร์และทางด้านเทคนิค เพื่อจะทำให้การขนส่งนี้มีความประหยัดที่สุด

นอกจากการแก้ปัญหาการขนส่ง และข่ายงานแล้ว บางปัญหาอาจปัญหาในเชิงบูรณาการซึ่งรวมทั้งปัญหาการขนส่ง ปัญหาควบคุมสินค้าคงคลังและปัญหาการผลิต เช่น Chen and Wang (1997) ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อบูรณาการการวางแผนการผลิตของบริษัทผลิตเหล็กในประเทศแคนาดา ซึ่งการวางแผนนี้จะกิจกรรมการวางแผนของบริษัททั้งหมดรวมทั้งการซื้อวัตถุดิบ การวางแผนการซื้อและการผลิตจะมีสำหรับสินค้าระหว่างผลิต การผลิตสินค้าสำเร็จรูป และการกระจายสินค้า ดังนั้นตัวแบบพิจารณาในด้านต้นทุนการผลิต อัตราการผลิต ความต้องการสินค้า ราคาขายและความสามารถของปัจจัยในการผลิต เพื่อการวางแผนการผลิตที่ให้ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด Smith (1993) ได้นำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นไปใช้ในการจัดสรรทรัพยากรในการผลิตกระแสไฟฟ้า การจ่ายไฟฟ้า และการคิดค่าไฟฟ้า เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม ในหัวข้อนี้จะขอเสนอตัวอย่างปัญหาการขนส่งและปัญหาข่ายงาน เพื่อให้เข้าการสร้างตัวแบบสำหรับปัญหาเหล่านี้

ตัวอย่างที่ 2.11 การขนส่งรถจักรยานยนต์ยี่ห้อหนึ่ง จากโรงงาน 2 แห่งในจังหวัดสมุทรปราการและจังหวัดนครนายก ไปยังปลายทางในจังหวัดสระบุรี นครสวรรค์ อุบลราชธานี และจังหวัดเพชรบุรี จากการศึกษาความต้องการของลูกค้าพบว่า ความต้องของลูกค้าในจังหวัดต่อเดือนต่าง ๆ แสดงดังตาราง 2.24 ความสามารถในการผลิตของโรงงานในจังหวัดสมุทรปราการเท่ากับ 3,000 ชิ้นต่อเดือน ขณะที่ความสามารถในการผลิตของโรงงานในจังหวัดนครนายกเท่ากับ 3,000 ชิ้นต่อเดือน จากการสำรวจค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่อหน่วยสินค้าจากโรงงานไปยังจังหวัดของลูกค้า แสดงดังตาราง 2.25 บริษัทต้องการทราบว่าควรส่งสินค้าจากโรงงานใดแต่ละแห่งไปยังลูกค้าในปริมาณเท่าใด

ตารางที่ 2.24 ความต้องการของลูกค้าในแต่ละจังหวัด

ลูกค้าในจังหวัด	ความต้องการต่อเดือน (ชิ้น)
สระบุรี	800
นครสวรรค์	1,200
อุบลราชธานี	1,500
เพชรบุรี	2,000
รวม	5,500

ตารางที่ 2.25 ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่อหน่วยสินค้า

	ถึงลูกค้าในจังหวัด			
จากโรงงานในจังหวัด	สระบุรี	นครสวรรค์	อุบลราชธานี	เพชรบุรี
สมุทรปราการ	400	500	750	450
นครนายก	250	550	700	600

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_{ij} แทนปริมาณการขนส่งจากโรงงาน i ไปยังลูกค้าในจังหวัด j โดยที่

$i = 1, 2$ แทนโรงงานในจังหวัดสมุทรปราการและนครนายก ตามลำดับ

$j = 1, 2, 3, 4$ แทนลูกค้าในจังหวัดสระบุรี นครสวรรค์ อุบลราชธานี และ เพชรบุรี ตามลำดับ

เพื่อให้เข้าใจถึงปัญหานี้ ตัวแปรตัดสินใจแสดงถึงปริมาณการขนส่งจากโรงงานไปยังลูกค้าดังรูปที่ 2.8

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อให้ต้นทุนค่าขนส่งรวมต่ำที่สุด

ค่าต่ำสุด $z = 400x_{11} + 500x_{12} + 750x_{13} + 450x_{14} + 250x_{21} + 550x_{22} + 700x_{23} + 600x_{24}$ (105)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ความสามารถในการผลิตของโรงงาน

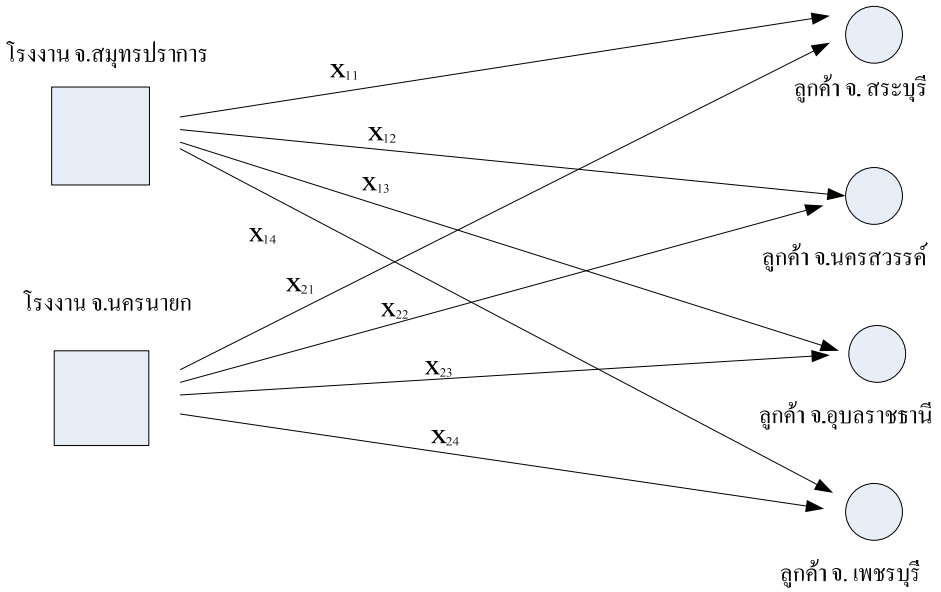
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 3{,}000 \quad \text{(โรงงานที่จังหวัดสมุทรปราการ)} \qquad (106)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 3{,}000 \quad \text{(โรงงานที่จังหวัดนครนายก)}$$

2. ปริมาณที่ขนส่งจะต้องเพียงพอกับความต้องการของลูกค้าแต่ละจังหวัด

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\geq 800 && \text{(จังหวัดสระบุรี)} \\ x_{12} + x_{22} &\geq 1{,}200 && \text{(จังหวัดนครสวรรค์)} \\ x_{13} + x_{23} &\geq 1{,}500 && \text{(จังหวัดอุบลราชธานี)} \\ x_{14} + x_{24} &\geq 2{,}000 && \text{(จังหวัดเพชรบุรี)} \end{aligned} \qquad (107)$$

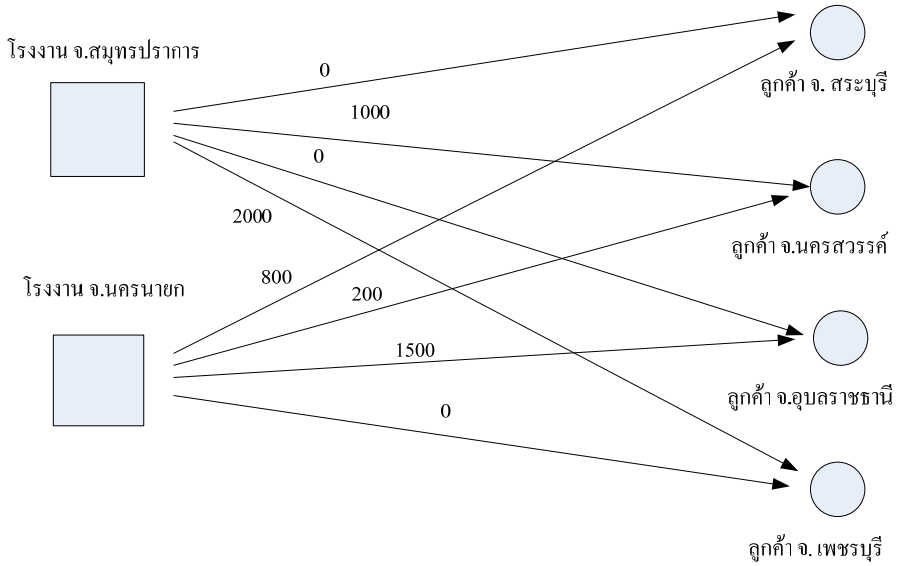
3. ปริมาณการขนส่งจากโรงงานทั้งสองแห่งไปยังลูกค้าในสี่จังหวัดต้องไม่เป็นค่าลบ

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4 \qquad (108)$$



รูปที่ 2.8 ตัวแปรตัดสินใจแทนปริมาณการขนส่งจากโรงงานไปยังลูกค้า

การประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้ผลเฉลยดังนี้ $x_{11} = 0$ $x_{12} = 1{,}000$ $x_{13} = 0$ $x_{14} = 2{,}000$ $x_{21} = 800$ $x_{22} = 200$ $x_{23} = 1{,}500$ $x_{24} = 0$ โดยที่ต้นทุนค่าใช้จ่ายในการขนส่งรวม (z) เท่ากับ 2,760,000 บาท ซึ่งอาจเขียนในรูปของข่ายงานการขนส่ง ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ผลลัพธ์ของตัวแบบการขนส่ง

ตัวอย่างที่ 2.12 บริษัทแห่งหนึ่งมีสินค้า 8 ชนิดที่จะต้องบรรทุกด้วยรถบรรทุกขนาด 18 ตัน ไปส่งยังลูกค้าเป้าหมาย มูลค่าและน้ำหนักของสินค้าแสดงดังตารางที่ 2.26 เนื่องจากปริมาณสินค้าทั้งหมดมีมากกว่าความสามารถของรถบรรทุก บริษัทจึงต้องพิจารณาว่าควรบรรทุกสินค้าใดบ้างจำนวนเท่าใด เพื่อให้มูลค่าของการขนส่งสูงที่สุด

ตารางที่ 2.26 แสดงมูลค่าและน้ำหนักของสินค้าที่ต้องการบรรทุก

สินค้าชนิดที่	มูลค่า (พันบาท)	น้ำหนัก (ตัน)
1	20	2.5
2	32	4.5
3	12	1.5
4	16	2.4
5	40	5.0
6	9	2.0
7	8	1.0
8	25	3.8

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_i แทนปริมาณสัดส่วนของสินค้าชนิด i ที่สามารถบรรทุกบนรถคันนี้ $i = 1,2,...,8$

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อให้มูลค่ารวมของสินค้าที่บรรทุกมีค่าสูงสุด

ค่าสูงสุด $z = 20x_1 + 32x_2 + 12x_3 + 16x_4 + 40x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 25x_8$ (109)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ปริมาณการบรรทุกรวมไม่เกิน 18 ตัน

$$2.5x_1 + 4.5x_2 + 1.5x_3 + 2.4x_4 + 5.0x_5 + 2.0x_6 + 1x_7 + 3.8x_8 \leq 18 \quad (110)$$

2. ปริมาณการบรรทุกสินค้าแต่ละชนิด จะต้องไม่เป็นค่าลบ

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, ..., 8 \quad (111)$$

เมื่อประมวลผลตัวแบบด้วยโปรแกรม SAS ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 1$ $x_5 = 1$ $x_6 = 0$ $x_7 = 1$ $x_8 = 0.684$ และ โดยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) ซึ่งเป็นมูลค่าของสินค้าที่บรรทุก เท่ากับ 133.105 พันบาท

ตัวอย่างที่ 2.13 การขนส่งสินค้าของบริษัทผลิตอาหารสำเร็จรูปแห่งหนึ่ง ซึ่งมีโรงงานอยู่สองแห่งที่จังหวัดสมุทรปราการและสมุทรสาคร โดยความสามารถในการผลิตของแต่ละโรงงานเท่ากับ 50,000 ชิ้นต่อสัปดาห์ เมื่อสินค้าผลิตเสร็จแล้วจะนำส่งไปยังศูนย์กระจายสินค้า (Distribution center) ซึ่งมีอยู่ 3 แห่งในจังหวัด นครปฐม อยุธยา และสุพรรณบุรี เพื่อส่งไปจำหน่ายให้กับลูกค้าใน 8 จังหวัด คือ กรุงเทพมหานคร นครนายก ฉะเชิงเทรา อ่างทอง ชัยนาท อุทัยธานี สระบุรี และลพบุรี โดยที่ความต้องการของลูกค้าในแต่ละจังหวัดแสดงดังตารางที่ 2.27 ต้นทุนในการขนส่งสินค้าจากโรงงานถึงศูนย์กระจายสินค้าและจากศูนย์กระจายสินค้าไปยังลูกค้าแสดงดังตารางที่ 2.28

ตารางที่ 2.27 ความต้องการของลูกค้าในแต่ละจังหวัด

ลูกค้าในจังหวัด	ปริมาณความต้องการ (ชิ้นต่อสัปดาห์)
กรุงเทพมหานคร	30,000
นครนายก	10,000
ฉะเชิงเทรา	9,000
อ่างทอง	10,000
ชัยนาท	6,000
อุทัยธานี	9,000
สระบุรี	11,000
ลพบุรี	15,000

ตารางที่ 2.28 ต้นทุนในการขนส่งสินค้า หน่วย : บาทต่อชิ้น

จาก / ถึง	สมุทรปราการ	สมุทรสาคร	นครปฐม	อยุธยา	สุพรรณบุรี
นครปฐม	85	58			
อยุธยา	105	112			
สุพรรณบุรี	127	123			
กรุงเทพมหานคร			60	75	100
นครนายก			165	180	160
ฉะเชิงเทรา			140	160	167
อ่างทอง			160	35	45
ชัยนาท			250	120	50
อุทัยธานี			275	156	320
สระบุรี			163	65	100
ลพบุรี			209	100	140

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_{ij} แทน จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน i ไปยังศูนย์กระจายสินค้า j

y_{jk} แทน จำนวนสินค้าที่ส่งจากศูนย์กระจายสินค้า j ไปยังลูกค้าในจังหวัด k

โดยที่ $i = 1,2$ แทนโรงงานในจังหวัดสมุทรปราการ และ สมุทรสาคร ตามลำดับ

$j = 1,2,3$ แทนศูนย์กระจายสินค้าจังหวัดนครปฐม อยุธยาและสุพรรณบุรี ตามลำดับ

$k = 1,2,...,8$ แทนลูกค้าในจังหวัดกรุงเทพมหานคร นครนายก ฉะเชิงเทรา อ่างทอง ชัยนาท อุทัยธานี สระบุรี และลพบุรี ตามลำดับ

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อให้ต้นทุนรวมในการขนส่งมีค่าต่ำที่สุด

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{8} b_{jk}y_{jk} \tag{112}$$

เมื่อ c_{ij} แทนต้นทุนค่าขนส่งจากโรงงาน i ไปยังศูนย์กระจายสินค้า j และ

b_{jk} แทนต้นทุนค่าขนส่งจากศูนย์กระจายสินค้า j ไปยังลูกค้า k

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. ความสามารถในการผลิตของโรงงานแต่ละแห่ง

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 50,000 \quad \text{(สมุทรปราการ)} \qquad (113)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leq 50,000 \quad \text{(สมุทรสาคร)}$$

2. ปริมาณความต้องการของลูกค้าในแต่ละจังหวัด

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j1} \geq 30,000 \quad \text{(กรุงเทพมหานคร)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j2} \geq 10,000 \quad \text{(นครนายก)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j3} \geq 9,000 \quad \text{(ฉะเชิงเทรา)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j4} \geq 10,000 \quad \text{(อ่างทอง)} \qquad (114)$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j5} \geq 6,000 \quad \text{(ชัยนาท)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j6} \geq 9,000 \quad \text{(อุทัยธานี)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j7} \geq 11,000 \quad \text{(สระบุรี)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j8} \geq 15,000 \quad \text{(ลพบุรี)}$$

3. ปริมาณสมดุลย์ของสินค้าเข้า-ออกที่ศูนย์กระจายสินค้าแต่ละแห่ง โดยไม่มีปริมาณสินค้าเหลืออยู่ที่ศูนย์ฯ

$$x_{11} + x_{21} = y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{18} \quad \text{(นครปฐม)}$$
$$x_{12} + x_{22} = y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{28} \quad \text{(อยุธยา)} \qquad (115)$$
$$x_{13} + x_{23} = y_{31} + y_{32} + \ldots + y_{38} \quad \text{(สุพรรณบุรี)}$$

4. ปริมาณการขนส่งจากโรงงานไปยังศูนย์กระจายสินค้า และจากศูนย์กระจายสินค้าไปยังลูกค้าในจังหวัดต่าง ๆ ต้องไม่เป็นค่าลบ

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3 \qquad (116)$$
$$y_{jk} \geq 0 \quad j = 1,2,3 \quad k = 1,2,\ldots,8$$

จากการประมวลผลตัวแบบด้วยโปรแกรม SAS ผลเฉลยสามารถแสดงดังตารางที่ 2.29 โดยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) ซึ่งเป็นต้นทุนรวมในการขนส่ง เท่ากับ 17,304,000 บาท

ตารางที่ 2.29 ผลเฉลยที่ได้จากการประมวลผลตัวแบบ (หน่วย : ชิ้น)

จาก / ถึง	สมุทรปราการ	สมุทรสาคร	นครปฐม	อยุธยา	สุพรรณบุรี
นครปฐม	0	49,000			
อยุธยา	45,000	0			
สุพรรณบุรี	5,000	1,000			
กรุงเทพมหานคร			30,000	0	0
นครนายก			10,000	0	0
ฉะเชิงเทรา			9,000	0	0
อ่างทอง			0	10,000	0
ชัยนาท			0	0	6,000
อุทัยธานี			0	9,000	0
สระบุรี			0	11,000	0
ลพบุรี			0	15,000	0

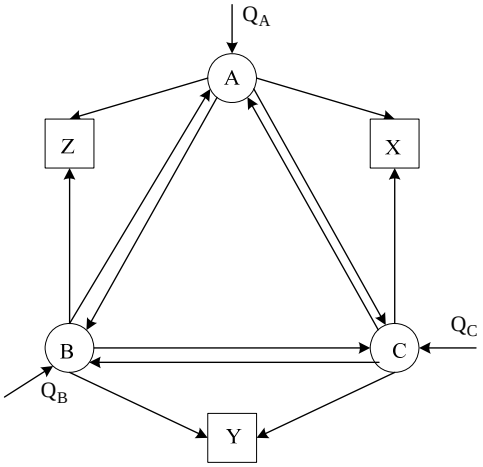
ตัวอย่างที่ 2.14 ปัญหาการจ่ายกระแสไฟฟ้าแรงสูง 3 สถานี คือ A B และ C ให้กับพื้นที่บริการ 3 พื้นที่ คือ X Y และ Z ซึ่งมีปริมาณความต้องการเท่ากับ 25 50 และ 30 เมกะวัตต์ ตามลำดับ ความสามารถสูงสุดของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า (Generator) และต้นทุนการผลิตไฟฟ้าของแต่ละสถานีแสดงในตารางที่ 2.30 กระแสไฟฟ้าสามารถส่งจากสถานีผลิตกระแสไฟฟ้าไปยังพื้นที่บริการได้แต่มีการสูญเสียเกิดขึ้นระหว่างการส่ง 15% ในแต่ละพื้นที่บริการ สถานีไฟฟ้าสามารถจ่ายไฟฟ้าผ่านสายส่งเชื่อมโยงไปยังพื้นที่บริการ ดังรูปที่ 2.10สถานี A และ C มีสายส่งไปยังพื้นที่ X สำหรับสถานี B และ C มีสายส่งไปยังพื้นที่บริการ Y และสถานี A และ B ไปยังพื้นที่ Z นอกจากนี้กระแสไฟฟ้าสามารถส่งผ่านระหว่าง 2 สถานีด้วยกันได้ แต่จะมีการสูญเสียเกิดขึ้น 10% ระหว่างการส่ง

เป้าหมายของการศึกษานี้ คือ การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาแผนการจ่ายกระแสไฟฟ้าที่เหมาะสม ซึ่งสามารถจ่ายกระแสไฟฟ้าระหว่างแหล่งผลิตไฟฟ้า และพื้นที่บริการ

ตารางที่ 2.30 แสดงความสามารถในการผลิต และต้นทุนการผลิตของแต่ละสถานี

สถานีไฟฟ้า	ความสามารถในการผลิต (เมกะวัตต์)	ต้นทุนการผลิต (บาท/เมกะวัตต์)
A	120	25,000
B	90	22,000
C	100	20,000

จากข้อมูลที่ได้สามารถเขียนรูปข่ายงานการจ่ายไฟฟ้าได้ดังนี้



รูปที่ 2.10 ข่ายงานการจ่ายไฟฟ้า

(1) กำหนดตัวแปร

Q_A, Q_B และ Q_C เป็นปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ผลิตจากสถานี A, B และ C ตามลำดับ

$X_{AB}, X_{AC}, X_{BC}, X_{BA}, X_{CA}, X_{CB}$ เป็นปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ผลิตจากสถานี และส่งให้สถานีผลิต

$Y_{AX}, Y_{AZ}, Y_{BY}, Y_{BZ}, Y_{CX}, Y_{CY}$ เป็นปริมาณการผลิตกระแสไฟฟ้าที่ส่งจากสถานีผลิตไปยังพื้นที่บริการ

(2) วัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด } z = 25{,}000Q_A + 22{,}000Q_B + 20{,}000Q_C \qquad (117)$$

(3) ข้อจำกัด

1. ปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ส่งระหว่างสถานี

$$\begin{aligned}
&\text{สถานี A} && X_{AB} + X_{AC} + Y_{AX} + Y_{AZ} - 0.90X_{BA} - 0.9X_{CA} - Q_A = 0 \\
&\text{สถานี B} && X_{BA} + X_{BC} + Y_{BY} + Y_{BZ} - 0.90X_{AB} - 0.90X_{CB} - Q_B = 0 \qquad (118) \\
&\text{สถานี C} && X_{CA} + X_{CB} + Y_{CX} + Y_{CY} - 0.90X_{AC} - 0.90X_{BC} - Q_C = 0
\end{aligned}$$

2. ปริมาณกระแสไฟฟ้าที่ส่งจากสถานีผลิตไปพื้นที่บริการ

พื้นที่ X $0.85Y_{AX} + 0.85Y_{CX} \geq 80$

พื้นที่ Y $0.85Y_{BY} + 0.85Y_{CY} \geq 150$ (119)

พื้นที่ Z $0.85Y_{AZ} + 0.85Y_{BZ} \geq 70$

3. ความสามารถในการผลิตสูงสุด

$$\begin{aligned} Q_A &\leq 120 \\ Q_B &\leq 150 \\ Q_C &\leq 100 \end{aligned} \quad (120)$$

4. ค่าของตัวแปรไม่ติดลบ

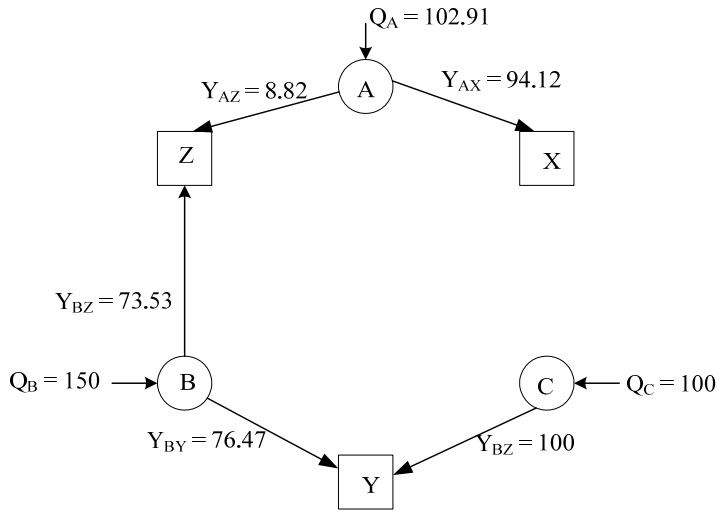
$$\begin{aligned} Q_A, Q_B, Q_C &\geq 0 \\ X_{AB}, X_{AC}, X_{BA}, X_{BC}, X_{CA}, X_{CB} &\geq 0 \\ Y_{AX}, Y_{AZ}, Y_{BY}, Y_{BZ}, Y_{CX}, Y_{CY} &\geq 0 \end{aligned} \quad (121)$$

จากการใช้โปรแกรมช่วยในการคำนวณ จะพบว่า ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ

$Q_A = 102.91$ $Q_B = 150$ $Q_C = 100$ $Y_{AX} = 94.12$

$Y_{AZ} = 8.82$ $Y_{BY} = 76.47$ $Y_{BZ} = 73.53$ $Y_{CY} = 100$

ส่วนตัวแปรอื่น ๆ มีค่าเท่ากับ 0 และ Z = 7,873,529.41 บาท ซึ่งผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดสามารถแสดงดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ผลเฉลยของการจ่ายไฟฟ้าแสดงบนข่ายงาน

2.8 การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (DEA)

โดยทั่วไป การวัดประสิทธิภาพของหน่วยงานหรือเครื่องจักรอุปกรณ์ต่าง ๆ สามารถทำได้โดยการหาอัตราส่วนระหว่างปริมาณของปัจจัยผลผลิตกับปริมาณของปัจจัยนำเข้า แล้วคูณด้วย 100 ในทางปฏิบัตินั้นมักมีปัจจัยการนำเข้ามากกว่า 1 ปัจจัยและปัจจัยผลผลิตก็อาจมากกว่า 1 ปัจจัยด้วย ทำให้เกิดแนวคิดที่จะถ่วงน้ำหนักปัจจัยนำเข้าต่างๆ ให้เป็นหน่วยมาตรฐาน ในทำนองเดียวกัน จะถ่วงน้ำหนักปัจจัยผลผลิตต่าง ๆ ให้เป็นหน่วยมาตรฐาน อย่างไรก็ตาม การกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักต่าง ๆ ที่เหมาะสมนั้น บางครั้งเป็นการยากที่จะทำให้ทุกหน่วยงานหรือบุคคลที่เกี่ยวข้องยอมรับ

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของหน่วยงานต่าง ๆ เพื่อให้ทราบว่าหน่วยงานใดมประสิทธิภาพดีกว่าหน่วยงานอื่น ๆ ที่พิจารณา ซึ่งจะทำให้ทราบว่าหน่วยงานใดเป็น หน่วยงานมาตรฐาน (Brench mark unit)

การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (Data Envelopment Analysis, DEA) เป็นวิธีการที่ใช้ข้อมูลสำหรับประเมินผลการปฏิบัติงานของ*หน่วยงานต่าง ๆ ที่เราสนใจ (Decision Making Units, DMUs)* โดยทั่วไป หน่วยงานต่าง ๆ ที่เราสนใจจะใช้ทรัพยากรเข้าไปในหน่วยงานแล้วก่อให้เกิดเป็นผลผลิตออกมาในรูปต่าง ๆ กัน แต่ละหน่วยงาน อาจใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้าต่าง ๆ ในปริมาณที่แตกต่างกันและได้ผลผลิตในปริมาณที่แตกต่างกัน ส่งผลให้ขนาดของหน่วยงานที่นำมาวิเคราะห์และประเมินผลการปฏิบัติงานมีตั้งแต่หน่วยงานเล็ก ๆ จนถึงขนาดใหญ่ระดับประเทศ การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล สามารถนำมาใช้วัดหน่วยงานที่มีขนาดแตกต่างกัน ซึ่งมีการใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้า และผลผลิตที่แตกต่างกันได้ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล ทำให้ทราบว่าภายใต้หน่วยงานที่พิจารณาทั้งหมด หน่วยงานได้มีประสิทธิภาพสูงสุดและสำหรับหน่วยงานที่ไม่มีประสิทธิภาพ ควรลดการใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้าใดบ้าง จำนวนเท่าใด หรือเพิ่มผลผลิตใดบ้าง จำนวนเท่าใด

Charnes, Cooper and Rhodes (1978) ได้อธิบายว่า การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูลเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาประยุกต์กับข้อมูลค่าสังเกต (Observational Data) แล้วเกิดแนวทางใหม่ในการประเมินความสัมพันธ์ต่างๆ เช่น ฟังก์ชันทางการผลิต และ/หรือประสิทธิภาพของพื้นผิวความเป็นไปได้ในเชิงการผลิต (Production possibility surfaces) ซึ่งเป็นองค์ความรู้เชิงเศรษฐศาสตร์สมัยใหม่ ตัวแบบการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูลแบบทั่วไปมีดังนี้

กำหนดให้ เซตของข้อมูลขนาด j ในแต่ละหน่วยงานที่เราสนใจ ในแต่ละหน่วยที่เราสนใจ j มีการใช้ปัจจัยนำเข้า (Input) จำนวน m ชนิด เพื่อให้ได้ผลผลิต (Output) จำนวน s ชนิด

ให้ x_{ij} แทนปริมาณปัจจัยนำเข้าชนิดที่ i สำหรับหน่วยงานที่ j

y_{kj} แทนปริมาณผลผลิตชนิดที่ k จากหน่วยงานที่ j

ตัวแบบ CCR สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\text{ค่าสูงสุด} \quad h_o(u,v) = \frac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{ko}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \tag{122}$$

v_i และ u_k แทนน้ำหนักของปัจจัยนำเข้าชนิดที่ i และน้ำหนักของผลผลิตชนิดที่ k สำหรับหน่วยงาน o x_{io} แทนปริมาณปัจจัยนำเข้าชนิดที่ i สำหรับหน่วยงานที่ o y_{ko} แทนปริมาณผลผลิตชนิดที่ k จากสำหรับหน่วยงานที่ o โดยที่ข้อจำกัดของตัวแบบแสดงถึงประสิทธิภาพของแต่ละหน่วยงาน ซึ่งเป็นสัดส่วนระหว่างผลรวมที่ถ่วงน้ำหนักของปัจจัยนำเข้ากับผลรวมที่ถ่วงน้ำหนักของผลผลิต โดยทั่วไปสัดส่วนนี้มีค่าไม่เกินหนึ่ง

$$\frac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1 \qquad \forall j \quad j = 1,2,...,n$$

$$u_k \ , \ v_i \geq 0 \tag{123}$$

ในข้อจำกัด (123) อยู่ในรูปของสัดส่วนทำให้เราหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดได้หลายผลเฉลย คือ (u^*, v^*) และ $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ เมื่อ $\alpha > 0$ ดังนั้น Charnes and Cooper (1962) ได้เสนอตัวแบบใหม่โดยเพิ่มข้อจำกัดให้ $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$ จึงทำให้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดใน (122) และ (123) เปลี่ยนเป็น

$$\text{Max} \quad h_o(u,v) = \sum_{k=1}^{s} u_k y_{ko}$$

$$\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad \forall j \quad j = 1,2,...,n \tag{124}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$$

$$u_k \ , \ v_i \geq 0$$

จากตัวแบบ (124) ตัวแปรในตัวแบบ คือ u_k และ v_i โดย k = 1,2,3,…, m และ i = 1,2,3,…,s อาจกล่าวได้ว่า u_k เป็นค่าถ่วงน้ำหนักของปัจจัยผลผลิตที่ k และ v_i เป็นค่าถ่วงน้ำหนักของปัจจัยนำเข้าที่ i

เมื่อพิจารณาหน่วยงานที่ o ถ้าสามารถหา u_k และ v_i สำหรับทุกปัจจัยนำเข้าที่ k และปัจจัยผลผลิตที่ i ที่ทำให้ประสิทธิภาพของหน่วยงานนี้เท่ากับ 1 แสดงว่า หน่วยงานที่ o มีประสิทธิภาพ ในทางตรงกันข้าม ถ้าไม่สามารถหา u_k และ v_i สำหรับทุกปัจจัยนำเข้าที่ k และปัจจัยผลผลิตที่ i ที่ทำให้ประสิทธิภาพของหน่วยงานนี้เท่ากับ 1 แสดงว่า หน่วยงานที่ o ไม่มีประสิทธิภาพ หรือถูกครอบงำ (Dominate) จากหน่วยงานที่มีประสิทธิภาพ

ตัวอย่างที่ 2.15 ธนาคารไทยแบงค์ มีสาขา 3 แห่ง ธนาคารต้องการวัดประสิทธิภาพของสาขาทั้ง 3 แห่งจากการศึกษาได้พิจารณาปัจจัยนำเข้าที่สำคัญ 3 ปัจจัยคือ จำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงาน (100 ชม.ต่อเดือน) จำนวนพื้นที่ของสำนักงาน (ตารางวา) และค่าใช้จ่ายในการบริหารและจัดการสาขา (หมื่นบาทต่อเดือน) สำหรับผลผลิตได้ใช้ตัวชี้วัด 3 ตัวชี้วัดคือ จำนวนลูกค้าเงินกู้ (รายต่อเดือน) จำนวนครั้งของการฝาก-ถอนเงิน (ครั้งต่อเดือน) และจำนวนเช็คที่ผ่านเข้า-ออก(รายการต่อเดือน) จากการบันทึกข้อมูลพบว่า จำนวนปัจจัยนำเข้า และผลผลิตโดยเฉลี่ยต่อเดือนแสดงดังตารางที่ 2.31

ตารางที่ 2.31 ปัจจัยนำเข้าและผลผลิตของสาขาต่าง ๆ

สาขาที่	ปัจจัยนำเข้า			ผลผลิต		
	ชั่วโมงทำงานของพนักงาน	พื้นที่สำนักงาน	ค่าใช้จ่าย	จำนวนลูกค้าเงินกู้	จำนวนการฝาก-ถอนเงิน	จำนวนเช็คที่ผ่านเข้า-ออก
1	15	25	60	200	15	35
2	14	30	64	220	18	45
3	16	20	62	210	17	20

ประสิทธิภาพของหน่วยงาน เท่ากับมูลค่าของผลผลิตต่อมูลค่าของปัจจัยนำเข้า ดังนั้นประสิทธิภาพของแต่ละหน่วยงาน คือ

$$e_1 = \frac{200u_1 + 15u_2 + 35u_3}{15v_1 + 25v_2 + 60v_3}$$

$$e_2 = \frac{220u_1 + 18u_2 + 45u_3}{14v_1 + 30v_2 + 64v_3}$$

$$e_3 = \frac{210u_1 + 17u_2 + 20u_3}{16v_1 + 20v_2 + 62v_3}$$

e_j แทนประสิทธิภาพของธนาคารสาขาที่ j โดย $j = 1,2,3$

u_k แทนมูลค่าต่อหน่วยของผลผลิตที่ k โดย $k = 1,2,3$

v_i แทนต้นทุนต่อหน่วยของปัจจัยนำเข้าที่ i โดย $i = 1,2,3$

เมื่อกำหนดให้มูลค่ารวมของปัจจัยนำเข้ามีค่าเท่ากับ หนึ่ง และมูลค่าต่อหน่วยของผลผลิตและปัจจัยนำเข้าต้องมีค่าไม่เป็นศูนย์ (ให้มีค่าอย่างน้อยเท่ากับ 0.001) แล้วจะได้ตัวแบบการวิเคราะห์การโอบล้อมข้อมูลสำหรับหน่วยงานที่ 1 คือ

ค่าสูงสุด $z = 200u_1 + 15u_2 + 35u_3$ (125)

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
-200u_1 - 15u_2 - 35u_3 + 15v_1 + 25v_2 + 60v_3 &\geq 0 \\
-220u_1 - 18u_2 - 45u_3 + 14v_1 + 30v_2 + 64v_3 &\geq 0 \\
-210u_1 - 17u_2 - 20u_3 + 16v_1 + 20v_2 + 62v_3 &\geq 0 \qquad (126) \\
15v_1 + 25v_2 + 60v_3 &= 1 \\
u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 &\geq 0.001
\end{aligned}$$

ธนาคารสาขาอื่น ๆ สามารถสร้างตัวแบบได้ทำนองเดียวกัน จากการประมวลผลตัวแบบข้างต้นสำหรับสาขาที่ 1 จะได้ผลเฉลยคือ $u_1 = 0.0049$ $u_2 = 0.001$ $u_3 = 0.001$ และ $v_1 = 0.001$ $v_2 = 0.0023$ $v_3 = 0.0154$ โดยที่ประสิทธิภาพ (z) เท่ากับ 0.9676 สำหรับสาขาที่ 2 และ 3 ประสิทธิภาพเท่ากับ 1.0 และ 1.0 ตามลำดับ แสดงว่า ธนาคารสาขาที่ 2 และ 3 มีประสิทธิภาพ ส่วนสาขาที่ 1ไม่มีประสิทธิภาพ

การใช้ตัวแบบการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (DEA) สามารถนำมาใช้ในการวัดประสิทธิ ภาพของหน่วยงานในองค์กรได้อย่างแพร่หลาย Vujcic and Jemric (2001) ได้นำการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูลไปใช้วัดประสิทธิภาพของธนาคารแคว้นโครเอเชีย Rowland (2004) ได้ใช้ DEA ในการประเมินประสิทธิภาพการสอนของอาจารย์ในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง Lozana, et al. (2002) ได้นำตัวแบบ DEA มาวัดประสิทธิภาพของประเทศต่างๆ ในการส่งนักกีฬาเข้าแข่งขันกีฬาโอลิมปิค 2000 ที่ประเทศออสเตรเลีย โดยปัจจัยนำเข้าคือ GNP (Gross national product) และจำนวนประชากรของประเทศ ส่วนปัจจัยผลผลิตคือ จำนวนเหรียญทอง เหรียญเงิน และเหรียญทองแดง โดยถ่วงน้ำหนักเหรียญทอง:เหรียญเงิน:เหรียญทองแดง เท่ากับ 1: 2: 4 ทำให้สามารถวัดประสิทธิภาพของประเทศต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ Yeh (1996) ได้ใช้ตัวแบบ DEA เพื่อวัดประสิทธิภาพ 6 ธนาคารหลักในประเทศไต้หวันทำให้สามารถแบ่งกลุ่มธนาคารได้เป็น 3 กลุ่มตามค่า DEA ที่วัดได้ คือ กลุ่มที่มี DEA สูง กลาง และต่ำ Yeh

สรุปว่าการวัดด้วย DEA มีประสิทธิภาพดีกว่าการใช้ตัวชี้วัดประเภทอัตราส่วนทางการเงินดังเดิม (Traditional Financial ratio)

2.9 ตัวแบบการวางแผนหลายคาบเวลา

จากตัวอย่างในหัวข้อ 2.6 การโปรแกรมเชิงเส้นสามารถใช้ในการตัดสินใจกรณีของการวางแผนสำหรับหนึ่งช่วงเวลา ในตัวอย่างต่อไปนี้จะกล่าวถึงการตัดสินใจหาผลเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับการวางแผนหลายคาบเวลา (Multiperiod planning) เราต้องการหาผลเฉลยว่าตัวแปรตัดสินใจในแต่ละคาบเวลา โดยค่าของตัวแปรตัดสินใจในคาบเวลาหนึ่งจะส่งผลต่อค่าของตัวแปรตัดสินใจในช่วงเวลาถัดไป

ตัวอย่าง 2.16 บริษัทเงินทุนแห่งหนึ่งต้องการกำหนดกลยุทธ์ในการลงทุนของบริษัทในช่วง 3 ปีข้างหน้า ด้วยมูลค่าการลงทุนในปัจจุบัน 5 ล้านบาทและไม่สามารถลงทุนเพิ่มจากแหล่งอื่นได้อีก บริษัทได้พิจารณาโครงการลงทุนที่มีแนวโน้มที่ดี ได้ทั้งหมด 6 โครงการ จากการประมาณปริมาณเงินสดในการลงทุน จำนวน 1 หน่วยลงทุน ซึ่งมีมูลค่า 1,000 บาท บริษัทจะได้รับเงินสดในแต่ละช่วงเวลาต่าง ๆ ของแต่ละโครงการ แสดงดังตารางที่ 2.32 เช่น โครงการ ก ลงทุนหนึ่งพันบาทในปีปัจจุบัน ในปีที่สองได้เงินสดกลับมาหนึ่งพันบาท และในปีที่สามได้เงินสดอีกหนึ่งพันบาท เป็นต้น

ตารางที่ 2.32 แสดงกระแสเงินสดในช่วงเวลาต่าง ๆ (พันบาท)

โครงการ	กระแสเงินสดในช่วงปีที่			
	0	1	2	3
ก	–1	0	1	1
ข	–1	0.5	1	1.2
ค	–1	1	1.5	2
ง	0	–1.2	0.5	1.5
จ	0	–1	– 0.5	2
ฉ	–1	0.8	0	0.8

“– “ แทนเงินลงทุน และ “+” แทนเงินสดที่ได้รับ

นอกจากนี้บริษัทยังมีนโยบายที่จะลงทุนในแต่ละโครงการไม่น้อยกว่า 100,000 บาท แต่ไม่เกิน 3 ล้านบาท ที่อัตราผลตอบแทนร้อยละ 8 ต่อปี บริษัทต้องการทราบว่าควรลงทุนในแต่ละ

โครงการเป็นจำนวนเงินเท่าใด เพื่อทำให้ได้รับเงินสดเมื่อสิ้นอายุโครงการสูงที่สุด ซึ่งในช่วงปีที่ 1 และ 2 อาจมีการลงทุนเพิ่ม บริษัทต้องใช้เงินสดที่มีอยู่ในมือในเวลานั้นลงทุน บริษัทไม่สามารถหาเงินจากแหล่งเงินทุนภายนอกมาลงทุนได้ ในที่นี้จำนวนหน่วยลงทุนแต่ละโครงการไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ ก
x_2 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ ข
x_3 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ ค
x_4 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ ง
x_5 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ จ
x_6 แทน จำนวนหน่วยลงทุนในโครงการ ฉ

ในปัญหานี้จำนวนเงินสดที่เหลืออยู่ในปีที่ t ใด ๆ สามารถนำไปใช้ลงทุนในโครงการอื่น ๆ ที่ต้องการให้ลงทุนเพิ่มในปีที่ t หากเงินสดที่เหลือในปีที่ t ใด ๆ สามารถนำไปหาประโยชน์ได้ผลตอบแทนร้อยละ 8 ต่อปี กล่าวคือถ้าเงินเหลืออยู่ในปีที่ 1 จำนวน s_1 บาท สามารถหาผลประโยชน์ทำให้ได้รับเงินจำนวน $1.08(s_1)$ บาทในปีที่ 2 ดังนั้น ให้ s_t แทนจำนวนเงินที่เหลืออยู่ในคาบเวลาที่ t (หน่วยพันบาท)

จำนวนเงินที่เหลืออยู่ในเวลาที่ t = จำนวนเงินสดที่ได้รับในปีที่ t – จำนวนเงินสดที่ต้องลงทุนเพิ่ม ในปีที่ t + จำนวนเงินสดที่เหลือจากปีที่ t –1

เช่นในปีที่ 1 จะได้ $s_1 = 0.5x_2 + 1x_3 - 1.2x_4 - 1x_5 + 0.8x_6 + 1.08s_0$

(2) กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อทำให้เงินสดเมื่อสิ้นโครงการในปีที่สามมีค่าสูงสุด

ค่าสูงสุด $z = 1x_1 + 1.2x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 2x_5 + 0.8x_6 + 1.08s_2$ (127)

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

1. จำนวนเงินสดที่มีไว้ลงทุนในปีปัจจุบัน (ปีที่ 0) ซึ่งเท่ากับจำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการต่าง ๆ ในปีปัจจุบัน บวกด้วยจำนวนเงินที่เหลือจากการลงทุน (s_0)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + s_0 = 5{,}000 \quad (128)$$

2. จำนวนเงินสดที่มีไว้ลงทุนในปีที่ 1

$$0.5x_2 + x_3 + 0.8x_6 + 1.08s_0 = 1.2x_4 + x_5 + s_1$$

$$0.5x_2 + x_3 - 1.2x_4 - x_5 + 0.8x_6 + 1.08s_0 - s_1 = 0 \quad (129)$$

3. จำนวนเงินสดที่มีไว้ลงทุนในปีที่ 2

$$x_1 + x_2 + 1.5x_3 + 0.5x_4 + 1.08s_1 = 0.5x_5 + s_2$$
$$x_1 + x_2 + 1.5x_3 + 0.5x_4 - 0.5x_5 + 1.08s_1 - s_2 = 0 \quad (130)$$

4. จำนวนเงินที่ลงทุนในแต่ละโครงการต้องไม่น้อยกว่า 100,000 บาท

$$x_i \geq 100 \qquad i = 1,2,...,6 \quad (131)$$

5. จำนวนเงินที่ลงทุนแต่ละโครงการต้องไม่เกิน 3 ล้านบาท

$$x_i \leq 3{,}000 \qquad i = 1,2,...,6 \quad (132)$$

6. จำนวนเงินที่ลงทุนในแต่ละโครงการต้องไม่เป็นค่าลบ

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,...,6 \quad (133)$$
$$\text{และ} \quad s_j \geq 0 \qquad j = 0,1,2$$

เมื่อนำตัวแบบดังกล่าวข้างต้นมาประมวลผลจะได้ผลเฉลยดังนี้ $x_1 = 100$ $x_2 = 1{,}800$ $x_3 = 3{,}000$ $x_4 = 3{,}000$ $x_5 = 380$ $x_6 = 100$ $s_1 = 0$ $s_1 = 0$ และ $s_2 = 7{,}710$ โดยที่ $z = 21{,}926.8$ กล่าวคือ บริษัทจะลงทุนในโครงการ ก ข ค ง จ และ ฉ จำนวน 100 1,800 3,000 3,000 380 และ 100 หน่วยตามลำดับ และได้เงินสดเมื่อสิ้นสุดโครงการเท่ากับ 21,926,800 บาท

ตัวอย่าง 2.17 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการวางแผนการผลิตรวม สำหรับ 6 เดือนข้างหน้า เนื่องจากฤดูกาล ทำให้ต้นทุนการผลิตต่อหน่วยมีค่าไม่คงที่ ต้นทุนการผลิตที่ประมาณไว้และค่าพยากรณ์ยอดขายแสดงดังตารางที่ 2.33

ตารางที่ 2.33 ปริมาณความต้องการและต้นทุนการผลิต

เดือน	ความต้องการสินค้า (หน่วย)	ต้นทุนการผลิต (บาทต่อหน่วย)
1	900	100
2	1,500	105
3	1,200	110
4	1,000	115
5	1,700	115
6	1,900	110

ในระหว่าง 6 เดือนนี้ ทางบริษัทสามารถผลิตสินค้าในเดือนหนึ่งแล้วเก็บสินค้าไว้ในคลังสินค้า เพื่อขายในเดือนถัดไปได้ สำหรับสินค้าที่ผลิตและขายในเดือนเดียวกันจะไม่ได้นำมาเก็บไว้ในคลังสินค้า ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้าคงคลังเท่ากับ 4 บาทต่อหน่วยต่อเดือน คลังสินค้าสามารถเก็บสินค้าได้สูงสุด 350 หน่วย สินค้าคงเหลือในคลังสินค้า ณ วันเริ่มต้น

แผนการผลิตนี้ เท่ากับ 200 หน่วย บริษัทมีนโยบายให้มีสินค้าคงคลังในวันสิ้นสุดแผนการผลิตเท่ากับ 200 หน่วยและไม่ยอมให้มีการขาดแคลนสินค้าเกิดขึ้น ความสามารถในการผลิตสูงสุดเท่ากับ 1,800 ชิ้นต่อเดือน

ดังนั้น บริษัทต้องหาปริมาณการผลิตที่เหมาะสมในแต่ละเดือน เพื่อให้ปริมาณสินค้าเพียงพอกับความต้องการ ทำให้ต้นทุนรวมซึ่งประกอบด้วยต้นทุนการผลิตและต้นทุนการเก็บรักษาสินค้าคงคลังนั้นมีค่าต่ำที่สุด

(1) กำหนดตัวแปร

ในที่นี้เราต้องการหาปริมาณการผลิตสินค้าในช่วงเวลาต่าง ๆ ปริมาณการผลิตนี้ขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าที่มีอยู่ในคลังสินค้า ดังนั้นตัวแปรที่ต้องพิจารณาคือปริมาณสินค้าคงคลังและปริมาณสินค้าที่ผลิตในช่วงเวลาต่าง ๆ โดยกำหนดให้

t แทนดัชนีสำหรับเดือน ซึ่งมีค่า 1, 2, 3, …, 6

P_t แทนระดับการผลิตในเดือนที่ t

I_t แทนระดับสินค้าคงคลังปลายเดือนที่ t

พารามิเตอร์ของปัญหาคือ

D_t แทน ปริมาณความต้องการในเดือนที่ t

I_0 แทน ระดับสินค้าคงคลัง ณ เริ่มต้นแผนการผลิต

I_6 แทน ระดับสินค้าคงคลังปลายงวด ณ วันสิ้นสุดแผนการผลิต

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด } Z = 100\,P_1 + 105\,P_2 + 110\,P_3 + 115\,P_4 + 115\,P_5 + 110\,P_6 + \sum_{t=0}^{5} 4I_t \quad (134)$$

(3) ข้อจำกัด

1. สมการสมดุลของปริมาณเข้าออก

$$I_t = I_{t-1} + P_t - D_t \quad (135)$$

หรือ

$$I_{t-1} + P_t - I_t = D_t \text{ , } t = 1, 2, 3, \ldots, 6$$

ปริมาณสินค้าคงคลังในเดือนที่ t จะเท่ากับปริมาณสินค้าคงคลังในเดือนที่ $t-1$ บวกกับปริมาณการผลิตในเดือนที่ t ลบด้วยปริมาณความต้องการในเดือนที่ t หรือ อาจกล่าวว่าปริมาณความต้องการในเดือนที่ t เท่ากับปริมาณสินค้าคงคลังในเดือนที่ $t-1$ บวกกับปริมาณการผลิตในเดือนที่ t ลบด้วยปริมาณสินค้าคงในเดือนที่ t

2. ปริมาณสูงสุดของสินค้าคงคลังที่สามารถจัดเก็บได้

$$I_t \leq 350 \qquad t = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (136)$$

3. ปริมาณสินค้าเริ่มต้นและปริมาณสินค้าปลายงวด

$$I_0 = 200 \qquad (137)$$
$$I_6 = 200$$

4. ความสามารถในการผลิตสูงสุด

$$P_t \leq 1{,}800 \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, 6 \qquad (138)$$

5. เงื่อนไขบังคับไม่ติดลบ

$$I_t, P_t \geq 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } t, \ t = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (139)$$

จากตัวแบบดังกล่าวข้างต้น สามารถหาค่าผลเฉลยของตัวแปรตัดสินใจได้ดังตารางที่ 2.34 โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เท่ากับ 904,250 บาท

ตารางที่ 2.34 แสดงค่าผลเฉลยของปัญหา

ตัวแปร	ค่า	ตัวแปร	ค่า
P_1	1,050	I_1	350
P_2	1,500	I_2	350
P_3	1,200	I_3	350
P_4	850	I_4	200
P_5	1,800	I_5	300
P_6	1,800	I_6	200
Z	904,250		

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. การจัดสรรผู้โดยสารของสายการบินแห่งหนึ่ง ซึ่งมีอยู่ 4 เส้นทางคือเส้นทาง R1 R2 R3 และ R4 โดยมีประเภทของเครื่องบินโดยสารอยู่ 3 รุ่นคือ 741 742 และ 743 โดยจำนวนเครื่องบินโดยสารและปริมาณความจุ ปริมาณเที่ยวบินในแต่ละเส้นทาง รวมทั้งจำนวนผู้โดยสารในแต่ละเส้นทาง แสดงดังตารางที่ 2.35

ตารางที่ 2.35 จำนวนเครื่องบินโดยสารและปริมาณความจุ ปริมาณเที่ยวบินในแต่ละเส้นทาง และจำนวนผู้โดยสารในแต่ละเส้นทาง

ประเภทเครื่องบิน	ปริมาณความจุ (คน)	จำนวนเครื่องบิน (ลำ)	จำนวนเที่ยวบินในแต่ละเส้นทาง			
			R1	R2	R3	R4
741	50	6	3	2	2	1
742	30	8	4	3	3	2
743	20	10	5	5	4	2
ปริมาณผู้โดยสารต่อวัน (คน)			1,000	2,000	900	1,200

ในกรณีที่ปริมาณผู้โดยสารไม่เต็มเที่ยวบินจะทำให้สายการบินสูญเสียโอกาส ดังนั้นสายการบินได้ประเมินค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน (Operating cost) และค่าสูญเสียโอกาส (Opportunity cost) เมื่อมีที่นั่งว่าง 1 ที่นั่งแสดงดังตารางที่ 2.36

ตารางที่ 2.36 ค่าใช้จ่ายดำเนินงานและค่าสูญเสียโอกาส

หน่วย : พันบาท

ประเภทเครื่องบิน	ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน ต่อเที่ยวบินในแต่ละเส้นทาง			
	1	2	3	4
741	100	110	120	150
742	80	90	100	100
743	60	80	80	90
ค่าสูญเสียโอกาส	4	5	4.5	7

(1) จงจัดสรรเครื่องบินแต่ละประเภทให้กับเส้นทางต่าง ๆ และจำนวนเที่ยวบินที่ต้องการในแต่ละเส้นทางและประเภทของเครื่องบิน

(2) จากสถานการณ์นี้บริษัทสมควรเพิ่มจำนวนเครื่องบินประเภทที่สามหรือไม่

2. การผสมสูตรอาหารสัตว์ด้วยส่วนผสม 3 ชนิดคือ รำข้าว ข้าวโพด และถั่วเหลือง ซึ่งมีคุณค่าทางอาหารและราคาต่อหน่วยแสดงดังตารางที่ 2.37

ตารางที่ 2.37 คุณค่าอาหารและราคาต่อหน่วยของส่วนผสมทั้ง 3 ประเภท

ส่วนผสม	คุณค่าทางอาหาร			ราคาต่อหน่วย (บาทต่อกิโลกรัม)
	แคลเซียม	โปรตีน	ไฟเบอร์	
รำข้าว	0.30	0.09	0.15	10.0
ข้าวโพด	0.001	0.01	0.12	30.5
ถั่วเหลือง	0.002	0.20	0.20	90.0

โดยปริมาณสารอาหารที่จำเป็นสำหรับสูตรอาหารนี้ คือ ปริมาณแคลเซียมไม่น้อยกว่า 60 กรัมต่อกิโลกรัม ปริมาณโปรตีน และไฟเบอร์ไม่น้อยกว่า 100 กรัมต่อกิโลกรัม จากการพยากรณ์ยอดขายอาหารสัตว์ พบว่า ปริมาณความต้องการอาหารสัตว์เท่ากับ 5,000 กิโลกรัมต่อสัปดาห์ จงสร้างการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณส่วนผสมที่เหมาะสมที่สุดของอาหารสัตว์ประเภทนี้ โดยที่ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้เป็นส่วนผสมในอาหารนี้มีอยู่อย่างไม่จำกัด

3. บริษัทผลิตยาแห่งหนึ่ง ต้องการผลิตยาชนิดหนึ่งจำนวน 1,000 ปอนด์ต่อวัน ซึ่งการผลิตยาชนิดนี้จะได้จากการผสมสารเคมี 4 ชนิด ในปริมาณที่เหมาะสม เพื่อให้ยาที่ได้มีปริมาณสาร A, B และ C ตามต้องการ ดังนี้ คือ

   (1) ต้องมีปริมาณสาร A อย่างน้อย 8% โดยน้ำหนัก
   (2) ต้องมีปริมาณสาร B อย่างน้อย 4% โดยน้ำหนัก
   (3) ต้องมีปริมาณสาร C อย่างน้อย 2% โดยน้ำหนัก

   ต้นทุนต่อปอนด์ของสารเคมีทั้ง 4 ชนิด และปริมาณสาร A B และ C ในสารเคมีแต่ละชนิด แสดงในตารางที่ 2.38

   ถ้าปริมาณสารเคมีชนิดที่ 2 มีอยู่เพียง 100 ปอนด์ ขณะที่ปริมาณสารเคมีชนิดที่ 1 และ 3 มีอยู่อย่างไม่จำกัด จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เพื่อหาปริมาณการใช้สารเคมีทั้ง 4 ชนิดในการผลิตยาประเภทนี้ โดยให้มีต้นทุนที่ต่ำที่สุด

ตารางที่ 2.38 ต้นทุนสารเคมีและปริมาณสาร A, B และ C ในสารเคมี

สารเคมีชนิดที่	ต้นทุนสารเคมี (บาท/ปอนด์)	ปริมาณสารในสารเคมี 1 ปอนด์		
		A	B	C
1	800	0.03	0.02	0.01
2	1,000	0.06	0.04	0.01
3	1,100	0.10	0.03	0.04
4	1,400	0.12	0.09	0.04

4. บริษัทเงินทุนหลักทรัพย์แห่งหนึ่ง กำลังพิจารณาลงทุนใน 9 โครงการ จากการประเมินโครงการของนักวิเคราะห์โครงการพบว่า มูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบัน หรือ NPV (Net Present Value) รวมทั้งปริมาณการลงทุนในปีที่ 1 และ 2 ของแต่ละโครงการ แสดงดังตารางที่ 2.39

   ถ้าเลือกลงทุนในโครงการที่ 1 จะได้รับผลตอบแทนเป็นมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบัน 14 ล้านบาท แต่จะมีค่าใช้จ่ายในการลงทุนในปีที่ 1 และ 2 จำนวน 12 และ 3 ล้านบาท

ตารางที่ 2.39 ปริมาณการลงทุนและ NPV ของโครงการ หน่วย : ล้านบาท

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ปริมาณเงินลงทุนในปีที่ 1	12	54	6	6	630	6	48	36	18
ปริมาณเงินลงทุนในปีที่ 2	3	7	6	2	35	6	4	3	3
NPV	14	17	17	15	40	12	14	10	12

ถ้าปริมาณเงินทุนที่สามารถใช้ในการลงทุนในปีที่ 1 มีอยู่เพียง 50 ล้านบาท และในปีที่ 2 มีเงินลงทุนอีก 20 ล้านบาท จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อให้บริษัททราบว่า ควรจะลงทุนในโครงการใดบ้าง ในสัดส่วนเท่าใดของแต่ละโครงการ เพื่อให้ผลรวมของมูลค่าเทียบเท่าปัจจุบันสูงสุด

5. ร้านขายเบเกอรี่แห่งหนึ่ง ต้องการทำขนมเค้ก 2 ชนิด คือ เค้กช็อคโกเล็ต และเค้กวนิลา เพื่อเพิ่มรายได้ให้กิจการ โดยเค้กช็อคโกเล็ตจะขายในราคาชิ้นละ 40 บาท ส่วนเค้กวนิลาขายในราคาชิ้นละ 30 บาท เค้กช็อคโกเล็ต 1 ชิ้น ใช้เวลาในการอบ 20 นาที และใช้ไข่ไก่ 4 ฟอง ส่วนเค้กวนิลาใช้เวลาในการอบ 40 นาที และใช้ไข่ไก่เพียง 1 ฟอง ในแต่ละวันพนักงานอบขนมเค้กจะทำงาน 8 ชั่วโมง และมีไข่ไก่ที่สามารถใช้ทำขนมเค้กได้ 30 ฟอง จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีวัตถุประสงค์ที่จะทำให้ร้านเบเกอรี่ได้กำไรสูงสุด
6. ในการทำวิจัยตลาด เพื่อศึกษาความต้องการสินค้าประเภทหนึ่ง ผู้วิจัยต้องการสัมภาษณ์กลุ่มเป้าหมายทางโทรศัพท์ ซึ่งกลุ่มเป้าหมายประกอบด้วย แม่บ้านอย่างน้อย 150 คน พ่อบ้านอย่างน้อย 120 คน ผู้ชายโสดอย่างน้อย 100 คน ผู้หญิงโสดอย่างน้อย 110 คน โดยพ่อบ้านและแม่บ้านที่สัมภาษณ์จะไม่ได้มาจากครอบครัวเดียวกัน (ใช้โทรศัพท์คนละหมายเลขด้วย) ต้นทุนในการโทรศัพท์เพื่อสัมภาษณ์ในเวลากลางวัน 8 บาทต่อสาย ขณะที่ในเวลากลางคืนต้นทุน 20 บาทต่อสาย เนื่องจากในการโทรศัพท์แต่ละครั้งอาจไม่พบบุคคลที่ต้องการสัมภาษณ์ ดังนั้น จึงมีการประมาณการตอบรับ (Responding) เมื่อบุคคลที่เราต้องการสัมภาษณ์สามารถรับสายได้ การตอบรับของกลุ่มเป้าหมายในช่วงเวลากลางวันและกลางคืน แสดงดังตารางที่ 2.40

ตารางที่ 2.40 การตอบรับของกลุ่มเป้าหมายในช่วงเวลากลางวันและกลางคืน

กลุ่มเป้าหมาย	เปอร์เซ็นต์การโทรในเวลากลางวัน	เปอร์เซ็นต์การโทรในเวลากลางคืน
แม่บ้าน	30	30
พ่อบ้าน	10	30
ผู้ชายโสด	10	15
ผู้หญิงโสด	10	20
ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมาย	40	5

นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับพนักงานให้สัมภาษณ์ คือ การโทรศัพท์ในเวลากลางคืนสามารถกระทำได้ไม่เกินครึ่งหนึ่ง จำนวนการโทรศัพท์ทั้งหมด จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการโทรศัพท์ในเวลากลางวันและปริมาณการโทรศัพท์ในเวลากลางวัน เพื่อให้ค่าใช้จ่ายในการสัมภาษณ์นี้ต่ำที่สุด

7. Airline fuel allocation model (Nash, 1981) สายการบินฟรอนเทียร์ (Frontier airlines) ซึ่งให้บริการในเส้นทาง จากเดนเวอร์ผ่าน เมืองแคนซัส เซนหลุย โทเพก้า แล้วกลับมาเดนเวอร์ เนื่องจากการเติมน้ำมันในปริมาณที่มากเกินความจำเป็นทำให้เครื่องบินมีน้ำหนักมาก ส่งผลให้อัตราการเผาผลาญน้ำมันในขณะบินนั้นสูงมากขึ้น ทางบริษัทต้องการทราบว่าควรจะเติมน้ำมัน ณ สถานีที่เมืองต่าง ๆ จำนวนเท่าใด โดยสามารถเติมน้ำมันได้ดังตารางที่ 2.41

ตารางที่ 2.41 จุดเติมน้ำมันของของแต่ละเส้นทาง

เที่ยวบินที่	สถานีต้นทาง	สถานีที่จอด
1	เดนเวอร์	แคนซัส- เซนหลุย
2	เดนเวอร์	เซนหลุย โทเพก้า
3	เดนเวอร์	โทเพก้า
4	แคนซัส	เซนหลุย โทเพก้า
5	แคนซัส	โทเพก้า-เดนเวอร์
6	เซนหลุย	โทเพก้า-เดนเวอร์

8. ศูนย์โภชนาการแห่งหนึ่งรับผิดชอบในการจัดแผนการรับประทานอาหารของนักเรียน สำหรับอาหารเย็นมื้อหนึ่งมีความต้องการสารอาหาร 5 ชนิดคือ (1) ได้พลังงาน 1,200–2,500 แคลอรี่ (2) ธาตุเหล็กอย่างน้อย 4 มิลลิกรัม (3) ไขมันไม่เกิน 50 กรัม (4) โปรตีนอย่างน้อย 26 กรัม และ (5) คาร์โบไฮเดรตไม่เกิน 50 กรัม ในแต่ละวันศูนย์อาหารแห่งนี้ได้เตรียมอาหารเพื่อให้เป็นไปตามความต้องการสารอาหาร และต้นทุนต่อกิโลกรัมต่ำสุด ซึ่งต้นทุนของอาหารแต่ละประเภทแสดงในตารางที่ 2.42

(1) จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เพื่อระบุว่าแผนการจัดอาหารมื้อเย็นนี้จะประกอบด้วยอาหารชนิดใดบ้าง จำนวนเท่าใด เพื่อให้ได้ต้นทุนที่ต่ำสุด และได้ปริมาณสารอาหารตามที่ต้องการ

(2) จงหาผลเฉลยของปัญหา และพิจารณาว่าผลเฉลยปริมาณอาหารนี้สมดุลย์หรือไม่ (มีผัก เนื้อสัตว์ และอื่น ๆ เหมาะสมหรือไม่)

ตารางที่ 2.42 ความต้องการสารอาหารและต้นทุน

ชนิดอาหาร	ต้นทุนต่อกิโลกรัม	คุณค่าทางอาหารจำนวน 1กิโลกรัม (หน่วย)				
		พลังงาน (แคลอรี่)	เหล็ก (มิลลิกรัม)	ไขมัน (กรัม)	โปรตีน (กรัม)	คาร์โบไฮเดรต (แคลอรี่)
นม	30	590	0.4	32	32	44
หมูบด	120	932	0.4	39.2	162	0
เนื้อไก่	60	588	8.6	18	148	0
เนื้อปลา	115	416	6.4	1	163	0
ถั่ว	26	256	6.4	1.6	14	56
ผักขม	60	236	28.2	2.8	28	38
มันเทศ	19	558	4.4	1	16	126

บรรณานุกรม

Baker, K.R. (2006). *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, CA, USA.

Briend, A, Ferguson, E, and Darmon, N. (2001). Local food price analysis by linear programming: A new approach to assess the economic value of fortified food supplement. *Food and Nutrition Bulletin*, 22, 184-189.

Charnes, A., Cooper, W., and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units'. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

Charnes, A. and Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals'. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9 (3-4), 181-185.

Chen, M. and Wang W. (1997). A linear programming model for integrated steel production and distribution planning. *International Journal of Operations & Production Management* 17(6): 592-610.

Lozana, S. Vallia, G., Guerrero, F., and Cortes, P.(2002). Measure the performance of nations at the summer olympics using data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 53, 501-511.

Mathur, R., S. Chanda (2003). Optimal use of coal for power generation in India. *Energy Policy* 31(4): 319-331.

Miller, J. and Forrest, J. (2001). Modeling crude unit product overlap for better linear program modeling. *World Refinning* **,**11.

Mohammadpour, A. and Khanzadi, M., and Eshtehardian, E. (2008). Linear programming for optimizating strategic construction workforce management. *The first International Conference on Construction in Developing Countries*, Auguest 4-5, Karachi, Pakistan.

Nash, S.G., and Sofer, A. (1996). *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, USA.

Polimeno, F., Rehman, T., Neal, H., and Yates, C.M. (1990). Integrating the use of linear and dynamic programming methods for dairy cow diet formulation. *Journal of the operational research society*, 50, 931-942.

Rowland, L W. (2004) *Effect of multiple perspectives on assessment of teacher effectiveness: A data envelopment analysis.* PhD disertation, University of Southern California, California.

Smith, S.A. (1993). A linear programming model for real-time pricing of electric power service. *Operations Research*, 41(3), 470-483.

Taha, H.A. (1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, NY, USA.

Vujcic, B, and Jemric, I. (2001). Efficiency of banks in transition: A DEA approach. Retrieved July 19, 2006, from http://www.hnb.hr/dub-konf/7-konferencija-radovi/yusuke-capital-flows.pdf

Yeh, Q-J. (1996) The application of data envelopment analysis in conjunction with financial ratios for bank performance evaluation, *Journal of the Operational Research Society*, 47, 980-988.

ปรียาภรณ์ ธรรมชูเชาวรัตน์ ชรัญญา ชนชัย และพัชราภรณ์ เนียมมณี ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการวางแผนการผลิตไม้ดอก กรณีศึกษาสวนไม้ดอกชวนชม การประชุมวิชาการด้านการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ ประจำปี 2549 โรงแรมหลุยส์ แทรนเวินร์ กรุงเทพฯ.

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

3

Linear Programming Method

Linear Programming Method

โดยทั่วไปตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสำหรับปัญหาในทางธุรกิจและอุตสาหกรรม มักมีตัวแปรตัดสินใจจำนวนมาก ทำให้ตัวแบบมีความซับซ้อนขึ้น จึงนิยมนำเอาโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาผลเฉลย อย่างไรก็ตามเราควรจะเรียนรู้ลักษณะและวิธีการหาผลเฉลยอย่างง่าย เพื่อให้มีความเข้าใจถึงขั้นตอนของวิธีการหาผลเฉลย และสามารถเข้าใจการทำงานหรือผลเฉลยที่ได้จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วย

สำหรับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัวแปร เรานิยมอธิบายการหาผลเฉลยวิธีกราฟ หากจำนวนตัวแปรที่มากกว่า 2 ตัวแปร เราอาจใช้วิธีพีชคณิต หรือวิธีซิมเพล็กซ์ที่มีพื้นฐานมาจากวิธีพีชคณิต ในหัวข้อ 3.4 โดยทั่วไปนิยมใช้วิธีซิมเพล็กซ์ การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ใน 2 รูปแบบคือรูปแบบเมทริกซ์ และรูปแบบตาราง ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 3.5 และ 3.6 ผลเฉลยที่ได้จากการประมวลผลมีหลายลักษณะ ซึ่งได้อธิบายไว้ในหัวข้อ 3.7 นอกจากนี้ ยังกล่าวถึงข้อจำกัดในของวิธีซิมเพล็กซ์ ก็คือ (1) ค่าเริ่มต้นในการประมวลผลแต่ละต้องเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แนวทางในการแก้ไขนี้จะใช้เทคนิคตัวแปรเทียมที่จะกล่าวถึงในหัวข้อ 3.8 และ (2) ปัญหาในการทำซ้ำที่เดิม ในเล่มนี้ได้เสนอแนวทางแก้ปัญหาไว้ 2 วิธี และส่วนสุดท้ายได้กล่าวถึงวิธีประมวลผลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Excel solver และ โปรแกรม SAS

3.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีกราฟเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด และเป็นวิธีที่ทำให้เข้าใจขั้นตอนพื้นฐานในการหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด อย่างไรก็ตาม การเขียนกราฟที่มีหลายมิติ (Dimension) อาจทำให้เกิดความยุ่งยากในการเขียนกราฟ ดังนั้น จึงนิยมใช้กับปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัวแปร หรือ 3 ตัวแปรเท่านั้น หากจำนวนตัวแปรมากกว่านี้นิยมใช้วิธีซิม

เพล็กซ์ ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป สำหรับในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ

ตัวอย่างที่ 3.1 พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัวแปรที่มี x_1 และ x_2 แทนปริมาณการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 ซึ่งมีผลกำไรต่อหน่วยเท่ากับ 5 และ 3 บาท ในการวางแผนการผลิตมีข้อจำกัดด้านปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ 2 ชนิดดังแสดงในข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ส่วนปริมาณความต้องการสินค้าทั้งสองทำให้ได้ข้อจำกัดที่ 3 และ 4 ซึ่งมีตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\text{ค่าสูงสุด} \quad z = 5x_1 + 3x_2 \\
&\text{ข้อจำกัด} \quad 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\
&\qquad\quad 2x_1 + x_2 \le 8 \\
&\qquad\quad x_1 \le 3 \\
&\qquad\quad x_2 \le 5 \\
&\qquad\quad x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟมีดังนี้

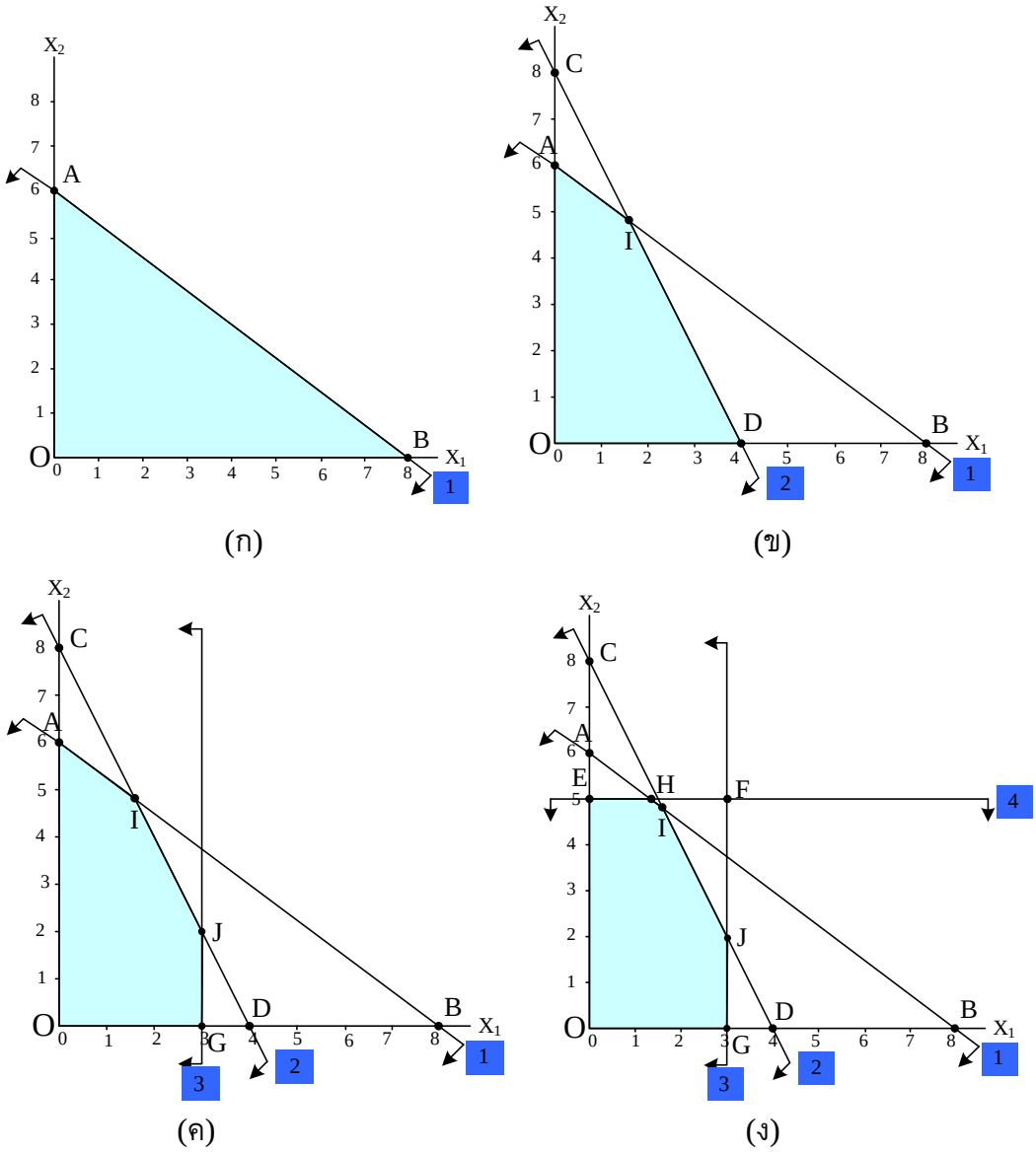
(1) พิจารณาข้อจำกัด $x_1 \ge 0$ และ $x_2 \ge 0$ หมายความว่า ค่าของ (x_1, x_2) จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ทุกค่า ดังนั้น ทุกค่าของ (x_1, x_2) จะต้องอยู่ในจตุภาค (Quadrant) ที่หนึ่งเท่านั้น

(2) ข้อจำกัดต่าง ๆ ในตัวแบบ (1) เป็นอสมการ เพื่อสะดวกในการเขียนกราฟให้พิจารณาข้อจำกัดเหล่านี้ ในลักษณะของสมการก่อน จะได้เส้นตรงทั้งหมด 4 เส้น คือ

สมการเส้นตรงที่ 1	$3x_1 + 4x_2$	=	24
สมการเส้นตรงที่ 2	$2x_1 + x_2$	=	8
สมการเส้นตรงที่ 3	x_1	=	3
สมการเส้นตรงที่ 4	x_2	=	5

นำสมการเหล่านี้มาเขียนกราฟ โดยเริ่มจากการลากเส้นตรงที่ 1 แล้วแรเงาพื้นที่ที่ประกอบด้วยจุดที่สอดคล้องกับอสมการ $3x_1 + 4x_2 \le 24$ ซึ่ง $x_1 \ge 0$ และ $x_2 \ge 0$ ดังรูปที่ 3.1 (ก) ทุก ๆ จุดบนพื้นที่แรเงา แทนผลเฉลยภายใต้ข้อจำกัดที่ 1 และ เงื่อนไข $x_1 \ge 0$ และ $x_2 \ge 0$ ดังนั้นพื้นที่แรเงาคือ เซตของผลเฉลยนั้นเอง เมื่อลากเส้นตรงที่ 2 และแรเงาพื้นที่ที่ประกอบด้วยจุดที่สอดคล้องกับอสมการ $3x_1 + 4x_2 \le 24$ และ $2x_1 + x_2 \le 8$ โดยที่ $x_1 \ge 0$ และ $x_2 \ge 0$ ดังรูปที่ 3.1 (ข) ในทำนองเดียวกัน ถ้าเพิ่มข้อจำกัดที่ 3 แล้วจะได้พื้นที่แรเงาดังรูปที่ 3.1 (ค) และเมื่อเพิ่มข้อจำกัดสุดท้ายคือข้อจำกัดที่ 4 พื้นแรเงาจะมีขนาดเล็กลง กล่าวคือเซตของผลเฉลยในรูปที่ 3.1 (ง) เป็นสับเซตย่อย (Subset) ของผลเฉลยในรูปที่ 3.1 (ค) ปัญหาการ

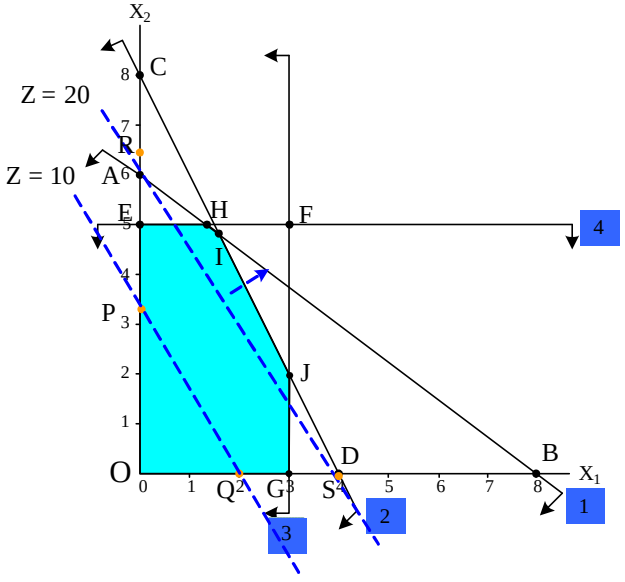
โปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างนี้มี 4 ข้อจำกัดข้างต้น จุดที่มีคู่ลำดับ (x_1, x_2) บนพื้นที่ 6 เหลี่ยม OEHIJG จะสอดคล้องกับข้อจำกัดทั้งหมด เราเรียกทุก ๆ จุดของ (x_1, x_2) บนพื้นที่แรเงา OEHIJG ว่า *ผลเฉลยที่เป็นไปได้ (Feasible solutions)* และเรียกพื้นที่แรเงาว่า *พื้นที่ที่เป็นไปได้ (Feasible region)*



รูปที่ 3.1 พื้นที่ที่เป็นไปได้

(3) ลากเส้นตรงที่แสดงว่าทุกจุด (x_1, x_2) บนเส้นตรงนี้ ให้ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากัน เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า *เส้นผลกำไรเท่ากัน (Isoprofit line)* เส้นผลกำไรเท่ากัน สามารถสร้างได้โดย ทดลองกำหนดค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) แล้วหาจุด (x_1, x_2) อย่างน้อย 2 จุด ที่มีค่า z เท่ากัน ลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดทั้งสองนี้ ทุกจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้มีค่า z เท่ากัน

เช่น เมื่อกำหนดให้ $z = 10$ หาค่าของจุด (x_1, x_2) 2 จุด คือ จุด P และจุด Q ซึ่งมีคู่ลำดับ (0, 10/3)และ (2,0) ตามลำดับ ลากส่วนของเส้นตรง PQ ผ่านพื้นที่ที่เป็นไปได้ ดังรูปที่ 3.2 จุด (x_1, x_2) ที่อยู่ใต้เส้นตรงนี้มีค่า z น้อยกว่า 10 ขณะที่จุด (x_1, x_2) ที่อยู่เหนือเส้นตรงนี้ จะมีค่า z มากกว่า 10 ดังนั้น ทดลองกำหนดค่า $z = 20$ หาค่าของจุด (x_1, x_2) 2 จุด คือ $(0, 20/3)$ และ (4,0) ลากส่วนของเส้นตรง RS ผ่านพื้นที่ที่เป็นไปได้ ในรูป 3.2 จะเห็นได้ว่า ค่า z สามารถเพิ่มขึ้นได้อีก หากพิจารณาส่วนของเส้นตรง PQ และ RS จะพบว่า มีความชัน (Slope) เท่ากัน คือ 5/3 นั่นคือ เส้นผลกำไรเท่ากันทุกเส้นจะขนานกัน (4) เนื่องจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าสูงสุด การเลื่อนเส้นผลกำไรเท่ากันขึ้นไปทางขวามือจะมีค่า z เพิ่มขึ้น เราจะเพิ่มค่า z ให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เส้นผลกำไรเท่ากันที่มีค่า $z = 22.4$ ซึ่งผ่านจุด I ซึ่งมีคู่ลำดับ (8/5, 24/5) เป็นจุดสุดท้ายบนพื้นที่ OEHIJG หมายความว่า จุด (8/5, 24/5) เป็นจุดที่สอดคล้องกับข้อจำกัดทั้งหมดและให้ค่าของ z สูงที่สุด เรียกจุด $(x_1, x_2) = (8/5, 24/5)$ ว่า *ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด (Optimal solution)* และเรียกค่า $z = 5(8/5)+3(24/5) = 22.4$ ว่า *ค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimal value)*



รูปที่ 3.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ

พิจารณากราฟในรูปที่ 3.2 จุดสุดท้ายในพื้นที่เป็นไปได้ที่เส้นผลกำไรเท่ากันลากผ่านจะเป็น *จุดมุม (Corner point)* เสมอไม่ว่าเส้นผลกำไรจะเป็นเส้นตรงที่มีความชันมากน้อยเพียงใดก็ตาม ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่าผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของการโปรแกรมเชิงเส้นจะเป็นจุดมุมของพื้นที่ที่เป็นไปได้ ในกรณีที่สมการข้อจำกัดและฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีความชันเท่ากัน เส้นผล

กำไรเท่ากันจะลากผ่านส่วนของเส้นตรง ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของสมการข้อจำกัดนี้ ทำให้ทุกจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ดังจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 3.7

3.2 รูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

จากตัวอย่างในบทที่ 2 พบว่าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมีองค์ประกอบที่สำคัญคือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ระบุถึงทิศทางของวัตถุประสงค์ว่าเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยที่ข้อจำกัดเขียนอยู่ในรูปสมการหรืออสมการ รูปทั่วไปของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ดังนี้

ค่าต่ำสุด หรือ ค่าสูงสุด

$$
\begin{aligned}
z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots &\quad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_n \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ในชุดอสมการเชิงเส้นตรง (2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่มีทิศทางต่ำสุดหรือสูงสุดก็ได้ โดยที่มี x_j แทนกิจกรรมที่ j ที่จะต้องตัดสินใจทำ ซึ่งมีทั้งหมด n กิจกรรม $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ในกรณีของวัตถุประสงค์สูงสุด c_j แทน ผลตอบแทนหรือรายได้ที่ได้จากการตัดสินใจทำกิจกรรมที่ j จำนวนหนึ่งหน่วย ในกรณีของวัตถุประสงค์ต่ำสุด c_j แทนต้นทุนในการตัดสินใจทำกิจกรรมที่ j จำนวนหนึ่งหน่วย ส่วน a_{ij} ในสมการหรืออสมการ (2) เป็นจำนวนทรัพยากรชนิดที่ i ที่ต้องใช้ในการดำเนินกิจกรรมที่ j จำนวนหนึ่งหน่วย ในที่นี้มีทั้งหมด m ทรัพยากร b_i แทนจำนวนทรัพยากรชนิดที่ i ที่มีไว้เพื่อใช้ดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ

เพื่อให้ง่ายการหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมักเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาทั่วไป เราจะต้องนำรูปแบบทั่วไปของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้มาเขียนอยู่ใน *รูปแบบมาตรฐาน (Standard form)* ลักษณะสำคัญของรูปแบบมาตรฐานการโปรแกรมเชิงเส้นตรง 4 ประการ คือ

(1) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันที่มีทิศทางสูงสุด
(2) ข้อจำกัดต่าง ๆ ยกเว้นข้อจำกัดเรื่องตัวแปรต้องไม่เป็นค่าลบ ต้องเป็นสมการ
(3) ตัวแปรตัดสินใจทุกตัว ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
(4) ค่าทางขวามือต้องมีค่าเป็นบวก

การปรับรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้นใด ๆ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานทำได้ ดังนี้

1. ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นการหาค่าสูงสุด หากปัญหาที่มีวัตถุประสงค์เป็นค่าต่ำสุดจะต้องทำการปรับรูปฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันค่าสูงสุด โดยการนำ (–1) คูณฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดิม ตัวอย่าง เช่น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 7x_1 + 5x_2 - x_3$

ให้ $z' = (-z)$ และนำ (–1) คูณฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะได้

ค่าสูงสุด $z' = (-z) = -7x_1 - 5x_2 + x_3$ (3)

2. เครื่องหมายของข้อจำกัด ต้องเป็นเครื่องหมายเท่ากับ สำหรับข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย “$\leq$” ซึ่งตัวเลขทางด้านขวามือ อาจหมายถึงปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ปริมาณรวมทางด้านซ้ายมืออาจหมายถึงปริมาณการใช้ทรัพยากรเพื่อทำกิจกรรมต่าง ๆ ความแตกต่างของปริมาณที่ใช้และปริมาณที่มีอยู่แสดงถึงปริมาณทรัพยากรที่เหลืออยู่ ซึ่งจะแทนปริมาณที่เหลืออยู่ด้วยตัว *แปรส่วนขาด (Slack variable)* ซึ่งตัวแปรนี้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น ข้อจำกัดปริมาณการใช้วัตถุดิบ เพื่อการผลิตสินค้าสองชนิดคือ x_1 และ x_2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$4x_1 + 5x_2 \leq 300 \quad (4)$$

ปริมาณการใช้วัตถุดิบเพื่อใช้ในการผลิตสินค้า x_1 และ x_2 ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายมือของอสมการต้องไม่เกิน 300 หน่วย ถ้ากำหนดให้ s_1 แทนปริมาณวัตถุดิบที่เหลืออยู่หลังจัดสรรวัตถุดิบไปใช้สำหรับการผลิตสินค้าทั้งสองประเภทแล้ว อสมการ (4) สามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$4x_1 + 5x_2 + s_1 = 300 \quad \text{โดยที่} \quad s_1 \geq 0 \quad (5)$$

ในกรณีที่เครื่องหมายของข้อจำกัดเป็น “$\geq$” ข้อจำกัดประเภทนี้อาจเป็นขอบเขตล่างของปริมาณกิจกรรมที่สามารถกระทำได้ เช่น ข้อจำกัดด้านปริมาณการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดนี้ต้องไม่น้อยกว่า 50 หน่วย

$$x_1 + x_2 \geq 50 \quad (6)$$

อสมการ (6) แสดงปริมาณการผลิตสินค้ารวมต้องมากกว่า หรือเท่ากับ 50 ชิ้น ถ้ากำหนดให้ e_2 แทนปริมาณการผลิตส่วนเกิน โดย e_2 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้นอสมการ (6) สามารถแทนด้วยสมการ (7)

$$x_1 + x_2 - e_2 = 50 \quad \text{โดยที่} \quad e_2 \geq 0 \tag{7}$$

เรียกตัวแปร e_2 ว่า *ตัวแปรส่วนเกิน (Surplus variable)* หรือ *(Excess variable)*

3. ค่าทางขวามือ ในกรณีที่ทางด้านขวามือของข้อจำกัดเป็นจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ หากค่าทางขวามือมีค่าเป็นลบ ให้คูณอสมการด้วย (-1) ทั้งสองข้างของสมการ เช่น

$$3x_1 + 2x_2 \geq -150$$

ให้นำ (–1) คูณทั้งสองข้างของอสมการ จะได้อสมการดังนี้

$$-3x_1 - 2x_2 \leq 150 \tag{8}$$

4. เงื่อนไขบังคับไม่ติดลบ ในกรณีที่ค่าของตัวแปรตัดสินใจมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ตัวอย่างเช่น สำหรับปัญหาสินค้าคงคลัง ปริมาณสินค้าที่อยู่ในคลัง ณ เวลาใด ๆ อาจมีค่าน้อยกว่าศูนย์ เมื่อเกิดการขาดแคลนสินค้า เราสามารถแก้ปัญหานี้โดยการสร้างตัวแปรใหม่ที่เกิดจากความสัมพันธ์ของตัวแปรเดิมได้ โดยตัวแปรใหม่นี้ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น y เป็นแทนปริมาณสินค้าคงคลัง ซึ่งบริษัทยอมให้มีสินค้าขาดแคลนได้ไม่เกิน 10 ชิ้น จะได้อสมการดังนี้

$$y \geq -10$$

ให้ $y = y' - y''$ ดังนั้นข้อจำกัดสินค้าขาดแคลนได้ไม่เกิน 10 ชิ้น คือ

$$y' - y'' \geq -10 \tag{9}$$

ในที่นี้ตัวแปร y แทนด้วย y' และ y'' โดยใช้ความสัมพันธ์ $y = y' - y''$ ถ้า y มีค่าเป็นลบแล้ว y' มีค่าน้อยกว่า y'' ในทางกลับกันถ้า y มีค่าเป็นบวกแล้ว y' มีค่ามากกว่า y''

ตัวอย่างที่ 3.2 จงจัดรูปตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$\begin{aligned} &\text{ค่าต่ำสุด} && z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{ข้อจำกัด} && x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & && 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ & && 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต้องเป็นฟังก์ชันค่าสูงสุด จึงนำ (–1) คูณตลอด ดังนั้น

$$\text{ค่าสูงสุด} \qquad z' = -z = -3x_1 - 2x_2$$

ข้อจำกัด จัดให้อยู่ในรูปของสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 - e_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

เมื่อ s_1 แทนตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1

e_3 แทนตัวแปรส่วนเกินของข้อจำกัดที่ 3

3.3 แนวคิดของวิธีซิมเพล็กซ์

เมื่อเราสามารถปรับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่อยู่ในรูปทั่วไปใน (2) ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน สมมติว่าตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมีตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด n ตัว คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ตัวแปรส่วนขาดทั้งหมด m ตัว คือ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ และมีข้อจำกัดทั้งหมด m ข้อจำกัด รูปแบบมาตรฐานสามารถเขียนได้ดังนี้

วัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$ (11)

ข้อจำกัดของปัญหา

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ldots + s_2 &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ldots + s_m &= b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n & \\ s_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m & \end{aligned} \qquad (12)$$

ดังนั้น ตัวแบบนี้มีตัวแปรทั้งสิ้น n+m ตัวแปร จากพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ถ้าจำนวนตัวแปร (n+m) มากกว่าจำนวนสมการข้อจำกัด (m) แล้วไม่สามารถแก้สมการเพื่อหาค่าผลเฉลยได้ กล่าวคือ เราสามารถแก้สมการได้ก็ต่อเมื่อจำนวนตัวแปรน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมการข้อจำกัด ในกรณีที่จำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการ ($n+m > m$) เราต้องกำหนดค่าของตัวแปรอย่างน้อย $(n+m) - m = n$ ตัวแปรให้มีค่าคงที่ จึงจะสามารถแก้สมการหาค่าผลเฉลยได้ สำหรับการโปรแกรมเชิงเส้น เราเรียกผลเฉลยที่สามารถหาค่าได้จากการแก้สมการนี้ว่า *ผลเฉลยพื้นฐาน (Basic solution)* โดยทั่วไป เราจะกำหนดค่าของ n ตัวแปรนี้ให้เท่ากับศูนย์ และเรียก

ตัวแปรเหล่านี้ว่า *ตัวแปรจร (Nonbasic variable)* สำหรับตัวแปรอีก m ตัวแปรที่ได้จากการแก้สมการเรียกว่า *ตัวแปรพื้นฐาน (Basic variable)*

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาผลเฉลยพื้นฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีข้อจำกัดต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 10 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

ปัญหานี้มีเพียง 2 สมการหรือ 2 ข้อจำกัด $m = 2$ ขณะที่มีจำนวนตัวแปรถึง 4 ตัวแปร $n+m = 4$ ดังนั้น ต้องกำหนดให้มีตัวแปร 2 ตัว เป็นตัวแปรจร และอีก 2 ตัวแปรเป็นตัวแปรพื้นฐานสามารถหาค่าได้จากการแก้สมการดังกล่าวข้างต้น

ถ้ากำหนดให้ s_1 และ s_2 เป็นตัวแปรจร ส่วน x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐาน ชุดสมการข้อจำกัดใน (13) เหลือเพียง

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการนี้จะได้ $x_1 = 4$ และ $x_2 = 2$ ดังนั้น ผลเฉลยพื้นฐานคือ $x_1 = 4$ $x_2 = 2$ $s_1 = 0$ และ $s_2 = 0$ แต่ถ้ากำหนดให้ s_1 และ x_1 เป็นตัวแปรจร ส่วน s_2 และ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐาน ข้อจำกัดข้างต้นจะเหลือเพียง

$$\begin{aligned} x_2 &= 10 \\ x_2 + s_2 &= 6 \end{aligned} \qquad (14)$$

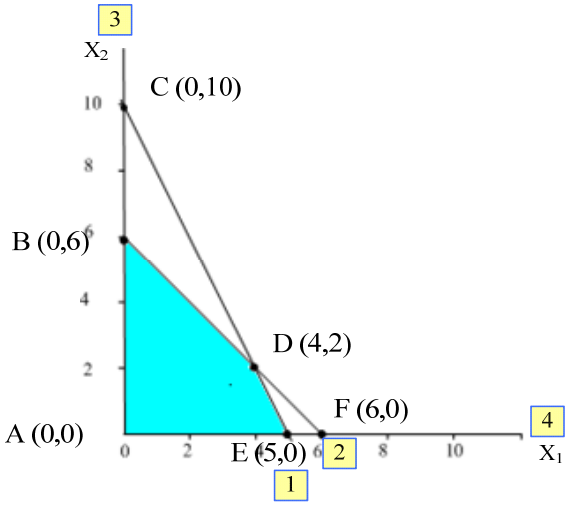
เมื่อแก้สมการนี้จะได้ว่า $x_2 = 10$ และ $s_2 = -4$ ดังนั้น ผลเฉลยพื้นฐานคือ $x_1 = 0, x_2 = 10, s_1 = 0$ และ $s_2 = -4$ จะเห็นว่าการกำหนดตัวแปรจรที่แตกต่างกันจะให้ค่าผลเฉลยที่แตกต่างกัน เนื่องจากจำนวนวิธีในการเลือกตัวแปร n ตัวแปรใด ๆ มาเป็นตัวแปรจรจากจำนวนตัวแปรทั้งหมด n+m ตัวแปร เท่ากับ $\binom{n+m}{n}$ ดังนั้นจำนวนผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมดจะไม่เกิน $\binom{n+m}{n}$ ผลเฉลย สำหรับปัญหาข้างต้นนี้ มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 4 และจำนวนข้อจำกัดเท่ากับ 2 ซึ่งรวมข้อจำกัดตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์ไปด้วย ซึ่งมีค่า $m = 2$ และ $n = 2$ ดังนั้นจำนวนผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมด เท่ากับ $\binom{4}{2} = 6$ ผลเฉลย ดังแสดงในตารางที่ 3.1

จากตารางที่ 3.1 จะเห็นว่า ทุกตัวแปรในผลเฉลยพื้นฐานที่ 1 3 4 และ 6 มีค่าไม่เป็นลบ ซึ่งสอดคล้องกับข้อจำกัดไม่เป็นค่าลบของตัวแปร เราเรียกผลเฉลยนี้ว่า *ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ (Basic feasible solution)* ขณะที่ผลเฉลยพื้นฐานที่ 2 มีค่าของตัวแปร s_2 เป็นลบ ดังนั้นผล

เฉลยที่ 2 นี้เป็นจึงไม่เป็น *ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ (Infeasible solution)* ผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมดนี้สามารถแสดงโดยวิธีกราฟได้ สามารถเขียนกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นไปได้ ดังรูปที่ 3.3 จุดมุมกับผลเฉลยพื้นฐานสอดคล้องกัน ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.1 ผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมดของปัญหา

ผลเฉลยที่	ตัวแปรจร	ตัวแปรพื้นฐาน	ผลเฉลยพื้นฐาน
1	s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = 4, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0$
2	s_1, x_1	s_2, x_2	$x_1 = 0, x_2 = 10, s_1 = 0, s_2 = -4$
3	s_1, x_2	s_2, x_1	$x_1 = 5, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 1$
4	s_2, x_1	s_1, x_2	$x_1 = 0, x_2 = 6, s_1 = 4, s_2 = 0$
5	s_2, x_2	s_1, x_1	$x_1 = 6, x_2 = 0, s_1 = -2, s_2 = 0$
6	x_1, x_2	s_1, s_2	$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 10, s_2 = 6$



รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ของจุดมุมกับผลเฉลย

ตารางที่ 3.2 ผลเฉลยพื้นฐานที่สอดคล้องกับจุดมุม

ผลเฉลยที่	ผลเฉลยพื้นฐาน	สอดคล้องกับจุดมุม	ลักษณะผลเฉลย
1	$x_1 = 4, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0$	D	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้
2	$x_1 = 0, x_2 = 10, s_1 = 0, s_2 = -4$	C	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้
3	$x_1 = 5, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 1$	E	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้
4	$x_1 = 0, x_2 = 6, s_1 = 4, s_2 = 0$	B	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้
5	$x_1 = 6, x_2 = 0, s_1 = -2, s_2 = 0$	F	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้
6	$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 10, s_2 = 6$	A	เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

จากรูปที่ 3.3 พบว่ามีเส้นตรงอยู่ทั้งหมด 4 เส้น คือ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 10 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

จุด E ซึ่งมีพิกัด (5,0) เมื่อนำค่า $x_1 = 5$ และ $x_2 = 0$ แทนในสมการทั้ง 4 พบว่า s_1 และ x_2 ในข้อจำกัดที่ 1 และ 4 มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วน s_2 และ x_1 ในข้อจำกัดที่ 2 และ 3 มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะกล่าวได้ว่าที่จุด (5,0) หรือจุด E นี้มีข้อจำกัดที่ 1 และ 4 เป็น*ข้อจำกัดที่ผูกพัน (Binding constraint)* ในการพิจารณาจุด D มีพิกัด (4,2) เป็นจุดที่มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐานและจุด B มีพิกัด (0,6) เป็นจุดที่มี x_2 และ s_1 เป็นตัวแปรพื้นฐาน จะกล่าวได้ว่าจุด B เป็น *จุดประชิด (Adjacent point)* ของจุด D ก็ต่อเมื่อมีตัวแปรพื้นฐานเหมือนกัน m–1 ตัว นอกจากนี้ พบว่า จุด E มีพิกัด (5,0) มีตัวแปรพื้นฐานคือ x_1 และ s_2 ดังนั้นจุด E เป็นจุดประชิดของจุด D ด้วย

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad & z = 15x_1 + 20x_2 \\ \text{ข้อจำกัด} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ & 2x_2 - 3x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

ให้ s_1 s_2 และ s_3 เป็นตัวแปรส่วนขาด สำหรับข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ ทำให้สามารถเขียนข้อจำกัดในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + s_1 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 + s_3 &= 10 \end{aligned} \qquad (16)$$

เนื่องจากปัญหานี้มีเพียง 3 สมการ (m = 3) และมีตัวแปรทั้งสิ้น 5 ตัวแปร (n+m = 5) ดังนั้น จำนวนผลเฉลยพื้นฐานทั้งหมดไม่เกิน $\binom{5}{3} = 10$ ผลเฉลย ซึ่งแต่ละผลเฉลยพื้นฐานต้องกำหนดว่าจะให้ตัวแปร 2 ตัวเป็นตัวแปรจร และกำหนดให้ตัวแปรจรจะมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนตัวแปรที่เหลืออีก 3 ตัวแปรจะเป็นตัวแปรพื้นฐานที่แก้ได้จากสมการข้างต้น ผลเฉลยสามารถแสดงในตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 ผลเฉลยพื้นฐาน

ผลเฉลยที่	ตัวแปรจร	ตัวแปรพื้นฐาน	ผลเฉลยพื้นฐาน
1	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 20, s_2 = 6, s_3 = 10$
2	x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 10, s_2 = 36, s_3 = 0$
3	x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$x_1 = s_2 = 0, x_2 = -2, s_1 = 24, s_3 = 12$
4	x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$x_1 = s_3 = 0, x_2 = 10, s_1 = 0, s_2 = 36$
5	x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 20/3, s_2 = -22/3, s_3 = 10/3$
6	x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 3, s_1 = 11, s_3 = 7$
7	x_2, s_3	x_1, s_1, s_2	$x_2 = s_3 = 0, x_1 = 10, s_1 = -10, s_2 = -14$
8	s_1, s_2	x_1, x_2, s_3	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = 72/13, x_2 = 22/13, s_3 = 36/13$
9	s_1, s_3	x_1, x_2, s_2	$s_1 = s_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = 10, s_2 = 36$
10	s_2, s_3	x_1, x_2, s_1	$s_2 = s_3 = 0, x_1 = 36/5, x_2 = 14/5, s_1 = -36/5$

จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยที่ 1 2 4 6 8 และ 9 เป็นผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ จากตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ หัวข้อ 3.1 เราสังเกตว่า จุดสุดท้ายของพื้นที่ที่เป็นไปได้ ที่เส้นผลกำไรเท่ากันตัดผ่าน จะเป็นจุดมุม ดังนั้น หนึ่งในผลเฉลยพื้นฐานเหล่านี้จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ถ้าปัญหาเป็นปัญหาค่าสูงสุด ผลเฉลยพื้นฐานที่มีค่าฟังก์ชันสูงสุดจะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด (Optimal solution) ถ้าปัญหาเป็นปัญหาค่าต่ำสุด ผลเฉลยพื้นฐานที่มีค่าฟังก์ชันต่ำสุดจะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

3.4 การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต

เนื่องจากการแก้ปัญหาโดยใช้กราฟมักนำมาใช้ในกรณีที่มีตัวแปรเพียง 2 ตัวหรือเพื่อความเข้าใจเกี่ยวกับการหาคำตอบที่ดีที่สุด หากปัญหาที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัว เรามักใช้วิธีอื่นที่สามารถหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้น *วิธีพีชคณิต (Algebraic method)* เป็นวิธีการหนึ่งในการแก้ปัญหาที่สามารถเข้าใจได้ง่าย หากปัญหาที่พิจารณาอยู่มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุด จะทำให้มีจำนวนรอบการคำนวณที่จำกัด (Finite number of iterations) นอกจากนี้วิธีพีชคณิตยังเป็นพื้นฐานในเพื่อทำความเข้าใจกับวิธีซิมเพล็กซ์ต่อไป ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นวิธีพีชคณิต คือ

ขั้นตอนที่ 1 : ปรับตัวแบบของปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนด*ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้น (Initial basic feasible solution)* โดยใช้รูปแบบมาตรฐานเพื่อหาผลเฉลย

ขั้นตอนที่ 3 : พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้นี้ เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดหรือไม่

ขั้นตอนที่ 4 : หากผลเฉลยในขณะนี้ยังไม่เหมาะสมที่สุด ควรจะเพิ่มค่าตัวแปรใด เพื่อให้ค่าวัตถุประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นในกรณีปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีทิศทางสูงสุด หรือเพื่อให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าลดลงในกรณีปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีทิศทางต่ำสุด ถ้าผลเฉลยในขณะนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้วจะหยุดการคำนวณ

ขั้นตอนที่ 5 : หาค่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่ โดยพยายามเพิ่มค่าของตัวแปรที่ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีขึ้น จากนั้นกลับไปสู่ขั้นตอนที่ 3

ตัวอย่างที่ 3.5 จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีพีชคณิต

$$
\begin{aligned}
&\text{ค่าสูงสุด} \quad z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
&\text{ข้อจำกัด} \quad 3x_1 + 6x_2 + x_3 \le 30 \\
&\qquad\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\
&\qquad\quad x_1 + 2x_3 \le 10 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

(1) การปรับตัวแบบปัญหาสู่รูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้น

รูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้นมีลักษณะที่สำคัญคือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันสูงสุด และ ข้อจำกัดมีเครื่องหมาย “ = ” ถ้าค่าทางขวามือมีค่าไม่ติดลบแล้ว เราสามารถทำให้ข้อจำกัดมีเครื่องหมายเท่ากับได้ โดยการเพิ่ม*ตัวแปรส่วนขาด (Slack variable)* ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$$
\begin{aligned}
z = {} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\
& 3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 10 \\
& x_1 + 2x_3 + s_3 = 10 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

(2) กำหนดผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้น

ชุดสมการข้อจำกัด (18) สามารถจัดรูปใหม่ให้ตัวแปรส่วนขาดอยู่ทางซ้ายมือ ส่วนตัวแปรและค่าคงที่อื่น ๆ ให้อยู่ทางขวามือ ในแต่ละข้อจำกัดมีตัวแปรหนึ่งตัวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นหนึ่ง

ดังชุดสมการ (19) เรียกรูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นในลักษณะนี้ว่า *รูปแบบบัญญัติ (Canonical form)* (Wintson, 2004) ดังนี้

$$\begin{aligned} z &= 0 + x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ s_1 &= 30 - 3x_1 - 6x_2 - x_3 \\ s_2 &= 10 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ s_3 &= 10 - x_1 - 2x_3 \end{aligned} \qquad (19)$$

เมื่อกำหนดให้ x_1 x_2 และ x_3 มีค่าเป็นศูนย์ ผลเฉลยพื้นฐานคือ $s_1 = 30$ $s_2 = 10$ และ $s_3 = 10$ โดย $z = 0$ ผลเฉลยนี้มีค่าของตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ซึ่งเราใช้ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเริ่มต้นในวิธีซิมเพล็กซ์

(3) พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่ได้นี้ว่าเหมาะสมที่สุดหรือไม่

ในชุดสมการ (19) พบว่า ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$ ฟังก์ชันนี้สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นถ้า x_1 x_2 หรือ x_3 มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 นี้ไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ในขั้นตอนถัดไปจะพยายามหาผลเฉลยใหม่ที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพิ่มขึ้น

(4) หากผลเฉลยในขณะนี้ยังไม่เหมาะสมที่สุด ควรจะเพิ่มค่าตัวแปรใด

พิจารณาตัวแปรจรในชุดสมการ (19) คือ x_1 x_2 และ x_3 การเพิ่มขึ้นของตัวแปรจรตัวใดตัวหนึ่งจะทำให้ค่าของ z เพิ่มขึ้น กล่าวคือ ถ้าเพิ่มค่าของ x_1 จำนวน 1 หน่วย แล้ว z จะมีค่าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ถ้าเพิ่มค่าของ x_2 จำนวน 1 หน่วยแล้ว z จะมีค่าเพิ่มขึ้น 4 หน่วย ขณะที่การเพิ่มค่าของ x_3 จำนวน 1 หน่วย z จะมีค่าเพิ่มขึ้น 2 หน่วย การเพิ่มค่าของ x_2 จะทำให้ z เพิ่มขึ้นรวดเร็วที่สุด ดังนั้นค่า x_2 ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ในผลเฉลยปัจจุบันจะถูกทำให้มีค่าเพิ่มขึ้น เรียก x_2 ว่า *ตัวแปรเข้า (Entering variable)*

คำถามที่เกิดขึ้นถัดไปคือจะเพิ่มค่า x_2 มากเท่าใด การเพิ่มค่าของ x_2 มีผลทำให้ค่าของตัวแปรพื้นฐานอื่น ๆ มีค่าลดลง เนื่องจากค่าของตัวแปรเหล่านี้แทนปริมาณของกิจกรรมต่าง ๆ ที่ใช้ทรัพยากรร่วมกันกับ x_2 เพื่อให้ผลเฉลยใหม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ตัวแปรทุกตัวจะต้องมีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้นตัวแปร x_2 สามารถเพิ่มค่าได้ตราบใดที่ตัวแปรพื้นฐานอื่น ยังมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

พิจารณาข้อจำกัดที่หนึ่ง ในชุดสมการ (19) $s_1 = 30 - 6x_2$ เมื่อ x_1 และ x_3 มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก s_1 จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะได้

$$30 - 6x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 5$$

ในทำนองเดียวกัน ข้อจำกัดที่สอง $s_2 = 10 - x_2$ เมื่อ x_1 และ x_3 มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$10 - x_2 \geq 0$$
$$x_2 \leq 10$$

และข้อจำกัดที่สาม $s_3 = 10$ เมื่อ x_1 และ x_3 มีค่าเป็นศูนย์

เพื่อให้ตัวแปรทุกตัวมีค่าไม่ติดลบ ค่าสูงสุดของ x_2 คือ min { 5, 10 } = 5 ถ้าเพิ่มค่า $x_2 > 5$ แล้ว จะทำให้ s_1 มีค่าเป็นลบในข้อจำกัดที่ 1 ทำให้ผลเฉลยใหม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ สมมติว่า มีข้อจำกัดของตัวแบบนี้คือ $s_4 = 30 + 3x_2$ โดย $s_4 \geq 0$ ดังนั้น $30 + 3x_2 \geq 0$ แล้ว $x_2 \geq -10$ อาจกล่าวได้ว่า ตัวแปรเข้ามีค่าเท่ากับสัดส่วนของค่าทางขวามือต่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในแถวนั้น นั่นคือ

$$\text{ค่าของตัวแปรเข้า} = \frac{\text{ค่าทางขวามือในแถวนั้น}}{\text{สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในแถวนั้น}}$$

ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในแถวใดเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ตัวแปรพื้นฐานของแถวนั้นจะยังคงค่าเป็นบวกไม่ว่าตัวแปรเข้าจะมีค่าเท่าใด ตัวอย่างเช่น

ข้อจำกัดที่ 1 : ตัวแปร x_2 มีค่าสูงสุดที่ 30/6 = 5
ข้อจำกัดที่ 2 : ตัวแปร x_2 มีค่าสูงสุดที่ 10/1 = 10
ข้อจำกัดที่ 3 : สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_2 เท่ากับศูนย์ แสดงว่าไม่ว่า x_2 จะมีค่าเท่าใด จะไม่มีการใช้ทรัพยากรชนิดที่ 3 ดังนั้น ข้อจำกัดที่ 3 จึงไม่มีขอบเขตสำหรับ x_2

จากตัวอย่างนี้ x_2 มีค่าสูงสุดเท่ากับ 5 ในข้อจำกัดที่หนึ่ง ตัวแปร x_2 จะเข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานและข้อจำกัดที่หนึ่งจะไม่มีทรัพยากรเหลืออยู่เลย กล่าวคือ s_1 จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น s_1 ซึ่งเป็นตัวแปรพื้นฐานจะกลายเป็น *ตัวแปรออก (Leaving variable)* หลักเกณฑ์ของการพิจารณาอัตราส่วนนี้เรียกว่า *การทดสอบอัตราส่วน (Ratio test)* ซึ่งพิจารณาเฉพาะในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าที่เป็นบวกเท่านั้น

(5) หาค่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่

จัดรูปชุดสมการ (18) ใหม่โดยตัวแปร x_2 s_2 และ s_3 อยู่ทางซ้ายมือด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเหล่านี้เท่ากับหนึ่ง ส่วนตัวแปรอื่น ๆ และค่าคงที่อยู่ทางขวามือ

$$
\begin{aligned}
z &= 20 - x_1 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}s_1 \\
x_2 &= 5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}s_1 \\
s_2 &= 5 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{6}s_1 \\
s_3 &= 10 - x_1 - 2x_3
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

ชุดสมการข้างต้นได้มาจากการแทนค่า $x_2 = (1/6)(30 - 3x_1 - x_3 - s_1)$ ลงในชุดสมการ เมื่อกำหนดให้ x_1 x_3 และ s_1 มีค่าเป็นศูนย์แล้ว ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้คือ $s_1 = 0$ $s_2 = 5$ และ $s_3 = 10$ โดยค่าของ z เพิ่มค่าเป็น 20

(6) พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่ได้นี้เหมาะสมที่สุดหรือไม่

ในชุดสมการ (20) พบว่า $z = 20 - x_1 + (4/3)x_3 - (2/3)s_1$ เมื่อ x_1 x_3 และ s_1 มีค่าเท่ากับศูนย์โดย z มีค่าเท่ากับ 20 ค่าของ z สามารถเพิ่มขึ้นได้ ถ้า x_3 มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ในขั้นตอนถัดไปจะพยายามหาผลเฉลยใหม่ที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) เพิ่มขึ้น

จากข้อจำกัดที่หนึ่ง ในชุดสมการ (20) $x_2 = 5 - (1/2)x_1 - (1/6)x_3 - (1/6)s_1$ เมื่อ x_1 และ s_1 มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก x_2 จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะได้

$$5 - \frac{1}{6}x_3 \geq 0 \qquad \text{ดังนั้น} \quad x_3 \leq 30 \qquad (21)$$

ในทำนองเดียวกัน ข้อจำกัดที่สอง $s_2 = 5 - (3/2)x_1 - (5/6)x_3 + (1/6)s_1$ เมื่อ x_1 และ s_1 มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$5 - \frac{5}{6}x_3 \geq 0 \qquad \text{จะได้} \quad x_3 \leq 6 \qquad (22)$$

และข้อจำกัดที่สาม $s_3 = 10 - x_1 - 2x_3$ เมื่อ x_1 มีค่าเป็นศูนย์

$$10 - 2x_3 \geq 0 \qquad \text{จะได้} \quad x_3 \leq 5 \qquad (23)$$

เพื่อให้ตัวแปรทุกตัวมีค่าไม่ติดลบ ค่าของ x_3 ในอสมการ (21) (22) และ (23) พบว่า $x_3 \leq 5$ หากพิจารณาด้วยค่าอัตราส่วนต่ำสุด คือ min { 30, 6, 5 } = 5 หมายความว่าถ้าเพิ่มค่า $x_3 > 5$ แล้ว จะทำให้ s_3 มีค่าเป็นลบในข้อจำกัดที่ 3 ซึ่งส่งผลให้ผลเฉลยใหม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

(7) หาค่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่

จัดรูปชุดสมการ (20) ใหม่โดยให้ ตัวแปร x_2 s_2 และ x_3 อยู่ทางซ้ายมือ

$$\begin{aligned} z &= 26\frac{2}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 \\ x_2 &= 4\frac{1}{6} - \frac{5}{12}x_1 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{1}{12}s_3 \\ s_2 &= \frac{5}{6} - \frac{13}{12}x_1 + \frac{1}{6}s_1 + \frac{5}{12}s_3 \\ x_3 &= 5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}s_3 \end{aligned} \qquad (24)$$

เมื่อกำหนดให้ x_1 s_1และ s_3 มีค่าเป็นศูนย์แล้ว ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้สำหรับชุดสมการ (24) คือ $x_2 = 4\frac{1}{6}$ $x_3 = 5$ และ $s_2 = 5/6$ โดย $z = 26\frac{2}{3}$

(8) พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่ได้นี้เหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากชุดสมการ (24) พบว่า ค่าของ z ไม่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ไม่ว่าจะเพิ่มค่าของตัวแปรใดก็ตาม ดังนั้นผลเฉลยที่ได้ข้างต้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีพีชคณิต

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad & z = 10x_1 + 20x_2 \\ \text{ข้อจำกัด} \quad & -x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & x_1 + x_2 \le 12 \\ & 5x_1 + 3x_2 \le 45 \\ & x_1, \; x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

(1) การปรับตัวแบบปัญหาสู่รูปแบบมาตรฐาน

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + 20x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ -x_1 + 2x_2 + s_1 &= 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 12 \\ 5x_1 + 3x_2 + s_3 &= 45 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (26)$$

(2) กำหนดผลเฉลยเริ่มต้น

$$\begin{aligned} z &= 0 + 10x_1 + 20x_2 \\ s_1 &= 15 + x_1 - 2x_2 \\ s_2 &= 12 - x_1 - x_2 \end{aligned} \qquad (27)$$

$$s_3 = 45 - 5x_1 - 3x_2$$

เมื่อให้ $x_1 = x_2 = 0$ จะได้ผลเฉลยคือ $s_1 = 15$ $s_2 = 12$ $s_3 = 45$ และ $z = 0$

(3) พิจารณาว่าผลเฉลยปัจจุบันนี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากผลเฉลยเริ่มต้น พบว่า การเพิ่มค่า x_1 หรือ x_2 ทำให้ค่า z เพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยนี้ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(4) พิจารณาว่าตัวแปรใดควรมีค่าเพิ่มขึ้น และตัวแปรใดควรลดค่า

จากผลเฉลยเริ่มต้นในขั้นตอนที่ 3 ถ้า x_1 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย z เพิ่มขึ้น 10 หน่วย ถ้า x_2 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย z เพิ่มขึ้น 20 หน่วย จะเห็นว่าการเพิ่ม x_2 ทำให้ z เพิ่มค่าได้รวดเร็วกว่า จึงเลือกเพิ่มค่า x_2

พิจารณาสมการข้อจำกัดทั้ง 3 การเพิ่มค่า x_2 ได้มากที่สุดเท่าใดที่จะไม่ทำให้ตัวแปรส่วนขาดทั้งสามมีค่าน้อยกว่าศูนย์

$$\begin{aligned} 15 - 2x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 15/2 \\ 12 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 12 \\ 45 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 15 \end{aligned} \qquad (28)$$

ดังนั้น x_2 เพิ่มค่าได้สูงสุดเท่ากับ $15/2$ และทำให้ $s_1 = 0$

(5) หาค่าผลเฉลยพื้นฐานใหม่

$$\begin{aligned} z &= 150 + 20x_1 - 10s_1 \\ x_2 &= \frac{15}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}s_1 \\ s_2 &= \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}s_1 \\ s_3 &= \frac{45}{2} - \frac{13}{2}x_1 + \frac{3}{2}s_1 \end{aligned} \qquad (29)$$

ผลเฉลยก็คือ $x_1 = 0$ $x_2 = 15/2$ $s_1 = 0$ $s_2 = 9/2$ และ $s_3 = 45/2$ โดย $z = 150$

(6) พิจารณาผลเฉลยพื้นฐานปัจจุบัน เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากสมการวัตถุประสงค์ $z = 150 + 20x_1$ ถ้าเพิ่มค่า x_1 แล้วทำให้ค่า z เพิ่มขึ้นได้ ดังนั้น ผลเฉลยนี้ยังไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

(7) พิจารณาว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรเข้า และตัวแปรใดเป็นตัวแปรออก

x_1 เป็นตัวแปรเดียวที่สามารถเพิ่มค่า z ให้สูงขึ้นได้ จึงควรเพิ่มค่า x_1 สิ่งที่ต้องการทราบคือค่า x_1 สามารถเพิ่มขึ้นได้สูงสุดเท่าใดที่ไม่ทำให้ตัวแปร x_2 s_2 และ s_3 มีค่าน้อยกว่าศูนย์ จากชุดสมการ (29)

$$\frac{15}{2} + \frac{1}{2}x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq 15 \qquad (30)$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq 3 \qquad (31)$$

$$\frac{45}{2} - \frac{13}{2}x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq \frac{45}{13} \qquad (32)$$

ค่า x_1 เพิ่มขึ้นได้สูงสุดเท่ากับ 3 ซึ่งจะทำให้ s_2 มีค่าเท่ากับ 0

(8) หาผลเฉลยพื้นฐานใหม่

$$\begin{aligned} z &= 210 - \frac{10}{3}s_1 - \frac{40}{3}s_2 \\ x_2 &= 9 - \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \\ x_1 &= 3 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 \\ s_3 &= 3 - \frac{2}{3}s_1 - \frac{13}{3}s_2 \end{aligned} \qquad (33)$$

ถ้า $s_1 = s_2 = 0$ แล้วผลเฉลยคือ $x_1 = 3$ $x_2 = 9$ $s_1 = s_2 = 0$ และ $s_3 = 3$ โดยที่ $z = 210$

(9) พิจารณาว่า ผลเฉลยปัจจุบันนี้เหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากชุดสมการ (33) พบว่า การเพิ่มค่า s_1 หรือ s_2 จะไม่ทำให้ค่า z เพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยข้างต้นเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

3.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์

Dantzig (1963) ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่เรียกว่า *วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method)* ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้ในปัจจุบันและมีผู้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลลัพธ์จากรูปแบบที่มีตัวแปรจำนวนมาก ทำให้สามารถหาผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องและรวดเร็วขึ้น ดังนั้นจึงขอกล่าวถึงวิธีการซิมเพล็กซ์เพื่อหาค่าคำตอบของปัญหาดังนี้

สมมติว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในที่นี้ เป็นปัญหาค่าสูงสุด ที่มีตัวแปรทั้งหมด n ตัวแปร และข้อจำกัด m ข้อจำกัด โดยตัวแปรทั้ง n ตัวนี้ อาจเป็นตัวแปรตัดสินใจ ตัวแปรส่วนขาด ตัวแปรส่วนเพิ่ม หรือ ตัวแปรเทียม ดังนั้น สามารถเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

ค่าสูงสุด
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (34)$$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots &\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n & \end{aligned} \qquad (35)$$

ให้ **A** ประกอบด้วย n เวกเตอร์คอลัมน์ (Column vector) และ **x** เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่มีตัวแปรต่าง ๆ n ตัวแปรเป็นสมาชิก

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \ldots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$\mathbf{X}_B$ และ $\mathbf{X}_N$ แทนเวกเตอร์คอลัมน์ของตัวแปรพื้นฐาน และตัวแปรจร ตามลำดับ

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_{BV1} \\ x_{BV2} \\ \vdots \\ x_{BVm} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

เมื่อ x_{BVi} แทนตัวแปรพื้นฐานที่ i

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ \vdots \\ x_{N(n-m)} \end{bmatrix}_{(n-m)\times 1} \quad \text{เมื่อ } x_{Nj} \text{ แทนตัวแปรจรที่ j}$$

ให้ $x_{BVi} \in \mathbf{X}_B$, $x_{Ni} \in \mathbf{X}_N$ ดังนั้น $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B & \mathbf{X}_N \end{bmatrix}'$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

B แทนเมทริกซ์ขนาด $m \times m$ ที่สมาชิกของเมทริกซ์คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานในสมการข้อจำกัดที่ m

N แทนเมทริกซ์ขนาด $m \times (n-m)$ ที่สมาชิกของเมทริกซ์คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในสมการข้อจำกัดที่ m

ดังนั้น $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$

c แทนเวกเตอร์แถว (Row vector) ขนาด n ที่สมาชิก คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$\mathbf{c}_B$ แทนเวกเตอร์แถวขนาด m ที่มีสมาชิก คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$\mathbf{c}_N$ แทนเวกเตอร์แถวขนาด $n-m$ ที่มีสมาชิก คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ดังนั้น $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N \end{bmatrix}$

จากตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ใน (34) และ (35) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = \mathbf{cX}$

ข้อจำกัด $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$

$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

หรือ

ค่าสูงสุด $z = \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N$ (36)

$\mathbf{BX}_B + \mathbf{NX}_N = \mathbf{b}$ (37)

$\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N \geq 0$

จากสมการ (37) ถ้าเมทริกซ์ **B** เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์ส (Inverse) ได้ ดังนั้น การหาผลเฉลยของปัญหาคือต้องการทราบค่าของ $\mathbf{X}_B$ ซึ่งสามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{X}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X}_N \end{aligned} \tag{38}$$

แทนค่า $\mathbf{X}_B$ สมการ (36) จะได้

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X}_N\right) + \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N \\ &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X}_N + \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N \\ &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N \end{aligned} \tag{39}$$

เมื่อกำหนดให้ ตัวแปร $n-m$ ตัวเป็นตัวแปรจร ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ เราสามารถหาค่าของตัวแปรพื้นฐาน และค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ โดยใช้สมการ (38) และ (39)

จากสมการ (38) และ (39) สามารถนำไปใช้ในวิธีซิมเพล็กซ์สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

(1) กำหนดค่าเริ่มต้นของผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้

(2) ตรวจสอบว่าผลเฉลยนี้ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่ ถ้าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ให้หยุดการคำนวณ ถ้าผลเฉลยนี้ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ให้ดำเนินการในขั้นตอนที่ 3

(3) หาตัวแปรเข้าและตัวแปรออก ตัวแปรเข้าคือ ตัวแปรจรในผลเฉลยปัจจุบัน ซึ่งการเพิ่มค่าของตัวแปรนี้ แล้วจะทำให้ผลเฉลยใหม่ที่ได้ มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีขึ้น ตัวแปรออกคือ ตัวแปรพื้นฐานในปัจจุบัน แต่เป็นตัวแปรที่ถูกลดค่าให้เป็นศูนย์ เมื่อเราเพิ่มค่าตัวแปรเข้า ซึ่งการหาตัวแปรออกจะใช้การพิจารณาค่าอัตราส่วนต่ำสุด

ให้ x_k แทนตัวแปรเข้าและ $\mathbf{b}'_i$ คือค่าทางขวามือของข้อจำกัด โดยที่ b'_i เป็นสมาชิกในแถวที่ i ของเมทริกซ์คอลัมน์ $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{A}_k$ แทนเวกเตอร์คอลัมน์ ขนาด m ที่มีสมาชิก a_{ki} คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_k ในข้อจำกัดที่ i โดยที่ i = 1, 2, …, m

$\mathbf{A}'_k$ แทนเวกเตอร์คอลัมน์ขนาด m ที่มีสมาชิก a'_{ki} เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_k ในการประมวลผลซ้ำ โดยที่ $\mathbf{A}'_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k$ และ k = 1, 2, …, m

ดังนั้น อัตราส่วนต่ำสุด $= \min\left\{\dfrac{b'_i}{a'_{ki}} \;,\; a'_{ki} > 0,\ \forall i,\ i = 1,2,...,m\right\}$ ตัวแปรออกคือตัวแปรพื้นฐานในข้อจำกัดที่มีอัตราส่วนต่ำสุด

(4) หาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ (2)

ตัวอย่างที่ 3.7 จากตัวอย่างที่ 3.5 จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้น โดยวิธีซิมเพล็กซ์ รูปแบบเมทริกซ์ จากรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$
\begin{aligned}
&\text{ค่าสูงสุด} && z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
&\text{ข้อจำกัด} && 3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\
& && 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 10 \\
& && x_1 + 2x_3 + s_3 = 10 \\
& && x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{40}
$$

(1) กำหนดค่าเริ่มต้นของผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{41}
$$

$$
z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = 0
$$

(2) ตรวจสอบว่าผลเฉลยพื้นฐานที่ได้นี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่ โดยพิจารณา

$$
z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= x_1 + 4x_2 + 2x_3 \tag{42}
$$

ถ้าเพิ่มค่า x_1 x_2 หรือ x_3 แล้ว ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) จะมีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยพื้นฐานนี้ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(3) เลือกตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

จากสมการ (42) พบว่า การเพิ่มค่าของ x_1 x_2 หรือ x_3 จำนวน 1 หน่วย จะทำให้ค่า z เพิ่มขึ้น 1 4 และ 2 หน่วย ตามลำดับ นั่นคือ อัตราการเพิ่มขึ้นของค่า z เทียบกับ x_1 x_2 และ x_3 เท่ากับ 1 4 และ 2 อัตราการเพิ่มค่าของ z เมื่อเทียบกับ x_2 นั้นสูงสุด ทำให้เราเลือก x_2 เป็นตัวแปรเข้า ซึ่งทำให้ x_2 เปลี่ยนจากตัวแปรจรเป็นตัวแปรพื้นฐาน

พิจารณาตัวแปรออก โดยพิจารณาอัตราส่วนต่ำสุดระหว่างค่าทางขวามือกับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในสมการข้อจำกัด $\mathbf{A}_2' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix}$

อัตราส่วนต่ำสุดเท่ากับ $= \min\left\{\frac{30}{6} \quad \frac{10}{1} \quad -\right\} = 5$ เลือกตัวแปร s_1 เป็นตัวแปรออก

(4) หาผลเฉลยใหม่

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix}x_2\\s_2\\s_3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix}x_1\\s_1\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1/6 & 0 & 0\\-1/6 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}30\\10\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\\10\end{bmatrix} \qquad (43)$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N$$

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$$

$$z = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}30\\10\\10\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\5\\10\end{bmatrix} = 20$$

(5) ตรวจสอบว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่ โดยพิจารณา

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N$$

$$= 20 - \left[\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 20 - \left[\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 20 - x_1 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}s_1 \qquad (44)$$

จากสมการ (44) ถ้า x_3 มีค่าเพิ่มขึ้น z จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น ผลเฉลยพื้นฐานนี้ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(6) เลือกตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

จากสมการ (44) พบว่า การเพิ่มค่าของ x_3 ทำให้ z มีค่าเพิ่มขึ้น จึงเลือก x_3 เป็นตัวแปรเข้า พิจารณาตัวแปรออกโดย

$$\mathbf{A}'_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

หาอัตราส่วนต่ำสุด $\min\left\{\frac{5}{1/3}, \frac{5}{5/6}, \frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2} = 5$ ดังนั้น s_3 จะเป็นตัวแปรออก

(7) หาผลเฉลยใหม่

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/6 \\ 5/6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 26.667$$

(8) ตรวจสอบว่าผลเฉลยที่ได้นี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่ โดยพิจารณา

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N$$

$$= 26.67 - \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= 26.67 - \left(\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= 26.67 - 2.667x_1 - 0.667s_1 - 0.667s_3 \quad (46)$$

ในสมการ (46) จะเห็นว่า การเพิ่มค่าของตัวแปร x_1 s_1 หรือ s_3 ทำให้ค่า z ลดลง ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้ในขั้นตอนที่ (7) คือ $x_2 = 25/6$ $x_3 = 5$ $s_2 = 5/6$ และ $x_1 = s_1 = s_3 = 0$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด โดยที่ $z = 26.67$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (47)

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

(1) จัดรูปตัวแบบปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$ (48)

$2x_1 + x_2 + s_2 = 8$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

(2) กำหนดค่าเริ่มต้นของผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

(3) ตรวจสอบว่าผลเฉลยนี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่

พิจารณา $z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N$

$$= 0 - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1 + 3x_2 \tag{50}$$

ถ้าเพิ่มค่า x_1 หรือ x_2 แล้ว z มีค่าเพิ่มขึ้น แสดงว่า ผลเฉลยนี้ยังไม่เหมาะสมที่สุด

(4) เลือกตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

จากค่า z ในขั้นตอนที่ 3 การเพิ่มค่า x_2 ทำให้ z มีค่าเพิ่มขึ้นรวดเร็วกว่าการเพิ่มค่า x_1 จึงเลือก x_2 เป็นตัวแปรเข้า พิจารณาอัตราส่วนต่ำสุด

$$\mathbf{A}'_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

อัตราส่วนต่ำสุด $= \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{8}{1}\right\} = \frac{6}{2} = 3$ เลือก s_1 เป็นตัวแปรออก

(5) หาผลเฉลยใหม่

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{51}$$
$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 9$$

(6) ตรวจสอบว่าผลเฉลยนี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N \\ &= 9 - \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \\ &= 9 + 0.5x_1 - 1.5s_1 \end{aligned} \tag{52}$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าเพิ่มค่า x_1 แล้ว z สามารถเพิ่มค่าได้ ดังนั้น ผลเฉลยนี้ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(7) พิจารณาตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

จากขั้นตอนที่ 6 พบว่า x_1 สามารถทำให้ค่า z เพิ่มขึ้น ดังนั้น x_1 เป็นตัวแปรเข้า พิจารณาตัวแปรออกโดยคำนวณหาอัตราส่วนต่ำสุด

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1' &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

อัตราส่วนต่ำสุด $= \min\left\{\dfrac{3}{1/2}, \dfrac{5}{3/2}\right\} = \dfrac{10}{3}$ ดังนั้น s_2 เป็นตัวแปรออก

(8) หาผลเฉลยใหม่

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/3\\10/3\end{bmatrix} = 10.67$$

(9) พิจารณาผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N \\ &= 10.67 - \left(\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}s_2\\s_1\end{bmatrix} \\ &= 12.67 - 1.33s_1 - 0.33s_2 \end{aligned} \quad (54)$$

ถ้าเพิ่มค่า s_1 หรือ s_2 แล้วไม่ทำให้ z มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยข้างต้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

3.6 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง

การหาผลเฉลยวิธีพีชคณิตที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.4 สามารถสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนการคำนวณหาผลเฉลยและ หัวข้อ 3.5 ช่วยให้เข้าใจวิธีการซิมเพล็กซ์เพื่อหาผลเฉลย อย่างไรก็ตาม การหาผลเฉลยวิธีนี้มีการทำซ้ำ ๆ กันหลายรอบและทำให้ต้องกำหนดเมทริกซ์กันหลายครั้ง ผู้ที่ไม่คุ้นเคยกับเรื่องของเมทริกซ์อาจสับสนได้ง่าย ดังนั้นวิธีซิมเพล็กซ์สามารถนำมาเขียนใน *รูปแบบตาราง (Tabular form)* เพื่อให้เกิดความสะดวกและกระทัดรัดในการคำนวณวิธีการซิมเพล็กซ์ในรูปตาราง ซึ่งเรียกว่า *ตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex tabuleau)* ซึ่งจะบันทึกเฉพาะสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่าง ๆ และข้อพื้นที่เกี่ยวข้องในการหาผลเฉลย คือ ค่าทางขวามือ (Right hand side) และตัวแปรพื้นฐานที่ปรากฏในผลเฉลยที่เป็นไปได้แต่ละขั้นตอน หากเปรียบเทียบกับวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์และรูปแบบตาราง สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังตารางที่ 3.4 และ 3.5 ซึ่งเป็นตารางเริ่มต้น และตารางผลเฉลยใด ๆ

ตารางที่ 3.4 ความสัมพันธ์รูปแบบเมทริกซ์และตาราง สำหรับผลเฉลยเริ่มต้น

ตัวแปรพื้นฐาน	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	ค่าทางขวามือ
Z	0	$-\mathbf{c}_N$	0
$\mathbf{x}_B$	I	**N**	**b**

ตารางที่ 3.5 ความสัมพันธ์รูปแบบเมทริกซ์และตาราง สำหรับผลเฉลยใด ๆ

ตัวแปรพื้นฐาน	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	ค่าทางขวามือ
Z	0	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{x}_B$	I	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ ค่าสูงสุด $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$ ซึ่งมีค่า c_1 c_2 และ c_3 เท่ากับ $1 \quad -3$ และ 2 ตามลำดับ ดังนั้น สัมประสิทธิของตัวแปร $x_1, x_2,$ และ x_3 เท่ากับ $-1 \quad 3$ และ -2 ตามลำดับ ส่วนสัมประสิทธิ์ของตัวแปรอื่น ๆ มีค่าเท่ากับ 0 สำหรับขั้นตอนของการใช้ตารางซิมเพล็กซ์มีดังนี้

(1) การกำหนดตารางเริ่มต้น

ลักษณะของตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้นแสดงดังตารางที่ 3.6 ในตารางนี้ ตัวแปรส่วนเกิน $s_1, s_2, \ldots, s_m$ เป็นตัวแปรเข้าหรือตัวแปรพื้นฐาน ในสดมภ์ของ s_1 จะมีค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเหล่านี้จะเท่ากับหนึ่งเพียงค่าเดียว คือ ในแถวที่มี s_1 เป็นตัวแปรพื้นฐาน ส่วนที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์ ในสดมภ์ของ $s_2, s_3, \ldots, s_m$ ก็เช่นเดียวกัน จะมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นหนึ่งเพียงค่าเดียวในแถวที่มีตัวแปร $s_2, s_3, \ldots, s_m$ เป็นตัวแปรพื้นฐานตามลำดับ กล่าวคือในแต่ละสมการจะมีตัวแปรพื้นฐานเพียงหนึ่งตัวและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานนี้ต้องเท่ากับหนึ่ง ซึ่งทำให้สามารถอ่านค่าผลเฉลยจากตารางได้ทันทีว่า ค่าของตัวแปรพื้นฐานในแต่ละสมการเท่ากับค่าทางขวามือของสมการนั้น ดังนั้น ค่าทางขวามือของแต่ละสมการจะต้องมีค่าไม่เป็นลบเพื่อให้ผลเฉลยที่ได้ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

(2) ตรวจสอบว่าผลเฉลยนี้ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่

สำหรับปัญหาค่าสุงสุด ให้พิจารณาสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวของ z หรือแถวที่ 0 ในตารางซิมเพล็กซ์ ถ้าสัมประสิทธิ์นี้มีค่าเป็นลบ แสดงว่า การเพิ่มค่าของตัวแปรจรนี้ส่งผลให้ z มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยนี้ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสม ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรทั้งหมดในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แล้วปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ มีผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ขั้นตอนซิมเพล็กซ์จะหยุดการทำงาน

สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ให้พิจารณาสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวที่ 0 ในตารางซิมเพล็กซ์ ถ้าสัมประสิทธิ์นี้มีค่าเป็นบวก แสดงว่า การเพิ่มค่าของตัวแปรจรนี้ทำให้ z มีค่าลดลง ซึ่งอาจจะทำให้ได้ผลเฉลยใหม่ที่มีค่า z ลดลง ดังนั้น ผลเฉลยในตารางนี้จึงไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรทั้งหมดในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) หรือแถวที่ 0 มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แสดงว่า ผลเฉลยนี้เหมาะสมที่สุด

(3) หาตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ตัวแปรจรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถว z เป็นค่าลบมากที่สุด เป็นตัวแปรเข้า สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ตัวแปรจรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 เป็นค่าบวกมากที่สุด เป็นตัวแปรเข้า สำหรับตัวแปรออก ใช้การทดสอบอัตราส่วนระหว่างค่าทางขวามือกับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในแต่ละแถว โดยที่สัมประสิทธิ์นี้ต้องมีค่าเป็นบวก ตัวแปรพื้นฐานในแถวที่มีอัตราส่วนดังกล่าวต่ำสุดจะเป็นตัวแปรออก ตัวแปรออกนี้จะกลายเป็นตัวแปรจร และตัวแปรเข้าจะกลายเป็นตัวแปรพื้นฐาน โดยสดมภ์ของสัมประสิทธิ์ตัวแปรเข้า จะเรียกว่า *สดมภ์ตัวหลัก (Pivot column)* แถวของสัมประสิทธิ์ตัวแปรออก จะเรียกว่า *แถวตัวหลัก (Pivot row)* และเรียกสัมประสิทธิ์ที่อยู่ทั้งในตำแหน่งสดมภ์ตัวหลักและแถวตัวหลักว่า *เลขตัวหลัก (Pivot number)*

(4) หาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่

ผลเฉลยใหม่นี้มีตัวแปรพื้นฐานตามขั้นตอนที่ (3) โดยใช้การดำเนินการตามแถว (Row operations) จากนั้นกลับไปดำเนินการในขั้นตอนที่ (2) ต่อไปจนกว่าจะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตารางที่ 3.6 ตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้นโดยทั่วไป

ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	s_m	
z	0	1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	$-c_{n+1}$	$\cdots$	$-c_{n+m}$	z_0
s_1	1	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	s_{11}	$\cdots$	s_{1m}	b_1
s_2	2	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	s_{21}	$\cdots$	s_{2m}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
s_m	m	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	s_{m1}	$\cdots$	s_{mn}	b_m

ตัวอย่างที่ 3.9 จากตัวอย่างที่ 3.5 จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง

ค่าสูงสุด $z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 &= 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 &= 10 \\ x_1 + 2x_3 + s_3 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (55)$$

(1) พิจารณาว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่

นำปัญหาใส่ในตารางเริ่มต้นได้ดังตารางที่ 3.7 พิจารณาในแถวที่ 0 พบว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรยังมีค่าเป็นลบ แสดงว่าการเพิ่มของตัวแปรเหล่านี้ทำให้ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้ในตารางนี้ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ตารางที่ 3.7 ตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น

ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	0	1	–1	–4	–2	0	0	0	0
s_1	1	0	3	**6**	1	1	0	0	30
s_2	2	0	2	1	1	0	1	0	10
s_3	3	0	1	0	2	0	0	1	10

(2) การเลือกตัวแปรเข้าและตัวแปรออก

สัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ 0 มีค่าเป็นลบ และมีค่าน้อยที่สุด x_2 จึงเป็นตัวแปรเข้า พิจารณาตัวแปรออกโดยคำนวณหาอัตราส่วนต่ำสุด โดยที่

$$\text{อัตราส่วน} = \frac{\text{ค่าทางขวามือในแถวนั้น}}{\text{สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าในแถวนั้น}}$$

แถวที่ 1 : อัตราส่วนคือ 30/6 = 5

แถวที่ 2 : อัตราส่วนคือ 10/1 = 10

แถวที่ 3 : สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_2 เท่ากับศูนย์ แสดงว่าไม่ว่า x_2 จะมีค่าเท่าใด จะไม่มีการใช้ทรัพยากรชนิดที่ 3 ดังนั้น ข้อจำกัดที่ 3 จึงไม่มีขอบเขตสำหรับ x_2

จากตัวอย่างนี้ x_2 มีค่าสูงสุดเท่ากับ 5 ในแถวที่สองตัวแปร x_2 จะเข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานและข้อจำกัดที่หนึ่งจะไม่มีทรัพยากรเหลืออยู่เลย ดังนั้น s_1 ซึ่งเป็นตัวแปรพื้นฐานจะกลายเป็นตัวแปรออก ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ตัวเลข " 6 " จึงถือว่าเป็น เลขตัวหลัก หลักเกณฑ์ของการพิจารณาอัตราส่วนนี้เรียกว่า *การทดสอบอัตราส่วน* เช่นเดียวกับวิธีพีชคณิต กล่าวคือ พิจารณาเฉพาะในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าที่เป็นบวกเท่านั้น

(3) การหาผลเฉลยใหม่โดยการดำเนินการตามแถว

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงถึง จะเรียกข้อจำกัดในตัวแบบว่าเป็นแถว (row) สำหรับตัวอย่างนี้สามารถเขียนได้ว่า

จากตารางที่ 3.7 สามารถเขียนสมการต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\text{แถวที่ r0} \quad \text{ค่าสูงสุด} \quad z - x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\
&\text{แถวที่ r1} \quad 3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\
&\text{แถวที่ r3} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 10 \\
&\text{แถวที่ r4} \quad x_1 + 2x_3 + s_3 = 10
\end{aligned}
\tag{56}
$$

จากขั้นตอนที่ 2 ค่าสูงสุดของ x_2 คือ 5 ถ้า x_2 อยู่ในแถวที่ r1 แล้วจะมีค่าเท่ากับ 30/6 = 5 ถ้า x_2 อยู่ในแถวที่ r2 แล้วจะมีค่าเท่ากับ 10/1 = 10 แต่ x_2 ไม่สามารถอยู่ในแถวที่ r3 ได้ ดังนั้น x_2 จะกลายเป็นตัวแปรพื้นฐานและจะมาอยู่ในแถวที่ r1 เพื่อให้ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่ในแถวที่ r1 เราใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ r1 เท่ากับ 1 และแถวที่เหลือมีสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งขั้นตอนการกระทำนี้เรียกว่า การหาตัวหลักในแถว r1 (Pivoting on row r1) โดยใช้ *วิธีเกาส์–จอร์แดน (Gauss–Jordan method)* ที่มีขั้นตอนดังนี้

1. ทำสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ r1 ให้มีค่าเท่ากับ 1 โดยการคูณแถวที่ r1 ด้วย 1/6 จะได้แถวที่ r1′ ใหม่ดังนี้

$$\text{แถวที่ r1}' : \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}s_1 = 5$$

2. ทำสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ r0 ให้มีค่าเท่ากับ 0 โดยการนำ 4 คูณแถวที่ r1′ แล้วบวกกับแถวที่ r0 จะได้แถวที่ r0′ ใหม่ดังนี้

$$\text{แถวที่ r0}' : \quad z + x_1 \quad \frac{-4}{3}x_3 + \frac{2}{3}s_1 = 20$$

3. ทำสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ r2 ให้มีค่าเท่ากับ 0 โดยการนำแถวที่ r1′ ลบออกจากแถวที่ r2 จะได้แถวที่ r2′ ดังนี้

$$\text{แถวที่ r2}' : \quad \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}s_1 + s_2 = 5$$

4. เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ r3 มีค่าเท่ากับ 0 แล้วจึงไม่ต้องดำเนินใด ๆ

$$\text{แถวที่ r3}' : \quad x_1 + 2x_3 + s_3 = 10$$

ผลการดำเนินการตามแถวของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับปัญหานี้ สามารถแสดงดังตารางที่ 3.8 หรือแสดงแต่สัมประสิทธิ์ดังตารางที่ 3 ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้สำหรับตารางนี้คือ $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 5, s_3 = 10$ โดย $z = 20$ โดยเซตของตัวแปรพื้นฐานคือ $\{x_2, s_2, s_3\}$ และเซตของตัวแปรจร คือ $\{x_1, x_3, s_1\}$ เราเรียกขั้นตอนในการดำเนินการจากผลเฉลยพื้นฐานหนึ่งไปเพื่อหาผลเฉลยพื้นฐานใหม่ซึ่งมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีขึ้นว่า *หนึ่งรอบการคำนวณ (One iteration)*

ตารางที่ 3.8 ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่ผ่านการดำเนินการตามแถวครั้งที่ 1

แถวที่ r0′	z	$+x_1$	$\frac{-4}{3}x_3+\frac{2}{3}s_1$			=	20
แถวที่ r1′		$\frac{1}{2}x_1+1x_2+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}s_1$				=	5
แถวที่ r2′		$\frac{3}{2}x_1$	$+\frac{5}{6}x_3-\frac{1}{6}s_1+s_2$			=	5
แถวที่ r3′		x_1	$+2x_3$		$+s_3$	=	10

ตารางที่ 3.9 ตารางซิมเพล็กซ์สำหรับรอบการคำนวณครั้งที่ 1

ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	0	1	1	0	–4/3	2/3	0	0	20
x_2	1	0	1/2	**1**	1/6	1/6	0	0	5
s_2	2	0	3/2	0	5/6	–1/6	1	0	5
s_3	3	0	1	0	2	0	0	1	10

(4) พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้นี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่

เราพิจารณาจากตารางที่ 3.8 หรือตารางที่ 3.9 ว่าค่า z สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นได้หรือไม่ โดยการนำแถวที่ r0′ มาเขียนใหม่ได้เป็น

$$z = 20-x_1+\frac{4}{3}x_3-\frac{2}{3}s_1 \qquad (57)$$

จะเห็นได้ว่า ค่า z สามารถเพิ่มขึ้นได้หาก x_3 มีค่าเพิ่มขึ้น ขณะที่ค่า z จะลดลงเมื่อ s_1 หรือ x_1 มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นผลเฉลย $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 5, s_3 = 10$ โดย $z = 20$ ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(5) พิจารณาว่าตัวแปรจรใดจะเข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานและตัวแปรพื้นฐานใดจะออกมาเป็นตัวแปรจร

จากสมการ (57) จะเห็นว่า ถ้าเพิ่มค่าของ x_3 จำนวน 1 หน่วย ค่า z จะเพิ่ม 4/3 หน่วย ดังนั้นจึงพิจารณาเพิ่มค่า x_3 หรือพิจารณาสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวที่ 0 ในตารางที่ 3.9 พบว่า สัมประสิทธิ์ของ x_3 มีค่าเป็นลบ จึงให้ x_3 เป็นตัวแปรเข้า ดังนั้น สดมภ์ x_3 เป็นสดมภ์ตัวหลักทำการทดสอบอัตราส่วนต่ำสุดเพื่อหาตัวแปรออก จากตารางที่ 3.9จะได้

แถวที่ 1 หรือแถวที่ r1′ $\qquad \frac{5}{1/6} = 30$

แถวที่ 2 หรือแถวที่ r2′ $\quad \frac{5}{5/6} = 6$

แถวที่ 3 หรือแถวที่ r3′ $\quad \frac{10}{2} = 5$

สัดส่วนที่ต่ำที่สุดคือ 5 ในแถวที่ 3 หรือแถวที่ r3′ ดังนั้น x_3 จะเป็นตัวแปรเข้าและตัวแปรพื้นฐานในแถวที่ 2 คือ s_3 จะเป็นตัวแปรออก

(6) หาค่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่ โดยใช้การดำเนินการตามแถว

เพื่อให้สัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวที่ r3′ ในตารางที่ 3.8 หรือแถวที่ 3 ในตารางที่ 3.9 มีค่าเป็นหนึ่ง ส่วนสัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวอื่น ๆ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งแสดงเป็นขั้นตอนดังนี้

1. ทำให้สัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวที่ r3′ มีค่าเป็นหนึ่ง โดยนำ 1/2 มาคูณแถวที่ r3′

แถวที่ r3″ : $\quad \frac{1}{2}x_1 + 1x_3 + \frac{1}{2}s_3 = 5$

2. ทำให้สัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวที่ r0′ มีค่าเป็นศูนย์ โดยนำ 4/3 มาคูณแถวที่ r3″ แล้วนำมาบวกกับแถว r0′ ดังนั้นแถวที่ r0″ เท่ากับ

แถวที่ r0″ : $\quad \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 = 26\frac{2}{3}$

3. ทำให้สัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวที่ r1′ มีค่าเป็นศูนย์ โดยนำ 1/6 มาคูณแถว r3″ แล้วนำมาบวกกับแถว r1′ จะได้แถวที่ r1″

แถวที่ r1″ : $\quad \frac{5}{12}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}s_1 - \frac{1}{12}s_3 = \frac{25}{6}$

4. ทำให้สัมประสิทธิ์ของ x_3 ในแถวที่ r2′ มีค่าเป็นศูนย์ โดยนำ 5/6 คูณ r3″ แล้วนำไปลบออกจากแถวที่ r2′ จะได้แถวที่ r2″ ดังนี้

แถวที่ r2″ : $\quad \frac{13}{12}x_1 - \frac{1}{6}s_1 + s_2 - \frac{5}{12}s_3 = \frac{5}{6}$

ผลการดำเนินการตามแถวของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในปัญหานี้ สามารถแสดงดังตารางที่ 3.10 หากแสดงเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรสามารถเขียนดังตารางที่ 3.11 โดย ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้คือ $x_1 = 0$ $x_2 = 25/6 = 4.1667$ $x_3 = 5$ $s_1 = 0$ $s_2 = 5/6$ $s_3 = 0$ โดย $z = 80/3$ โดยเซตของตัวแปรพื้นฐานคือ $\{x_2, x_1, s_3\}$ และเซตของตัวแปรจร คือ $\{s_1, s_2, x_3\}$

(7) พิจารณาว่าผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้นี้ เหมาะสมที่สุดหรือไม่

พิจารณาตารางที่ 3.11 ว่าค่า z สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นได้หรือไม่ โดยการนำแถวที่ r0″ มาเขียนใหม่ได้เป็น

$$z = 26\frac{2}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 \qquad (58)$$

ตารางที่ 3.10 ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่ผ่านการดำเนินการตามแถวรอบที่ 2

$z + \frac{5}{3}x_1$		$+\frac{2}{3}s_1$	$+\frac{2}{3}s_3$	$= \frac{80}{3}$
$\frac{5}{12}x_1 + x_2$		$+\frac{1}{6}s_1$	$-\frac{1}{12}s_3$	$= \frac{25}{6}$
$\frac{13}{12}x_1$		$-\frac{1}{6}s_1 + s_2$	$-\frac{5}{12}s_3$	$= \frac{5}{6}$
$\frac{1}{2}x_1$	$+ x_3$		$+\frac{1}{2}s_3$	$= 5$

ตารางที่ 3.11 ตารางซิมเพล็กซ์รอบที่ 2

ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	0	1	5/3	0	0	2/3	0	2/3	80/3
x_2	1	0	5/12	**1**	0	1/6	0	–1/12	25/6
s_2	2	0	13/12	0	0	–1/6	1	–5/12	5/6
x_3	3	0	1/2	0	1	0	0	1/2	5

จะเห็นได้ว่า ค่า z สามารถจะมีค่าลดลงหาก x_1 s_1 หรือ s_2 มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นผลเฉลยที่ได้นี้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ คือ $x_1 = 0$ $x_2 = 25/4$ $x_3 = 5$ $s_1 = 0$ $s_2 = 5/6$ และ $s_3 = 0$ โดย $z = 80/3$

โดยสรุปการใช้วิธีการซิมเพล็กซ์ในรูปตารางสำหรับตัวอย่างที่ 3.9 สามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้ โดยการใช้ตารางซิมเพล็กซ์แสดงในตารางที่ 3.12 ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 0$ $x_2 = 25/6$ $x_3 = 5$ $s_1 = 0$ $s_2 = 5/6$ $s_3 = 0$ โดย $z = 80/3$

ตารางที่ 3.12 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
0	z	0	1	–1	–4	–2	0	0	0	0
	s_1	1	0	3	**6**	1	1	0	0	30
	s_2	2	0	2	1	1	0	1	0	10
	s_3	3	0	1	0	2	0	0	1	10

ตารางที่ 3.12 (ต่อ)

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	z	0	1	1	0	–4/3	2/3	0	0	20
	x_2	1	0	1/2	1	1/6	1/6	0	0	5
	s_2	2	0	3/2	0	5/6	–1/6	1	0	5
	s_3	3	0	1	0	**2**	0	0	1	10
2	z	0	1	5/3	0	0	2/3	0	2/3	80/3
	x_2	1	0	5/12	1	0	1/6	0	–1/12	25/6
	s_2	2	0	13/12	0	0	–1/6	1	–5/12	5/6
	x_3	3	0	1/2	0	1	0	0	1/2	5

ตัวอย่างที่ 3.10 จากปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ จงหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 4x_2$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ -2x_1 + x_2 &\le 4 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

ตัวแบบปัญหาข้างต้น สามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 4x_2$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + s_2 &= 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + s_3 &= 15 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (59)$$

เมื่อได้รูปแบบมาตรฐานแล้ว สามารถนำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่าง ๆ ใส่ในตารางซิมเพล็กซ์ เพื่อคำนวณหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ดังตารางที่ 3.14 ดังนั้น ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 12/7$ $x_2 = 15/7$ $s_2 = 37/7$ และ $s_1 = s_3 = 0$ โดยที่ $z = 120/7$

ตารางที่ 3.13 ตารางซิมเพล็กซ์

คำนวณรอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	z	1	–5	–4	0	0	0	0
	s_1	0	1	2	1	0	0	6
	s_2	0	–2	1	0	1	0	4
	s_3	0	**5**	3	0	0	1	15
1	z	1	0	–1	0	0	1	15
	s_1	0	0	**7/5**	1	0	–1/5	3
	s_2	0	0	11/5	0	1	2/5	10
	x_1	0	1	3/5	0	0	1/5	3
2	z	1	0	0	5/7	0	6/7	120/7
	x_2	0	0	1	5/7	0	–1/7	15/7
	s_2	0	0	0	–11/7	1	5/7	37/7
	x_1	0	1	0	–3/7	0	2/7	12/7

3.7 ผลเฉลยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงในกรณีต่าง ๆ

ตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ วิธีพีชคณิต และวิธีซิมเพล็กซ์ ที่กล่าวมาข้างต้น ผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดและมีเพียงค่าเดียว อย่างไรก็ตาม ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่าง ๆ อาจมีผลเฉลยในลักษณะอื่น ๆ หรือปรากฏการณ์บางอย่างเกิดขึ้นในขั้นตอนการหาผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยในลักษณะต่างๆ 4 ประเภทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เนื่องจากวิธีพีชคณิตเป็นวิธีที่ทำให้เราเข้าใจขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยง่าย แต่ขั้นตอนการคำนวณค่อนข้างยาว จึงไม่ขอยกตัวอย่างในที่นี้ ส่วนปรากฏการณ์ในอีก 2 ลักษณะเกิดขึ้นในขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ ผลเฉลยในลักษณะต่าง ๆ หรือปรากฏการณ์เหล่านี้เป็นสิ่งที่เราควรศึกษา เพื่อให้สามารถสรุปและอธิบายผลการคำนวณและผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนี้

1. ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียว (Unique optimal solution)
2. ผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ (Alternative or multiple optimal solutions)
3. ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ (Infeasible solution)
4. ผลเฉลยที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded solution)
5. การเสมอกันของตัวแปรเข้า (Tie for entering basic variables)
6. การเสมอกันของตัวแปรออก (Tie for leaving variables) หรือ สภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy)

3.7.1 ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียว

ตัวอย่างต่าง ๆ ที่ผ่านมามีผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด โดยผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดนี้มีเพียงค่าเดียว เช่น ตัวอย่างที่ 3.1 จุด $(x_1, x_2) = (8/5, 24/5)$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเพียงผลเฉลยเดียวที่ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุด คือ 22.5 จุดอื่น ๆ ที่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้มีค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์น้อยกว่า 22.4

3.7.2 ผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ

ในกรณีที่มีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยที่ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีที่สุด เราเรียกผลเฉลยในลักษณะนี้ว่า *ผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ (Alternative solution)* ในทางปฏิบัติเราสามารถเลือกคำตอบใดคำตอบหนึ่งไปใช้ หรือพิจารณาปัจจัยอื่น ๆ ที่มิได้พิจารณาในตัวแบบเพิ่มเติมเพื่อเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจเลือกผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 3.11 โรงงานผลิตรถจักรยานยนต์แห่งหนึ่ง มีการผลิตรถจักรยานยนต์สองรุ่น คือ BMX และ BMY ซึ่งรถจักรยานยนต์ทั้งสองรุ่นนี้ใช้เวลาผลิตในแผนกพ่นสี และสายการประกอบแตกต่างกัน ถ้าแผนกพ่นสีทำการผลิตเฉพาะรุ่น BMX อย่างเดียว แล้วจะสามารถพ่นสีได้ 40 คันต่อวัน ถ้าแผนกพ่นสีทำการผลิตเฉพาะรุ่น BMY แล้วจะสามารถพ่นสีได้ 60 คันต่อวัน สำหรับสายการประกอบ ถ้าผลิตเฉพาะรุ่น BMX อย่างเดียว แล้วจะสามารถประกอบได้ 50 คันต่อวัน ถ้าผลิตเฉพาะรุ่น BMY แล้วจะสามารถประกอบได้ 50 คันต่อวันเช่นเดียวกัน ผลกำไรที่ได้รับจากการผลิตจักรยานยนต์รุ่น BMX และ BMY เท่ากับ 30,000 และ 20,000 บาทต่อคัน จงใช้การโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการผลิตจักรยานยนต์ทั้งสองรุ่นนี้ เพื่อให้โรงงานแห่งนี้ได้ผลกำไรรวมสูงสุด

1. กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

ให้ x_X แทน ปริมาณการผลิตจักรยานยนต์รุ่น BMX ต่อวัน
x_Y แทน ปริมาณการผลิตจักรยานยนต์รุ่น BMY ต่อวัน

2. กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ

ค่าสูงสุด $z = 3x_X + 2x_Y$

3. กำหนดข้อจำกัดของปัญหา

(1) สัดส่วนการผลิตสำหรับแผนกพ่นสี

$$\frac{1}{40}x_X + \frac{1}{60}x_Y \leq 1$$

(2) สัดส่วนการผลิตสำหรับแผนกประกอบ

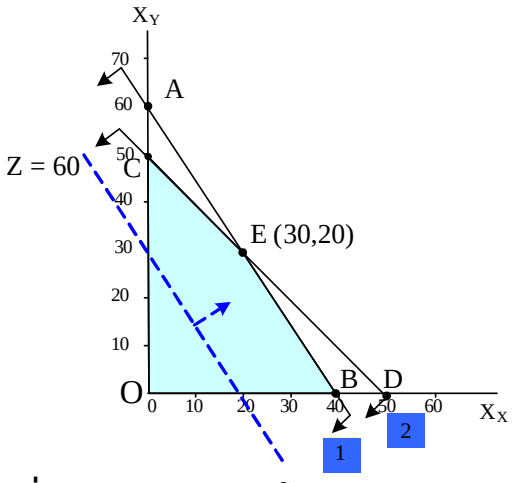
$$\frac{1}{50}x_X + \frac{1}{50}x_Y \leq 1$$

(3) ตัวแปรมีค่าไม่ติดลบ

$$x_X, \quad x_Y \geq 0$$

จากตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น สามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ของ x_X และ x_Y ได้ และสามารถแสดงพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลย เป็นพื้นที่แรเงา ในรูปที่ 3.4 เมื่อลากเส้นผลกำไรเท่ากันผ่านพื้นที่ดังกล่าว พบว่า เส้นผลกำไรเท่ากันที่ความชันเท่ากับ 3/2 ซึ่งเท่ากับความชันของข้อจำกัดที่ 1 เมื่อเพิ่มค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) ให้มากขึ้น จะพบว่าค่า z สูงสุดเท่ากับ 60 อยู่บนเส้น EB โดยเส้นผลกำไรเท่ากันนี้ซ้อนกับเส้นตรง EB ซึ่งเป็นขอบเขตของข้อจำกัดที่ 1 นั่นหมายความว่าผลเฉลยทั้งหมดบนส่วนของเส้นตรง AB เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ในทางปฏิบัติ เมื่อเกิดเหตุการณ์ที่มีผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ ผู้ตัดสินใจสามารถใช้เกณฑ์ที่สอง (Secondary criterion) เพื่อเลือกผลเฉลยหนึ่งผลเฉลยจากผลเฉลยที่เหมาะสมเหล่านี้ ตัวอย่างเช่น ในตัวอย่าง 3.11 โรงงานอาจเลือกผลเฉลยที่จุด B (40,0) เนื่องจากโรงงานสามารถมุ่งความสนใจไปในการผลิตสินค้าชนิดเดียว ซึ่งจะทำให้การวางแผนการผลิตไม่ซับซ้อน รวมทั้งมีความชำนาญในการผลิตรถจักรยานยนต์รุ่น BMX มากขึ้น



รูปที่ 3.4 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ

ในการใช้วิธีซิมเพล็กซ์เพื่อแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เราสามารถทราบว่าปัญหานั้นเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยที่ดีที่สุดหลายคำตอบได้ โดยพิจารณาในตารางซิมเพล็กซ์สุดท้ายที่ให้ผล

เฉลยที่เหมาะสมที่สุด ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวที่ 0 อย่างน้อยหนึ่งตัวมีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว ผลเฉลยที่เหมาะสมมีหลายคำตอบหรือมากกว่าหนึ่งคำตอบ ทั้งนี้เราสามารถนำตัวแปรจรนี้เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานได้ โดยที่ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ยังคงเท่าเดิม

ตัวอย่าง 3.12 จงหาผลเฉลยของปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = -3x_1 + 6x_2$

ข้อจำกัด
$$5x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

การแก้ปัญหาเริ่มต้นจากการสร้างรูปแบบมาตรฐานของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าสูงสุด $z = -3x_1 + 6x_2$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + s_1 &= 35 \\ -x_1 + 2x_2 + s_2 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (60)$$

ตารางที่ 3.14 ตารางเริ่มต้นของวิธีซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	3	–6	0	0	0
s_1	0	5	7	1	0	35
s_2	0	–1	**2**	0	1	2
z	1	0	0	0	3	6
s_1	0	17/2	0	1	–7/2	28
x_2	0	–1/2	1	0	1/2	1

จากตาราง 3.14 x_1 ซึ่งเป็นตัวแปรจรมีสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 เท่ากับศูนย์ แสดงว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดมีหลายคำตอบ หากต้องการหาผลเฉลยที่เหมาะสมทั้งหมด ให้คำนวณโดยวิธีซิมเพล็กซ์ 1 รอบ โดยให้ x_1 เป็นตัวแปรเข้า แล้วพิจารณาตัวแปรออกโดยใช้การทดสอบสัดส่วน จะได้ว่าตัวแปรเข้า คือ x_1 ตัวแปรออก คือ s_1 แล้วดำเนินการตามแถวเพื่อหาผลเฉลยใหม่ที่มีค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่าเดิม ดังแสดงในตารางที่ 3.15

จากผลเฉลยที่เหมาะสมทั้ง 2 คำตอบ คือ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56/17 \\ 45/17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นอกจากนี้ เราสามารถหาส่วนของเส้นตรงที่แสดงถึงผลเฉลยที่เหมาะสมทั้งหมดได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1-c)\begin{bmatrix} \frac{56}{17} \\ \frac{45}{17} \end{bmatrix} \quad \text{โดย} \quad 0 \le c \le 1$$

ทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาได้ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $c = 1/3$ แล้วผลเฉลยที่ได้ คือ $x_1 = 112/51$ และ $x_2 = 90/51$ โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 6

ตารางที่ 3.15 ตารางสุดท้ายของวิธีซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	0	0	3	6
x_1	0	1	0	2/17	–7/17	56/17
x_2	0	0	1	1/17	5/17	45/17

3.7.3 ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

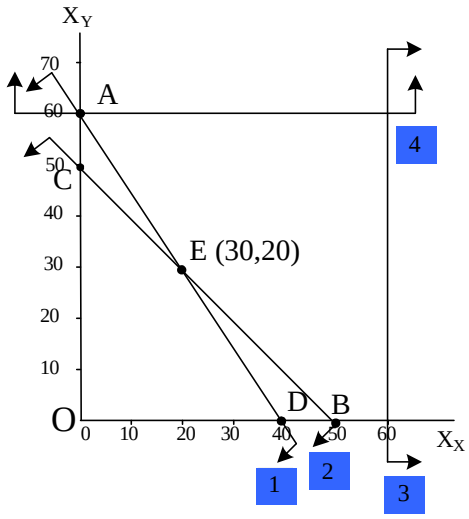
การหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาหนึ่ง เราจะค้นหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดเสียก่อน กล่าวคือ เราจะหาเซตของผลเฉลยที่สอดคล้องกับข้อจำกัดทั้งหมด จากนั้นจึงพิจารณาเลือกผลเฉลยที่ดีที่สุดในเซตนั้น โดยพิจารณาจากค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ หากปัญหาหนึ่งไม่มีเซตของผลเฉลยที่สอดคล้องกับข้อจำกัด ปัญหานี้จึงมี *ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ (Infeasible solution)*

ตัวอย่างที่ 3.13 จากตัวอย่างที่ 3.11 หากตัวแทนจำหน่ายรถจักรยานยนต์ที่ผลิตจากโรงงานต้องการรถจักรยานยนต์อย่างน้อยรุ่นละ 60 คันต่อวัน โรงงานแห่งนี้ควรผลิตรถจักรยานยนต์แต่ละรุ่นจำนวนเท่าใด เพื่อให้โรงงานได้ผลกำไรรวมสูงที่สุด

ในตัวอย่างนี้ต้องเพิ่มข้อจำกัด 4 และ 5 ด้านปริมาณความต้องการรถจักรยานยนต์ทั้งสองรุ่น ดังนี้

$$\begin{aligned} x_X &\ge 60 \\ x_Y &\ge 60 \end{aligned} \qquad (61)$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ เริ่มด้วยการเขียนกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นไปได้เสียก่อน จากรูปที่ 3.5 จะเห็นว่า เราไม่มีพื้นที่ที่เป็นไปได้ กล่าวคือ ไม่มีผลเฉลยใดที่สอดคล้องกับข้อจำกัดของตัวแบบนี้ ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้มี ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้



รูปที่ 3.5 ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ เราก็สามารถทราบว่าปัญหาหนึ่งมีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ โดยพิจารณาในตารางซิมเพล็กซ์สุดท้ายที่ให้ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ โดยค่าทางขวามือของตัวแปรพื้นฐานมีค่าเป็นลบ

3.7.4 ผลเฉลยที่ไม่มีขอบเขต

โดยทั่วไปลักษณะที่สำคัญของปัญหาการจัดสรรทรัพยากร คือ เป็นปัญหาที่มีทิศทางของปัญหา ซึ่งแสดงในรูปของวัตถุประสงค์ของตัวแบบ เช่น ปัญหาที่ต้องการทำให้ต้นทุนต่ำที่สุด ปัญหาที่ต้องการทำให้ได้กำไรสูงสุด เป็นต้น ขณะเดียวกันปัญหามักมีข้อจำกัดด้านปริมาณกำไรสูงที่สุด แต่ปริมาณวัตถุดิบที่มีอยู่ในคลังจะเป็นข้อจำกัดที่ทำให้บริษัทไม่สามารถผลิตได้มากกว่าปริมาณวัตถุดิบที่มีอยู่ หรือปัญหาทางด้านการเงิน บริษัทต้องการลงทุนในธุรกิจต่าง ๆ หลายแห่ง ซึ่งมีผลตอบแทนที่ค่อนข้างสูง ทำให้บริษัทต้องเลือกโครงการที่จะลงทุนภายใต้วงเงินที่จำกัด เป็นต้น

หากปัญหาหนึ่ง เราสามารถเพิ่มค่าของตัวแปรพื้นฐานไปได้เรื่อย ๆ จะทำให้ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพิ่มขึ้น หากไม่มีข้อจำกัดใด ๆ ต่อค่าตัวแปรพื้นฐานนี้ จะทำให้เราต้องการที่เพิ่มค่าของตัวแปรพื้นฐานให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ เช่น การผลิตสินค้าหนึ่ง ซึ่งไม่ได้ใช้ทรัพยากรหรือวัตถุดิบใด ๆ ที่โรงงานมีอยู่อย่างจำกัด ดังนั้น ปริมาณการผลิตสินค้านี้สามารถ

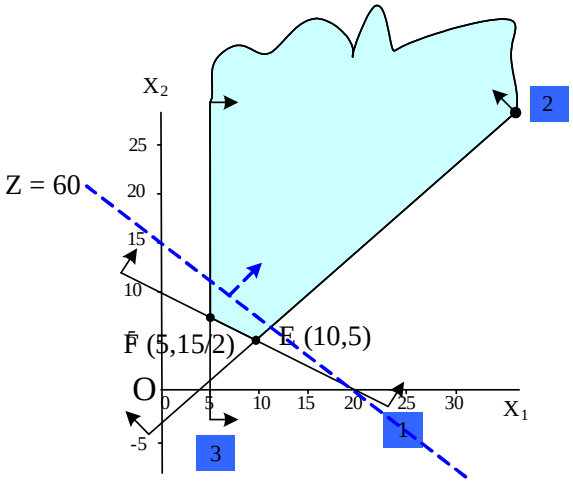
เพิ่มขึ้นได้อย่างไม่จำกัด ถ้าปริมาณสินค้านี้ทำให้ได้ผลกำไรเพิ่มขึ้น เราเรียกผลเฉลยเช่นนี้ว่า *ผลเฉลยไม่มีขอบเขต (Unbounded solution)*

การแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ เราเลื่อนเส้นผลกำไรเท่ากันหรือ*เส้นต้นทุนเท่ากัน (Isocost line)* ไปบนพื้นที่ที่เป็นไปได้ ซึ่งการเลื่อนเส้นดังกล่าวนี้จะเลื่อนไปในทิศทางที่ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นในกรณีของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันสูงสุด หรือ เลื่อนไปในทิศทางที่ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าลดลงในกรณีของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันต่ำสุด หากพื้นที่ผลเฉลยที่เป็นไปได้มีขอบเขตไม่จำกัด อาจมีผลทำให้การเลื่อนเส้นผลกำไรเท่ากันหรือต้นทุนเท่ากันไม่มีที่สิ้นสุด ทำให้เราไม่สามารถหาผลเฉลยที่ดีที่ว่าอยู่ที่ใด เรียกปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า *ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded problem)*

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยใช้วิธีกราฟ

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 4x_2$

ข้อจำกัด
$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$3x_1 - 4x_2 \geq 10$$
$$x_1 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



รูปที่ 3.6 พื้นที่ที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขต

จากกราฟพบว่า กราฟวัตถุประสงค์สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ ไม่มีจุดสิ้นสุด บนพื้นที่ที่เป็นไปได้ ปัญหานี้จึงเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาผลเฉลยของปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad & z = 24x_1 + 20x_2 - 4x_3 - 5x_4 \\ \text{ข้อจำกัด} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 6x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

สามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad & z = 24x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 10 \\ & 6x_1 + 5x_2 - 2x_4 + s_2 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

การหาค่าผลเฉลยโดยใช้ซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง แสดงในตารางที่ 3.16

ตารางที่ 3.16 ตารางเริ่มต้นของวิธีซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
z	1	–24	–20	4	5	0	0	0
s_1	0	1	1	–1	0	1	0	10
s_2	0	**6**	5	0	–2	0	1	15
z	1	0	0	4	–3	0	4	60
s_1	0	0	1/6	–1	**1/3**	1	–1/6	15/2
x_1	0	1	5/6	0	–1/3	0	1/6	5/2
z	1	0	3/2	–5	0	9	5/2	255/2
x_4	0	0	1/2	–3	1	3	–1/2	45/2
x_1	0	1	1	–1	0	1	0	10

3.7.5 การเสมอกันของตัวแปรเข้า

สำหรับการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าสูงสุด การพิจารณาตัวแปรเข้าพิจารณาจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในสมการวัตถุประสงค์หรือแถวที่ 0 ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใดเป็นค่าลบมากที่สุด ตัวแปรนั้นจะเป็นตัวแปรเข้า และกลายเป็นตัวแปรพื้นฐานต่อไป ในกรณีที่มีตัวแปรจรอย่างน้อย 2 ตัวที่มีสัมประสิทธิ์ติดลบมากที่สุด เราสามารถเลือกตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งได้ ซึ่งผลการเลือกที่จะไม่กระทบต่อค่าผลเฉลยที่เหมาะสม แต่อาจมีผลกระทบต่อเวลาในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยที่ดีที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีซิมเพล็กซ์

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด $4x_1 + 3x_2 \leq 40$
$2x_1 + 5x_2 \leq 25$
$x_1, x_2 \geq 0$

กำหนดให้ s_1 และ s_2 เป็นตัวแปรส่วนเกินสำหรับข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เราสามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานดังนี้

ค่าสูงสุด $z - 3x_1 - 3x_2 = 0$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + s_1 &= 40 \\ 2x_1 + 5x_2 + s_2 &= 25 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (62)$$

เราสามารถหาผลเฉลยโดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในรูปตารางได้ดังตารางที่ 3.17 เราเลือกตัวแปร x_1 เป็นตัวแปรเข้าก่อน และผลเฉลยที่เหมาะสมคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (125/14, 10/7, 0,0) = (8.929,1.429, 0, 0)$ หากเราเลือกให้ตัวแปร เป็นตัวแปรเข้าก่อน x_2 จะสามารถหาค่าผลเฉลยได้เท่ากัน ดังตารางที่ 3.18

ตารางที่ 3.17 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
				x_1	x_2	s_1	s_2	
0	z	0	1	–3	–3	0	0	0
	s_1	1	0	4	3	1	0	40
	s_2	2	0	**2**	5	0	1	25
1	z	0	1	0	–3/4	3/4	0	30
	x_1	1	0	1	3/4	1/4	0	10
	s_2	2	0	0	**7/2**	–1/2	1	5
2	z	0	1	0	0	9/14	3/14	435/14
	x_1	1	0	1	0	5/14	–3/14	125/14
	x_2	2	0	0	1	–1/7	2/7	10/7

ตารางที่ 3.18 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	แถวที่	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
				x_1	x_2	s_1	s_2	
0	z	0	1	–3	–3	0	0	0
	s_1	1	0	4	3	1	0	40
	s_2	2	0	2	**5**	0	1	25
1	z	0	1	–9/5	0	0	3/5	15
	s_1	1	0	**14/5**	0	1	–3/5	25
	x_2	2	0	2/5	1	0	1/5	5
2	z	0	1	0	0	9/14	3/14	435/14
	x_1	1	0	1	0	5/14	–3/14	125/14
	x_2	2	0	0	1	–1/7	2/7	10/7

3.7.6 การเสมอกันของตัวแปรออก หรือ สภาพซ้อนสถานะ

การทดสอบอัตราส่วนในขั้นตอนของซิมเพล็กซ์นั้นใช้ในการคัดเลือกตัวแปรออก อัตราส่วนนี้แสดงถึงค่าของตัวแปรเข้าสูงสุด ซึ่งจะใช้ทรัพยากรภายใต้ข้อจำกัดนี้ จนหมดทำให้ตัวแปรพื้นฐานในแถวนี้ ไม่สามารถใช้ทรัพยากรนี้ได้ ตัวแปรพื้นฐานจึงมีค่าเป็นศูนย์ และกลายเป็นตัวแปรออก

ถ้าอัตราส่วนในแถวใดมีค่าต่ำสุด ตัวแปรพื้นฐานในแถวนั้นจะกลายเป็นตัวแปรออก ในกรณีที่อัตราส่วนต่ำสุดมีมากกว่าหนึ่งแถว ทำให้มีตัวแปรพื้นฐานมากกว่าหนึ่งตัวแปรที่สามารถนำมาพิจารณาให้เป็นตัวแปรออก นั่นหมายความว่า การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเข้าจะมีผลทำให้ตัวแปรพื้นฐานเหล่านี้ออกจากพื้นฐานในเวลาเดียวกัน เราสามารถเลือกตัวแปรออกตัวใดตัวหนึ่งจากตัวแปรเหล่านี้ อย่างไรก็ตาม ในรอบการคำนวณถัดไปจะมีบางแถวที่มีค่าทางขวามือเท่ากับศูนย์ในแถวที่ตัวแปรพื้นฐานไม่ได้ถูกเลือกให้เป็นตัวแปรออกในขั้นตอนการคำนวณถัด ๆ ไปอีกเลย

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด} \quad z &= 5x_1 + 3x_2 \\
4x_1 + 2x_2 &\le 12 \\
4x_1 + x_2 &\le 10 \\
x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1, \; x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ s_1 s_2 และ s_3 เป็นตัวแปรส่วนเกินสำหรับข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ รูปแบบมาตรฐานของปัญหาสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} z - 5x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + s_1 &= 12 \\ 4x_1 + x_2 + s_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 + s_3 &= 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (63)$$

จากตัวแบบ (63) สามารถประมวลผลโดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในรูปตารางสามารถหาผลเฉลยได้ดังตารางที่ 3.19

ตารางที่ 3.19 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ	สัดส่วน (Ratio)
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	z	–5	–3	0	0	0	0	
	s_1	4	2	1	0	0	12	12/4 = 3
	s_2	**4**	1	0	1	0	10	10/4 = 2.5*
	s_3	1	1	0	0	1	4	4/1 = 1
1	z	0	–7/4	0	5/4	0	25/2	
	s_1	0	**1**	1	–1	0	2	2/1 = 2*
	x_1	1	1/4	0	1/4	0	5/2	$\frac{5/2}{1/4} = 10$
	s_3	0	3/4	0	–1/4	1	3/2	$\frac{3/2}{3/4} = 2$*
2	z	0	0	7/4	–1/2	0	16	
	x_2	0	1	1	–1	0	2	–
	x_1	1	0	–1/4	1/2	0	2	4
	s_3	0	0	–3/4	**1/2**	1	0	0*
3	z	0	0	1	0	1	16	
	x_2	0	1	–1/2	0	2	2	
	x_1	1	0	1/2	0	–1	2	
	s_2	0	0	–3/2	1	2	0	

การคำนวณรอบที่ 1 พบว่า อัตราส่วนระหว่างค่าทางขวามือกับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าของแถวที่ 1 และแถวที่ 3 มีค่าเท่ากัน เราสามารถเลือกตัวแปร s_1 หรือ s_3 เป็นตัวแปร

ออก ในที่นี้เลือกตัวแปร s_1 ให้ออกจากพื้นฐาน s_1 จะกลายเป็นตัวแปรไม่เป็นพื้นฐานในการคำนวณรอบถัดไป ส่วนตัวแปร s_3 ยังคงเป็นตัวแปรพื้นฐานต่อไป ในการคำนวณรอบที่ 2 ค่าของตัวแปร s_3 จะมีค่าเป็นศูนย์ ส่งผลทำให้ตัวแปรนี้เป็นตัวแปรออกในการทำซ้ำถัดไป เนื่องจากการทดสอบอัตราส่วนจะมีค่าต่ำสุด อย่างไรก็ตาม พบว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง ปรากฏการณ์นี้เราเรียกว่า *สภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy)* เมื่อการเกิดปรากฏการณ์นี้ ถ้าทำการคำนวณรอบถัดไป จะได้ผลเฉลยเดิมและมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่าเดิม (Hiller, 1995, Nash, 1996; Taha, 1997)

3.8 เทคนิคตัวแปรเทียม

ในหัวข้อ 3.2 ได้กล่าวถึงรูปแบบมาตรฐานของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ว่ามีลักษณะที่สำคัญ 3 ประการ คือ เครื่องหมายในแต่ละข้อจำกัดต้องมีเครื่องมาย “=” ตัวแปรตัดสินใจต้องมีค่าเป็นบวก และค่าทางด้านขวามือต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ในกรณีที่ข้อจำกัดในตัวแบบเป็นอสมการที่มีเครื่องหมาย “$\geq$” เช่น $3x_1 + 2x_2 \geq 20$ เพื่อทำให้อสมการนี้เปลี่ยนเป็นสมการ เราจะนำตัวแปรส่วนเกินไปลบทางด้านซ้ายมือของอสมการ โดยที่ตัวแปรส่วนเกินมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์นั้น เรากำหนดผลเฉลยเริ่มต้นโดยให้ตัวแปรส่วนเกินเป็นตัวแปรพื้นฐาน ซึ่งตัวแปรส่วนเกินนี้จะมีค่าเท่ากับค่าทางด้านขวามือ ซึ่งมีค่าเป็นบวก แต่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรส่วนเกินนี้มีค่าเป็นลบ ส่งผลให้ค่าของตัวแปรส่วนเกินในผลเฉลยพื้นฐานเป็นลบ ทำให้ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ เช่น

$$3x_1 + 2x_2 \quad \geq \quad 20 \qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 - e_1 \;=\; 20$$

เมื่อ $x_1 = x_2 = 0$ ดังนั้น $e_1 = -20$ ซึ่งผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์นั้นทุก ๆ ทุกรอบการคำนวณจะต้องได้ผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ ดังนั้นวิธีซิมเพล็กซ์จึงไม่สามารถหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าวได้ จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคซึ่งช่วยหาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ก่อน แล้วจึงนำผลเฉลยนี้มาเป็นผลเฉลยเริ่มต้นในวิธีซิมเพล็กซ์ เทคนิคในการหาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้นี้เรียกว่า *เทคนิคตัวแปรเทียม (Artificial variable technique)*

วิธีนี้เริ่มจากการนำ *ตัวแปรเทียม (Artificial variable)* ซึ่งตัวแปรนี้สร้างขึ้นเพื่อให้สามารถหาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ การเขียนตัวแบบมาตรฐานที่ข้อจำกัดมีเครื่องหมาย “=” หรือ “$\geq$” จะมีการเพิ่มตัวแปรเทียมลงในแต่ละข้อจำกัด ตัวแปรเทียมนี้มิได้มีความหมายใด ๆ ในเชิงเศรษฐศาสตร์ ดังตัวอย่างการเพิ่มตัวแปรเทียมในข้อจำกัดต่อไปนี้ ข้อจำกัด

1. ปริมาณการผลิตไม่น้อยกว่าความต้องการสินค้า ในที่นี้ความต้องการเท่ากับ 100 ชิ้น

$$3x_1 + 4x_2 \geq 100$$

2. ปริมาณแรงงานที่มีอยู่ ในที่นี้ปริมาณแรงงานเท่ากับ 40 ชั่วโมง

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

ให้ e_1 แทน ตัวแปรส่วนเกินแทนปริมาณการผลิตที่เกินกว่าความต้องการสินค้า a_1 และ a_2 เป็นตัวแปรเทียมสำหรับข้อจำกัดที่ 1 และ 2 จะได้ข้อจำกัดดังนี้

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + a_1 - e_1 &= 100 \\ x_1 + 2x_2 + a_2 &= 40 \end{aligned} \qquad (64)$$

การแก้ปัญหาโดยใช้ซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง การคำนวณรอบที่ 0 a_1 และ a_2 จะเป็นตัวแปรพื้นฐานของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เนื่องจากตัวแปรทั้งสองนี้ไม่ได้เป็นตัวแปรที่มีความหมายใด ๆ ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เราจึงพยายามกำจัดตัวแปรนี้ออกไปจากตัวแปรพื้นฐาน *วิธี ทู–เฟส (Two-phase method)* และ*วิธี บิก–เอ็ม (Big–M method)* เป็นเทคนิคในการนำมาใช้ในการคำนวณสำหรับปัญหาที่มีตัวแปรเทียม เพื่อให้เราสามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

3.8.1 วิธี ทู–เฟส

จากปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่ไม่สามารถหาผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้น เราจะนำตัวแปรเทียมเข้ามา เพื่อให้สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์ได้ โดยมีตัวแปรเทียมเป็นตัวแปรพื้นฐาน วิธี ทู–เฟส แบ่งการทำงานออกเป็น 2 ขั้นตอน ขั้นตอนที่ 1 หรือเฟสที่ 1 ซึ่งขั้นตอนนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เริ่มต้น โดยการกำจัดตัวแปรเทียมออกจากตัวแปรพื้นฐาน ด้วยการกำหนดวัตถุประสงค์เป็นค่าต่ำสุดของผลรวมของตัวแปรเทียม ขั้นตอนที่ 2 หรือเฟสที่ 2 จะนำผลเฉลยพื้นฐานที่ได้ในเฟสที่ 1 มาเป็นผลเฉลยเริ่มต้นในเฟสที่ 2 แล้วเฟสที่ 2 นี้จะใช้วิธีการซิมเพล็กซ์ด้วยฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา เพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา

ตัวอย่างที่ 3.18 จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยวิธี ทู–เฟส

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{ข้อจำกัด} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ให้ a_1 และ a_2 แทนตัวแปรเทียมสำหรับข้อจำกัด 1 และ 2 ตามลำดับ e_1 แทนตัวแปรส่วนเกินสำหรับข้อจำกัดที่ 2 ข้อจำกัดสามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + a_1 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + a_2 - e_2 &= 120 \\ x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, e_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (65)$$

เฟสที่ 1 เนื่องจากวัตถุประสงค์ของเฟสที่ 1 คือ ต้องการกำจัดตัวแปรเทียมออกจากตัวแบบของปัญหา ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ

ค่าต่ำสุด $z' = a_1 + a_2$

จากฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัด (65) สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางเพื่อหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ดังตารางที่ 3.20

การคำนวณรอบที่ 0 ในตารางที่ 3.20 เป็นการสร้างตารางเริ่มต้น ก่อนที่จะหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ ต้องเขียนในรูปแบบบัญญัติที่สามารถอ่านค่าตัวแปรได้โดยตรงจากตาราง ในที่นี้พบว่า การคำนวณรอบที่ 0 ไม่เป็นรูปแบบบัญญัติ กล่าวคือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ยังคงมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานไม่เป็นศูนย์ ทำให้ไม่สามารถอ่านค่า z' ได้จากตารางโดยตรง จึงทำการดำเนินการตามแถว (Row operation) เพื่อกำจัดสัมประสิทธิ์ของ a_1 และ a_2 ให้เป็นศูนย์ จะได้การคำนวณรอบที่ $0'$ เมื่อปัญหาในเฟสที่ 1 นี้อยู่ในรูปแบบบัญญัติแล้ว จึงทำการหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ต่อไป ในการคำนวณรอบที่ 2 พบว่า ผลเฉลยที่ได้ในเฟสที่ 1 นั้นเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับตัวแบบในเฟสที่ 1 ซึ่งมีวัตถุประสงค์คือ ค่าต่ำสุด $z' = a_1 + a_2$ โดยผลเฉลยนี้คือ $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$ $e_2 = 0$ และ $a_1 = a_2 = 0$ โดย $z' = 0$ เนื่องจาก ตัวแปรเทียมทั้งสองตัวมีค่าเป็นศูนย์ และตัวแปรพื้นฐานทุกตัวมีค่าไม่เป็นลบ สรุปว่าผลเฉลยที่ได้นี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับปัญหานี้

เฟสที่ 2 เป็นการหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้ผลเฉลยที่ได้ในเฟสที่ 1 เป็นผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้นสำหรับเฟสนี้ จากซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางจะตัดสดมภ์ของตัวแปรเทียม และแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ออกไป แล้วนำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหามาแทน ดังตารางที่ 3.21 ผลเฉลยในการคำนวณรอบที่ 0 ยังไม่ได้อยู่ในรูปแบบบัญญัติ จึงนำ 4 คูณแถวที่ 1 บวกด้วย 2 คูณแถวที่ 2 แล้วนำมาบวกกับแถวที่ 0 หรือแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จะได้การคำนวณรอบที่ $0'$ ซึ่งเป็นรูปแบบบัญญัติที่สามารถหาผลเฉลยเริ่มต้นได้ โดยที่ x_2 และ x_3 เป็นตัวแปรพื้นฐาน ขณะที่ตัวแปร x_1 และ e_2 เป็นตัวแปรจร โดยที่ $z'' = +90$ เนื่องจากค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์สามารถเพิ่มค่าได้อีก ถ้านำ x_1 หรือ e_1 เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐาน นำ e_2 เป็นตัวแปรเข้าได้ผลเฉลยในรอบที่ 1 คือ $x_2 = 60$ และ

$e_2 = 60$ โดยที่ $z = 210$ ในรอบที่ 1 พบว่า การเพิ่มค่าตัวแปร x_1 หรือ x_3 นั้นจะไม่ทำให้ z มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น ผลเฉลยในการคำนวณรอบที่ 1 เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตารางที่ 3.20 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	a_1	a_2	e_2	
0	z'	1	0	0	0	–1	–1	0	0
	a_1	0	2	1	3	1	0	0	60
	a_2	0	3	3	5	0	1	–1	120
0′	z'	1	5	4	8	0	0	1	180
	a_1	0	2	1	**3**	1	0	0	60
	a_2	0	3	3	5	0	1	–1	120
1	z'	1	–1/3	4/3	0	–8/3	0	1	20
	x_3	0	2/3	1/3	1	1/3	0	0	20
	a_2	0	–1/3	**4/3**	0	–5/3	1	–1	20
2	z'	1	0	0	0	–1	–1	0	0
	x_3	0	3/4	0	1	3/4	–1/4	1/4	15
	x_2	0	–1/4	1	0	–5/4	3/4	–3/4	15

ตารางที่ 3.21 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	e_2	
0	z	1	–3	–2	–4	0	0
	x_3	0	3/4	0	1	1/4	15
	x_2	0	–1/4	1	0	–3/4	15
0′	z	1	–1/2	0	0	–1/2	–90
	x_3	0	3/4	0	1	**1/4**	15
	x_2	0	–1/4	1	0	–3/4	15
1	z	1	1	0	2	0	120
	e_2	0	3	0	4	1	60
	x_2	0	2	1	3	0	60

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยที่ได้จากเฟสที่ 1 อาจแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะ คือ

1. ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z') ในเฟสที่ 1 มีเท่ากับศูนย์ และตัวแปรเทียมทุกตัวไม่เป็นตัวแปรพื้นฐาน ในกรณีนี้เราจะสามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดได้ในเฟสที่ 2

2. ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z') ในเฟสที่ 1 มีค่าเท่ากับศูนย์ แต่มีตัวแปรเทียมบางตัวเป็นตัวแปรพื้นฐาน ในกรณีนี้เราสามารถตัดสดมภ์ที่มีตัวแปรเทียมที่ไม่เป็นตัวแปรพื้นฐาน

ออกไป และตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 เป็นลบออกไป ในตารางสุดท้ายของเฟสที่ 1 ก่อนที่จะทำการหาค่าในเฟสที่ 2

3. ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z') ในเฟสที่ 1 มีค่ามากกว่าศูนย์ ในกรณีนี้แสดงว่าผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้วิธีทู–เฟส

ค่าต่ำสุด $z = 3x_1 + 2x_2$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

จัดรูปให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

ค่าสูงสุด $z' = -z = -3x_1 - 2x_2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - e_1 + a_1 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + a_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_3, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

เฟสที่ 1 มีวัตถุประสงค์คือ $z'' = a_1 + a_2$ หรือ $z'' - a_1 - a_2 = 0$ จัดรูปให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติ จะได้ $z + 5x_1 + 3x_2 - s_1 = 10$

ตารางที่ 3.22 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z''	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	e_1	s_3	a_1	a_2	
0	z''	1	0	0	0	0	–1	–1	0
	a_1	0	2	1	–1	0	1	0	6
	a_2	0	3	2	0	0	0	1	4
	s_3	0	1	1	0	1	0	0	8
0′	z''	1	5	3	–1	0	0	0	10
	a_1	0	2	1	–1	0	1	0	6
	a_2	0	**3**	2	0	0	0	1	4
	s_3	0	1	1	0	1	0	0	8
1	z''	1	0	–1/3	–1	0	0	–5/3	10/3
	a_1	0	0	–1/3	–1	0	1	–2/3	10/3
	x_1	0	1	2/3	0	0	0	1/3	4/3
	s_3	0	0	1/3	0	1	0	–1/3	20/3

จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่ามากกว่าศูนย์ แสดงว่าปัญหานี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

ตัวอย่างที่ 3.20 จงใช้วิธีทู–เฟส เพื่อแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าต่ำสุด} \quad & z = -40x_1 - 0x_2 - 7x_3 - 14x_4 \\
\text{ข้อจำกัด} \quad & x_1 + 2x_3 = 0 \\
& -2x_1 - 2x_3 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\
& x_2 + 2x_3 - x_4 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

จากตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ สามารถเขียนรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด} \quad & z' = (-z) = 40x_1 + 0x_2 + 7x_3 + 14x_4 \\
\text{ข้อจำกัด} \quad & \\
& x_1 + 2x_3 + a_1 = 0 \\
& -2x_1 - 2x_3 + a_2 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + a_3 = 3 \\
& x_2 + 2x_3 - x_4 + s_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, a_1, a_2, a_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

เฟสที่ 1 วัตถุประสงค์คือ

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าต่ำสุด} \quad & z'' - a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\
\text{ข้อจำกัด} \quad & x_1 + 2x_3 + a_1 = 0 \\
& -2x_1 - 2x_3 + a_2 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + a_3 = 3 \\
& x_2 + 2x_3 - x_4 + s_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, a_1, a_2, a_3 \ge 0
\end{aligned} \qquad (67)
$$

ในการคำนวณด้วยซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางที่มีตัวแปรพื้นฐานคือ x_2 และ x_2 ดังนั้นจึงต้องจัดรูปแบบของตัวแบบให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติ ซึ่งฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานเท่ากับศูนย์ โดยนำข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ไปบวกในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่คือ

$$z'' - 0x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0s_4 + 0a_1 + 0a_2 + 0a_2 = 3$$

นำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่าง ๆ ใส่ในตารางที่ 3.23 และคำนวณหาผลเฉลยในเฟสที่ 1 ซึ่งพบว่า ตารางสุดท้ายในเฟสที่ 2 เกิดขึ้น เมื่อทำการคำนวณ 1 รอบ ได้ผลเฉลยคือ $x_2 = 3$ $s_4 = 1$ $a_1 = a_2 = x_1 = x_3 = x_4 = 0$ โดย $z'' = 0$ ซึ่ง a_1 และ a_2 ยังเป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่ เราจึงตัดเฉพาะตัวแปรเทียม a_3 ออกจากตารางในเฟสที่ 2 นอกจากนี้ ยังพบว่าตัวแปร x_1 มีสัมประสิทธิ์เป็นลบ แสดงว่า แถวที่ 0 ในตารางสุดท้ายนี้คือ $z'' = x_1$ แสดงว่า x_1 ไม่สามารถมีค่าเป็นบวกได้ในเฟสที่ 2 เลย เราจึงตัด x_1 ออกจากตาราง ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ

ค่าสูงสุด $z' = -7x_3 - 14x_4$

จากนั้นหาผลเฉลยในเฟสที่ 2 ดังตารางที่ 3.24 ได้ผลเฉลยคือ $x_2 = 7/2$ $x_4 = 1/2$ $x_1 = x_3 = s_4 = 0$ และ $a_1 = a_2 = 0$ โดยที่ $z = (-z') = 7$

ตารางที่ 3.23 การหาผลเฉลยเฟสที่ 1

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z''	สัมประสิทธิ์ของ								ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_4	a_1	a_2	a_3	
0	z''	1	0	1	1	–1	0	0	0	0	3
	a_1	0	1	0	2	0	0	1	0	0	0
	a_2	0	–2	0	–2	0	0	0	1	0	0
	a_3	0	1	**1**	1	–1	0	0	0	1	3
	s_1	0	0	1	2	–1	1	0	0	0	4
1	z''	1	–1	0	0	0	0	0	0	–1	0
	a_1	0	1	0	2	0	0	1	0	0	0
	a_2	0	–2	0	–2	0	0	0	1	0	0
	x_2	0	1	1	1	–1	0	0	0	1	3
	s_1	0	–1	0	1	2	1	0	0	–1	1

ตารางที่ 3.24 การหาผลเฉลยในเฟสที่ 2

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z'	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_2	x_3	x_4	s_4	a_1	a_2	
0	z'	1	0	7	14	0	0	0	0
	a_1	0	0	2	0	0	1	0	0
	a_2	0	0	–2	0	0	0	1	0
	x_2	0	1	1	–1	0	0	0	3
	s_1	0	0	1	**2**	1	0	0	1
1	z'	1	0	0	0	–7	0	0	–7
	a_1	0	0	2	0	0	1	0	0
	a_2	0	0	0	0	0	0	1	0
	x_2	0	1	3/2	0	1/2	0	0	7/2
	x_4	0	0	1/2	1	1/2	0	0	1/2

จากตัวอย่างที่ 3.20 จะเห็นว่าถ้าตัวแปรเทียมที่เป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่ในตารางสุดท้ายของเฟสที่ 1 โดยที่ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของเฟสที่ 1 เท่ากับ 0 แล้ว การนำแถวของตัวแปรเทียมนี้ไปคำนวณในเฟสที่ 2 จะไม่ทำให้ตัวแปรอื่น ๆ เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานในแถวนั้นได้ ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยใหม่อันเนื่องมาจากแถวของตัวแปรเทียมได้ เพื่อให้เกิดความกะทัดรัดในการคำนวณ ในกรณีนี้เราอาจตัดแถวของตัวแปรเทียมออกในการคำนวณเฟสที่ 2 ได้

3.8.2 วิธี บิก–เอ็ม

วิธี บิก–เอ็มและวิธีทู–เฟส ต่างก็เป็นเทคนิคที่นำมาใช้ในกรณีที่มีตัวแปรเทียมอยู่ในตัวแบบของปัญหา ซึ่งทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เริ่มต้นได้ในทันที เนื่องจากตัวแปรเทียมไม่ได้เป็นตัวแปรของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น แต่เป็นตัวแปรที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น วิธี บิก–เอ็มจึงได้ให้ค่าปรับโทษมาถ่วงน้ำหนัก (Penalty) เพื่อพยายามผลักดันให้ตัวแปรเทียมซึ่งเป็นตัวแปรพื้นฐานออกไปเป็นตัวแปรไม่พื้นฐานให้เร็วที่สุด โดยการกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมมีค่าสอดคล้องในทิศทางที่จะทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าลดลงเร็วที่สุดสำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด และทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นเร็วที่สุดสำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.21 จากตัวอย่าง 3.18 จงหาผลเฉลยของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยวิธีบิก–เอ็ม

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด}\quad z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\
3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 120 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

เนื่องจากข้อจำกัดที่ 1 เป็นสมการ ดังนั้น จึงควรใส่ตัวแปรเทียม (a_1) ทางด้านซ้ายของสมการ สำหรับข้อจำกัดที่ 2 เป็นอสมการที่มีเครื่องหมาย “$\geq$” เราจะบวกตัวแปรเทียม (a_2) และลบออกด้วยตัวแปรส่วนเกิน (e_2) ทางด้านซ้ายของสมการนี้ เนื่องจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันสูงสุด จึงนำ Ma_1 และ Ma_2 ลบออกจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (68) โดย M เป็นค่าปรับโทษ M เป็นตัวเลขซึ่งมีค่ามาก ๆ ($M >> 0$) ดังนั้น จะได้รูปแบบมาตรฐานดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด}\quad z = +3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - Ma_1 - Ma_2 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + a_1 &= 60 \\
3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + a_2 - e_2 &= 120 \qquad (68) \\
x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, e_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ให้ผลเฉลยเริ่มต้น คือ $(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, e_2) = (0, 0, 0, 60, 120, 0)$ นั่นคือ a_1 และ a_2 เป็นตัวแปรพื้นฐาน ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งสองนี้ เท่ากับศูนย์ ดังนั้น จึงต้องปรับให้สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 ให้มีค่าเป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถว จะได้

แถวที่ $0'$ = แถวที่ $0 - M$ (แถวที่ 1) $-M$ (แถวที่ 2)

$$\begin{aligned}
z - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + Ma_1 + Ma_2 &= 0 \\
-2Mx_1 - Mx_2 - 3Mx_3 - Ma_1 &= -60M \\
-3Mx_1 - 3Mx_2 - 5Mx_3 - Ma_2 + Me_2 &= -120M \\
z + (-5M - 3)x_1 + (-4M - 2)x_2 + (-8M - 4)x_3 + Me_2 &= -180M
\end{aligned}$$

ดังนั้น การทำซ้ำครั้งที่ 0 แสดงดังตารางที่ 3.25 ผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหานี้คือ $x_1 = x_3 = 0$ $x_2 = 60$ และ $e_2 = 60$ โดยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 120

ตารางที่ 3.25 ตารางซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	
z	1	–5M–3	–4M–2	–8M–4	M	0	0	–180M
a_1	0	2	1	**3**	0	1	0	60
a_2	0	3	3	5	–1	0	1	120
z	1	$\frac{1}{3}M - \frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}M - \frac{2}{3}$	0	M	$\frac{8}{3}M + \frac{4}{3}$	0	–20 M+80
x_3	0	2/3	1/3	1	0	1/3	0	20
a_2	0	–1/3	**4/3**	0	–1	–5/3	1	20
z	1	–1/2	0	0	–1/2	$M + \frac{1}{2}$	$M + \frac{1}{2}$	90
x_3	0	3/4	0	1	**1/4**	3/4	–1/4	15
x_2	0	–1/4	1	0	–3/4	–5/4	3/4	15
z	1	1	0	2	0	M+2	M	120
e_2	0	3	0	4	1	3	–1	60
x_2	0	2	1	3	0	1	0	60

ตัวอย่างที่ 3.22 จากตัวอย่าง 3.19 จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยวิธีบิก–เอ็ม

ค่าสูงสุด $z' = (-z) = 3x_1 + x_2 - Ma_1 - Ma_2$ หรือ

$$\begin{aligned}
z' - 3x_1 - x_2 + Ma_1 + Ma_2 &= 0 \\
2x_1 + x_2 - e_1 + a_1 &= 6 \qquad (70)
\end{aligned}$$

$$3x_1 + 2x_2 + a_2 = 4$$
$$x_1 + x_2 + s_3 = 8$$

เนื่องจากในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ a_1 และ a_2 ซึ่งเป็นตัวแปรพื้นฐานยังคงมีสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 หรือแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ –M อยู่ ต้องทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรดังกล่าวให้มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยนำ M คูณแถวที่ 1 และ 2 แล้วนำมาลบออกจากแถวที่ 0 จะได้

$$z' + (-5M-3)x_1 + (-3M-1) - MS_1 = -10M$$

จากนั้นทำการหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางดังตารางที่ 3.26 พบว่า ผลเฉลยที่ได้มีค่า a_1 มากกว่าศูนย์ ทำให้ผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

ตารางที่ 3.26 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z′	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	e_1	s_3	a_1	a_3	
0	z′	1	–5M–3	–3M+2	–M	0	0	0	–10M
	a_1	0	2	1	–1	0	1	0	6
	a_3	0	**3**	2	0	0	0	1	4
	s_3	0	1	1	0	1	0	0	8
1	z	1	0	$-\frac{1}{3}M$	–M	0	0	$-\frac{5}{3}M+1$	$-\frac{10}{3}M+4$
	a_1	0	0	–1/3	–1	0	1	–2/3	10/3
	x_1	0	1	2/3	0	0	0	1/3	4/3
	s_3	0	0	1/3	0	1	0	–1/3	20/3

สรุป การประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีบิก–เอ็ม ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาจะต้องรวมค่าของตัวแปรเทียมไว้ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์โดยใช้หลักการดังนี้

ให้ $P(M)$ เป็นปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีข้อจำกัดเหมือนกับปัญหาเดิม (P) แต่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา $P(M)$ ประกอบด้วย ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิม (P) และผลรวมของผลคูณของ M กับตัวแปรเทียมในกรณีปัญหาค่าสูงสุด ให้ z เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา P และ z′ เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา $P(M)$ คือ $z' = z + Ma_1 + Ma_2 + \ldots + Ma_K$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_K$ เป็นตัวแปรเทียม k โดย k = 1, 2, …, K

ในทำนองเดียวกัน สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา $P(M)$ คือ z′ ประกอบด้วย ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดิม(z) และลบด้วยผลคูณของ M กับตัวแปรเทียม ดังนั้น

$z' = z - Ma_1 - Ma_2 - \ldots - Ma_K$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_K$ เป็นตัวแปรเทียม k โดย k = 1, 2, …, K

ผลเฉลยจากการประมวลผลด้วยวิธีบิก–เอ็ม แบ่งเป็น 4 ลักษณะ (Bazaraa, 1997) ดังนี้

(1) ถ้าปัญหา $P(M)$ สามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียวได้ และไม่มีตัวแปรเทียมใด ๆ เป็นตัวแปรมูลฐาน แล้วปัญหา P จะเป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา $P(M)$ จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหา P ด้วย

(2) ถ้าปัญหา $P(M)$ สามารถหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียวได้ แต่มีตัวแปรเทียมบางตัวเป็นตัวแปรมูลฐานที่มีค่าไม่เท่ากับ 0 แล้วปัญหา P จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

(3) ถ้าปัญหา $P(M)$ เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต และไม่มีตัวแปรเทียมใดเป็นตัวแปรมูลฐาน แล้วปัญหา P จะเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

(4) ถ้าปัญหา $P(M)$ เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต แต่มีตัวแปรเทียมบางตัวเป็นตัวแปรมูลฐานที่มีค่าไม่เท่ากับ 0 แล้วปัญหา P จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

3.9 การแก้ปัญหาสภาพซ้อนสถานะ

การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็กซ์ บางครั้งอาจเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า สภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ดังที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 3.7.6 หากทำการประมวลผลต่อไปจะทำให้เกิดการวนซ้ำ ไปเรื่อย ๆ จนได้ผลเฉลยกลับมาที่เดิม ดังตัวอย่างที่ 3.23 ทำให้ไม่สามารถทราบว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดมีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 3.23 ปัญหาการโปแกรมเชิงเส้น (Beale, 1955)

ค่าต่ำสุด $z \quad -3/4x_4 + 20x_5 - 1/2x_6 - 6x_7$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad & -1/4x_4 - 8x_5 - 6x_6 + 9x_7 = 0 \\
x_2 \quad & +1/4x_4 - 12x_5 - 1/2x_6 + 3x_7 = 0 \\
x_3 \quad & +x_6 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 3.27 ตารางซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของตัวแปร							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	1	0	0	0	3/4	–20	1/2	–6	0
x_1	0	1	0	0	**1/4**	–8	–1	9	0
x_2	0	0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	–3	0	0	0	4	72	–33	0
x_4	0	4	0	0	1	–32	–4	36	0
x_2	0	–2	1	0	0	**4**	3/2	–15	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	–1	–1	0	0	0	2	–18	0
x_4	0	–12	8	0	1	0	**8**	–84	0
x_5	0	–1/2	1/4	0	0	1	3/8	–15/4	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	2	–3	0	–1/4	0	0	3	0
x_6	0	–3/2	1	0	1/8	0	1	–21/2	0
x_5	0	1/16	–1/8	0	–3/64	1	0	**3/16**	0
x_3	0	3/2	–1	1	–1/8	0	1	21/2	1
z	1	1	–1	0	1/2	–16	0	0	0
x_6	0	**2**	–6	0	–5/2	56	1	0	0
x_7	0	1/3	–2/3	0	–1/4	16/3	0	1	0

ตารางที่ 3.27 (ต่อ)

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของตัวแปร							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	–2	6	1	5/2	–56	0	0	1
z	1	0	2	0	7/4	–44	–1/2	0	0
x_1	0	1	–3	0	–5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	0	**1/3**	0	1/6	–4	–1/6	1	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	0	0	0	3/4	–20	1/2	–6	0
x_1	0	1	0	0	1/4	–8	–1	9	0
x_2	0	0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

จากตารางข้างต้นจะเห็นว่าตารางเริ่มต้น และตารางสุดท้ายนั้นเหมือนกัน หากทำการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์ ต่อไปอีกผลเฉลยก็จะซ้ำกับตารางข้างต้นต่อไปอีก ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การวนซ้ำ

เมื่อเกิดปรากฏการณ์การวนซ้ำ วิธีการซิมเพล็กซ์จะหยุดการทำงาน ผลเฉลยที่ได้อาจเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด หรืออาจเป็นปัญหาไม่มีขอบเขต อย่างไรก็ตาม ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้น เราสามารถเปลี่ยนเซตของตัวแปรมูลฐาน และเซตของตัวแปรจรได้ แต่ผลเฉลยที่ได้ยังคงเป็นผลเฉลยเดิม

ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นเมื่อค่าทางขวามือมีของแถวใดแถวหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ขณะที่ขั้นตอนนี้จะวนซ้ำเรื่อย ๆ วิธีในการแก้ปัญหาทำได้ 2 วิธี (Bazaraa, 1997)

(1) กฎเลกซิโคกราฟิก (Lexicographic Rule)

(2) กฎของแบลนด์ (Bland's Rule)

3.9.1 กฎเลกซิโคกราฟิก

ให้ตัวแปรจร x_k ซึ่งถูกเลือกให้เป็นตัวแปรเข้าและ x_{b_r} เป็นตัวแปรมูลฐานในแถวที่ r ซึ่งจะถูกเลือกเป็นตัวแปรออก และ y_{ik} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_k ในแถวที่ i

ขั้นตอนที่ 1 : กำหนดให้ $I_0 = \{r \text{ โดยที่ } \frac{b'_r}{y_{rk}} = \underset{1 \le i \le m}{\text{Min}} \left\{ \frac{b'_i}{y_{ik}} \text{ **โดยที่** } y_{ik} > 0 \right\} \}$

ถ้า I_0 มีจำนวนสมาชิกเพียง 1 ตัว กล่าวคือ $I_0 = \{r\}$ แล้ว x_{b_r} จะเป็นตัวแปรออก มิฉะนั้นพิจารณาขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนดให้ $I_1 = \left\{ r \text{ โดยที่ } \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \underset{i \in I_0}{\text{Min}} \left\{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}} \right\} \right\}$

ถ้า I_1 มีสมาชิกเพียง 1 ตัว กล่าวคือ $I_0 = \{r\}$ แล้ว x_{b_r} จะเป็นตัวแปรออก มิฉะนั้นพิจารณาขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 3 : กำหนดให้ $I_j = \left\{ r \text{ โดยที่ } \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \underset{i \in I_{j-1}}{\text{Min}} \left\{ \frac{y_{ij}}{y_{ik}} \right\} \right.$

ถ้า I_j มีสมาชิกเพียง 1 ตัว กล่าวคือ $I_j = \{r\}$ แล้ว x_{b_r} จะเป็นตัวแปรออก มิฉะนั้นพิจารณาขั้นตอนที่ 3 อีกครั้ง โดย $j = j + 1$ และ $j \le m$

ตัวอย่างที่ 3.24 จงใช้กฎเลกซิโคกราฟฟี่ เพื่อหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

จากตารางที่ 3.28 x_2 เป็นตัวแปรเข้า เมื่อหาตัวแปรออกโดยพิจารณาอัตราส่วนต่ำสุด จะพบว่าในแถวที่ 1 และ 2 มีอัตราส่วนต่ำสุดทั้งสองแถว ดังนั้น

$$\min \left\{ \frac{b'_1}{y_{12}}, \frac{b'_2}{y_{22}}, \frac{b'_3}{y_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{1}, \frac{6}{3} \right\} = 1 \quad \text{ดังนั้น} \quad I_0 = \{1, 2\}$$

เนื่องจาก I_0 มีสมาชิกไม่ใช่ตัวเดียว จึงพิจารณา I_1

$$I_1 = \left\{ 2 \text{ โดยที่ } \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{-1}{1} \right\} = -1 \right\}$$

เนื่องจาก I_1 มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ดังนั้น s_2 เป็นตัวแปรออก

ในการทำซ้ำครั้งที่ 2 ตัวแปรเข้าคือ x_1 และตัวแปรออกคือ s_1 เนื่องจาก $I_0 = \{1\}$ สำหรับการทำซ้ำครั้งที่ 3 ตัวแปรเข้าคือ s_2 เนื่องจาก $I_0 = \{2\}$ x_2 จึงเป็นตัวแปรออก ในการ

ทำซ้ำครั้งที่ 3 นี้ เป็นตารางที่เหมาะสมที่สุด และผลเฉลยคือ $x_1 = 4$ $s_2 = 5$ $s_3 = 2$ และ $x_2 = x_3 = s_1 = 0$ โดยที่ $z = 4$

ตารางที่ 3.28 ตารางซิมเพล็กซ์

รอบที่	ตัวแปรมูลฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
0	z	1	–1	–2	–1	0	0	0	0
	s_1	0	1	4	6	1	0	0	4
	s_2	0	–1	**1**	4	0	1	0	1
	s_3	0	1	3	1	0	0	1	6
1	z	1	–3	0	6	0	2	0	2
	s_1	0	**5**	0	–10	1	–4	0	0
	x_2	0	–1	1	4	0	1	0	1
	s_3	0	4	0	–11	0	–3	1	3
2	z	1	0	0	1	3/5	–2/5	0	2
	x_1	0	1	0	–2	1/5	–4/5	0	0
	x_2	0	0	1	2	1/5	**1/5**	0	1
	s_3	0	0	0	–3	–4/5	1/5	1	3
3	z	1	0	2	5	1	0	0	4
	x_1	0	1	4	6	1	0	0	4
	s_2	0	0	5	10	1	1	0	5
	s_3	0	0	–1	–5	–1	0	1	2

3.9.2 กฎของแบลนด์

กฎของแบลนด์นี้ เป็นกฎที่สามารถใช้ในการป้องกันการวนซ้ำ กฎนี้สร้างโดยโรเบิร์ต แบลนด์ (Robert Bland) กฎของแบลนด์เป็นกฎง่าย ๆ บางคนใช้กฎนี้ในการเลือกทั้งตัวแปรเข้าและตัวแปรออก ขั้นตอนของกฎนี้มีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำตัวแปรมาเรียงลำดับตามดัชนี เช่น $\{x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2\}$ เป็นต้น โดยทั่วไปมักจะเรียงลำดับตามตาราง

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาตัวแปรจรของผลเฉลยใด ๆ เลือกตัวแปรจรที่มีดัชนีต่ำสุดให้ตัวแปรนี้เป็นตัวแปรออก

ตัวอย่างที่ 3.25 จากตัวอย่างที่ 3.24 จงใช้กฎของแบลนด์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหานี้ สามารถแสดงปัญหาในรูปตารางดังตารางที่ 3.29

พิจารณาตารางเริ่มต้น (รอบที่ 0) ของตารางที่ 3.29 พบว่า x_1 เป็นตัวแปรเข้า ส่วนตัวแปรออกนั้น พิจารณาลำดับของตัวแปรคือ $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3$ ดังนั้น ตัวแปร s_1 จึงเป็นตัวแปรออก จากการคำนวณรอบที่ 1 พบว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้ว โดยที่ $x_1 = 4$ $s_2 = 5$ $s_3 = 2$ $x_2 = x_3 = s_1 = 0$ และ $z = 4$

ตารางที่ 3.29 ตารางซิมเพล็กซ์ที่ใช้กฎของแบลนด์

รอบที่	ตัวแปรมูลฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
0	z	1	–1	–2	–1	0	0	0	0
	s_1	0	1	**4**	6	1	0	0	4
	s_2	0	–1	1	4	0	1	0	1
	s_3	0	1	3	1	0	0	1	6
1	z	1	0	2	5	1	0	0	4
	x_1	0	1	4	6	1	0	0	4
	s_2	0	0	5	10	1	1	0	5
	s_3	0	0	–1	–5	–1	0	1	2

กฎทั้ง 2 นี้ มิได้ประกันได้ว่าเมื่อใช้กฎนี้แล้วจะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด แต่กฎทั้งสองนี้ประกันได้ว่า จำนวนรอบการคำนวณจะไม่เป็นอนันต์ (Infinity) แต่กฎทั้งสองนี้ไม่ได้คำนึงถึงเวลาในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ ในบางกรณีจำนวนรอบในการคำนวณอาจเพิ่มขึ้นอย่างเอกโปรเนนเชียลตามขนาดของปัญหา ซึ่งขนาดของปัญหาในที่นี้พิจารณาจากจำนวนตัวแปรและจำนวนข้อจำกัดของปัญหา ปรากฏการณ์ที่จำนวนรอบในการคำนวณที่เพิ่มขึ้นอย่างมากมายนี้ เรียกว่าสตอลลิ่ง (Stalling) อย่างไรก็ตาม กฎของแบลนด์ไม่สามารถใช้ได้ในกรณีที่ปัญหาเกิดปรากฏการณ์วนซ้ำเป็นรอบไม่มีที่สิ้นสุด (Dantzig and Thapa, 1997).

3.10 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วย Excel Solver

หลังจากสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการประมวลผลตัวแบบเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ในทางปฏิบัติเราสามารถใช้ ซอฟแวร์ต่าง ๆ ช่วยในการประมวลผล ในหัวข้อนี้ขอแนะนำวิธีการใช้ Microsoft Excel Solver เพื่อประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น Standard Excel Solver ที่มาพร้อมกับ Microsoft Excel จะสามารถใช้ได้กับจำนวนตัวแปรตัดสินใจไม่เกิน 200 ตัวแปร และ 100 ข้อจำกัด หากปัญหามีขนาดใหญ่กว่านั้นจะต้องใช้โปรแกรม Premium Solver ของบริษัท Frontline Systems สามารถดูรายละเอียดได้

จากเอกสารของ Frontline (2008) โดยโปรแกรม Premium Solver สามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรได้ถึง 2,000 ตัวแปร และ 1,000 ข้อจำกัด ถ้าปัญหาใหญ่กว่านี้ก็สามารถใช้ Premium Solver Platform ที่สามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรได้ถึง 8,000 ตัวแปร และ 8,000 ข้อจำกัด Taha (1997) Jensen (2004) และ Baker (2006) ได้แสดงวิธีการใช้ Microsoft Excel Solver ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น สำหรับในที่นี้ขอใช้ตัวอย่างการโปรแกรมเชิงเส้นง่าย เพื่อแสดงการวิธีการประมวลผลด้วยโปรแกรมนี้

ตัวอย่างที่ 3.26 ปัญหาการวางแผนการผลิตสินค้า 2 ชนิดคือ A และ B ของบริษัทสินค้าสยามจำกัด โดยมีข้อจำกัดด้านวัตถุดิบและปริมาณความต้องการดังตัวแบบ (145) โดยมีวัตถุประสงค์คือต้องการกำไรสูงสุด

$$
\begin{aligned}
&\text{ค่าสูงสุด } z = 5x_1 + 3x_2 \\
&\quad 3x_1 + 4x_2 \le 24 \qquad (\text{ วัตถุดิบชนิดที่ 1}) \qquad (145)\\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 8 \qquad (\text{ วัตถุดิบชนิดที่ 2})\\
&\quad x_1 \le 3 \qquad (\text{ ปริมาณผลิตสินค้า A })\\
&\quad x_2 \le 5 \qquad (\text{ ปริมาณผลิตสินค้า B })\\
&\quad x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

โดยที่ x_1 และ x_2 แทนปริมาณการผลิตสินค้าชนิด A และ B

ตามที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ว่าส่วนประกอบที่สำคัญสามส่วน คือ ตัวแปรตัดสินใจ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และข้อจำกัด ในการสร้างและแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วย Excel Solver ก็มีส่วนประกอบสามส่วน คือ เซลล์เพื่อเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตัดสินใจ (Changing cell) เซลล์เป้าหมาย (Target cell) และ ข้อจำกัด (Constraint) ในทางปฏิบัติไม่มีข้อจำกัดหรือเงื่อนไขในการวางผังของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ว่าจะต้องวางเซลล์เป้าหมาย ข้อจำกัดหรือเซลล์ที่เปลี่ยนแปลงไว้ตรงตำแหน่งเซลล์ใด ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผู้สร้างโปรแกรมว่ามีความชอบหรือความชำนาญอย่างไร อย่างไรก็ตาม เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการอธิบาย เราวางผังปัญหาต่าง ๆ ในลักษณะเดียวกัน ซึ่งจะเหมาะสมสำหรับผู้ฝึกหัดเขียนโปรแกรม

ข้อแนะนำในการวางผังตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เราควรแยกสดมภ์เพื่อแสดงว่าพารามิเตอร์ของแต่ละตัวแปร ซึ่งพารามิเตอร์ในที่นี้คือค่าผลกำไรต่อหน่วย สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในชุดอสมการข้อจำกัด ขั้นตอนในแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วย Excel Solver มีดังนี้

(1) เริ่มจากการสร้างเซลล์เพื่อเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตัดสินใจ จากรูปที่ 3.7 จะให้เซลล์ B3 แทนตัวแปรตัดสินใจ x_1 และ เซล C3 แทน x_2

(2) สร้างเซลล์วัตถุประสงค์ ซึ่งจะเก็บค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $z = 5x_1 + 3x_2$ ในตัวอย่างนี้อยู่ในเซลล์ D4 สูตร SUMPRODUCT(B4:C4, B3:C3) เป็นฟังก์ชันผลรวมของผลคูณระหว่าง B4 ถึง C4 กับ B3 ถึง C3 กล่าวคือ เซลล์ $D4 = B4 \times B3 + C4 \times C3$

(3) สร้างข้อจำกัด ที่แสดงชุดของสมการหรืออสมการข้อจำกัด โดยค่าทางด้านซ้ายมือของชุดสมการหรืออสมการจะอยู่ในสดมภ์ D ตั้งแต่เซลล์ D6 ถึง D9 ค่าทางขวามือของชุดสมจากหรืออสมการอยู่ในสดมภ์ F ตั้งแต่เซลล์ F6 ถึง F9 ซึ่งสูตรการคำนวณของ Excel แสดงดังตารางที่ 3.27

Open In Contribute | Publish To Website | Post To Blog

J14 fx

	A	B	C	D	E	F
1	Example 3.1			ข้างซ้ายของอสมการ		ข้างขวาของอสมการ
2	ชื่อตัวแปรตัดสินใจ	x1	x2			
3	จำนวนหน่วยผลิต	0	0			
4	กำไร	5	3	0		
5	**ข้อจำกัด:**					
6	วัตถุดิบชนิดที่ 1	3	4	0	<=	24
7	วัตถุดิบชนิดที่ 2	2	1	0	<=	8
8	ปริมาณผลิตชนิดที่ A	1		0	<=	3
9	ปริมาณผลิตชนิดที่ B		1	0	<=	5

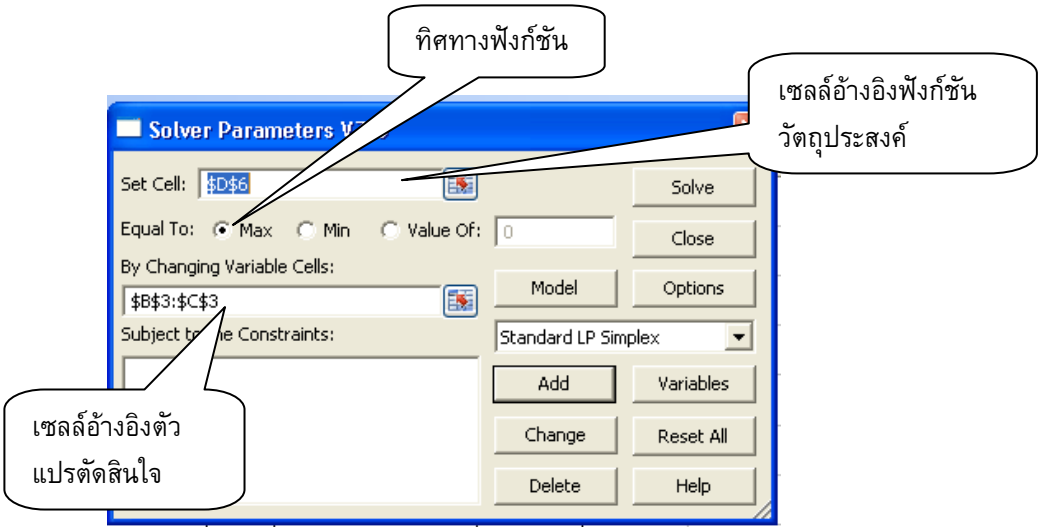
รูปที่ 3.7 การประมวลผลด้วย Excel Solver

ตารางที่ 3.30 สูตรที่ใช้ใน Excel

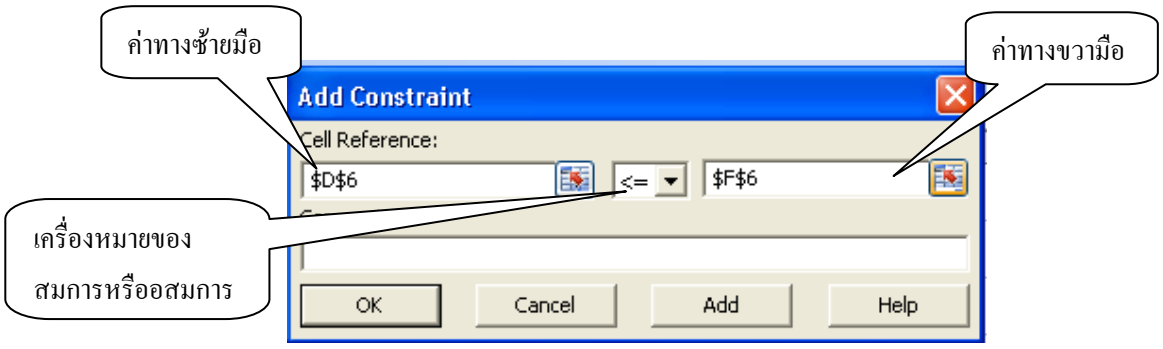
	เซลล์	สูตร	
ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์	D4	=SUMPRODUCT(B4:C4,B3:C3)	
วัตถุดิบชนิดที่ 1	D6	=SUMPRODUCT(B6:C6,B3:C3)	
วัตถุดิบชนิดที่ 2	D7	=SUMPRODUCT(B7:C7,B3:C3)	
ปริมาณผลิตสินค้า A	D8	=SUMPRODUCT(B8:C8,$B$3:$C$3)	
ปริมาณผลิตสินค้า B	D9	=SUMPRODUCT(B9:C9,$B$3:$C$3)	

(4) ใส่ข้อมูลใน Solver เพื่อประมวลผล โดยเลือก Tools ➡ Solver จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 3.8 ให้กำหนดข้อมูลเกี่ยวกับ ตัวแปรตัดสินใจ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดต่าง ๆ ดังนี้

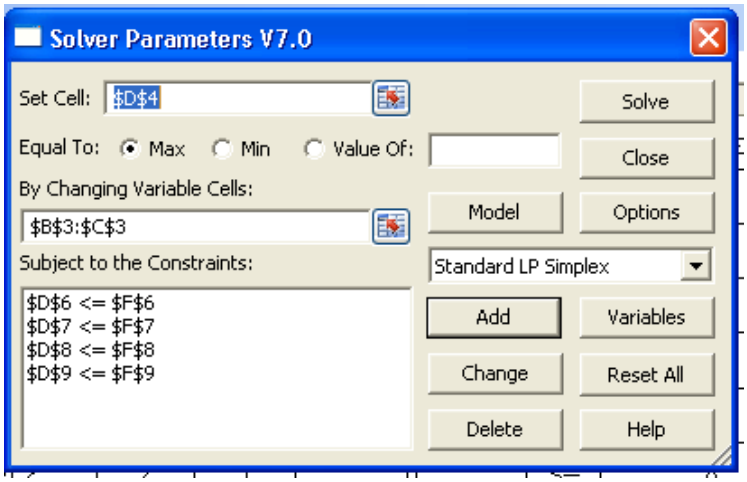
1. กำหนดเซลล์เป้าหมายลงในช่อง Set Cell ในตัวอย่างนี้เลือกเซลล์ D4 กำหนดทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในเซลล์ Equal To เลือก Max Max เมื่อฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าสูงสุด หรือเลือก Min เมื่อฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าต่ำสุด
2. กำหนดเซลล์เพื่อเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตัดสินใจ โดยระบุเซลล์ที่จะบรรจุค่าตัวแปรตัดสินใจไว้ในช่อง By Changing Variable Cells ในตัวอย่างนี้เลือกเซลล์ B3 และ C3 ดังรูปที่ 3.8
3. การกำหนดข้อจำกัด ให้คลิก Add จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 3.9 เพื่อใส่ข้อจำกัดทางซ้ายมือ ขวามือ และ เครื่องหมายของสมการหรืออสมการ แล้วคลิก OK ในตัวอย่างนี้ ค่าทางซ้ายมือคือ เซลล์ D6 ค่าทางขวามือคือ เซลล์ F6 เครื่องหมายอสมการเป็น <= แล้วคลิก Add เพื่อใส่ข้อจำกัดอื่น ๆ ไปจนครบทุกข้อจำกัด แล้วคลิก OK จะปรากฏหน้าจอ ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.8 การเซลล์เป้าหมายและเซลล์เพื่อการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตัดสินใจ

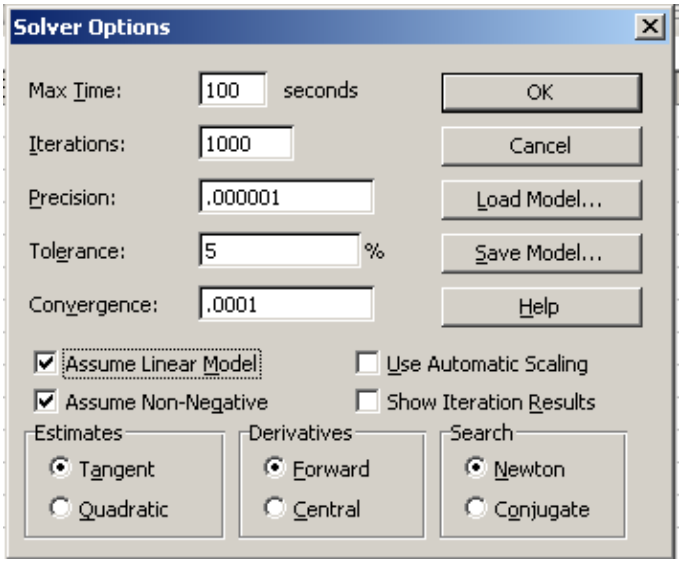


รูปที่ 3.9 การใส่สมการหรืออสมการข้อจำกัด

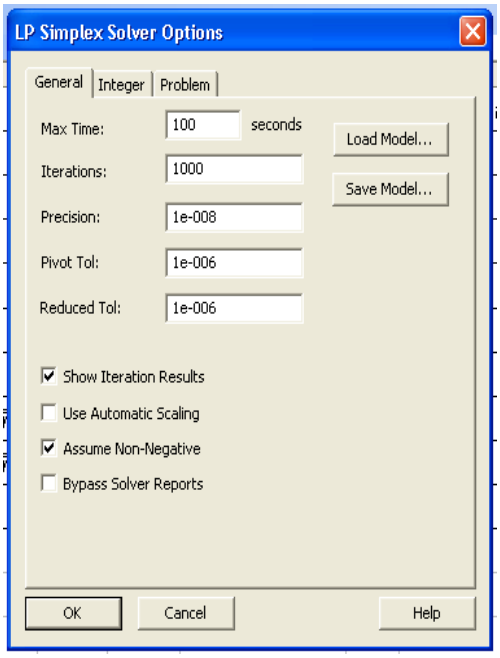


รูปที่ 3.10 การใส่ค่าในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นทั้งหมด

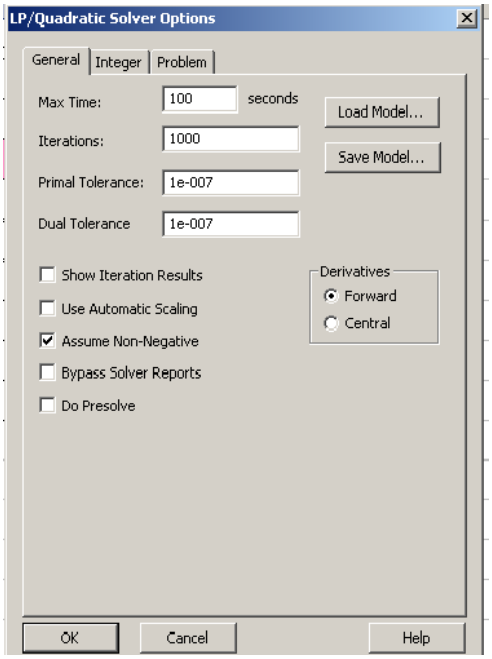
(5) เลือก Options จะปรากฏหน้าจอ ดังรูปที่ 3.11 สำหรับ Standard Excel Solver และรูปที่ 3.12 สำหรับ Premium Solver และ Premium Solver Platform เลือก Assume Linear Model และเลือก Assume Non–Negative หากใช้ Premium Solver เลือกที่หน้าต่างของ Problem จะปรากฏจำนวนข้อจำกัดและจำนวนของตัวแปรตัดสินใจในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ พร้อมทั้งระบุจำนวนตัวแปรและข้อจำกัดสูงสุดที่โปรแกรม Solver นี้สามารถดำเนินการได้ (ดังรูปที่ 3.13) จากนั้นคลิกปุ่ม OK ทำให้กลับมาที่หน้าต่าง Solver Parameters



รูปที่ 3.11 หน้าต่าง General Options สำหรับ Standard Excel Solver

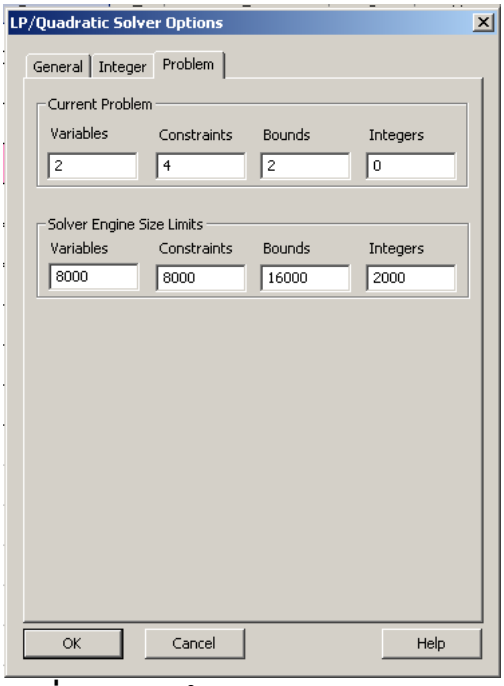


(ก) สำหรับ Premium Solver



(ข) สำหรับ Premium Solver Platform

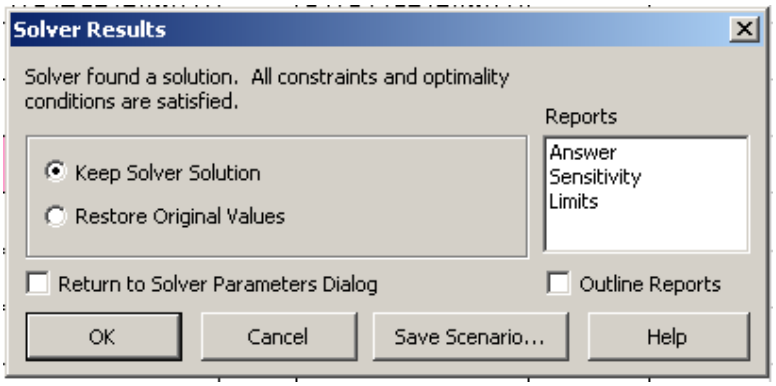
รูปที่ 3.12 หน้าต่าง General Options



รูปที่ 3.13 การใส่ Problem Options

(6) เลือก Solve โปรแกรมจะทำการประมวลผล จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 3.14 เพื่อให้เลือกว่าต้องการให้รายงานผลลัพธ์ลักษณะ โดยมีรายงานให้เลือก 3 ประเภทคือ รายงานคำตอบ (Answer) การวิเคราะห์ความไว (Sentivity) และขอบเขต (Limits) ในที่นี้เลือก Answer แล้ว

คลิก OK ผลเฉลยจาก Excel Solver แสดงดังรูปที่ 3.15 ซึ่งจะแสดงค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ค่าของตัวแปรตัดสินใจ และค่าตัวแปรส่วนขาด



รูปที่ 3.14 หน้าต่างเลือกการแสดงผลลัพธ์

Microsoft Excel 11.0 Answer Report
Worksheet: [chapter3.xls]Sheet1
Report Created: 10/03/2008 12:23:27 PM
Result: Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.
Engine: Standard LP/Quadratic
Solution Time: 04 Seconds
Iterations: 2
Subproblems: 0
Incumbent Solutions: 0

ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$4	กำไร	22.4	22.4

ค่าของตัวแปรตัดสินใจ

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$3	จำนวนหน่วยผลิต x1	1.6	1.6
$C$3	จำนวนหน่วยผลิต x2	4.8	4.8

ค่าของส่วนขาด

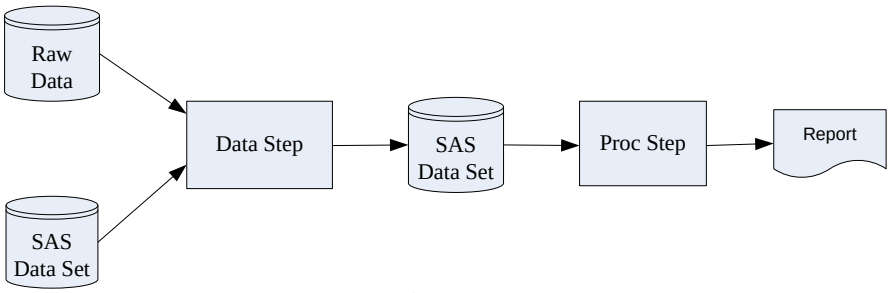
Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6	วัตถุดิบชนิดที่ 1	24	$D$6<=$F$6	Binding	0
$D$7	วัตถุดิบชนิดที่ 2	8	$D$7<=$F$7	Binding	0
$D$8	ปริมาณผลิตชนิดที่ A	1.6	$D$8<=$F$8	Not Binding	1.4
$D$9	ปริมาณผลิตชนิดที่ B	0	$D$9<=$F$9	Not Binding	5

รูปที่ 3.15 รายงานผลลัพธ์การประมวลผล

3.11 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยโปรแกรม SAS

โปรแกรม SAS เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นเพื่อรองรับการวิเคราะห์ข้อมูลสำหรับช่วยในการสนับสนุนการตัดสินใจของผู้บริหาร โปรแกรม SAS ประกอบด้วยโมดูลย่อยหลายโมดูล สำหรับโมดูล SAS/OR สามารถประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้น โดยขั้นตอนการเขียนโปรแกรม 2 ขั้นตอน (ดังรูปที่ 3.16) คือ ขั้นตอน DATA เป็นขั้นตอนการสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS เพื่อสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS (ในทางคอมพิวเตอร์ เรียกว่าการสร้างแฟ้มข้อมูล) โดยข้อมูลนำเข้าเป็นข้อมูลดิบซึ่งอยู่ในแฟ้มข้อมูลรูปแบบต่าง ๆ หรือเป็นชุดข้อมูลแบบ SAS อยู่แล้ว ขั้นตอน PROC เป็นขั้นตอนการประมวลผลชุดข้อมูลของ SAS ซึ่งการประมวลผลนี้อาจเป็นการสร้างรายงาน การสร้างกราฟ การแก้ไขข้อมูล รวมทั้งการประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้น รายละเอียดการเขียนโปรแกรมและการใช้งานโปรแกรม SAS แสดงไว้ในภาคผนวก ข และสามารถหารายละเอียดเพิ่มเติมจาก Delwiche and Slaughter (1996).



รูปที่ 3.16 ขั้นตอนการเขียนโปรแกรม SAS

ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการเขียนโปรแกรม SAS สำหรับแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ขั้นตอน Data เพื่อสร้างชุดข้อมูลสำหรับการประมวลผลการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์มี 2 รูปแบบคือ รูปแบบเดนส์ (Dense) และสปารส์ (Spare) ตัวอย่างที่ 3.27 แสดงวิธีการสร้างชุดข้อมูลรูปแบบเดนส์ ส่วนตัวอย่างการสร้างชุดข้อมูลรูปแบบ แสดงดังตัวอย่างที่ 3.28

การเขียนโปรแกรมจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ Data Step และ Proc step

1. Data step เป็นขั้นตอนในการสร้างข้อมูลและการนำข้อมูลเข้า ผู้ใช้สามารถใช้วิธีการจัดการข้อมูลตาม ข8 สำหรับการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น Data Step ใช้เพื่อสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบของชุดข้อมูลแบบ SAS เพื่อนำไปประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้น โดยขั้นตอนนี้จะอยู่ในชุดคำสั่ง “DATA” ส่วนการนำตัวแบบเข้ามาในโปรแกรม SAS ต้องอยู่ในรูปแบบที่ SAS กำหนด ซึ่งมี 2 รูปแบบ คือ *รูปแบบเดนส์ (Dense format)* และ *รูปแบบสปารส์ (Sparse format)*

2. Proc step เป็นขั้นตอนในการสั่งให้โปรแกรม SAS ประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้คำสั่ง "PROC LP" เป็นคำสั่งที่ใช้ในการประมวลผล การโปรแกรมเชิงเส้น การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม การโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม สำหรับชุดข้อมูลที่กำหนดให้ คำสั่ง PROC LP มี 2 รูปแบบคือ รูปแบบเดนส์ และ รูปแบบสปารส์
ดังนั้น จึงขออธิบายวิธีการเขียนโปรแกรมทั้งสองขั้นตอนนี้ โดยแบ่งตามรูปแบบเดนส์และสปารส์ ดังนี้

3.11.1 รูปแบบเดนส์

รูปแบบเดนส์ เริ่มจากการสร้างตัวแบบไว้ในชุดข้อมูลแบบ SAS ซึ่งประกอบด้วยข้อมูล 3 ส่วนคือ (1) ตัวแปรตัดสินใจของตัวแบบ ให้เป็นตัวแปร(หรือสดมภ์) ของ SAS (2) ตัวแปรหรือสดมภ์ของตัวแปรชนิด ซึ่งแทนชนิดของข้อจำกัดหรือชนิดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และ (3) ค่าทางขวามือของข้อจำกัดต่าง ๆ การสร้าง SAS data set ในรูปแบบเดนส์ จะมีลักษณะคล้ายกับการเขียนตัวแบบในโดยทั่วไป กล่าวคือ โดยในแต่ละค่าสังเกต (Observation) หรือเรียกว่าแต่ละเรคคอร์ด (Record) จะแทนข้อจำกัดหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ แต่ละสดมภ์แทนตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัว แล้วตามด้วยเครื่องหมายข้อจำกัด และค่าทางขวามือตามลำดับ ดังนั้นในการกรอกข้อมูลจะต้องมีการระบุ ชื่อตัวแปรของแต่ละสดมภ์

รูปแบบเดนส์ ตัวแบบจะแสดงในลักษณะที่เหมือนกับการสร้างตัวแบบในบทที่ 2 กล่าวคือ แต่ละตัวแปรจะแทนแต่ละคอลัมน์ในตัวแบบ และแต่ละค่าสังเกตข้อชุดข้อมูลแบบ SAS จะแทนแต่ละแถวของตัวแบบ ตัวแปรในชุดข้อมูลแบบ SAS สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นประกอบด้วย

1. ตัวแปรชนิด (Type variable) เป็นตัวแปรเชิงอักขระ (Character variable) ที่บอกให้คำสั่ง PROC LP ทราบว่าค่าสังเกตเป็นส่วนหนึ่งของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ตัวแปรชนิดจะระบุชนิดของวัตถุประสงค์ว่าเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และข้อจำกัดเป็นประเภทใด เช่น ข้อจำกัดน้อยกว่าเท่ากับ เป็นต้น Keyword ที่ใช้เป็นค่าของตัวแปรชนิด ที่คำสั่ง PROC LP รู้จัก เช่น MAX MIN EQ LE GE LT GT เป็นต้น

2. ตัวแปร ID (ID variable) หรือตัวแปรแถว (Row variable) เป็นตัวแปรเชิงอักขระ โดยค่าของตัวแปร ID จะเป็นชื่อของแถวในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนอกจากนี้ ตัวแปรแถวซึ่งมีข้อมูลเกี่ยวกับข้อกำหนดของตัวแปร ข้อกำหนดของตัวแปร เช่น ตัวแปรนี้เป็นจำนวนเต็ม ตัวแปรนี้มีขอบเขตสูงสุดหรือต่ำสุดเท่ากับเท่าใด ตัวแปรนี้เป็นตัวแปรทวิภาค (Binary variable) เป็นต้น

3. ตัวแปรคอลัมน์ (Column variable) หรือ ตัวแปรโครงสร้าง (Structual variable) หรือ เป็นตัวแปรเชิงอักขระแทนตัวแปรในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เช่น x_1 x_2 เป็นต้น

4. ตัวแปรทางขวามือ (Right–hand–side variable) เป็นตัวแปรเชิงตัวเลข (Numeric variable) ที่ใช้ในการกำหนดค่าทางขวามือของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

5. ตัวแปรทางขวามือสำหรับการวิเคราะห์ความไว (Right–hand–side sensitivity analysis variable) เป็นตัวแปรเชิงตัวเลขที่ใช้ในการกำหนดว่าค่าทางขวามือสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้เท่าใด ซึ่งตัวแปรนี้ใช้สำหรับการวิเคราะห์ความไว (Sensitivity analysis)

6. ตัวแปรกำหนดช่วง (Range variable) เป็นตัวแปรเชิงตัวเลขที่ใช้ในการกำหนดว่าตัวแปรคอลัมน์สามารถมีค่าเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงใด ซึ่งตัวแปรกำหนดช่วงนี้จะใช้ในการวิเคราะห์ความไวเช่นเดียวกัน

สำหรับการใส่ข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Problem input) คำสั่ง PROC LP จะใช้ข้อมูลที่เป็นชุดข้อมูลแบบ SAS ที่อาจสร้างขึ้นหรือนำเข้ามาจากแฟ้มข้อมูลประเภทอื่นใน Data step อย่างไรก็ตาม ผู้ใช้สามารถระบุชุดข้อมูลแบบ SAS โดยใช้ option ว่า “DATA=” ดังในตัวอย่าง ผู้ใช้เรียกชุดข้อมูลแบบ SAS ชื่อ Example ที่มีรูปแบบเดนส์

```
PROC LP DATA = Example ;
```

สำหรับคำสั่ง PROC LP ยังมีตัวแปรพิเศษที่ใช้ในคำสั่ง PROC LP คือ ตัวแปร _COL_ ตัวแปร _ROW_ ตัวแปร _TYPE_ และ ตัวแปร _COEF_ แทนตัวแปรคอลัมน์ ตัวแปรแถว ตัวแปรชนิด และตัวแปรสัมประสิทธิ์ ตามลำดับ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถนำตัวแปรพิเศษนี้ไปใช้ได้ อย่างไรก็ตาม หากผู้ใช้ต้องการระบุชื่อตัวแปรใหม่ สามารถใช้คำสั่งย่อยแทนตัวแปรทั้ง 6 ชนิด ได้โดยใช้ Option ตัวอย่างเช่น ผู้ใช้ต้องการกำหนดชื่อตัวแปร ID เป็น “rowname” ตัวแปร ชนิด เป็น “typename” ตัวแปรค่าทางขวามือเป็น “Cap” โดยใช้ชื่อตัวแปรเดิม ตามด้วยชื่อตัวแปรใหม่ ดังนี้

```
PROC LP ;
    id rowname ;
    type typename ;
    rhs Cap ;
RUN ;
```

ตัวอย่างการเขียนโปรแกรมเชิงเส้นรูปแบบเดนส์ เริ่มจากการสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS แล้วจึงใช้คำสั่ง PROC LP เพื่อประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้น ดังตัวอย่างที่ 3.26

ตัวอย่างที่ 3.27 จากตัวอย่าง 3.26 จงสร้างโปรแกรม SAS รูปแบบเดนส์ เพื่อใช้หาผลเฉลยของปัญหานี้

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 4x_2 \leq 24$ (วัตถุดิบชนิดที่ 1)

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad \text{(วัตถุดิบชนิดที่ 2)}$$
$$x_1 \leq 3 \quad \text{(ปริมาณผลิตสินค้า A)}$$
$$x_2 \leq 5 \quad \text{(ปริมาณผลิตสินค้า B)}$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

โดยที่ x_1 และ x_2 แทนปริมาณการผลิตสินค้าชนิด A และ B

การเขียนโปรแกรมรูปแบบเดนส์ ในขั้นตอน DATA (ดังรูปที่ 3.17) ดังนี้

(1) คำสั่ง DATA ตามด้วยชื่อของชุดข้อมูลแบบ SAS ที่ต้องการสร้างขึ้น ในตัวอย่างนี้ต้องการสร้างชุดข้อมูลชื่อ “Production_AB” โดยมีไลบรารีชื่อ NIDA

(2) คำสั่ง INPUT เป็นคำสั่งที่ระบุว่าชุดข้อมูลที่สร้างขึ้นประกอบด้วยตัวแปร 5 ตัวชื่อ Row x1 x2 Type และ _rhs_ โดยตัวแปรแถว และตัวแปรชนิดเป็นตัวแปรเชิงอักขระ ส่วนตัวแปร x1 x2 และ _rhs_ เป็นตัวแปรเชิงตัวเลข เนื่องจากตัวแปรแถวและตัวแปรชนิดไม่ได้มีการกำหนดขนาด ดังนั้น ตัวแปรเหล่านี้ถือว่ามีขนาด 8 ตัวอักษร แต่จากข้อมูลในค่าสังเกตที่ 1 ตัวแปร Row มีค่าเป็นตัวอักษร 3 ตัว โปรแกรม SAS จะกำหนดขนาดของตัวแปร Row ใหม่ เป็น 3 ตัวอักษร

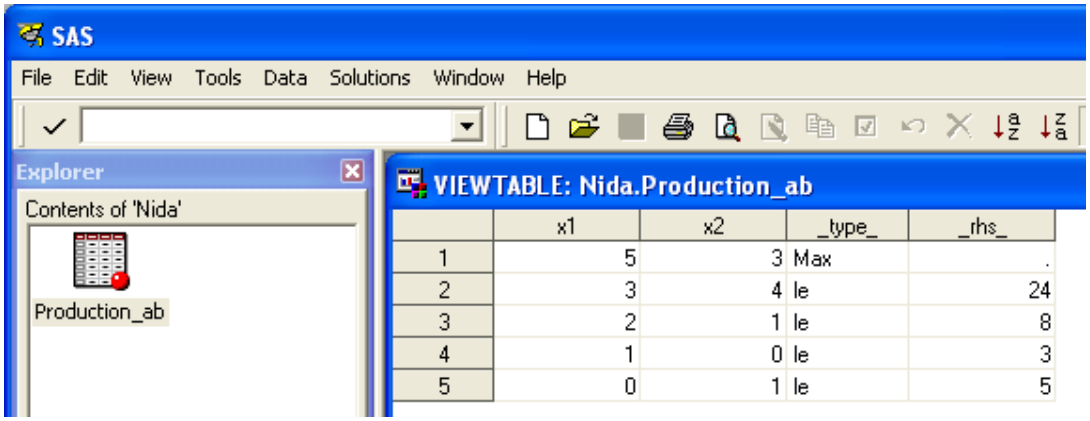
(3) คำสั่ง DATALINES เป็นคำสั่งที่ระบุว่าบรรทัดถัดไปเป็นข้อมูลที่มีรูปแบบ (Format) ตามที่ระบุไว้ในคำสั่ง INPUT โดยตัวแปรแถวชื่อ Row แทนชื่อของข้อจำกัดหรือชื่อของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เนื่องจากชุดข้อมูลแบบเดนส์นั้น ตัวแปรต่าง ๆ ในข้อจำกัดหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดียวกันจะต้องระบุอยู่ในบรรทัดเดียวกัน ดังนั้น หากไม่ได้ระบุตัวแปรชื่อ Row ไว้ในชุดข้อมูล ผู้ใช้จะยังคงประมวลได้เช่นเดียวกัน เมื่อระบุข้อมูลในตัวแบบหมดแล้วให้ใส่เครื่องหมาย “ ; ”

(4) RUN คำสั่งนี้ระบุว่าชุดคำสั่งนี้เขียนครบตามที่ต้องการแล้ว และพร้อมจะส่งไปประมวลผล

เมื่อประมวลผลชุดคำสั่งในรูปที่ 3.17 โปรแกรม SAS จะสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS ชื่อ Production_AB ในไลบรารีชื่อ NIDA ซึ่งชุดข้อมูลนี้จะมีตัวแปร 5 ตัว คือ Row x1 x2 _type_ และ _rhs_ โดยมีข้อมูลอยู่ 5 ค่าสังเกต ดังรูปที่ 3.18

```
DATA  NIDA.Production_AB;  /* production 2 product A and B*/
      INPUT  Row $  x1   x2   _type_ $   _rhs_; /*identify variables */
     DATALINES;
obj   5      3      Max    .
co1   3      4      le     24
co2   2      1      le     8
co3   1      0      le     3
co4   0      1      le     5;
RUN;
```

รูปที่ 3.17 โปรแกรมสำหรับตัวแบบ



	x1	x2	_type_	_rhs_
1	5	3	Max	.
2	3	4	le	24
3	2	1	le	8
4	1	0	le	3
5	0	1	le	5

รูปที่ 3.18 ชุดข้อมูล Production_AB

สำหรับการเขียนโปรแกรมในขั้นตอน PROC คำสั่ง PROC LP จะใช้ชุดข้อมูลแบบ SAS ล่าสุดที่สร้างไว้มาประมวลผล โดยไม่ต้องระบุชื่อชุดข้อมูลดังรูปที่ 3.19 จากนั้นใช้คำสั่ง RUN เพื่อระบุว่าชุดคำสั่งนี้เขียนครบตามที่ต้องการแล้ว และพร้อมจะส่งไปประมวลผลต่อไปหากผู้ใช้มีชุดข้อมูลอยู่หลายชุดและต้องการระบุลงไปอย่างชัดเจน สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง data = option ตัวอย่างเช่น ชุดข้อมูลที่นำมาใช้ในตัวแบบ ชื่อ Production_AB โดยชุดข้อมูลแบบ SAS นี้อยู่ในไลบรารีชื่อ work ซึ่งเป็นไลบรารีชั่วคราว ผู้ใช้อาจไม่ต้องระบุชื่อไลบรารีนี้ ดังรูปที่ 3.20 ถ้าชุดข้อมูลอยู่ใน library อื่น เช่น Library ชื่อ NIDA ผู้ใช้ต้องระบุชื่อไลบรารี แล้วตามด้วยชื่อชุดข้อมูล ดังรูปที่ 3.21

```
PROC LP ;
RUN;
```

รูปที่ 3.19 โปรแกรมในขั้นตอน PROC

```
PROC LP  data = Production_AB;
RUN;
```

รูปที่ 3.20 โปรแกรมในขั้นตอน PROC โดยชุดข้อมูลอยู่ในไลบรารีชื่อ work

```
PROC LP  data = NIDA.Production_AB;
RUN;
```

รูปที่ 3.21 โปรแกรมในขั้นตอน PROC โดยชุดข้อมูลอยู่ในไลบรารีชื่อ NIDA

3.11.2 รูปแบบสปารส์

รูปแบบสปารส์ รูปแบบนี้ออกแบบมาเพื่อให้ผู้ใช้สามารถระบุเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ หรือผู้ใช้สามารถระบุค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีแบบแผนได้ โดยชุดข้อมูลแบบ SAS ที่อธิบายตัวแบบคณิตศาสตร์ในรูปแบบสปารส์จะต้องประกอบด้วยตัวแปรอย่างน้อย 4 ตัวแปรคือ

1. ตัวแปรชนิด (Type variable)
2. ตัวแปรคอลัมน์ (Column variable)
3. ตัวแปรแถว (Row variable)
4. ตัวแปรสัมประสิทธิ์ (Coefficient variable)

โดยในแต่ละค่าสังเกตในชุดข้อมูลแบบ SAS จะเกี่ยวข้องกับตัวแปรแถวหรือตัวแปรคอลัมน์ หรือการกำหนดค่าของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร หรือค่าทางขวามือของตัวแบบคณิตศาสตร์หรือทั้งสองอย่าง นอกจากนี้ ยังมี Keyword สำหรับรูปแบบสปารส์ คือ RHS RHSSEN และ RANGE ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรชนิด ค่าของตัวแปรแถวจะเป็นชื่อของข้อจำกัดหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ส่วนค่าของตัวแปรคอลัมน์จะเป็นชื่อของตัวแปรในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เมื่อประมวลผลคำสั่ง PROC LP จะให้ผลเฉลยของปัญหาที่ระบุค่าของตัวแปรคอลัมน์ทั้งหมด สำหรับตัวแปรสัมประสิทธิ์จะระบุค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในตัวแบบ หรือค่าของข้อมูลเชิงตัวเลขอื่น ๆ เช่น ค่าทางขวามือของตัวแบบ เช่น ข้อจำกัดเกี่ยวกับแรงงานที่มีอยู่ 1,000 ชั่วโมงในการผลิตสินค้า A และ B โดย x_1 และ x_2 แทนปริมาณสินค้า A และ B ที่ผลิต

$$\text{Labor}: 5x_1 + 3x_2 \leq 1{,}000$$

การระบุค่า $5x_1$ ในแถวของข้อจำกัด Labor จะต้องระบุตัวแปรชนิด มีค่าเท่ากับ “LE” ตัวแปรคอลัมน์มีค่าเท่ากับ "x_1" ตัวแปรแถวมีค่าเท่ากับ “Labor” และตัวแปรสัมประสิทธิ์มีค่าเท่ากับ 5 ซึ่งการเก็บค่าของตัวแปรทั้ง 4 ตัวในชุดข้อมูลแบบ SAS จะอยู่ถือเป็นค่าสังเกตเดียวกัน กล่าวคือ การเขียนคำสั่ง PROC LP รูปแบบสปารส์นั้น 1 ค่าสังเกตประกอบด้วย ค่าของตัวแปรทั้ง 4 นี้ ดังนั้น การเขียนในรูปแบบนี้ต้องการให้ระบุรายละเอียดเกี่ยวกับตัวแบบมากกว่าการเขียนคำสั่ง PROC LP ในรูปแบบเดนส์ ตัวอย่างการเขียนโปรแกรมเชิงเส้นรูปแบบสปารส์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

สำหรับตัวอย่างที่ 3.26 สามารถเขียนโปรแกรมในรูปแบบสปารส์ ได้ดังรูปที่ 3.22 เริ่มต้นจากข้อมูลนำเข้าในตัวแบบมาสร้างเป็นชุดข้อมูลแบบ SAS โดยข้อมูลนำเข้าในตัวอย่างนี้แบ่งเป็น 3 ส่วนคือ กำไรต่อหน่วยสินค้า ปริมาณการใช้วัตถุดิบต่อหน่วยสินค้าและปริมาณ

วัตถุดิบที่อยู่และความต้องการสินค้าสูงสุด โดยจะสร้างเป็นชุดข้อมูลแบบ SAS ชื่อ price material และ max_demand ตามลำดับ จากนั้นจึงสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS ชื่อ Production1 เพื่อบรรจุตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในรูปแบบสปารส์ โดยใช้คำสั่ง DATA แล้วตามด้วยชื่อชุดข้อมูลที่ต้องการสร้างในที่นี้คือ Production1 คำสั่ง length เป็นคำสั่งที่ใช้ในการระบุขนาดของตัวแปรอักขระ (Character variable) เช่น ตัวแปร _type_ มีขนาด 3 ตัวอักษร เป็นต้น คำสั่ง keep เป็นคำสั่งที่ใช้ในการระบุว่าตัวแปรใดบ้างที่ต้องการให้เก็บไว้ในชุดข้อมูลที่สร้างขึ้น ในที่นี้ต้องการให้ตัวแปร _row_ _type_ _col_ และ _coef_ ดังที่กล่าวมาแล้วว่า ในการระบุพจน์ 1 พจน์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือข้อจำกัด จะต้องระบุตัวแปร 4 ตัวคือ _row_ _type_ _col_ และ _coef_ และบันทึกค่าของตัวแปรเหล่านี้เป็น 1 ค่าสังเกตในชุดข้อมูลแบบ SAS เพื่อสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในตัวอย่างนี้มี 2 พจน์คือ $5x_1 + 3x_2$

ในการระบุพจน์ $5x_1$ ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ระบุค่าของตัวแปรทั้ง 4 คือ ตัวแปรอักขระ _row_ ให้มีค่าเป็น ‘maxprofit’ ตัวแปรอักขระ _type_ มีค่าเป็น ‘max’ ตัวแปรอักขระ _col_ มีค่าเป็น 'x_1' และตัวแปรตัวเลข _coef_ มีค่าเป็น P1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 5 จากนั้นจึงใช้คำสั่ง output เพื่อให้นำค่าของตัวแปรทั้ง 4 นี้ บันทึกไว้ในชุดข้อมูลชื่อ Production1 เป็น 1 ค่าสังเกต จากนั้นจะให้ค่าตัวแปรทั้ง 4 นี้ เพื่อระบุพจน์ $3x_2$ เป็นอีก 1 ค่าสังเกตต่อไป สำหรับข้อจำกัดด้านปริมาณการใช้วัตถุดิบชนิดที่ 1 และ 2 ก็จะต้องระบุค่าตัวแปรทั้ง 4 แทนแต่ละพจน์เช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ข้อจำกัดด้านปริมาณการใช้วัตถุดิบชนิดที่ 1 คือ $3x_1 + 4x_2 \leq 24$ การระบุพจน์ $3x_1$ ให้ตัวแปร _type_ = ‘le’ _row_ = ‘RM1’ _col_ = 'x_1' และ _coef_ = 3 เนื่องจากค่าของตัวแปรอักขระ _row_ และตัวแปรตัวเลข _coef_ นั้น อยู่ในชุดข้อมูลชื่อ material ดังนั้น จึงต้องมีการเรียกชุดข้อมูลแบบ SAS ขึ้นมาใช้งาน โดยใช้คำสั่ง set แล้วตามด้วยชื่อชุดข้อมูล หากชุดข้อมูลอยู่ใน Library อื่นที่ไม่ใช่ Library ชื่อ work จะต้องระบุชื่อ Library ก่อน แล้วตามด้วยชื่อชุดข้อมูล เช่น ถ้าชุดข้อมูลชื่อ material อยู่ใน Library ชื่อ NIDA ผู้ใช้สามารถเขียนคำสั่งเป็น set NIDA material การใช้คำสั่ง set โปรแกรม SAS จะอ่านข้อมูลจากชุดข้อมูลเพียง 1 ค่าสังเกต (หรือเรียกว่า 1 record ในทางคอมพิวเตอร์) และเมื่อเรียกใช้คำสั่ง set ของชุดข้อมูลเดิม โปรแกรม SAS จะอ่านข้อมูลบรรทัดถัดไปหรือเรียกว่าค่าสังเกตถัดไป และเมื่อมีการอ่านข้อมูลในชุดข้อมูลหมดแล้ว หากมีการเรียกใช้ข้อมูลด้วยคำสั่ง set อีกโปรแกรม SAS จะไม่กลับไปอ่านชุดข้อมูลนี้อีกครั้ง และจะมีข้อความระบุว่ามีความผิดพลาดเกิดขึ้น เมื่อเรียกข้อมูลในค่าสังเกตที่ 1 จากชุดข้อมูล material ตัวแปร RAM นั้นเก็บค่า ‘RM1’ ส่วน A1 เก็บค่า 3 ดังนั้น ในการเขียนโปรแกรมจึงกำหนดให้ _row_ = RAM และ _coef_ = A1 จากนั้นใช้คำสั่ง output เพื่อบันทึกค่าของตัวแปรลงในชุดข้อมูลแบบ SAS ชื่อ Production1 สำหรับค่าทางขวามือของข้อจำกัด ซึ่งมีค่าเป็นตัวเลขจะมีการเขียนโปรแกรมโดยระบุค่าของตัวแปรทั้ง 4 เช่นกัน โดยตัวแปร _type_ = ‘le’ ตัวแปร _row_ = RAM ตัวแปร _col_ = _rhs_ และตัวแปร _coef_ = AV

โดยที่ RAM และ AV เท่ากับ ‘RM1’ และ 24 ส่วน _rhs_ เป็นตัวแปรค่าทางขวามือ (Right–hand–side variable)

จะเห็นได้ว่าการเขียนโปรแกรม SAS รูปแบบสปารส์ เพื่อสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนั้น จะต้องเขียนโปรแกรมมีความซับซ้อนขึ้น ในแต่ละพจน์ของตัวแบบจะต้องกำกับด้วยตัวแปร 4 ตัวเสมอ ทำให้โปรแกรมนั้นมีความยาวมากขึ้น เมื่อเทียบกับการเขียนในรูปแบบเดนส์ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ข้อมูลในการสร้างตัวแบบนั้นมีจำนวนมาก และจัดเก็บไว้ในแฟ้มข้อมูลรูปแบบต่าง ๆ การใช้รูปแบบสปารส์ ทำให้ผู้ใช้สามารถเรียกข้อมูลเหล่านั้นมาสร้างตัวแบบได้โดยไม่ต้องพิมพ์ข้อมูลลงไปในโปรแกรมใหม่ ในกรณีที่ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรหลายตัวมีค่าเป็นศูนย์ การเขียนโปรแกรมลักษณะนี้โดยใช้รูปแบบเดนส์ผู้ใช้ต้องใส่ค่า 0 ลงในหลาย ๆ ตำแหน่ง ซึ่งจะใช้เวลามากและอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย ถ้าเขียนโปรแกรมในรูปแบบสปารส์ ผู้ใช้สามารถระบุเฉพาะพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ได้

```
DATA price;
      INPUT  P1  P2;
      DATALINES;
5     3
;
DATA material;
      INPUT  RAM $ A1  A2 AV;
      DATALINES;
RM1   3     4     24
RM2   2     1     8
;
DATA max_demand;
      INPUT  D1  D2;
      DATALINES;
3     5;
DATA Production1;
      length _row_ $10 _type_ $3 _col_ $8 ;
      keep _row_ _type_   _col_  _coef_ ;

      /* objective function*/
            _type_ = 'max';
            _row_ = 'maxprofit';
            set price;
            _col_  = 'x1';
            _coef_ = P1; output;
            _col_  = 'x2';
            _coef_ = P2; output;
      /* material constraints  1 and 2 */
            _type_ = 'le';
            do i = 1 to 2;
                  set material;
                  _row_ = RAM;
                  _col_  = 'x1';
                  _coef_ = A1; output;
                  _col_  = 'x2';
                  _coef_ = A2; output;
                  _col_ = '_rhs_';
                  _coef_      = AV; output;
```

```
            end;
      /* maximum require  x1 and x2 */
            _type_ = 'le';
            set max_demand;
            _row_ = 'max_x1';
            _col_  = 'x1';
            _coef_ = 1; output;
            _col_ = '_rhs_';
            _coef_      = D1; output;
            _row_ = 'max_x2';
            _col_  = 'x2';
            _coef_ = 1; output;
            _col_ = '_rhs_';
            _coef_      = D2; output;
PROC LP data = Production1 sparsedata;
RUN;
```

รูปที่ 3.22 โปรแกรมแบบสปารส์สำหรับตัวแบบในตัวอย่าง 3.26

ตัวอย่างที่ 3.28 จากตัวอย่างที่ 2.11 ในบทที่ 2 สามารถสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในรูปแบบสปารส์ที่มีข้อมูลนำเข้าเกี่ยวกับความต้องการของลูกค้าดังตารางที่ 2.24 ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่อหน่วยสินค้าในตารางที่ 2.23 และข้อมูลความสามารถในการผลิตเท่ากับ 3,000 ชิ้นต่อโรงงาน จากข้อมูลนี้ทำให้สามารถนำตัวแบบมาเขียนโปรแกรม SAS ดังนี้

```
/* shippment problem*/
data shipcost;/* shipping cost per unit */
        input pp $ 2 cost1-cost4;
        datalines;
F1      400     500     750     450
F2      250     550     700     600
;
data capacity;
        input pp$ 2 cap;
        datalines;
F1      3000
F2      3000
;
data demandprod;
        input dd$ 2 Demand;
        datalines;
C1      800
C2      1200
C3      1500
C4      2000
;
data model;/* shipping */
        array cost{4} cost1-cost4;
  length _type_ $ 8 _row_ $ 15 _col_ $ 7;
  keep _type_ _row_ _col_ _coef_;
```

```
_type_ = 'MIN';   /*objective*/
_row_  = 'mincost';

do i = 1 to 2;
        set shipcost;
        do j = 1 to 4;
    _col_  = 'x'||put(i,1.)||put(j,1.);
    _coef_ = cost{j}; output;
        end;
end;
do i = 1 to 2; /*capacity*/
        set capacity;
        do j = 1 to 4;
                _type_ = 'le';
                _row_  = 'capacity'||put(i,1.);
                _col_ = 'x'||put(i,1.)||put(j,1.);
                _coef_ = 1; output;
        end;
        _col_ = '_RHS_';
        _coef_ = cap; output;
end;
do j = 1 to 4; /*capacity*/
        set demandprod;
        do i = 1 to 2;
                _type_ = 'ge';
                _row_  = 'demand'||put(j,1.);
                _col_ = 'x'||put(i,1.)||put(j,1.);
                _coef_ = 1; output;
        end;
        _col_ = '_RHS_';
        _coef_ = Demand; output;
end;
```

รูปที่ 3.23 โปรแกรมแบบสปารส์สำหรับตัวแบบในตัวอย่าง 3.27

ขั้นตอน PROC เป็นคำสั่งให้ประมวลผลข้อมูลของโปรแกรม SAS การสร้างตัวแบบด้วยรูปแบบเดนส์และสปารส์ให้ความยืดหยุ่นในการสร้างตัวแบบแตกต่างกันไป การประมวลผลตัวแบบด้วยรูปแบบที่แตกต่างกัน ก็มีการเขียนคำสั่งที่แตกต่างกันไป ในการประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในขั้นตอน PROC จะใช้คำสั่ง PROC LP คำสั่งนี้มีลักษณะแตกต่างกันลักษณะรูปแบบชุดข้อมูลที่ใช้สร้างตัวแบบในขั้นตอน DATA ดังที่กล่าวมาแล้ว คำสั่ง PROC LP สำหรับ DATA step รูปแบบสปารส์แสดงดังรูปที่ 3.24 สำหรับการผลลัพธ์จากการประมวลผลนี้จะได้รายงานทั้ง 4 ที่ระบุค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ค่าของตัวแปรทั้งหมด และระบุว่าข้อจำกัดใดเป็นข้อจำกัดผูกพัน เช่นเดียวกันกับรูปแบบเดนส์

```
PROC LP sparsedata;
RUN;
```

รูปที่ 3.24 โปรแกรมแบบสปาร์ PROC LP

กฎสำหรับข้อมูลนำเข้าแบบสปารส์

1. ลำดับของค่าสังเกตที่เขียนในโปรแกรมนั้น ไม่มีผลในการประมวลผล
2. ชื่อของตัวแปรคอลัมน์หนึ่งที่ระบุไว้ในตัวแปร COL จะแทนตัวแปรคอลัมน์เพียง 1 ตัวเท่านั้น
3. ชื่อของแถวหนึ่งที่ระบุไว้ในตัวแปร ROW จะหมายถึง ข้อจำกัดหรือวัตถุประสงค์เพียง 1 แถวเท่านั้น
4. แต่ละตัวแปร ROW ซึ่งจะระบุชนิดของแถว (ข้อจำกัดหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์) จะมีค่าได้ดังนี้คือ MIN MAX LE GE EQ LOWERBD UPPERBD UNRSTRACT BINARY INTEGER โดย MIN และ MAX หมายถึง ค่าต่ำสุดและสูงสุด LE GE และ EQ แทนน้อยกว่าหรือเท่ากับ มากกว่าหรือเท่ากับ และเท่ากับ ตามลำดับ LOWERBD และ UPPERBD แทน ขอบเขตล่างและขอบเขตบน ส่วน URSTRCT แทน การที่ไม่มีข้อจำกัดเรื่องเครื่องหมายสำหรับตัวแปรที่ระบุ กล่าวคือ ตัวแปรที่กำหนดด้วยค่า URSTRCT สามารถมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ ขึ้นอยู่กับข้อจำกัดอื่นของปัญหา BINARY แสดงถึง ตัวแปรที่กำหนดมีค่าได้เพียง 2 ค่า โดยทั่วไปจะให้มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น ถ้าตัวแปรที่กำหนดมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น จะให้ตัวแปร ROW มีค่าเป็น INTEGER

สำหรับรูปแบบเดนส์นั้น ชุดข้อมูลนำเข้าจะมีคอลัมน์ต่าง ๆ ซึ่งแต่ละคอลัมน์จะหมายถึงตัวแปรของปัญหา ดังนั้น การประกาศตัวแปร TYPE ID (หรือ ROW) และ RHS ผู้ใช้สามารถไม่จำเป็นต้องประกาศตัวแปรดังกล่าว ถ้าในชุดข้อมูลบรรจุตัวแปร _TYPE_, _ID_ (หรือ _ROW_) และ _RHS_

ในทำนองเดียวกัน สำหรับรูปแบบสปารส์ การประกาศตัวแปร TYPE, COL, ROW (หรือ ID), COEF และ RHS ใช้ระบุตัวแปรของปัญหาในแต่ละแถวและคอลัมน์ในตัวแบบ จะปรากฏเป็นค่าสังเกตในชุดข้อมูล อย่างไรก็ตาม ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องเขียนคำสั่งเหล่านี้ ถ้าในชุดข้อมูลใช้ตัวแปร _TYPE_ _COL_ _ROW_ (หรือ _ID_) และ _COEF__

สำหรับคำสั่ง SHOW, RESET, PRINT, QUIT, PIVOT และ RUN เป็นคำสั่งที่มีความจำเป็นในการประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยคำสั่ง PROC LP ซึ่งสามารถสรุปชุดคำสั่งย่อย ดังแสดงในตาราง

คำสั่งระบุปัญหา (Problem definition statements)

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า _ID_ , _TYPE_ และ _RHS_ เป็นตัวแปรพิเศษในคำสั่ง PROC LP ที่หมายถึง ตัวแปร id ตัวแปรชนิดและตัวแปร right hand-side หากผู้ใช้ต้องการ

เปลี่ยนชื่อของตัวแปรเหล่านี้เป็นอย่างอื่น สามารถทำได้โดยระบุเป็น option เช่น ต้องการเปลี่ยนชื่อตัวแปร id เป็นชื่อ “rowname” ส่วนตัวแปรชนิดและตัวแปรค่าทางขวามือยังใช้ชื่อเดิม สามารถเขียนคำสั่งได้ดังนี้

```
proc lp;
    id roename;
    type type;
    rhs rhs;
run;
```

สำหรับตัวแปรพิเศษสำหรับกรณีของ dense อีกคือ _RHSSEN_ และ _RANGE_ ซึ่งจะระบุเวกเตอร์ของค่าทางขวามือในการวิเคราะห์ความไวที่กล่าวไว้ในบทที่ 4

ในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นในรูปแบบ sparse ตัวแปรพิเศษได้แก่ _COL_ , _ROW_, _TYPE_ และ _COEF_ หากต้องการเปลี่ยนชื่อเป็น column, rowname, ty และ co ตามลำดับ สามารถทำได้ดังนี้

```
proc lp sparsedata;
    col column;
    row rowname;
    type ty;
    coef co;
run;
```

3.11.3 ผลลัพธ์จากการประมวลผล

เมื่อนำชุดคำสั่ง DATA และ PROC LP ข้างต้นมาประมวล โปรแกรม SAS จะทำการประมวลผลในขั้นตอนของคอมไพล์ (Complied) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการเขียนชุดคำสั่ง ซึ่งผลลัพธ์ของในขั้นตอนการ complied จะแสดงในหน้าต่าง Log สำหรับตัวอย่างนี้หน้าต่าง Log แสดงในรูปที่ 3.25 ซึ่งจะแสดงผลว่า โปรแกรม SAS ได้อ่านข้อมูลอะไรเข้ามาบ้าง ในชุดข้อมูล Production_AB มีค่าสังเกตจำนวน 5 ค่าสังเกต และมีตัวแปรจำนวน 5 ตัวแปร เวลาในการประมวลผลเพื่อสร้างชุดข้อมูลนี้เท่ากับ 0.01 วินาที จากนั้นโปรแกรม SAS อ่านคำสั่ง PROC LP และ คำสั่ง RUN แล้วประมวลคำสั่งนี้โดยใช้ชุดข้อมูล Production_AB จากไลบรารีชื่อ WORK การประมวลผลคำสั่ง PROC LP ใช้เวลา 0.03 วินาที และใช้ CUP Time เท่ากับ 0.01 วินาที สำหรับการแสดงผลในหน้าต่าง Log ถ้ามีความผิดพลาดเกิดขึ้น โปรแกรมจะแสดงข้อความเป็นอักษรสีแดง นอกจากนี้โปรแกรมอาจเตือนเกี่ยวกับความผิดปกติของไวยกรณ์ให้กับผู้ใช้ด้วยข้อความเป็นอักษรสีเขียว ดังนั้นหลักการประมวลผลชุดคำสั่งใด ๆ ก็ตาม ผู้ใช้ควรตรวจดูความถูกต้องในการประมวลผลในหน้าต่าง Log ก่อนที่จะไปอ่านผลลัพธ์หรือดำเนินการอื่นใดต่อไป

```
94   DATA NIDA.Production_AB;  /* production 2 product A and B*/
95      INPUT
96   Row $  x1 x2  _type_ $ _rhs_; /*identify variables in the model*/
97      DATALINES;

NOTE: The data set WORK.PRODUCTION_AB has 5 observations and 5 variables.
NOTE: DATA statement used (Total process time):
    real time          0.01 seconds
    cpu time           0.01 seconds

103  ;
104  PROC LP ;
105  RUN;

NOTE: There were 5 observations read from the data set WORK.PRODUCTION_AB.
NOTE: PROCEDURE LP used (Total process time):
    real time          0.03 seconds
    cpu time           0.01 seconds
```

รูปที่ 3.25 น้าต่างของ Log

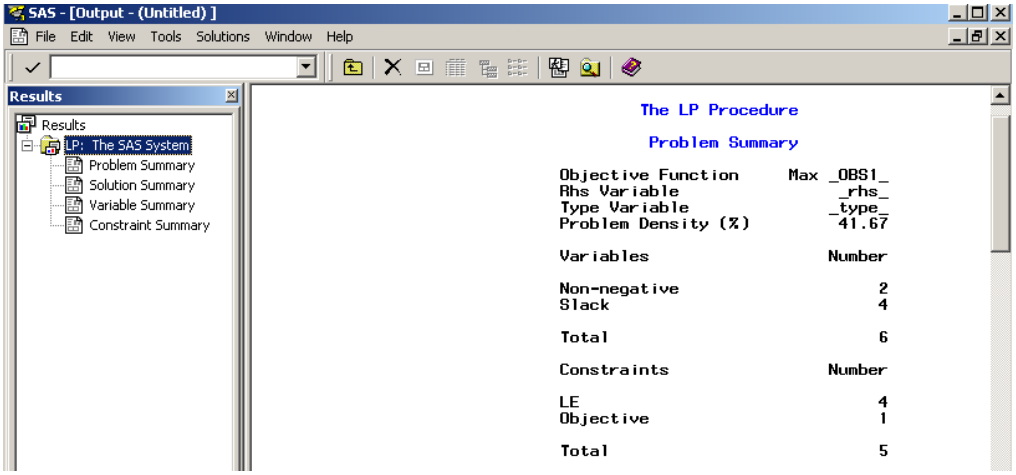
เมื่อโปรแกรม SAS ผ่านการประมวลผลแล้วจะปรากฏหน้าต่าง Results ซึ่งแสดงสารบัญของรายงาน ดังรูปที่ 3.26 โดยมีรายงาน 3 ส่วนคือ

1. Problem summary เป็นรายงานที่สรุปเกี่ยวกับปัญหาที่ถูกสร้างไว้ในขั้นตอน DATA ว่ามีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุดอยู่จำนวนเท่าใด มีตัวแปรแต่ละประเภทจำนวนเท่าใด โดยแยกเป็นตัวแปรที่มีค่ามากว่าหรือเท่ากับศูนย์ (Non-negative variable) และตัวแปรส่วนขาด (Slack variable) จำนวนข้อจำกัด โดยแยกเป็นข้อจำกัดประเภทเครื่องหมายมากกว่าเท่ากับ(GE) น้อยกว่าเท่ากับ (LE) หรือ เท่ากับ (EQ)
2. Solution summary เป็นรายงานที่ระบุค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จำนวนรอบการคำนวณซ้ำ (Iteration) ที่ใช้ในแต่ละเฟส จำนวนรอบการคำนวณซ้ำของปัญหาที่ระบุว่าตัวแปรต้องเป็นจำนวนเต็ม (Integer iteration) จำนวนตัวแปรพื้นฐาน นอกจากนี้ยังระบุจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสูงสุด และเวลาสูงสุดในการประมวลผลซึ่งหากไม่ได้ระบุไว้เป็น Option ในคำสั่ง PROC LP ค่าเหล่านี้จะเป็นค่าโดยปริยาย (Default value) โดยจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสูงสุดในเฟส 1 และ 2 เท่ากับ 100 ส่วนในเฟส 3 เท่ากับ 99999999 และจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสูงสุดสำหรับการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มเท่ากับ 100 ถ้าการประมวลผลมีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเท่ากับค่าสูงสุดที่ระบุแล้วยังหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดไม่ได้ โปรแกรมจะหยุดการทำงาน หากต้องการเพิ่มจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสามารถระบุไว้ใน Option ของ

คำสั่ง PROC LP ได้ โดยจะแสดงรายละเอียดในบทที่ 6 ในกรณีที่ต้องใช้เทคนิคตัวแปรเทียมเข้ามาช่วยจะมีการดำเนินการในเฟสที่ 3 นอกจากนี้ ยังระบุค่าสูงสุดของรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละเฟสไว้ด้วย

3. Variable summary เป็นรายงานผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยระบุค่าของตัวแปรตัดสินใจ ตัวแปรส่วนขาด และตัวแปรส่วนเกิน พร้อมระบุสถานะของตัวแปรเหล่านี้ว่าเป็นตัวแปรพื้นฐาน หรือตัวแปรจร นอกจากนี้ยังให้ค่าของต้นทุนลดลง (Reduced cost) เพื่อจะได้นำไปพิจารณาเกี่ยวกับราคาเงา (Shadow price) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 4
4. Constraint summary เป็นรายงานที่ระบุว่ามีข้อจำกัดใดที่เป็นข้อจำกัดผูกพัน (binding constraint) ในกรณีที่ปัญหาไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ รายงานในส่วนนี้จะระบุว่าข้อจำกัดใดบ้างทำให้มีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

เมื่อนำชุดคำสั่งในขั้นตอน DATA และ PROC สำหรับในตัวอย่างที่ 3.27 มาประมวลผลจะได้ผลลัพธ์ของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นดังกล่าว ในรายงานทั้ง 4 นี้ ดังรูปที่ 3.24 (ก) ถึง 3.24(ง) ตามลำดับ รายงาน Problem Summary แสดงถึงลักษณะของตัวแบบว่ามีจำนวนตัวแปรไม่เป็นลบ 2 ตัวแปร ตัวแปรส่วนขาด 4 ตัวแปร มีข้อจำกัดที่มีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 ข้อจำกัด และมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันสูงสุด 1 ฟังก์ชัน สำหรับรายงาน Solution Summary ระบุว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 22.4 จำนวนการทำซ้ำในเฟส 2 เท่ากับ 3 จำนวนตัวแปรที่เป็นไปได้มี 3 ตัวแปร ส่วนรายงาน Variable Summary ระบุว่า x1 และ x2 มีค่าเท่ากับ 1.6 และ 4.8 ส่วนตัวแปรส่วนขาดสำหรับข้อจำกัด 3 และ 4 เท่ากับ 1.4 และ 0.2 ขณะที่ตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัด 1 และ 2 มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับรายงาน Constraint Summary ระบุว่า ข้อจำกัดที่ 1 และ 2 นั้น เป็นข้อจำกัดผูกพันเนื่องจากค่าทางขวามือเท่ากับปริมาณการใช้ทรัพยากร ซึ่งอยู่ในคอลัมน์ Activity



รูปที่ 3.26 หน้าต่าง Results

Problem Summary	
Objective Function	Max OBS1
Rhs Variable	rhs
Type Variable	type
Problem Density (%)	41.67
Variables	Number
Non-negative	2
Slack	4
Total	6
Constraints	Number
LE	4
Objective	1
Total	5

รูปที่ 3.27 (ก) รายงานของ Problem Summary

Solution Summary	
Objective Value	22.4
Phase 1 Iterations	0
Phase 2 Iterations	3
Phase 3 Iterations	0
Integer Iterations	0
Integer Solutions	0
Initial Basic Feasible Variables	6
Time Used (seconds)	0
Number of Inversions	3
Epsilon	1E-8
Infinity	1.797693E308
Maximum Phase 1 Iterations	100

Solution Summary	
Maximum Phase 2 Iterations	100
Maximum Phase 3 Iterations	99999999
Maximum Integer Iterations	100
Time Limit (seconds)	120

รูปที่ 3.27 (ข) รายงานของ Soultion Summary

Variable Summary						
Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	x1	BASIC	NON-NEG	5	1.6	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	6	4.8	0
3	_OBS2_		SLACK	0	0	-0.2
4	_OBS3_		SLACK	0	0	-2.2
5	_OBS4_	BASIC	SLACK	0	1.4	0
6	_OBS5_	BASIC	SLACK	0	0.2	0

รูปที่ 3.27 (ค) รายงานของ Variable Summary

Constraint Summary						
Row	**Constraint Name**	**Type**	**S/S Col**	**Rhs**	**Activity**	**Dual Activity**
1	_OBS1_	OBJECTVE	.	0	22.4	.
2	_OBS2_	LE	3	24	24	0.2
3	_OBS3_	LE	4	8	8	2.2
4	_OBS4_	LE	5	3	1.6	0
5	_OBS5_	LE	6	5	4.8	0

รูปที่ 3.27 (ง) รายงานของ Constraint Summary

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้โดยวิธีกราฟ

วัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด $z = -x_1 - x_2$

ข้อจำกัด $x_1 - x_2 \le 1$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

2. จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดโดยวิธีกราฟ

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + x_2$

ข้อจำกัด $2x_1 + 5x_2 \le 60$

$3x_1 + x_2 \le 44$

$x_1 + x_2 \le 18$

$x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

3. จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้โดยวิธีกราฟ

วัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด $z = 15x_1 + 20x_2$

ข้อจำกัด $x_1 + 2x_2 \ge 10$

$2x_1 - 3x_2 \le 6$

$x_1 + x_2 \ge 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

4. โรงงานเฟอร์นิเจอร์ไทย ผลิตเฟอร์นิเจอร์ 2 ประเภท คือ เก้าอี้และโต๊ะ ซึ่งสินค้าทั้งสองนี้ต้องใช้วัตถุดิบและแรงงานคนงานที่มีอยู่เพียง 350 หน่วยต่อสัปดาห์ และ 400 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ตามลำดับ ปริมาณการใช้วัตถุดิบ แรงงาน และราคาขายต่อหน่วยของเก้าอี้และโต๊ะ แสดงดังตารางที่ 3.31 บริษัทต้องการให้ผลกำไรสูงที่สุด

ตารางที่ 3.31 ปริมาณการใช้วัตถุดิบ แรงงาน และราคาขายต่อหน่วย

	เก้าอี้	โต๊ะ
วัตถุดิบ (หน่วยต่อตัว)	1	2
แรงงาน (ชม. ต่อตัว)	3	5
ราคาขาย (พันบาทต่อตัว)	4	8

(1) จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เพื่อหาปริมาณผลิตเก้าอี้และโต๊ะต่อสัปดาห์

(2) จงแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้กับจุดมุม

5. จงใช้วิธีการซิมเพล็กซ์เพื่อแก้ปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 2x_1 - x_2 + x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + x_2 + x_3 \le 60$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10$

$x_1 + x_2 - x_3 \le 20$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

6. จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์เพื่อแก้ปัญหานี้

วัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด $z = -3x_1 + 8x_2$

ข้อจำกัด $4x_1 + 2x_2 \le 12$

$2x_1 + 3x_2 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

7. จงหาผลเฉลยของปัญหาต่อไปนี้โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 2x_1 - x_2 + x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1$

$x_1 + x_2 - x_3 \le 2$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

8. จงหาผลเฉลยของปัญหาต่อไปนี้โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 4x_2 - x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 - x_2 \le 30$

$2x_1 - x_2 + x_3 \le 10$

$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 40$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

9. จงพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = x_1 + 2x_2$

ข้อจำกัด $-x_1 + x_2 \le 2$

$-2x_1 + x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ มีผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่ เพราะเหตุใด

10. จงหา 2 ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 4x_1 + x_2$

ข้อจำกัด $2x_1 + 3x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 \le 1$

$4x_1 + x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

11. จงใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบตาราง เพื่อแสดงว่าปัญหาต่อไปนี้เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4$

ข้อจำกัด $x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 20$

$-4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \le 40$

$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 50$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

12. จงหาค่าผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดทุก ๆ ค่าของปัญหาต่อไปนี้โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

ข้อจำกัด $x_1 + x_2 \le 3$

$x_3 + x_4 \le 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

13. จงแสดงว่าปัญหาต่อไปนี้เป็นปัญหาที่ดีเจนเนอเรซี่

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 4x_2$

ข้อจำกัด $-x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 + 3x_2 \le 15$

$x_1 \le 20$

$x_1, x_2 \ge 0$

14. จงใช้วิธี บิก–เอ็ม เพื่อแก้ปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด $z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$

ข้อจำกัด $x_1 + x_2 + x_3 \le 2$

$2x_1 + x_2 \le 3$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

15. จงใช้วิธี ทู–เฟส เพื่อแก้ปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด $z = 2x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 4$$
$$x_1 + 3x_2 \le 20$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

16. จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดโดยใช้วิธี บิก–เอ็ม และ ทู–เฟส สำหรับปัญหาต่อไปนี้

วัตถุประสงค์ ค่าสูงสุด $z = x_1 + x_2$

ข้อจำกัด
$$2x_1 + x_2 \ge 3$$
$$3x_1 + x_2 \le 3.5$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

17. จงหาคำตอบของการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยวิธี บิก–เอ็ม

ค่าต่ำสุด $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

18. จงแก้ปัญหานี้โดยวิธีบิก–เอ็ม และวิธีทู–เฟส

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$

ข้อจำกัด
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 \ge 8$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

19. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ค่าสูงสุด $z = 3.1w_1 + 3.2w_2 + 3.45w_3 + 4.15w_4 + 3.25w_5 + 2.75w_6$

ข้อจำกัด
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 \le 15,000$$
$$0.125w_1 + 0.064w_2 + 0.144w_3 + 0.448w_4 + 0.048w_5 + 0.018w_6 \le 1,300$$
$$w_1 \le 1,500$$

$$
\begin{aligned}
w_2 &\le 4{,}500 \\
w_3 &\le 3{,}000 \\
w_4 &\le 3{,}500 \\
w_5 &\le 4{,}000 \\
w_6 &\le 3{,}500 \\
w_1, w_2, \ldots, w_6 &\ge 0
\end{aligned}
$$

20. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ค่าต่ำสุด $z = 7.5x_1 + 6.8x_2 + 5.5x_3 + 6.9y_1 + 7.25y_2 + 6.10y_3$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 &\ge 2{,}300 \\
x_1 + y_1 &\ge 1{,}000 \\
x_2 + y_2 &\ge 6{,}000 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\ge 0.15(x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3) \\
y_1 &\ge 0.5(x_1 + y_1) \\
x_3 &\le 0.2(x_3 + y_3) \\
x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

21. จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าสูงสุด $z = 6x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 &\le 2{,}400 \\
2x_1 + x_1 &\le 1{,}000 \\
x_1 &\le 450 \\
x_2 &\ge 100 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

22. จงแสดงว่าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต

ค่าต่ำสุด $z = -x_1 - 3x_2$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &\le 4 \\
-x_1 + x_2 &\le 3 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

23. จากปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 2.5x_2$

ข้อจำกัด $x_1 + 2x_2 \leq 350$

$2x_1 + x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

(1) จงหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ และระบุจุดมุมในพื้นที่ที่เป็นไปได้

(2) จงหาผลเฉลยมูลฐานทั้งหมด พร้อมระบุจุดมุมของกราฟที่สอดคล้องกับผลเฉลยนี้

บรรณานุกรม

Bazaraa, M.S, Jarvis, J.J, and Sherali, H.D. (1997).*Linear Programming and Network Flows*, 2nd edition, Wiley & Son, New York,USA.

Beale,E.M.L. (1955). Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2(4), 269-276.

Baker, K.R. (2006).*Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, CA, USA.

Dantzig, G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, New Jersey, USA.

Dantzig, G.B., Thapa, M.N. (1997). *Linear Programming: Theory and Extensions*, Springer, NY, USA.

Delwiche, L.D., Slaughter, S.J. (1996). *The Little SAS Book*, 2nd edition, SAS Institute Inc., North Carolina, USA.

Frontline (2008). Excel Solver Tutorial. (http://www.solver.com/).

Hiller, F.S. (1995). *Introduction to Operations Research*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Jensen, P. (2003). *Operations Research Models and Methods*, John Wiley and Sons, New York, USA.

Nash, S.G., and Sofer, A. (1996). *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, USA.

Taha, H.A. (1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, NY, USA.

Radin, R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, New York. USA.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research*, 4th edition, Thomson, NY, USA.

การวิเคราะห์ความไวและปัญหาควบคู่

การวิเคราะห์ความไวและปัญหาควบคู่

4

Sentivity Analysis and Dual Problem

Sentivity Analysis and Dual Problem

ในบทนี้กล่าวถึงสองเรื่องใหญ่ ๆ คือ ปัญหาควบคู่และการวิเคราะห์ความไว ปัญหาควบคู่ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นหนึ่งจะสามารถนำมาประมวลผลเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดได้ และยังสามารถทำให้เราเข้าใจความหมายในเชิงเศรษฐศาสตร์ของค่าตัวแปรต่าง ๆ นอกจากนี้ ในการหาผลเฉลยสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนั้น สมมติฐานหนึ่งที่จำเป็นคือค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ต้องทราบค่าและมีค่าคงที่ (Known and Constant) กล่าวคือ เรามีข้อตกลงว่า ข้อมูลที่ได้มานั้นสมบูรณ์และมีความถูกต้องมาก รวมทั้งเราทราบความสัมพันธ์ของค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ อย่างแน่นอน เช่น ราคาขายมีค่าคงที่ เท่ากับ 100 บาทต่อชิ้น จำนวนวัตถุดิบที่มีอยู่เท่ากับ 500 กิโลกรัม เวลาในการผลิตต่อชิ้นเท่ากับ 3.48 นาที เป็นต้น แต่ในทางปฏิบัติเงื่อนไขต่าง ๆ มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา อาทิเช่น เราหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีผลกำไรจากการผลิตและขายสินค้าชนิดหนึ่งเท่ากับ 60 บาทต่อชิ้นไว้แล้ว แต่ปรากฏว่าผลกำไรดังกล่าวเปลี่ยนแปลงเป็น 55 บาทต่อชิ้น การเปลี่ยนแปลงนี้มีผลอย่างไรกับผลเฉลยที่หาไว้แล้วข้างต้น

ในทางปฏิบัติ การเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับข้อมูลนำเข้าโดยทั่วไปเกิดจาก 2 เหตุผลคือ ประการที่หนึ่ง ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณไว้ก่อนการหาผลเฉลยนั้นไม่ถูกต้อง หรือมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ประการที่สองคือ ฝ่ายบริหารอาจสนใจหาผลเฉลยภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่เรามักเรียกว่า “What–if Analysis” เช่น ฝ่ายบริหารอาจต้องการทราบว่าผลเฉลยจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร ถ้าเราให้พนักงานทำงานล่วงเวลาวันละ 1 ชั่วโมง โดยจ่ายค่าแรงงาน 1.5 เท่าของค่าแรงงานปกติ เพื่อเพิ่มความสามารถในการผลิตต่อวัน เป็นต้น

การวิเคราะห์ความไว (Sentivity Analysis) หรือการวิเคราะห์ภายหลังการหาค่าเหมาะสม (Postoptimality Analysis) เป็นขั้นตอนที่ทำให้เราสามารถหาผลเฉลยเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวข้างต้น โดยใช้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ซึ่งหาได้ ณ ปัจจุบัน ทำให้ไม่ต้องทำการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ใหม่ทุก ๆ ครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลง

นอกจากนี้ เราอาจต้องการพิจารณา กรณีที่มีพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งพารามิเตอร์ที่มีค่าเปลี่ยนแปลงพร้อม ๆ กัน ตัวอย่างเช่น การเปลี่ยนแปลงราคาขายของสินค้า 2 ชนิด โดยสินค้าแต่ละชนิดอาจมีราคาขายเปลี่ยนแปลงไปเป็น 10 ระดับ ดังนั้น ในกรณีนี้เราจะมีสถานการณ์ทั้งสิ้น $10 \times 10 = 10$ สถานการณ์ หากเราทำการประมวลใหม่ในทุก ๆ สถานการณ์ จะทำให้เราเสียเวลามาก ทำให้ไม่เป็นที่นิยม ในทางปฏิบัติถ้ามีหลาย ๆ พารามิเตอร์ มีค่าเปลี่ยนแปลงไปพร้อม ๆ กัน ในสถานการณ์เช่นนี้เรานิยมพิจารณาหาผลเฉลยด้วยตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นที่ค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ แล้วพิจารณาการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดว่ามีความอ่อนไหวต่อการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์แต่ละตัวอย่างไร นั่นคือเราพยายามระบุช่วงของค่าพารามิเตอร์ว่าควรเป็นเท่าใด ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยเดิมยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ตัวอย่างเช่น ถ้าราคาขายต่อหน่วยที่ใช้ในการหาผลเฉลยเท่ากับ 100 บาท เราต้องคำนวณหาว่าราคาขายสามารถเพิ่มขึ้นหรือลดลงได้เท่าใดที่ยังคงทำให้ผลเฉลยเดิมยังคงเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด ทำให้เราไม่ต้องกลับมาประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้นอีกครั้ง

ในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น มีค่าพารามิเตอร์อยู่ 3 กลุ่ม คือ

(1) สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ การใช้การโปรแกรมเชิงเส้นในโลกธุรกิจ ส่วนใหญ่แล้วฟังก์ชันวัตถุประสงค์มักเป็นในแง่ของผลกำไรสูงสุด หรือต้นทุนรวมต่ำสุด ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจอาจเป็นราคาขายสินค้า ต้นทุนสินค้า หรือต้นทุนวัตถุดิบ ค่าพารามิเตอร์เหล่านี้แทบจะไม่มีค่าใดเป็นค่าคงที่เลย การขายในปริมาณมาก ๆ อาจทำให้ราคาต่อหน่วยสินค้าที่ขายมีราคาลดลง หรือในกรณีที่มีคู่แข่งขันในตลาดมากการลดราคาขายต่อหน่วยเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นอยู่เสมอ ๆ ด้วยเหตุนี้จึงควรศึกษาถึงผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ว่าจะส่งผลกระทบต่อผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบันหรือไม่

(2) ค่าทางขวามือของข้อจำกัด ในปัญหาการจัดสรรทรัพยากร ข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย "$\leq$" ส่วนใหญ่แสดงถึงปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่สำหรับใช้ทำกิจกรรมต่าง ๆ ที่กำลังพิจารณา และข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย "$\geq$" ส่วนใหญ่แสดงถึงระดับความต้องการต่ำสุด ในทางปฏิบัติปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่อาจไม่ผิดพลาด เช่น ปัญหาสำหรับการจัดการวัตถุดิบคงคลัง วัตถุดิบอาจมีการเน่าเสียระหว่างที่เก็บไว้ในคลัง ซึ่งยังไม่ได้ปรับปรุงปริมาณวัตถุดิบในคลังให้ตรงกับวัตถุดิบในคลังที่สามารถนำมาใช้ได้ สำหรับทรัพยากรด้านแรงงาน เราอาจวางแผนไว้ล่วงหน้าว่ามีพนักงานทำงานจำนวนเท่าใด แต่เมื่อถึงเวลาดำเนินการตามแผนที่วางไว้ อาจมีพนักงานที่มาทำงานน้อยกว่าจำนวนพนักงานตามแผน สำหรับปริมาณความต้องการขั้นต่ำอาจมีการ

เปลี่ยนแปลงได้ตลอดเวลา เป็นต้น สิ่งเหล่านี้ทำให้เราต้องศึกษาถึงผลกระทบของพารามิเตอร์เหล่านี้ต่อผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบัน

(3) สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในข้อจำกัด ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ของข้อจำกัดแสดงถึงปริมาณการใช้ทรัพยากรเพื่อประกอบกิจกรรม จำนวน 1 หน่วย เช่น ข้อจำกัดด้านแรงงานในการผลิตสินค้า 2 ชนิดคือ ชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 โดยการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 1 ชิ้น ใช้เวลา 10 นาที ในทางปฏิบัติตัวเลข 10 นาทีอาจเป็นเวลาเฉลี่ยหรือเวลามาตรฐาน ซึ่งในช่วงเวลานั้นอาจมีพนักงานใหม่ที่มีความชำนาญน้อยเข้ามาทำงาน ทำให้เวลาในการผลิตมากกว่า 10 นาที เป็นต้น

จะเห็นว่าพารามิเตอร์ทั้งสามกลุ่มนี้อาจมีค่าเปลี่ยนแปลงได้ หลังจากที่เราได้หาผลเฉลยของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรแล้ว ดังนั้น จึงควรมีการศึกษาถึงผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ ว่าจะส่งผลกระทบต่อผลเฉลยที่เหมาะสมที่ได้ ซอฟแวร์ส่วนใหญ่ เช่น Excel Solver จะรายงานผลการวิเคราะห์ความไวเฉพาะพารามิเตอร์ 2 กลุ่ม คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และค่าทางขวามือของข้อจำกัด

ในบทนี้จึงเริ่มต้นด้วยปัญหาควบคู่ในหัวข้อ 4.1 ถึงหัวข้อ 4.3 เป็นเรื่องของปัญหาควบคู่ โดยหัวข้อ 4.1 จะอธิบายการหาปัญหาควบคู่ เมื่อกำหนดปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นหนึ่ง ๆ ให้ ส่วนหัวข้อ 4.2 จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ และหัวข้อที่ 4.3 กล่าวถึงความหมายในเชิงเศรษฐศาสตร์ของปัญหาควบคู่ หัวข้อ 4.4 เป็นการประยุกต์ปัญหาควบคู่เพื่อวัดประสิทธิภาพขององค์กรด้วย DEA หัวข้อ 4.7 แสดงการวิเคราะห์ความไวของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งจะมีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัว ทำให้เราสามารถอธิบายผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงด้วยกราฟ เมื่อปัญหาใหญ่ขึ้นมีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 2 ตัว การศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ อาจใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์หรือรูปแบบตารางก็ได้ ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 4.8 ในกรณีที่มีพารามิเตอร์ตั้งแต่สองตัวขึ้นไปมีการเปลี่ยนแปลงพร้อม ๆ กัน จะใช้การวิเคราะห์ด้วยกฎ 100% (100% Rule) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 4.11 สำหรับหัวข้อ 4.9 เป็นการแสดงผลการวิเคราะห์ความไวด้วย Excel solver

4.1 ปัญหาควบคู่

สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นใด ๆ ปัญหาหนึ่งจะมี *ปัญหาควบคู่ (Dual problem)* ที่ถูกกำหนดขึ้นมาอย่างเป็นระบบ และมีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนั้น ซึ่งปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่กล่าวถึงนี้ ขอเรียกว่า *ปัญหาเดิม (Primal problem)* ทั้งสองปัญหานี้มีความสัมพันธ์กันในการหาค่าผลเฉลย กล่าวคือ เมื่อทราบผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาหนึ่ง จะทำให้เราทราบผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของอีกปัญหาหนึ่ง

ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุด แล้วปัญหาควบคู่จะเป็นปัญหาค่าต่ำสุด ในทางตรงกันข้าม ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุด แล้วปัญหาควบคู่จะเป็นปัญหาค่าสูงสุด เพื่อความสะดวกในการอธิบายปัญหาทั้งสองประเภทนี้ ขอกำหนดปัญหาค่าสูงสุดที่มีตัวแปรคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ z ส่วนปัญหาค่าต่ำสุดที่มีตัวแปรคือ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ และฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ w โดยที่ตัวแปร x_j และ y_i $j = 1, 2, \ldots, n$ และ $i = 1, 2, \ldots, m$ จะเป็นตัวแปรที่มีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้น ปัญหาค่าสูงสุดสามารถเขียนได้เป็น

ค่าสูงสุด $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) & \end{aligned} \tag{1}$$

ปัญหาควบคู่ของปัญหาค่าสูงสุดข้างต้นใน (1) คือ

ค่าต่ำสุด $\quad w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &\ge c_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &\ge c_n \\ y_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) & \end{aligned} \tag{2}$$

ตัวแบบ (1) เป็นปัญหาค่าสูงสุดที่ข้อจำกัดมีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\le$) และตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ($\ge$) ปัญหาที่มีตัวแบบ (1) เรียกว่า *ปัญหาค่าสูงสุดปกติ (Normal max problem)* ในทำนองเดียวกัน ตัวแบบ (2) ซึ่งเป็นปัญหาค่าต่ำสุดที่ข้อจำกัดทั้งหมดต้องมีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ($\ge$) และตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ปัญหาที่มีตัวแบบ (2) นี้ เรียกว่า *ปัญหาค่าต่ำสุดปกติ (Normal min problem)* ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุดปกติ แล้วปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ ปัญหาค่าสูงสุดปกติ ถ้าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุดปกติ แล้วปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ ปัญหาค่าต่ำสุดปกติ อาจกล่าวได้ว่าปัญหาค่าสูงสุดปกติ และ ปัญหาค่าต่ำสุดปกติเป็นปัญหาที่ควบคู่กัน หากปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุดที่สามารถเขียนในรูปตารางที่ 4.1 ในแนวนอนที่มีตัวแปร $x_j \ge 0$ $j = 1, 2, \ldots, n$ และข้อจำกัดจำนวน m ข้อจำกัดคือ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ โดย $i = 1, 2, \ldots, m$ ปัญหาควบคู่จะอยู่ในคอลัมน์ที่มีตัวแปร $y_i \ge 0$ และข้อจำกัดจำนวน n ข้อจำกัดคือ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j$ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุด ถ้าเราทำให้ข้อจำกัดทั้งหมดมีเครื่องหมายเป็น $\leq$ และตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แล้วจะได้ปัญหาควบคู่ที่เป็นปัญหาค่าต่ำสุดที่ข้อจำกัดมีเครื่องหมาย $\geq$ และตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ตารางที่ 4.1 การหาการควบคู่ของปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุดปกติ

ค่าต่ำสุด w		ค่าสูงสุด z				
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$\cdots$	$(x_n \geq 0)$	
		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
$y_1 \geq 0$	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq b_1$
$y_2 \geq 0$	y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$y_m \geq 0$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$		$\geq c_n$	

ตัวอย่างที่ 4.1 โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสามประเภท คือ สินค้าชนิดที่ 1 2 และ 3 ซึ่งมีปริมาณการใช้วัตถุดิบ และรายได้ต่อชิ้นจากการผลิตและขายสินค้าแสดงดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้และกำไรต่อหน่วย

สินค้าชนิดที่	วัตถุดิบ (กิโลกรัมต่อชิ้น)				รายได้ต่อชิ้น (บาท)
	A	B	C	D	
1	4	2	1	1	30
2	2	1	5	1	20
3	1	3	–	1	15

ปัจจุบันปริมาณวัตถุดิบ A B C และ D เข้าในคลังเท่ากับ 50 40 30 และ 15 กิโลกรัมต่อวัน ตามลำดับ จงหาปริมาณการผลิตสินค้าต่อวันของสินค้าทั้งสาม เพื่อให้โรงงานได้รายได้สูงสุด

ให้ x_i แทนปริมาณการผลิตต่อวันของสินค้าชนิดที่ i i = 1, 2, 3 เราสามารถเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $\quad z = 30x_1 + 20x_2 + 15x_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ อยู่ในรูปของปัญหาค่าสูงสุดปกติ แล้วจึงสามารถหาปัญหาควบคู่โดยใช้ตารางที่ 4.1 จะได้ปัญหาควบคู่คือ

ค่าต่ำสุด $w = 50y_1 + 40y_2 + 30y_3 + 15y_4$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geq 30 \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 + y_4 &\geq 20 \\ y_1 + 3y_2 + y_4 &\geq 15 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 การจัดชุดอาหารเพื่อควบคุมน้ำหนักผู้ป่วยของหน่วยโภชนาการแห่งหนึ่ง ซึ่งมีอาหารอยู่ 3 ประเภท คือ อาหารชนิดที่ A B และ C โดยต้องการให้มีสารอาหาร 3 ประเภทตามกำหนด คือ โปรตีน คาร์โบไฮเดรต และวิตามิน จากการตรวจสอบทางโภชนาการ พบว่า อาหารแต่ละประเภทมีสารอาหารและปริมาณสารอาหารขั้นต่ำที่ผู้ป่วยต้องการ แสดงดังตารางที่ 4.3 หน่วยโภชนาการต้องการทราบว่า ควรจัดอาหารแต่ละประเภทอย่างไร เพื่อให้เพียงพอกับความต้องการ และมีต้นทุนต่ำที่สุด

ตารางที่ 4.3 ปริมาณสารอาหารในอาหารแต่ละประเภท

อาหารจำนวน 100 กรัม	สารอาหาร (หน่วย)			ต้นทุนต่อ 100 กรัม (บาท)
	โปรตีน	คาร์โบไฮเดรต	วิตามิน	
ประเภท A	80	200	20	50
ประเภท B	150	50	36	70
ประเภท C	100	80	10	40
ปริมาณความต้องการสารอาหารขั้นต่ำ	1,000	700	200	

ให้ x_i แทนปริมาณอาหารประเภทที่ i ที่ต้องการ โดยที่ i = 1, 2, 3 แทนอาหารประเภท A B และ C ตามลำดับ

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 50x_1 + 70x_2 + 40x_3$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
80x_1 + 150x_2 + 100x_3 &\geq 1{,}000 \\
200x_1 + 50x_2 + 80x_3 &\geq 700 \\
20x_1 + 36x_2 + 10x_3 &\geq 200 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ

ค่าสูงสุด $w = 1000y_1 + 700y_2 + 200y_3$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
80y_1 + 200y_2 + 20y_3 &\leq 50 \\
150y_1 + 50y_2 + 36y_3 &\leq 70 \\
100y_1 + 80y_2 + 10y_3 &\leq 40 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ในกรณีปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นไม่อยู่ในรูปของปัญหาค่าสูงสุดปกติ หรือค่าต่ำสุดปกติ เราสามารถทำการหาปัญหาควบคู่ได้ 2 วิธีคือ

(1) ปรับปัญหาเดิมให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าสูงสุดปกติ หรือค่าต่ำสุดปกติ แล้วใช้ตารางที่ 4.1 สร้างปัญหาควบคู่

(2) การใช้รูปแบบผสม

4.1.1 การปรับรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูปค่าสูงสุดปกติ หรือ ค่าต่ำสุดปกติ

การปรับรูปปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าสูงสุดปกติ หรือ ค่าต่ำสุดปกติ จะใช้หลักการเดียวกับการปรับรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานในบทที่ 2 หัวข้อ 2.1 ตัวอย่างเช่น สำหรับปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุดจะมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: ถ้าข้อจำกัดมีเครื่องหมาย $\geq$ ให้คูณข้อจำกัดด้วยตัวเลข -1 เช่น $2x_1 - 3x_2 \geq 40$ จะได้ $-2x_1 + 3x_2 \leq -40$ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 2: ถ้าข้อจำกัดมีเครื่องหมาย “=” ให้แทนข้อจำกัดนี้ด้วยสองข้อจำกัด คือ ข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $\geq$ และข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $\leq$ เช่น ข้อจำกัดคือ $x_1 + 2x_2 = 20$ แทนข้อจำกัดนี้ด้วย $x_1 + 2x_2 \leq 20$ และ $x_1 + 2x_2 \geq 20$ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 3: ถ้าตัวแปรไม่มีข้อจำกัดเรื่องเครื่องหมาย (urs) ตัวแปรนี้สามารถเป็นค่าลบก็ได้ แล้วจะแทนตัวแปรนี้ด้วยตัวแปรใหม่ 2 ตัวแปรที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น x_2 ไม่มีข้อจำกัดเรื่องเครื่องหมาย แทน x_2 ด้วย $x_2' - x_2''$ ในตัวแบบ แล้ว x_2' และ x_2'' จะเป็นตัวแปรใหม่ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

4.1.2 การสร้างปัญหาควบคู่ในรูปแบบผสม

ในทางปฏิบัติปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่สร้างขึ้น อาจมีข้อจำกัดจำนวนหนึ่งมีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ขณะที่ข้อจำกัดอีกจำนวนหนึ่งมีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ และอาจมีตัวแปรตัดสินใจอาจมีค่า ≥ 0 หรือ ≤ 0 หรือไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย ถ้าเราไม่ใช้วิธีการปรับรูปให้อยู่ในรูปปกติ เพื่อหาปัญหาควบคู่ แล้วเราอาจใช้วิธีการสร้างตัวแบบควบคู่ได้ทันทีโดยใช้ตารางที่ 4.4 (Bazaraa, Jarvis, and Sherali, 1997) วิธีการใช้ตารางนี้แสดงในตัวอย่างที่ 4.3

ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่

	ปัญหาค่าต่ำสุด		ปัญหาค่าสูงสุด	
ตัวแปรตัดสินใจ	≥ 0	⟷	$\leq$	ข้อจำกัด
	≤ 0	⟷	$\geq$	
	urs	⟷	$=$	
ข้อจำกัด	$\geq$	⟷	≥ 0	ตัวแปรตัดสินใจ
	$\leq$	⟷	≤ 0	
	$=$	⟷	urs	

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาปัญหาควบคู่ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

ข้อจำกัด

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 - x = 20$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ urs}$$

ปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุด แสดงว่า เรากำลังเทียบปัญหาเดิมอยู่ทางขวามือของตารางที่ 4.4 และปัญหาควบคู่จะเป็นปัญหาค่าต่ำสุดซึ่งอยู่ทางซ้ายมือของตารางที่ 4.4 ข้อจำกัด

ที่ 1 ของปัญหาเดิมมีเครื่องหมาย $\geq$ ส่งผลให้ตัวแปรตัวที่ 1 ของปัญหาควบคู่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ส่วนตัวแปรตัวที่ 1 ของปัญหาเดิมมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ส่งผลให้ปัญหาควบคู่มีข้อจำกัดที่ 1 มีเครื่องหมาย $\leq$ ดังนั้น ตัวแบบสำหรับปัญหาควบคู่นี้คือ

ค่าต่ำสุด $\quad w = 10y_1 + 20y_2 + 30y_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\leq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 3 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &= 5 \\ y_1 \leq 0 \quad y_2 \ \text{urs} \quad y_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่

สมมติว่า ปัญหาเดิมคือ ปัญหาค่าสูงสุดปกติที่มี m ข้อจำกัด และ n ตัวแปร แล้วปัญหาควบคู่ของปัญหาเดิมจะเป็นปัญหาค่าต่ำสุดปกติที่มี m ตัวแปร และ n ข้อจำกัด ปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่สามารถเขียนได้ดัง (1) และ (2) ตามลำดับ โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรในปัญหาเดิม และ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ เป็นตัวแปรในปัญหาควบคู่

พิจารณาข้อจำกัดใน (1) นำ $y_i \geq 0$ คูณทุก ๆ ข้อจำกัดที่ i จะได้

$$\begin{aligned} y_1a_{11}x_1 + y_1a_{12}x_2 + \ldots + y_1a_{1n}x_n &\leq b_1y_1 \\ y_2a_{21}x_1 + y_2a_{22}x_2 + \ldots + y_2a_{2n}x_n &\leq b_2y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ y_ia_{i1}x_1 + y_ia_{i2}x_2 + \ldots + y_ia_{in}x_n &\leq b_iy_i \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ y_ma_{m1}x_1 + y_ma_{m2}x_2 + \ldots + y_ma_{mn}x_n &\leq b_my_m \end{aligned} \tag{5}$$

รวมอสมการใน (5) จะได้

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_ia_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i \tag{6}$$

ในทำนองเดียวกัน ข้อจำกัดใน (2) นำ $x_j \geq 0$ คูณทุก ๆ ข้อจำกัดที่ j

$$
\begin{aligned}
x_1a_{11}y_1 + x_1a_{21}y_2 + \ldots + x_1a_{m1}y_m &\geq c_1x_1 \\
x_2a_{12}y_1 + x_2a_{22}y_2 + \ldots + x_2a_{m2}y_m &\geq c_2x_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
x_ja_{1j}y_1 + x_ja_{2j}y_2 + \ldots + x_ja_{mj}y_m &\geq c_mx_j \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
x_na_{1n}y_1 + x_na_{2n}y_2 + \ldots + x_na_{mn}y_m &\geq c_nx_n
\end{aligned}
\tag{7}
$$

รวมอสมการใน (7) จะได้

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_ia_{ij}x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{8}$$

จาก (6) และ (8) จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_ia_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i \tag{9}$$

ซึ่ง $z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ และ $w = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ ดังนั้น อสมการ (9) สามารถเขียนได้เป็น

$$z \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_ia_{ij}x_j \leq w \tag{10}$$

กล่าวได้ว่า ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิม ซึ่งเป็นปัญหาค่าสูงสุดปกตินั้น จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่ ซึ่งคุณสมบัตินี้ เรียกว่า *สภาวะคู่กันแบบอ่อน (Weak duality)* (Bazaraa, Jarvis and Sherali, 1997) เพื่อแสดงถึงคุณสมบัตินี้ ขอให้พิจารณาตัวอย่างที่ 4.4

ตัวอย่างที่ 4.4 จากตัวอย่างที่ 3.9 จงสร้างปัญหาควบคู่ พร้อมแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปตาราง และแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยปัญหาการโปรแกรมในตัวอย่างที่ 3.9 คือ

ค่าสูงสุด $z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 30 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\
x_1 + 2x_3 &\leq 10
\end{aligned}
$$

ปัญหาควบคู่คือ

ค่าต่ำสุด $w = 30y_1 + 10y_2 + 10y_3$

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1 \\ 6y_1 + y_2 &\geq 4 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2 \end{aligned} \qquad (11)$$

การแก้ปัญหาควบคู่ (11) โดยใช้ซิมเพล็กซ์และเทคนิคตัวแปรเทียมโดยวิธีบิก–เอ็ม

ค่าต่ำสุด $w = 30y_1 + 10y_2 + 10y_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 + a_1 - e_1 &= 1 \\ 6y_1 + y_2 + a_2 - e_2 &= 4 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + a_3 - e_3 &= 2 \\ y_1, y_2, y_3, a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ตารางที่ 4.5 ตารางซิมเพล็กซ์

ทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรพื้นฐาน	สัมประสิทธิ์ของ									ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	
0	z	−30	−10	−10	0	0	0	−M	−M	−M	0
	a_1	3	2	1	−1	0	0	1	0	0	1
	a_2	6	1	0	0	−1	0	0	1	0	4
	a_3	1	1	2	0	0	−1	0	0	1	2
0'	z	10M − 30	4M − 10	3M − 10	−M	−M	−M	0	0	0	7M
	a_1	3	2	1	−1	0	0	1	0	0	1
	a_2	6	1	0	0	−1	0	0	1	0	4
	a_3	1	1	2	0	0	−1	0	0	1	2
1	z	0	$-\frac{8}{3}M + 20$	$\frac{1}{3}M$	$\frac{7}{3}M - 10$	−M	−M	$-\frac{10}{3}M+10$	0	0	$\frac{11}{3}M+10$
	x_1	1	2/3	1/3	−1/3	0	0	1/3	0	0	1/3
	a_2	0	−3	−2	2	−1	0	−2	1	0	2
	a_3	0	1/3	5/3	1/3	0	−1	−1/3	0	1	5/3
2	z	0			0	0	0	−M	−M	−M	$\frac{4}{3}M+20$
	x_1	1	1/6	0	0	−1/6	0	0	1/6	0	2/3
	s_1	0	−3/2	−1	1	−1	0	1	1	0	1
	a_3	0	5/6	2	0	1/6	−1	−1	1/2	1	4/3
3	z	0	5/6	0	0	−25/6	−5	−M	$-M+\frac{25}{6}$	$-M+\frac{25}{6}$	80/3
	x_1	1	1/6	0	0	−1/6	0	0	1/6	0	2/3
	s_1	0	−13/12	0	1	−5/12	−1/2	−1	5/12	1/2	5/3
	x_3	0	5/12	1	0	1/12	−1/2	0	−1/12	1/2	2/3

เมื่อพิจารณาผลเฉลยในแต่ละรอบการคำนวณในตัวอย่าง 3.9 และตัวอย่างนี้ที่แสดงดังตารางที่ 4.5 พบว่าผลเฉลยของปัญหาเดิมซึ่งเป็นปัญหาค่าสูงสุดปกติ จะเริ่มจากผลเฉลยที่มีค่าฟังก์ชันเท่ากับ 0 20 และ 26.667 ในการคำนวณรอบที่ 0 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่งค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ค่าผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดที่มีค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุด ขณะที่ผลเฉลยของปัญหาควบคู่ที่เป็นปัญหาค่าต่ำสุดปกติ ผลเฉลยในการคำนวณรอบที่ 0 1 2 และ 3 มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 7M, (11/3)M + 10, (4/3)M + 20 และ 26.67 ตามลำดับ ซึ่งค่าของฟังก์ชันนี้ลดลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดที่มีค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำที่สุด และมีค่าเท่ากับค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิมที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ในการคำนวณรอบที่ 0 จนถึงก่อนตารางที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่ (w) จะสูงกว่าค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิม (z) ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติ สภาวะคู่กันอย่างอ่อน สำหรับปัญหาเดิม ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจะมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุด (z) ส่วนปัญหาควบคู่ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจะมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด (w) จากอสมการ (8) เมื่อปัญหาทั้งสองนี้ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด จะพบว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของทั้งสองปัญหานี้มีค่าเท่ากัน (z = w) เรียกคุณสมบัตินี้ว่า *สภาวะคู่กันแบบเข้ม (Strong duality)*

ทฤษฎีที่ 4.1 สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นปัญหาหนึ่ง และปัญหาควบคู่ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนั้น โดยที่ $\mathbf{x}^* = [x_1\ x_2\ \ldots x_n]^T$ และ $\mathbf{y}^* = [y_1\ y_2 \ldots y_m]^T$ หนึ่งในข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริง

(1) ทั้งสองปัญหามีผลเฉลยที่เหมาะสมคือ $\mathbf{x}^*$ และ $\mathbf{y}^*$ โดยที่ $z = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = w$

(2) ถ้าปัญหาเดิมหรือปัญหาควบคู่ เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต แล้วอีกปัญหาหนึ่ง (ปัญหาควบคู่หรือปัญหาเดิม) จะเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยเป็นไปไม่ได้

(3) ทั้งปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ มีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

ทฤษฎีที่ 4.2 ให้ $\mathbf{x}_B^*$ เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่มีสมาชิกประกอบด้วยตัวแปรพื้นฐานของปัญหาเดิม แล้ว $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาควบคู่ และค่า $z^* = w^*$

พิสูจน์ เมื่อปัญหาเดิมคือปัญหาค่าสูงสุดปกติที่มี n ตัวแปรและ m ข้อจำกัด โดย $s_1, s_2, \ldots, s_m$ เป็นตัวแปรส่วนขาด แล้วสามารถเขียนปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม</u>

ค่าสูงสุด $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m\\
&x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n\\
&s_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \tag{12}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
&z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N\\
&\mathbf{B}\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{13}$$

<u>ปัญหาควบคู่</u>

ค่าต่ำสุด $w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1\\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n\\
&y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \tag{14}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาควบคู่ (14) คือ $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix}$ สำหรับปัญหาค่าสูงสุด จากหัวข้อ 3.5 เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
c_j &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - c_j\\
&= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j\\
&= a_{1j}y_1 + y_2a_{2j} + \ldots + y_ma_{mj} - c_j
\end{aligned}$$

เมื่อผลเฉลยปัจจุบันเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด $c_j \geq 0$ โดย $j = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{1j}y_1 + y_2a_{2j} + \ldots + y_ma_{mj} - c_j \geq 0 \tag{15}$$

จะพบว่า (15) เหมือนกับชุดอสมการ (14) แสดงว่า ผลเฉลย $\mathbf{c_B B^{-1}}$ สอดคล้องกับทุกข้อจำกัดของปัญหาควบคู่

พิจารณาตารางซิมเพล็กซ์ที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ให้ $\mathbf{x_B^*}$ เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ของตัวแปรพื้นฐานที่ให้ค่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุด และตัวแปรส่วนขาดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรส่วนขาด (s_i) ในแถวที่ 0 มีค่าเท่ากับสมาชิกตัวที่ i ของ $\mathbf{c_B B^{-1}}$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์นี้เท่ากับ y_i ในที่นี้จะพบว่า $\mathbf{c_B B^{-1}}$ นี้สอดคล้องกับชุดอสมการ (15) และสมาชิกทุกตัวใน $\mathbf{c_B B^{-1}}$ มีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้น $\mathbf{c_B B^{-1}}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

จากบทที่ 3 ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) คือ $\mathbf{c_B B^{-1} b}$ สำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่ (w) คือ $\mathbf{yb} = \left(\mathbf{c_B B^{-1}}\right)\mathbf{b}$ ดังนั้น ตารางซิมเพล็กซ์ที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\mathbf{c_B B^{-1}}$ โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ $z^* = w^* = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{yb}$

ข้อสังเกต

(1) ในการพิสูจน์นี้ จะเห็นว่า เซตของตัวแปรพื้นฐานหนึ่งจะให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัญหาเดิม ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{c_B B^{-1}}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาควบคู่

(2) เมื่อใช้ตารางซิมเพล็กซ์หาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาเดิมได้แล้ว ข้อมูลในตารางสุดท้ายนี้จะทำให้เราได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาควบคู่ด้วย เนื่องจากเราจะทราบค่าของ $\mathbf{c_B B^{-1}}$

4.2.1 การอ่านหาผลเฉลยของปัญหาควบคู่ในตารางสุดท้ายของปัญหาเดิม

สูตรการคำนวณหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปตารางได้ดังนี้

ตัวเลขในคอลัมน์ของ x_j $= \mathbf{B^{-1} A_j}$ (16)

ค่าทางขวามือในแถวข้อจำกัด $= \mathbf{B^{-1} b}$ (17)

ค่าทางขวามือในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $= \mathbf{c_B B^{-1} b}$ (18)

ให้ c_j สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในแถวที่ 0 แล้ว $c'_j = \mathbf{c_B B^{-1} A_j} - c_j$ (19)

ในกรณีที่ x_j เป็นตัวแปรส่วนขาด $c_j = 0$ และ $\mathbf{A_j}$ เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวที่มีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกตัวอื่น ๆ มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

$$c'_j = \mathbf{c_B B^{-1}} \tag{20}$$

ในกรณีที่ x_j เป็นตัวแปรส่วนเกิน $c_j = 0$ และ $\mathbf{A_j}$ เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวที่มีค่าเป็น –1 ส่วนสมาชิกตัวอื่น ๆ มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

กำหนดให้ x_j เป็นตัวแปรทั้งหมดของปัญหา ซึ่งประกอบด้วย ตัวแปรตัดสินใจ ตัวแปรส่วนขาด ตัวแปรส่วนเกิน และตัวแปรเทียม

$$c'_j = -\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \tag{21}$$

ในกรณีที่ x_j เป็นตัวแปรเทียม $c_j = -M$ (สำหรับปัญหาค่าสูงสุด) และ $\mathbf{A}_j$ เป็2 เวกเตอร์คอลัมน์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวที่มีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกตัวอื่น ๆ มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

$$c'_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} + M \tag{22}$$

จากข้อสังเกต (2) และข้อสรุปการคำนวณหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ในสมการ (20) ถึง (22) เมื่อปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุดปกติและผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสามารถหาได้ แล้วเราสามารถหาผลเฉลยของปัญหาควบคู่ได้จากตารางสุดท้ายดังนี้

(1) ถ้าข้อจำกัด i ในปัญหาเดิมมีเครื่องหมาย "$\leq$" แล้วค่าของตัวแปร y_i ที่สอดคล้องกับข้อจำกัด i เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ s_i ในแถวที่ 0

(2) ถ้าข้อจำกัด i ในปัญหาเดิมมีเครื่องหมาย "$\geq$" แล้วค่าของตัวแปร y_i ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่ i เท่ากับ (–1) คูณสัมประสิทธิ์ของ e_i ในแถวที่ 0

(3) ถ้าข้อจำกัด i ในปัญหาเดิมมีเครื่องหมาย "=" แล้วค่าของตัวแปร y_i ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่ i เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ a_i ในแถวที่ 0 ลบด้วย M

ตัวอย่างที่ 4.5 ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือผลกำไรสูงสุด และมีข้อจำกัดด้านวัตถุดิบ ปริมาณการผลิตขั้นต่ำ และปริมาณความต้องการ

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 30 && \text{(วัตถุดิบ)} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 10 && \text{(ปริมาณการผลิตขั้นต่ำ)} \\ 3x_1 + x_3 &= 20 && \text{(ปริมาณความต้องการ)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

สามารถเขียนปัญหานี้ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

ข้อจำกัด

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + s_1 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad - e_2 + a_2 \quad = \ 10$$

$$3x_1 \quad + \ x_3 \quad + a_3 \ = \ 20$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, e_2, a_2, a_3 \ \geq \ 0$$

เมื่อประมวลผลตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเดิมโดยวิธีบิก–เอ็ม ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดในตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ซิมเพล็กซ์ตารางสุดท้ายที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	
z	1	49/5	0	0	1/5	0	M	M + 19/5	82
x_2	0	–1/5	1	0	1/5	0	0	–1/5	2
x_3	0	3	0	1	0	0	0	1	20
e_2	0	38/5	0	0	2/5	1	–1	13/5	54

จงหาผลเฉลยของปัญหาควบคู่ โดยใช้ข้อมูลจากการประมวลผลปัญหาเดิมนี้

ปัญหาควบคู่ คือ

ค่าต่ำสุด $\quad w = 30y_1 + 10y_2 + 20y_3$

ข้อจำกัด

$$2y_1 + \ y_2 + 3y_3 \ \geq \ 2$$

$$5y_1 + 2y_2 \quad \geq \ 1$$

$$y_1 + 3y_2 + \ y_3 \ \geq \ 4$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \quad \text{urs}$$

ให้ e_1' e_2' และ e_3' เป็นตัวแปรส่วนเกินสำหรับข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ y_1 y_1 และ y_3 เป็นตัวแปรในปัญหาควบคู่ซึ่งสอดคล้องกับข้อจำกัด 1 2 และ 3 ตามลำดับ ในปัญหาเดิม ตามลำดับ ข้อจำกัดที่ 1 มีเครื่องหมาย "≤" ค่าของ y_1 เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ s_1 ดังนั้น $y_1 = 1/5$ ข้อจำกัดที่ 2 มีเครื่องหมาย "≥" ค่าของ y_2 เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ e_2 คูณด้วย (–1) ดังนั้น $y_2 = 0$ ข้อจำกัดที่ 3 มีเครื่องหมาย "=" ค่าของ y_3 เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ a_3 ลบด้วย M ดังนั้น $y_3 = M + 19/5 - M = 19/5$ โดยที่มีค่า $w = 82$

ในกรณีของปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าต่ำสุดปกติ การอ่านผลเฉลยของปัญหาควบคู่จากตารางสุดท้ายที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัญหาเดิม สามารถทำได้โดยใช้เกณฑ์เดียวกัน ยกเว้น กรณีข้อจำกัดที่ i ในปัญหาเดิมมีเครื่องหมาย "=" ตัวแปร y_i ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่ i เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ a_i ในแถวที่ 0 บวกด้วย M

4.2.2 ทฤษฎีตัวแปรส่วนขาด

จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ Dantzig (1993) Bazaraa, Jarvis and Sherali (1997) และWinston (2004) ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญซึ่งทำให้สามารถหาผลเฉลยของปัญหาหนึ่งจากการประมวลผลปัญหาควบคู่ของปัญหานั้น

ทฤษฎีบทที่ 4.3 *ทฤษฎีตัวแปรส่วนขาดเพิ่มเติม (Complementary slackness)* สมมติว่าปัญหาเดิมเป็นปัญหาค่าสูงสุดปกติที่มีตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และมีข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย "$\leq$" อยู่ m จำกัด ให้ $s_1, s_2, \ldots, s_m$ เป็นตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1, 2, …, m ตามลำดับ ปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ ปัญหาค่าต่ำสุดปกติที่มีตัวแปร $y_1, y_2, \ldots, y_m$ และข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย "$\geq$" อยู่ n ข้อจำกัด กำหนดให้ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ แทนตัวแปรส่วนเกินสำหรับข้อจำกัดที่ 1, 2, …, n ตามลำดับ ให้ $x = [x_1 \; x_2 \ldots x_n]^T$ และ $y = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m]$ แทนผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ ก็ต่อเมื่อ

$$s_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{23}$$

และ $$e_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

จากสมการ (23) ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาทั้งสองจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) ถ้า $s_i > 0$ แล้ว $y_i = 0$ (25)

(2) ถ้า $y_i > 0$ แล้ว $s_i = 0$ (26)

จากสมการ (24) ผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาทั้งสองจะสอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) ถ้า $e_j > 0$ แล้ว $x_j = 0$ (27)

(2) ถ้า $x_j > 0$ แล้ว $e_j = 0$ (28)

สมการ (25) และ (27) เราจะเห็นว่า ถ้าข้อจำกัดในปัญหาเดิมหรือปัญหาควบคู่เป็นข้อจำกัดผูกพัน แล้วตัวแปรที่สอดคล้องกับข้อจำกัดดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ 0

เพื่อแสดงการแปลความหมายของทฤษฎีตัวแปรส่วนขาดเพิ่มเติมพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 4.5

ผลเฉลยของปัญหาเดิม คือ

$$z = 82 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 20 \quad e_2 = 54$$
$$s_1 = 30 - 2(0) - 5(2) - 20 = 0$$
$$x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3 + e_2 = 0$$
$$a_3 = 20 - 3x_1 - x_3 = 20 - 3(0) - 20 = 0$$

ขณะที่ผลเฉลยของปัญหาควบคู่ คือ

$$w = 82 \quad y_1 = 1/5 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 19/5$$
$$e_1' = 2y_1 + y_2 + 3y_3 - 2 = 49/5$$
$$e_2' = 5y_1 + 2y_2 - 1 = 0$$
$$e_3' = y_1 + 2y_2 + y_3 - 4 = 0$$

จะเห็นว่า $s_1y_1 = e_2y_2 = a_3y_3 = 0$ และ $e_1'x_1 = e_2'x_2 = e_3'x_3 = 0$

4.3 การแปลความหมายในเชิงเศรษฐศาสตร์ของปัญหาควบคู่

ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร เช่น ปริมาณวัตถุดิบในคลังที่มีอยู่อย่างจำกัด ถ้าเจ้าของโรงงานต้องการจัดหาวัตถุดิบมาเพิ่ม เพื่อให้สามารถผลิตและขายสินค้าได้มากขึ้น ราคาวัตถุดิบที่จะจัดหามาเพิ่มนี้ควรเป็นเท่าใด หากเป็นวัตถุดิบที่มีการขาดแคลนในท้องตลาด หรือการจัดหาวัตถุดิบเพิ่มนี้ต้องเสียค่าใช้จ่ายอื่น ๆ เพิ่มเติม เช่น ค่าขนส่ง เป็นต้น ดังนั้น เจ้าของกิจการควรทราบว่า ราคาวัตถุดิบที่เขายินดีที่จะซื้อเพื่อนำวัตถุดิบนี้มาใช้ในการผลิตควรเป็นเท่าใด
จากตัวอย่างที่ 4.1 ปัญหาควบคู่คือ

ค่าต่ำสุด $w = 50y_1 + 40y_2 + 30y_3 + 15y_4$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geq 30 \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 + y_4 &\geq 20 \\ y_1 + 3y_2 + y_4 &\geq 15 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

โดยที่ y_1 y_2 y_3 และ y_4 แทนราคาวัตถุดิบต่อกิโลกรัมของวัตถุดิบ A B C และ D ตามลำดับ ราคาวัตถุดิบนี้ อาจเป็นราคาที่ซื้อขายกันในท้องตลาด พิจารณาฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่ (w) แทนราคาวัตถุดิบรวมที่จะต้องจ่ายทั้งหมด

ในการกำหนดราคาวัตถุดิบ ถ้ามีผู้ว่าจ้างให้โรงงานนี้ผลิตสินค้าดังกล่าวข้างต้น ราคาวัตถุดิบที่ผู้ว่าจ้างเสนอให้โรงงานต้องสูงมากพอที่จะทำให้โรงงานผลิตสินค้าเหล่านี้ ตัวอย่างเช่น โรงงานต้องการเงินอย่างน้อยจำนวน 30 บาท สำหรับวัตถุดิบผสมที่มีวัตถุดิบชนิดที่ A B C และ D จำนวน 4 2 1 และ 1 กิโลกรัม ตามลำดับ เนื่องจากวัตถุดิบจำนวนดังกล่าวนี้สามารถใช้ผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 1 ชิ้น นั่นคือ y_1 y_2 y_3 และ y_4 ต้องสอดคล้องกับข้อจำกัด $4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 30$ ซึ่งจำนวนเงิน 30 บาทนี้ ก็คือราคาขายสินค้าชนิดที่ 1 นั่นเอง

ด้วยเหตุนี้ตัวแปรในปัญหาควบคู่ของปัญหาค่าสูงสุดปกติ จะเรียกว่า *ราคาเงาของทรัพยากร (Resource shadow price)*

ราคาเงาของข้อจำกัดหนึ่ง หมายถึง ปริมาณของค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ดีขึ้น เมื่อมีการเพิ่มค่าทางขวามือของข้อจำกัดนี้จำนวน 1 หน่วย กล่าวคือ สำหรับปัญหาค่าสูงสุด เช่น ปัญหาการผลิตสินค้าของบริษัทแห่งหนึ่ง โดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ ผลกำไรจากการผลิตและขาย และมีข้อจำกัดเป็นปริมาณวัตถุดิบชนิดหนึ่ง เมื่อบริษัทหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้แล้ว บริษัทมีการจัดหาวัตถุดิบเพิ่มเติมจำนวน 1 หน่วย ผลกำไรจากการมีวัตถุดิบ หรือทรัพยากรเพิ่มขึ้นนี้เท่ากับราคาเงาของข้อจำกัดด้านวัตถุดิบนี้ สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ราคาเงาของข้อจำกัดที่ i จะเป็นค่าของตัวแปรที่ i ของปัญหาควบคู่ (y_i) ในผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด จากตัวอย่างที่ 4.2 ปัญหาควบคู่คือ

ค่าสูงสุด $\quad w = 1{,}000y_1 + 700y_2 + 200y_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 80y_1 + 200y_2 + 20y_3 &\le 50 \\ 150y_1 + 50y_2 + 36y_3 &\le 70 \\ 100y_1 + 80y_2 + 10y_3 &\le 40 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

ในที่นี้ y_1 แทนราคาต่อหน่วยของโปรตีนที่คิดเงินจากผู้ต้องการควบคุมน้ำหนัก

y_2 แทนราคาต่อหน่วยของคาร์โบไฮเดรตที่คิดเงินจากผู้ต้องการควบคุมน้ำหนัก

y_3 แทนราคาต่อหน่วยของวิตามินที่คิดกับผู้ต้องการควบคุมน้ำหนัก

ศูนย์โภชนาการแห่งนี้ต้องการจะทำให้มีรายได้สูงสุดจากการขายชุดอาหาร โดยที่รายได้รวมเท่ากับ $1{,}000y_1 + 700y_2 + 200y_3$ อย่างไรก็ตาม ศูนย์โภชนาการต้องตั้งราคาให้ต่ำพอสมควรที่ผู้ต้องการควบคุมน้ำหนักมีความสนใจที่จะซื้อชุดอาหารนี้ ตัวอย่างเช่น ซื้ออาหารประเภทที่ 1 ในราคา 50 บาทต่อ 100 กรัม จะได้โปรตีน 80 หน่วย คาร์โบไฮเดรต 200 หน่วย และวิตามิน 20 หน่วย ดังนั้น ศูนย์โภชนาการไม่สามารถขายอาหารประเภทที่ 1 ในราคามากกว่า 50 บาทต่อ 100 กรัม ทำให้ได้เงื่อนไขในข้อจำกัดที่ 1 ของปัญหาควบคู่คือ $80y_1 + 200y_2 + 20y_3 \le 50$ ในทำนองเดียวกับข้อจำกัดที่ 2 และ 3 ตามลำดับ โดยที่ y_1 y_2 และ $y_3 \ge 0$

ในทางเศรษฐศาสตร์ เราคิดถึง $\mathbf{y}^* = [y_1, y_2, ..., y_m]$ ในฐานะของเวกเตอร์ของราคาเงาของค่าทางขวามือ ถ้าข้อจำกัดที่ i แทนความต้องการสำหรับการผลิตแล้ว $\mathbf{y}^*$ เป็น*ต้นทุนเพิ่ม (Incremental cost)* ของการผลิตมากกว่าหรือเท่ากับหนึ่งชิ้น หรืออาจกล่าวว่า $\mathbf{y}^*$ คือ *ราคาเหมาะสม (Fair price)* เป็นจำนวนเงินที่เราควรจะจ่าย เพื่อให้ได้สินค้าชนิดที่ i เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

สำหรับปัญหาค่าต่ำสุดที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นต้นทุนการผลิตสินค้า ที่มีข้อจำกัดด้านกำลังการผลิตของหน่วยผลิตหนึ่ง เมื่อโรงงานหาผลเฉลยของปัญหาได้แล้ว ด้วยต้นทุนรวมค่าหนึ่ง หากโรงงานพยายามปรับปรุงวิธีการทำงานทำให้หน่วยผลิตดังกล่าวมีกำลังการผลิตสูงขึ้น ต้นทุนที่ลดลงจากการเพิ่มกำลังการผลิตจำนวน 1 หน่วย เป็นราคาเงาของข้อจำกัดด้านกำลังการผลิตของหน่วยผลิตนี้ ในการคำนวณหาราคาเงา สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ราคาเงาของข้อจำกัดที่ i จะเป็นค่าของตัวแปรที่ i ในปัญหาควบคู่ (y_i) ในตารางสุดท้ายคูณด้วย (–1) ตัวอย่างการคำนวณหาราคาเงาแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.6 จากตัวอย่างที่ 4.5 ราคาเงาของข้อจำกัดที่ 1 คือ 1/5 นั่นคือ หากบริษัทสามารถเพิ่มจำนวนวัตถุดิบได้ 1 หน่วย จะได้กำไรเพิ่มขึ้น 0.2 บาท ราคาเงาของข้อจำกัดที่ 2 เท่ากับ 0 นั่นคือ การเพิ่มปริมาณการผลิตขั้นต่ำจะไม่ทำให้บริษัทมีกำไรเพิ่มขึ้น ขณะที่การเพิ่มปริมาณความต้องการสินค้าจำนวน 1 หน่วยทำให้บริษัทมีกำไรเพิ่มขึ้น 3.80 บาท

4.4 ดูอัลซิมเพล็กซ์อัลกอริทึม

จากวิธีซิมเพล็กซ์พบว่า ในการคำนวณซ้ำทุกครั้ง ค่าทางขวามือจะต้องเป็นบวกหรือศูนย์ ถ้าค่าทางขวามือเป็นลบแล้วปัญหานี้จะไม่สามารถหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ และไม่สามารถประมวลผลโดยใช้วิธีการซิมเพล็กซ์ต่อไปได้อีก แต่ปัญหาที่พบเห็นกันในชีวิตประจำวัน อาจมีค่าทางขวามือเป็นลบ ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อจำกัดของปัญหาที่มีเครื่องหมาย "≥" หรือ "=" ซึ่งการแก้ปัญหาลักษณะนี้จะมีปัญหาค่าเริ่มต้นดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.8 ส่งผลให้ต้องใช้วิธีทู-เฟส หรือบิก–เอ็ม เพื่อให้ค่าเริ่มต้นที่เป็นไปได้ก่อน *วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ (Dual simplex method)* เป็นวิธีที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาในกรณีนี้ โดยไม่ต้องหาค่าเริ่มต้นที่เป็นไปได้ก่อน ทำให้เกิด ความสะดวกสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีข้อจำกัดมีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ หรือเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งขั้นตอนของวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ สำหรับปัญหาค่าสูงสุดมีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของดูอัลซิมเพล็กซ์ กล่าวคือ มีค่าทาง ขวามือของข้อจำกัดอย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัด มีค่าเป็นลบ

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาว่าค่าทางขวามือของทุกข้อจำกัดไม่เป็นลบใช่หรือไม่ ถ้าไม่ใช่ ปัญหานี้มีผลเฉลยที่เป็นไปได้และผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด หากมีอย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัดมีค่าทางขวามือเป็นลบจะประมวลผลต่อในขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวแปรพื้นฐานที่มีค่าทางขวามือเป็นลบมากที่สุด ให้เป็นตัวแปรออก และให้แถวของตัวแปรออกนี้เป็น *แถวตัวหลัก (Pivot row)* ในการเลือกตัวแปรเข้า ให้

พิจารณาตัวแปรจรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถวตัวหลักมีค่าเป็นลบ หากมีตัวแปรจรมากกว่าหนึ่งตัวแปรที่มีค่าสัมประสิทธิ์ในแถวตัวหลักเป็นลบ ให้พิจารณาอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรเหล่านี้ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์ในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ กับแถวตัวหลัก เลือกตัวแปรจรที่มี *อัตราส่วนสัมบูรณ์ (Absolute ratio)* มีต่ำที่สุด ให้เป็นตัวแปรเข้า กล่าวคือ อัตราส่วนสัมบูรณ์ของตัวแปรจร x_j เท่ากับ

$$\left|\frac{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x_j \text{ ในแถวที่ 0}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x_j \text{ ในแถวตัวหลัก}}\right|$$

ขั้นตอนที่ 4 ถ้ามีข้อจำกัดที่มีค่าทางขวามือเป็นลบ และมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในข้อจำกัดนี้มีค่าเป็นบวกแล้ว ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ยังมีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ ถ้าเงื่อนไขข้างต้นไม่เป็นจริงแล้ววิธีการดูอัลซิมเพล็กซ์จะกลับไปขั้นตอนที่ 2

การหาผลเฉลยโดยวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์และการเปรียบเทียบวิธีการหาผลเฉลยวิธีนี้กับวิธีซิมเพล็กซ์ จะขอใช้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 3.13 มาหาผลเฉลยโดยวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ในรูปตาราง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์

วัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

รูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\begin{aligned} &\text{ค่าสูงสุด } (-z) = z' = -2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ &-x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq -8 \\ &-3x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ตารางที่ 4.7 ตารางเริ่มต้น

การทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z'	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	ค่าทางขวามือ
0	z'	1	2	3	1	0	0	0
	s_1	0	-1	-4	$-\mathbf{2}$	1	0	-8
	s_2	0	-3	-2	0	0	1	-6

จากตารางที่ 4.7 พบว่าค่าทางขวามือยังมีค่าเป็นลบแสดงว่าผลเฉลยที่ได้ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากค่าทางขวามือในแถวที่ 1 มีค่าเป็นลบมากที่สุด จึงกำหนดให้ตัวแปรพื้นฐาน s_1 เป็นตัวแปรออกและเรียกแถวที่หนึ่งว่าแถวตัวหลัก พิจารณาตัวแปรเข้า โดยใช้อัตราส่วนสัมบูรณ์ของตัวแปรจรทั้งสามตัวแปรคือ x_1 x_2 และ x_3 ทำให้ได้อัตราส่วนสัมบูรณ์เป็น $\left|\frac{2}{-1}\right|$ $\left|\frac{3}{-4}\right|$ และ $\left|\frac{1}{-2}\right|$ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาอัตราส่วนนี้ พบว่า ตัวแปร x_3 มีค่าอัตราส่วนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด ตัวแปร x_3 จึงเป็นตัวแปรเข้า และตัวเลข -2 ในแถวที่ 1 ในคอลัมน์ของ x_3 จะเรียกเป็นตัวเลขหลัก (Pivot number) จากนั้นใช้เทคนิคการดำเนินการตามแถว เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ค่าใหม่ ซึ่งแสดงในตารางที่ 4.8 ซึ่งจะพบว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตารางที่ 4.8 ตารางเหมาะสมที่สุดริ่มต้นโดยใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์

คำนวณรอบที่	ตัวแปรพื้นฐาน	z'	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
1	z'	1	0	-5	-3	-2	0	-16
	x_1	0	1	4	-2	-1	0	8
	s_2	0	0	10	6	-3	1	18

4.5 วิธีคารมาร์คาร

อัลกอริทึมจากจุดภายใน (Interior–point algorithm) เป็นอัลกอริทึมหนึ่งซึ่งปรับปรุงผลเฉลยภายในพื้นที่ที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น โดยการทำงานเป็นขั้น ๆ (Step) ตลอดทั้งพื้นที่ภายใน ซึ่งแตกต่างจากซิมเพล็กซ์อัลกอริทึมที่พยายามปรับปรุงผลเฉลยเป็นขั้น ๆ ไปตามขอบ (Boundary) ของพื้นที่ที่เป็นไปได้

อัลกอริทึมของคารมาร์คาร (Karmarkar's algorithm) เป็นอัลกอริทึมหนึ่งที่ปรับปรุงมาจากซิมเพล็กซ์อัลกอริทึมซึ่งมีพื้นฐานมาจากวิธีกราฟ แต่ใช้ฟังก์ชันที่มีศักยภาพสูงในการวัดความก้าวหน้าของผลเฉลย เพื่อมุ่งสู่ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

Dantzig and Thapa (1997) กล่าวว่า ศักยภาพของฟังก์ชันถูกสร้างขึ้นเพื่อให้มั่นใจว่า (1) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ลดลงในแต่ละรอบการคำนวณ (2) ผลเฉลยยังคงอยู่ภายในพื้นที่ที่เป็นไปได้ (Feasible space) และ (3) การลู่เข้าสู่ค่าหนึ่งของผลเฉลยจะใช้เวลาการประมวลผลเป็นโพลิโนเมียล (Polynomial) เมื่อเปรียบเทียบกับซิมเพล็กซ์อัลกอริทึม ซึ่งใช้เวลาการประมวลผลเป็นเอกซ์โปรแนลเชียล (Exponential) ในหัวข้อนี้จะอธิบายแนวคิดพื้นฐานวิธีการของคารมาร์คาร หากต้องการรายละเอียดเพิ่มเติมสามารถดูได้จาก Parker and Rardin (1988) Bazaraa, Jarvis and Sherali (1997) Hooker and Osorio (1997) และ Bronson and Naadimuthu (1997)

วิธีการของคารมาร์คาร กำหนดให้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned} \text{ค่าต่ำสุด} \quad & z = \mathbf{cx} \\ \text{ข้อจำกัด} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq 0 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

โดยที่ $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ และ $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]$ ส่วน A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $\mathbf{0}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ขนาด $m \times 1$ ผลเฉลยการโปรแกรมเชิงเส้นที่ $\left[\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \ldots \quad \frac{1}{n}\right]^T$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ และค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) เท่ากับศูนย์

แนวคิดที่มีบทบาทสำคัญสำหรับวิธีของคารมาร์คาร มีดังนี้

(1) เวคเตอร์สำหรับการป้องกัน (Protection) ของเซต $\mathbf{x}$ จะสอดคล้องกับ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

(2) การแปลงศูนย์กลางของคารมาร์คาร (Karmarkar's centering)

(3) ฟังก์ชันศักยภาพของคารมาร์คาร (Karmarkar's ponential function)

นิยาม 1 n–dimensional unit simplex S เป็นเซตของจุด $[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ ที่สอดคล้อง $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ และ $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$

4.5.1 การป้องกัน

ให้ $\mathbf{x}^0$ เป็นจุดที่เป็นไปได้ที่สอดคล้องกับตัวแบบ (1) ในหัวข้อ 4.1 ซึ่งเราต้องการจะเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^0$ ไปยังจุดที่เป็นไปได้อีกจุดหนึ่ง $\left(\mathbf{x}^1\right)$ ที่ทำให้ **vx** มีค่ามากขึ้น โดยที่ **v** เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดคงที่ สมมติว่า $\mathbf{x}^1$ อยู่ห่างจาก $\mathbf{x}^0$ ในทิศทาง $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \ldots \quad d_n]$ สำหรับค่า $\mathbf{x}^1$ ที่เป็นไปได้ **d** จะต้องสอดคล้องกับ $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$ และ $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0$ ถ้าเราเลือกทิศทาง **d** ที่แก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $\quad z' = \mathbf{vd}$

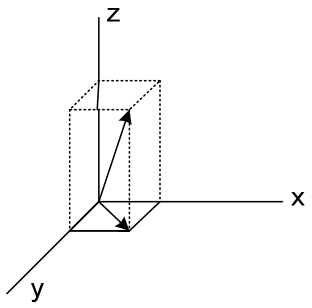
ข้อจำกัด $\quad Ad = 0$

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0 \qquad (30)$$

$$\|\mathbf{d}\| = 1$$

แล้วเราจะเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ **vx** ต่อหน่วยความยาวที่เคลื่อนที่มีค่าเพิ่มขึ้นสูงที่สุด ทิศทาง **d** ที่ได้จากการแก้ปัญหา (30) กำหนดโดยการป้องกันของ **v** บนเซต $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ ที่สอดคล้องกับ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ และ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ การป้องกันของเซต **v** นี้เท่ากับ $\left[1 - \mathbf{B}^T\left(\mathbf{BB}^T\right)^{-1}\right]\mathbf{v}$ โดยที่ **B** เป็นเมทริกซ์ขนาด $(m+1)\times n$ ซึ่ง m แถวแรกจะเหมือนกับสมาชิกในเมทริกซ์ **A** ส่วนแถวสุดท้ายจะเป็นเวคเตอร์แถวขนาด n ที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากับ 1

เมื่อพิจารณาจากกราฟในรูปที่ 4.1 เวคเตอร์ $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$ โดยที่ **p** สอดคล้องกับ $\mathbf{Ap} = 0$ และ **w** เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับทุกเวคเตอร์ **x** ที่สอดคล้องกับ $\mathbf{Ax} = 0$ แล้ว p เป็นการป้องกัน (Projection) ของ **v** บนเซตของ **x** ที่ทำให้ $\mathbf{Ax} = 0$ ตัวอย่างเช่น ในรูปที่ 4.1 $\mathbf{v} = [-1 \quad -2 \quad 5]$ ที่ project บนเซตของเวคเตอร์ 3 มิติ เวคเตอร์ **v** สามารถแตกออกเป็นเวคเตอร์ย่อย $\mathbf{v} = [-1 \quad -2 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad 5]$ ดังนั้น $\mathbf{p} = [-1 \quad -2 \quad 0]$ ซึ่งจะเห็นว่า **p** สอดคล้องกับข้อจำกัด $\mathbf{Ax} = 0$ ที่ใกล้เคียงกับ **v**



รูปที่ 4.1 แสดงเวคเตอร์ v

4.5.2 การแปลงศูนย์กลางของคารมาร์คาร

กำหนดให้จุด $\mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \end{bmatrix}$ อยู่ใน S ซึ่ง $x_j^k > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ เราสามารถเขียนการแปลงศูนย์กลาง (Centering transformation) ของจุด x^k ได้เป็น $f\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \middle| \mathbf{x}^k\right)$ ถ้า $\mathbf{x}^k$ เป็นจุดใน S แล้ว $f\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} / \mathbf{x}^k\right)$ เปลี่ยนรูปจุด $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ ใน S ลงในจุด $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ ใน S ซึ่ง

$$y_j = \frac{\dfrac{x_j}{x_j^k}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{x_r^k}} \tag{31}$$

ให้ $\text{Diag}\left(\mathbf{x}^k\right)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกคือ a_{ij} $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ ดังนั้น $\text{Diag}\left(\mathbf{x}^k\right)_{ii} = \mathbf{x}_i^k$ การแปลงศูนย์กลางโดย (31) เป็นคุณสมบัติหนึ่งใน Lemma 1.

เมื่อได้ค่า $\mathbf{y}^{k+1} = \begin{bmatrix} y_1^{k+1} & y_2^{k+1} & \dots & y_n^{k+1} \end{bmatrix}$ แล้วสามารถแปลง (Transform) ให้อยู่ในรูป x^{k+1} ได้โดย

$$\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}\left(\mathbf{y}^{k+1} \middle| \mathbf{x}^k\right) \tag{32}$$

Lemma 1 การแปลงศูนย์กลางของคารมาร์คาร (Karmarkar's centering transformation) มีคุณสมบัติดังนี้

(1) $f\left(\mathbf{x}^k \middle| \mathbf{x}^k\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$

สำหรับ $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ $f\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}^k\right) \neq f\left(\mathbf{x}' \middle| \mathbf{x}^k\right)$

(3) $f\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}^k\right) \in S$

สำหรับจุด $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ ใด ๆ ใน S จะมีจุด $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ ใน S เพียงจุดเดียวที่สอดคล้องกับ

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \middle| \mathbf{x}^k\right) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T \tag{33}$$

จุด $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ กำหนดโดย $x_j = \dfrac{x_j^k y_j}{\sum_{r=1}^{n} x_r^k y_r}$

ถ้า $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ และ $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ สอดคล้องกับ (33) เราจะเขียนได้ว่า $f^{-1}\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T \middle| \mathbf{x}^k\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ จุด $\mathbf{x}$ ใน S จะสอดคล้องกับ $\mathbf{Ax} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A\left[\text{Diag}\left(\mathbf{x}^k\right)\right] f\left(\mathbf{x}/\mathbf{x}^k\right) = 0$ (34)

เพื่ออธิบายการแปลงศูนย์กลางสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในหัวข้อถัดไป

4.5.3 คารมาร์คารอัลกอริทึม

เนื่องจากวิธีคารมาร์คาร สามารถใช้ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ที่มีรูปแบบปัญหาดัง (29) สามารถใช้วิธีคารมาร์คาร เพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดต่อไป กำหนด $\in$ แทนค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุดที่ยอมรับได้ ดังนั้น ถ้า $z = \mathbf{cx} < \in$ วิธีคารมาร์คารจะหยุดการทำงาน และผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด ขั้นตอนของวิธีคารมาร์คาร มีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : กำหนดให้ $k = 0$ เริ่มต้นด้วยผลเฉลยที่เป็นไปได้ $\mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}^T$

$r = 1/\sqrt{n(n-1)}$ และ $\theta = (n-1)/3n$

ขั้นตอนที่ 2 : ถ้า $z = \mathbf{cx}^k < \in$ แล้ว ให้หยุดการทำงาน และผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่ดี และยอมรับได้ ถ้า $z = \mathbf{cx}^k \geq \in$ ให้ทำงานขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 : ให้ $D^k = \text{diag}(x^k)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีตัวประกอบทแยงมุม $\mathbf{x}^k$

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{D}^k \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(m+1)\times n$ โดยที่ m แถวแรก เท่ากับ $A\left[\text{Diag}\left(x^k\right)\right]$ ส่วนแถวที่ $m+1$ เป็นเวคเตอร์ของ 1

$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{D}^k \mathbf{c}^T$ และ $\mathbf{c}_p = \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{P}\right]\overline{\mathbf{C}}$

หาจุด $\mathbf{y}^{k+1} = \begin{bmatrix} y_1^{k+1} & y_2^{k+1} & \dots & y_n^{k+1} \end{bmatrix}^T$ จาก $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^0 - r\theta \dfrac{\mathbf{c}_P}{\|\mathbf{c}_P\|}$

ขั้นตอนที่ 4 :หา $\mathbf{x}^k$ ใหม่จาก $\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}\left(y^{k+1}\middle|\mathbf{x}^k\right)$ โดย $x^k = \left[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\right]^T$ และ $x_j = \dfrac{x_j^k y_j}{\sum_{r=1}^{r=n} x_r^k y_r}$ จากนั้นกลับไปขั้นตอนที่ 2

<u>หมายเหตุ</u> θ เป็นค่าคงที่ $0 < \theta < 1$ เพื่อให้มั่นใจว่าอัลกอริทึมนี้จะลู่เข้า (Convergence) สู่ค่าคงที่ค่าหนึ่ง โดยทั่วไปอาจกำหนด $\theta = \dfrac{1}{4}$ (Winson, 2004)

ตัวอย่างที่ 4.8 พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ แล้วใช้วิธีของคารมาร์คารเพื่อหาผลเฉลย โดยให้ $\theta = 1/4$ และ $\in = 0.10$

ค่าต่ำสุด $\quad z = x_1 + 2x_2 - x_3$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

การคำนวณรอบที่ 1

ขั้นตอนที่ 1 :

จากปัญหานี้ $n = 3$ $\quad \mathbf{x}^0 = \left[\dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{3}\right]^T$ เป็นผลเฉลยเริ่มต้นของปัญหา ดังนั้น เราสามารถใช้อัลกอริทึมของคารมาร์คารได้ทันที

$$\mathbf{c} = [\,1 \;\; 2 \;\; -1]$$

$$\mathbf{a} = [-1 \;\; 2 \;\; -1] \qquad \operatorname{diag}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\left(\operatorname{diag}\left(\mathbf{x}^0\right)\right) = \left[-1/3 \quad 2/3 \quad -1/3\right]$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 :

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 2/3 > 1/4$$

ดังนั้น จะทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 :

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \mathbf{P} \right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathrm{p}} = \mathbf{W} \left[\mathrm{Diag}\left(\mathbf{x}^{0} \right) \right] \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \mathbf{c}_{\mathrm{P}} \right\| = 0.4714$$

$$\mathbf{y}^{1} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \frac{(1/4)}{(0.4714)\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2612 \\ 0.333 \\ 0.4055 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 4 : หาค่า $\mathbf{x}^{1}$

$$\sum_{r=1}^{n} x_{r}^{k} y_{r} = \frac{1}{3}(0.2612) + \frac{1}{3}(0.333) + \frac{1}{3}(0.4055) = 0.333$$

$$\mathbf{x}^{1} = \mathrm{f}^{-1}\left(\mathbf{y}^{1} \middle| \mathbf{x}^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{0.333} \begin{bmatrix} (1/3)(0.2612) \\ (1/3)(0.333) \\ (1/3)(0.4055) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2612 \\ 0.3333 \\ 0.4055 \end{bmatrix}$$

การคำนวณรอบที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 : $z = \mathbf{c}\mathbf{x}^{1} = 0.5223 > 0.10$

$$\mathbf{A}\left(\mathrm{diag}\left(\mathbf{x}^{1} \right) \right) = \begin{bmatrix} -0.2612 & 0.6667 & -0.4055 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.2612 & 0.6667 & -0.4055 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \mathbf{P} \right) = \begin{bmatrix} 0.5659 & -0.0762 & -0.4897 \\ -0.0762 & 0.0103 & 0.0659 \\ -0.4897 & 0.0659 & 0.4238 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathrm{p}} = \mathbf{W} \left[\mathrm{Diag}\left(\mathrm{x}^{1} \right) \right] \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.2956 & -0.0398 & -0.2558 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\left\| \mathbf{c}_{\mathrm{P}} \right\| = 0.3929$$

$$\mathbf{y}^{2} = \begin{bmatrix} 0.2566 & 0.3437 & 0.3998 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ขั้นตอนที่ 3 : หาค่า $\mathbf{x}^{2}$

$$\sum_{r=1}^{n} x_r y_r = 0.3437$$

$$\mathbf{x}^2 = \frac{1}{0.3437}\begin{bmatrix} 0.2612 & (0.2566) \\ 0.3333 & (0.3437) \\ 0.4055 & (0.3998) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1950 & 0.3333 & 0.4717 \end{bmatrix}^T$$

เนื่องจาก $z = cx = 0.3899 > 0.10$ จึงต้องทำซ้ำครั้งต่อไป แสดงดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 ผลเฉลยในการทำซ้ำ

คำนวณรอบที่	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	**z**
3	0.2534	0.3528	0.3938	0.1401	0.3333	0.5266	0.2801
4	0.2517	0.3598	0.3885	0.0980	0.333	0.5687	0.1960
5	0.2508	0.3648	0.3844	0.0674	0.3333	0.5993	0.1347
6	0.2504	0.3682	0.3814	0.0458	0.3333	0.6209	0.0916
7	0.2502	0.3705	0.3794	0.0309	0.3333	0.6357	0.0618
8	0.2501	0.3720	0.3779	0.0208	0.3333	0.6459	0.0416
9	0.2500	0.3730	0.3770	0.0139	0.3333	0.6527	0.0279
10	0.2500	0.3737	0.3763	0.0093	0.3333	0.6573	0.0186
11	0.2500	0.3741	0.3759	0.0062	0.3333	0.6604	0.0125
12	0.2500	0.3744	0.3756	0.0042	0.3333	0.6625	0.0083

จากการทำซ้ำครั้งที่ 12 พบว่า $z = 0.0083 < 0.10 = \in$ อัลกอริทึมจะหยุดทำงาน ผลเฉลยคือ $x_1 = 0.0042$ $x_2 = 0.3333$ และ $x_3 = 0.6625$

4.5.4 การเปลี่ยนปัญหาให้เป็นรูปแบบพิเศษของคารมาร์คาร

จากวิธีของคารมาร์คาร จะเห็นว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นทั่วไป ไม่อยู่ในรูปแบบที่สามารถจะดำเนินการตามขั้นตอนของวิธีคารมาร์คารได้ทันที ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีในการเปลี่ยนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบพิเศษของคารมาร์คาร เพื่อให้สามารถดำเนินการหาผลเฉลยต่อไปได้

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ คือ

ค่าต่ำสุด $z = \mathbf{cx}$

$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{B}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

โดยปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ

ค่าสูงสุด $z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}$

$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

โดยที่ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ เป็นตัวแปรของปัญหาเดิม และ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}^T$ เป็นตัวแปรของปัญหาควบคู่

ขั้นตอนในการเปลี่ยนปัญหาเป็นรูปแบบพิเศษของคารมาร์คาร มีดังนี้

(1) นำตัวแปรส่วนขาดและตัวแปรส่วนเกินมาใช้กับข้อจำกัดของปัญหาเดิม และปัญหาควบคู่

รวมข้อจำกัดต่าง ๆ ของทั้งสองปัญหาเข้าด้วยกัน และให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของทั้งสองปัญหานี้มีค่าเท่ากันด้วย

(2) สร้างข้อจำกัดที่มีขอบเขต (Bounding constraint)

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_j + \sum_{i=1}^{m+n} y_i \le K \tag{35}$$

โดยที่ k ควรต้องมีค่ามากพอที่จะทำให้สามารถรวมผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหาเดิม

เพิ่มตัวแปรส่วนขาด s เข้าไปในอสมการ (35) จะได้

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_j + \sum_{i=1}^{m+n} y_i + s = K \tag{36}$$

(3) นำตัวแปรหลอก (Dummy variable) d_1 โดยที่ $d_1 = 1$ มาเพื่อให้ข้อจำกัดทั้งหมดมีค่าทางขวามือเป็นศูนย์ รวมทั้งสมการ (36)

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_j + \sum_{i=1}^{m+n} y_i + s = K$$

และ $d_1 = 1$

จะได้ $$\sum_{j=1}^{m+n} x_j + \sum_{i=1}^{m+n} y_i + s - Kd_1 = 0 \tag{37}$$

และ $$\sum_{j=1}^{m+n} x_j + \sum_{i=1}^{m+n} y_i + s + d_1 = K + 1 \tag{38}$$

(4) ทำการเปลี่ยนแปลงต่อไปนี้ เพื่อให้ค่าทางขวามือของสมการสุดท้ายเป็น

$$\begin{aligned} x_j &= (K+1)x'_j \\ y_j &= (K+1)y'_j \\ s &= (K+1)s' \\ e_j &= (K+1)e'_j \\ d_j &= (K+1)d'_j \end{aligned} \tag{39}$$

(5) เพิ่มตัวแปรเทียม d_2 มาเพิ่ม ในสมการข้อจำกัดทั้งหมด ซึ่งทำให้ผลรวมของสัมประสิทธิ์ของแต่ละสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในสมการสุดท้ายเท่ากับหนึ่ง ซึ่งตัวแบบปัญหาที่ได้จะอยู่ในรูปแบบพิเศษของคารมาร์คาร โดยฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ค่าต่ำสุด d_2'

ตัวอย่างที่ 4.9 จงเปลี่ยนปัญหานี้ให้อยู่ในรูปแบบพิเศษของคารมาร์คาร

ค่าสูงสุด $z = x_1 + 4x_2$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 20 \\ x_1 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

ปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ

ค่าต่ำสุด $z' = 10y_1 + 20y_2 + 6y_3$

ข้อจำกัด
$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 1 \\ 2y_1 + 3y_2 &\ge 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(1) เพิ่มตัวแปรส่วนเกินและตัวแปรส่วนขาดในปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ และรวมปัญหาทั้งสองเข้าด้วยกัน

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 &= 20 \\ x_1 + s_3 &= 6 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - e_1 &= 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - e_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 10y_1 - 20y_2 - 6y_3 &= 0 \\ x_j, y_i, s_j, e_i \ge 0 \quad &\text{โดยที่ } i = 1,2,3 \quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{40}$$

(2) เพิ่มข้อจำกัดที่มีขอบเขต และบวกตัวแปรส่วนเกิน

$$x_1 + x_2 + s_1 + s_2 + s_3 + y_1 + y_2 + y_3 + e_1 + e_2 \le K$$

จะได้ $$x_1 + x_2 + s_1 + s_2 + s_3 + y_1 + y_2 + y_3 + e_1 + e_2 + s_4 = K$$

(3) นำตัวแปรหลอก $(d_1 = 1)$ แทนในระบบสมการทั้งหมด จะได้

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 - 10d_1 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 - 20d_1 &= 0 \\ x_1 + s_3 - 6d_1 &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 + y_3 - e_1 \quad - d_1 &= 0 \\
2y_1 + 3y_2 \quad - e_2 - 4d_1 &= 0 \\
x_1 + 4x_2 - 10y_1 - 20y_2 - 6y_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + s_1 + s_2 + s_3 + y_1 + y_2 + y_3 + e_1 + e_2 + s_4 - Kd_1 &= 0 \\
x_1 + x_2 + s_1 + s_2 + s_3 + y_1 + y_2 + y_3 + e_1 + e_2 + s_4 + d_1 &= K + 1
\end{aligned}
$$

(4) เปลี่ยนรูปตัวแปร

$$
\begin{aligned}
x_j &= (K+1)x'_j \\
y_i &= (K+1)y'_j \\
s_j &= (K+1)s'_j \\
e_i &= (K+1)e'_j \\
d_i &= (K+1)d'_j
\end{aligned}
\qquad (42)
$$

จากระบบสมการ (41) จะได้

$$
\begin{aligned}
x'_1 + 2x'_2 + s'_1 \quad -10d'_1 &= 0 \\
2x'_1 + 3x'_2 \quad + s'_2 \quad - 20d'_1 &= 0 \\
x'_1 \quad + s'_3 \quad - 6d'_1 &= 0 \\
y'_1 + 2y'_2 + y'_3 - e'_1 \quad - d_1 &= 0 \\
2y'_1 + 3y'_2 \quad - e'_2 - 4d_1 &= 0 \\
x'_1 + 4x'_2 \quad -10y'_1 - 20y'_2 - 6y'_3 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + e'_1 + e'_2 + s'_4 - kd'_1 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + e'_1 + e'_2 + s'_4 + d'_1 &= 0 \\
x'_j, s'_j, y'_j, e'_j, d'_j &\geq 0
\end{aligned}
\qquad (43)
$$

(5) เพิ่มตัวแปรเทียม d'_2 พร้อมกับสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสม

ค่าต่ำสุด d'_2

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x'_1 + 2x'_2 + s'_1 \quad - 10d'_1 + 6d'_2 &= 0 \\
2x'_1 + 3x'_2 \quad + s'_2 \quad - 20d'_1 + 14d'_2 &= 0 \\
x'_1 \quad + s'_3 \quad - 6d'_1 + 4d'_2 &= 0 \\
y'_1 + 2y'_2 + y'_3 - e'_1 \quad - d'_1 - 2d'_2 &= 0 \\
2y'_1 + 3y'_2 \quad - e'_2 - 4d'_1 \quad &= 0 \\
x'_1 + 4x'_2 \quad -10y'_1 - 20y'_2 - 6y'_3 \quad + 31d'_2 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + e'_1 + e'_2 + s'_4 - kd_1 + (k-11)d'_2 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + y'_1 + y'_3 + e'_1 + e'_2 + s'_4 + d'_1 + d'_2 &= 1 \\
x'_j, s'_j, y'_j, e'_j, d'_j &\geq 0
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

ซึ่งจะพบว่า (44) เป็นตัวแบบปัญหาในรูปแบบพิเศษของคารมาร์คารแล้ว

4.6 ปัญหาควบคู่และ DEA

การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (DEA) ซึ่งเป็นการประยุกต์การโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อวัดประสิทธิภาพของหน่วยงาน ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล โดยใช้ปัญหาควบคู่ของการโปรแกรมเชิงเส้นในหัวข้อ 2.8

ปัญหาเดิมในหัวข้อ 2.8 คือ

$$\text{ค่าสูงสุด} \qquad h_o(u, v) = \sum_{k=1}^{s} u_k y_{ko} \tag{45}$$

$$\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \quad \forall_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$$

$$u_k, v_i \ge 0$$

โดยที่ v_i และ u_k แทนน้ำหนักของปัจจัยนำเข้าชนิดที่ i และน้ำหนักของผลผลิตชนิดที่ k สำหรับหน่วยงาน o y_{ko} แทนปริมาณผลผลิตชนิดที่ k จากสำหรับหน่วยงานที่ o

เมื่อนำ θ คูณข้อจำกัดที่ 2 ปัญหาควบคู่ของ (45) คือ

$$\theta^* = \text{ค่าต่ำสุด } \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \le \theta x_{io} \quad \forall i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{46}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \ge y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ λ_j เป็นตัวแปรของปัญหา (46)

เนื่องจากค่าของ λ_j เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา (46) จะมีค่า $\theta^* \le 1$ ถ้า $\theta^* = 1$ แล้ว ระดับของปัจจัยนำเข้าปัจจุบันสามารถลดลงได้อย่างเป็นสัดส่วนกัน ซึ่งแสดงว่า หน่วยงานที่ o (DMU_o) อยู่ใน*ระดับแนวหน้า (Frontier)* ถ้า $\theta^* < 1$ แสดงว่าหน่วยงานที่ o ถูกครอบงำ (Dominated) โดยหน่วยงานระดับในแนวหน้า ดังนั้น อาจกล่าวว่า θ^* แสดงถึงคะแนนประสิทธิภาพ เมื่อพิจารณาในแง่ปัจจัยนำเข้า (Input–oriented efficiency score)

ตัวอย่างที่ 4.10 จากการศึกษาระบบโลจิสติกส์สำหรับสินค้าอุปโภคบริโภค ได้ทำการวัดประสิทธิภาพของเอเยนต์จำหน่ายสินค้าอุปโภคบริโภคให้ร้านค้าปลีกในจังหวัดหนึ่ง จำนวน 5 แห่ง โดยมีปัจจัยนำเข้าคือ ต้นทุนดำเนินงาน และเวลาในการได้รับสินค้าจากบริษัท ซึ่งเรียกว่าเวลาในการตอบสนอง (Response time) ปัจจัยผลผลิตคือ กำไรต่อสัปดาห์แสดงดังตารางที่ 4.10 และความสัมพันธ์สัมพันธ์ของต้นทุนการดำเนินงานและเวลาตอบสนองแสดงดังรูปที่ 4.2

ตารางที่ 4.10 ข้อมูลการดำเนินงานในหนึ่งสัปดาห์

เอเยนต์	ต้นทุนดำเนินงาน (10,000 บาท)	เวลาตอบสนอง (วัน)	กำไรต่อสัปดาห์ (100,000 บาท)
1	1.2	4.8	2.3
2	2.0	2.2	2.0
3	4.0	1.3	2.9
4	5.5	1.1	2.5
5	4.0	4.2	2.0

จากข้อมูลในตารางที่ 4.10 สามารถสร้างตัวแบบ (46) สำหรับวัดประสิทธิภาพเอเยนต์ที่ 5 ได้ดังนี้

ปัญหาค่าต่ำสุด $\theta = \theta^*$

ข้อจำกัด

$$1.2\lambda_1 + 2.0\lambda_2 + 4.0\lambda_3 + 5.5\lambda_4 + 4.0\lambda_5 \leq 4\theta$$
$$4.8\lambda_1 + 2.2\lambda_2 + 1.3\lambda_3 + 1.1\lambda_4 + 4.2\lambda_5 \leq 4.2\theta$$
$$2.3\lambda_1 + 2.0\lambda_2 + 2.9\lambda_3 + 2.5\lambda_4 + 2.0\lambda_5 \geq 2$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

เมื่อนำตัวแบบนี้ไปประมวลผลจะได้ $\theta^* = 0.5$ $\lambda_2 = 1$ ส่วน $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ แสดงว่า เอเยนต์ 2 เป็นหน่วยงานมาตรฐานที่ใช้เกณฑ์เปรียบเทียบ (Benchmark) ของเอเยนต์ 5 ดังนั้น เอเยนต์ 5 ควรลดต้นทุนดำเนินการและเวลาในการตอบสนองลงไป โดยพิจารณาเอเยนต์ 2 เป็นต้นแบบหรือตัวอย่าง

ถ้าใช้ตัวแบบ (46) เพื่อวัดประสิทธิภาพของเอเยนต์ 4 จะได้ $\theta^* = 1$ $\lambda_4 = 1$และ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$ แสดงว่า เอเยนต์ 4 มีประสิทธิภาพในระดับแนวหน้า อย่างไรก็ตาม หากพิจารณาว่า เอเยนต์ 4 สามารถลดปัจจัยนำเข้าแล้วยังมีประสิทธิภาพเท่าเดิมได้หรือไม่ ถ้าเอเยนต์ 4 สามารถลดปัจจัยนำชนิดที่ i ลงไปได้ s_i วันแล้วเอเยนต์ 4 ยังมีประสิทธิภาพเท่ากับ 1 ตัวแปร s_i ซึ่งแทนปริมาณที่ลดลงของปัจจัยนำเข้า เรียกตัวแปรนี้ว่า *ตัวแปรส่วนขาดของปัจจัยนำเข้า (Input slack variable)* และ e_r ซึ่งแทนปริมาณที่ของเพิ่มปัจจัยผลผลิตที่ r เรียกตัวแปรนี้ว่า *ตัวแปรส่วนขาดของผลผลิต (Output slack variable)*

ให้ $$s_i = \theta^* x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{47}$$

$$e_r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s \tag{48}$$

เราสามารถใช้การโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาค่าตัวแปรส่วนขาดและตัวแปรส่วนเกินจาก (46) จะได้

ค่าสูงสุด $$\sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{r=1}^{s} e_r \tag{49}$$

ข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i = \theta^* x_{io} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - e_r = y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อนำตัวแบบใน (49) มาใช้กับเอเยนต์ 4 จะได้ตัวแบบ คือ

ปัญหาค่าสูงสุด $s_1 + s_2 + e_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 1.2\lambda_1 + 2.0\lambda_2 + 4.0\lambda_3 + 5.5\lambda_4 + 4.0\lambda_5 + s_1 &= 5.5\theta \\ 4.8\lambda_1 + 2.2\lambda_2 + 1.3\lambda_3 + 1.1\lambda_4 + 4.2\lambda_5 + s_2 &= 1.1\theta \\ 2.3\lambda_1 + 2.0\lambda_2 + 2.9\lambda_3 + 2.5\lambda_4 + 2.0\lambda_5 - e_3 &= 2.5 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 &\geq 0 \end{aligned} \tag{50}$$

นิยาม ประสิทธิภาพแบบ DEA ผลการดำเนินงานของหน่วยงานที่ o จะมีประสิทธิภาพ 100% ก็ต่อเมื่อ $\theta^* = 1$ โดยตัวแปรส่วนขาดและตัวแปรส่วนเกินทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ $\left(s_i^* = e_r^* = 0\right)$

นิยาม : ผลการดำเนินงานของหน่วยงานที่ o จะถือว่าด้อยประสิทธิภาพ (weakly efficient) ก็ต่อเมื่อ $\theta^* = 1$ โดยมีตัวแปรส่วนขาดของปัจจัยนำเข้าและ/หรือผลผลิตบางตัวมีค่าไม่เป็นศูนย์ $\left(s_i^* \neq 0 \text{ และ/หรือ } e_r \neq 0 \quad \exists i, \exists r\right)$

แม้ว่าเอเยนต์ 2 และ เอเยนต์ 4 จะได้ค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 1 เมื่อใช้ตัวแบบ (46) แต่เมื่อกำหนดให้ $\theta=1$ ผลเฉลยของตัวแบบ (50) กับเอเยนต์ 4 จะได้ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_4=\lambda_5=e_3=0$ ส่วน $\lambda_3=0.836$ $s_1=2.156$ และ $s_2=0.013$ แสดงว่าเอเยนต์ 4 มีประสิทธิภาพ ในทำนอง

เดียวกันเมื่อใช้ตัวแบบ (49) กับเอเยนต์ 2 จะได้ $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=s_1=s_2=e_3=0$ และ $\lambda_2=1$ ดังนั้น เอเยนต์ 4 ถือว่าด้อยประสิทธิภาพ ขณะที่เอเยนต์ 2 ถือว่ามีประสิทธิภาพ

เมื่อพิจารณาหน่วยงาน j หน่วยงาน ด้วยปัจจัยนำเข้า n ปัจจัยและปัจจัยผลผลิต s ปัจจัย ด้วยตัวแบบที่ (46) ในบทที่ 2 แสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาหน่วยงานที่ o เปรียบเทียบกับหน่วยงานอื่น ๆ ถ้าพบว่าหน่วยงานที่ o ไม่มีประสิทธิภาพแล้ว เราเรียกเซตของหน่วยงานที่มีประสิทธิภาพเท่ากับ 1 ว่า *เซตอ้างอิง (Reference set)* เมื่อได้เซตอ้างอิงแล้วเราสามารถนำสมาชิกในเซตนี้มาใช้ ในการสร้างหน่วยงานเปรียบเทียบเชิงสมมติฐาน (Hypothetical comparison unit, HCU) ซึ่งเป็นหน่วยงานที่ใช้ในการแสดงว่า หน่วยงานที่ไม่มีประสิทธิภาพควรจะเพิ่มปัจจัยนำเข้าอีกปริมาณเท่าใด วิธีการหาหน่วยงานเปรียบเทียบเชิงสมมติฐานมีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ประมวลผลตัวแบบ (124) ในบทที่ 2 สำหรับหน่วยงานที่ o
ขั้นตอนที่ 2 วิเคราะห์ประสิทธิภาพของหน่วยงานทั้งหมด ให้หน่วยงานที่ไม่มีประสิทธิภาพหน่วยงานหนึ่งเป็นหน่วยงานที่ o และหาเซตอ้างอิงสำหรับหน่วยงานที่ o
ขั้นตอนที่ 3 วิเคราะห์ความไวของตัวแบบ DEA สำหรับหน่วยงานที่ o นำราคาเงาของหน่วยงานที่เป็นสมาชิกของเซตอ้างอิง มาถ่วงน้ำหนักปัจจัยนำเข้าและปัจจัยผลผลิตของหน่วยงานเหล่านี้ จะได้ค่าปัจจัยนำเข้าและผลผลิตของ HCU

จากตัวอย่างที่ 4.10 พบว่าเอเยนต์ที่ 5 เมื่อวิเคราะห์ความไวโดยใช้ตัวแบบ DEA ในบทที่ 2 จะได้ราคาเงาของหน่วยงาน 1 2 3 4 และ 5 เท่ากับ 0.875 0 0 0 และ 0 ตามลำดับ ดังนั้น HCU จะมีปัจจัยนำเข้า คือต้นทุนดำเนินงาน เท่ากับ 0.875*1.2 = 1.05 ถ้าปรับค่าปัจจัยนำเข้าซึ่งก็คือต้นทุนการดำเนินงานให้ลดลงเหลือ 1.05 หรือ 10,500 บาทจะทำให้ประสิทธิภาพของเอเยนต์ที่ 5 มีประสิทธิภาพ

4.7 การวิเคราะห์ความไวโดยวิธีกราฟ

การโปรแกรมเชิงเส้น เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่ใช้สำหรับหาผลเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาโดยที่กำหนดค่าพารามิเตอร์ให้เป็นค่าคงที่ ซึ่งเราสามารถทราบค่าได้อย่างแน่นอน อย่างไรก็ตามค่าพารามิเตอร์เหล่านี้อาจมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ส่งผลให้ผู้วิเคราะห์ต้องคำนึงถึงผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงนี้ การวิเคราะห์ความไว (Sentivity Analysis) สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเป็นการวิเคราะห์ถึงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นว่ามีผลกระทบต่อ

ผลเฉลยที่เหมาะสมอย่างไร เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจถึงการเปลี่ยนแปลงผลกระทบได้ง่ายขึ้นในหัวข้อนี้จึงขออธิบายด้วยกราฟ

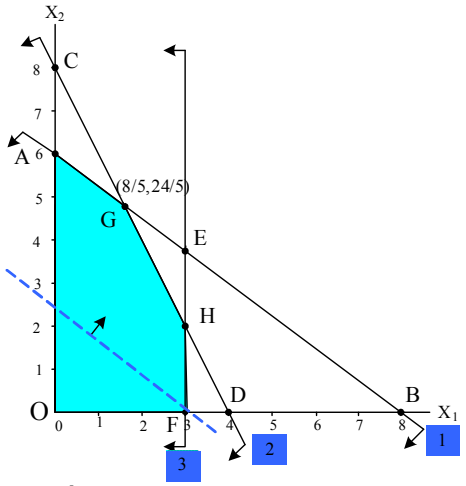
ตัวอย่างที่ 4.11 พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 6x_2$ (51)

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 24 && \text{(ปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ 1)} \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 && \text{(ปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ 2)} \\ x_1 &\le 3 && \text{(ปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ 3)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \quad (52)$$

โดยที่ x_1 และ x_2 แทนปริมาณการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันของผลกำไรจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้คือ $x_1 = 8/5$ $x_2 = 24/5$ และ $z = 36.8$ โดยที่ s_1 s_2 และ s_3 เป็นตัวแปรจร จากรูปที่ 4.2 พบว่าจุด G เป็นจุดที่มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุด หากมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือในข้อจำกัด จะส่งผลต่อผลเฉลยที่เหมาะสมนี้อย่างไรบ้าง



รูปที่ 4.2 ผลเฉลยวิธีกราฟ

4.7.1 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ พื้นที่ที่เป็นไปได้ยังคงเดิม เพราะพื้นที่ที่เป็นไปได้ขึ้นอยู่กับข้อจำกัด ดังนั้น เซตของจุดมุมต่าง ๆ และตำแหน่งของจุดมุมยังคงเดิม สิ่งที่เปลี่ยนแปลงคือ ค่าความชันของเส้นผลกำไร (หรือเส้นต้นทุน) ที่สะท้อนค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.12 จากตัวอย่างที่ 4.11 ถ้าผลกำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ 2 เปลี่ยนแปลงจาก 6 บาทต่อชิ้น เป็น 8 บาทต่อชิ้นแล้ว เราคาดว่าบริษัทคงพยายามที่จะผลิตสินค้าชนิดที่ 2 เพิ่มขึ้น ในทางกลับกัน ถ้าผลกำไรต่อชิ้นของสินค้าชนิดที่ 2 ลดลงจาก 6 บาทต่อชิ้น เป็น 4 บาทต่อชิ้น คาดว่าบริษัทพยายามที่จะผลิตสินค้าชนิดที่ 2 ลดลง สิ่งที่ผู้ตัดสินใจหรือผู้บริหารต้องการทราบคือ ผลกำไรต่อชิ้นของสินค้าชนิดนี้ลดลงหรือเพิ่มขึ้นจาก 6 บาทต่อชิ้นไปเท่าใด ที่ทำให้ผลเฉลยข้างต้นที่ได้ยังคงเหมาะสม และทำให้มีการเปลี่ยนแปลงการตัดสินใจ เนื่องจากการวางแผนการผลิตสำหรับคาบที่ t ใด ๆ อาจทำไว้ในปลายคาบที่ $t-1$ แล้วส่งแผนการผลิตนี้ให้กับทุกแผนกที่เกี่ยวข้อง หากมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในช่วงต้นคาบที่ t ทำให้ผู้จัดการต้องเปลี่ยนแปลงแผนการผลิต ทำให้ต้องจัดทำเอกสารเพื่อแจ้งแผนกต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องให้ทราบถึงการเปลี่ยนแปลงนี้ หากผู้จัดการทราบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์นี้ไม่มีผลกระทบ ก็ไม่ต้องจัดทำแผนและเอกสารใหม่ ซึ่งจะประหยัดเวลาและแรงงานในการจัดทำแผนการผลิตและเอกสารใหม่

กำหนดให้ c_2 แทนกำไรต่อชิ้นของสินค้าชนิดที่ 2 ถ้า c_2 มีค่าเปลี่ยนแปลงไปได้เท่าใดที่ยังคงทำให้ผลเฉลยที่ได้ข้างต้นยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ปัจจุบัน $c_2 = 6$ ให้ z' แทนค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์บน*เส้นผลกำไรเท่ากัน (Isoprofit line)* ดังนั้น $z' = 5x_1 + 6x_2$ หรือ $x_2 = \frac{-5}{6}x_1 + \frac{z'}{6}$ แสดงว่าเส้นผลกำไรเท่ากันมีความชันเท่ากับ $-5/6$ ดังรูปที่ 4.4 ถ้าเส้นผลกำไรเท่ากันมีความชันลดลง จนกระทั่งมากกว่าความชันของข้อจำกัดด้านปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ 2 ซึ่งเท่ากับ –2 จะทำให้ผลเฉลยที่เหมาะสมเดิมนั้นไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมอีกต่อไป ในกรณีนี้ความชันของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเท่ากับ

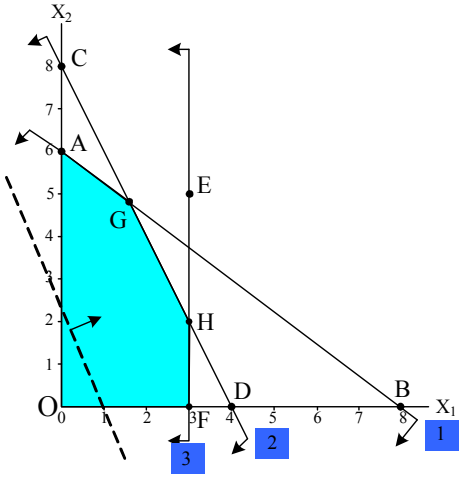
$$\frac{-5}{c_2} < -2 \qquad (43)$$

ให้ Δ แทนค่า c_2 ที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้น $c_2 = 6 + \Delta$ หรือ $\Delta < -7/2$ แล้ว ผลเฉลยที่เหมาะสมเดิมเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด เช่น $\Delta = -4$ นั่นคือ $c_2 = 6 - 4 = 2$ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่คือ $z = 5x_1 + 2x_2$ เมื่อประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นใหม่ จะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ และ $z = 19$ ซึ่งก็คือ จุด H ในรูปที่ 4.3 ในทางตรงกันข้าม ถ้า $\Delta = -2$ จะได้ $c_2 = 6 - 2 = 4$ และ $z = 5x_1 + 4x_2$ ผลเฉลยที่เหมาะสมจะเหมือนเดิม กล่าวคือ $x_1 = 8/5$ $x_2 = 24/5$ และ $z = 27.2$ ซึ่งก็คือจุด G แต่ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ลดลง

โดยสรุป การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จะส่งผลกระทบต่อผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้นใน 2 ลักษณะคือ

(1) ถ้าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบัน ยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้ว ค่าของตัวแปรตัดสินใจจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง แต่ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเปลี่ยนแปลงไป

(2) ถ้าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบัน ไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดอีกต่อไป แล้วค่าของตัวแปรตัดสินใจและค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเปลี่ยนแปลงไป



รูปที่ 4.3 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ

4.7.2 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือ

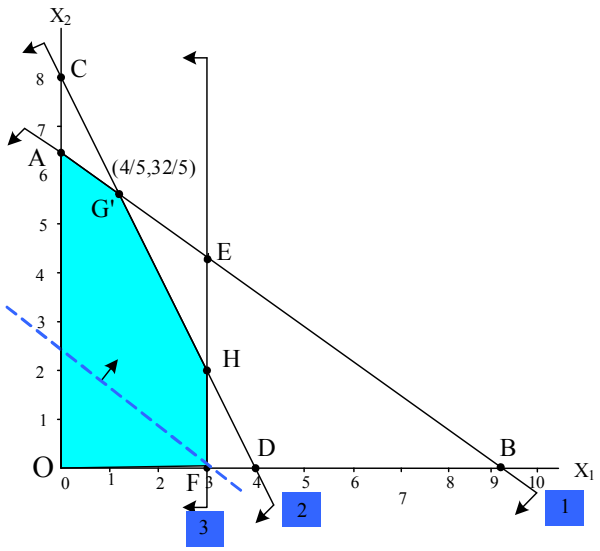
พิจารณาการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ ค่าทางขวามือแทนปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัด อาจทำให้พื้นที่ที่เป็นไปได้มีขนาดเพิ่มขึ้น ขนาดเล็กลง หรือขนาดเท่าเดิม ถ้าการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือส่งผลให้ขนาดของพื้นที่ที่เป็นไปได้มีขนาดเพิ่มขึ้นก็มีโอกาสที่จะทำให้ผลเฉลยที่ได้ดีขึ้นกว่าเดิม ขณะที่การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามืออาจไม่ส่งผลกระทบต่อพื้นที่ที่เป็นไปได้ ซึ่งในกรณีนี้จะไม่ทำให้ผลเฉลยมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือ จึงต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี กรณีการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดผูกพัน และกรณีการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่ใช่ข้อจำกัดผูกพัน

การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวา จากตัวอย่างที่ 4.11 ข้างต้น กำหนดให้ b_1 แทนค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ 1 ซึ่งในที่นี้คือ ปริมาณวัตถุดิบชนิดที่ 1 ที่มีอยู่ และผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบันทำให้ข้อจำกัดที่ 1 เป็นข้อจำกัดผูกพัน หากค่า b_1 เปลี่ยนแปลงไป Δ ทำให้ $b = 24 + \Delta$ แล้วยังคงส่งผลให้ผลเฉลยนี้ยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดอยู่ต่อไป ค่าของ Δ ควรมีค่าเท่าใด จากรูปที่ 4.2 จะเห็นว่า ค่า b_1 เพิ่มเป็น 30 แล้วทำให้พื้นที่เป็นไปได้มีขนาดเพิ่มขึ้น ขณะที่ค่า b_1 ลดลงเป็น 20 แล้วทำให้พื้นที่ที่เป็นไปได้ลดลง อย่างไรก็ตาม ผลเฉลย

เหมาะสมที่สุดเดิมนั้น อาจยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดหรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่าพื้นที่ที่เพิ่มขึ้นนั้นมีผลเฉลยที่ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีกว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของผลเฉลยเดิม (ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด คือ ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงกว่า) หรือพื้นที่ส่วนที่ลดลงนั้นได้รวมเอาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดออกไป ทำให้พื้นที่ใหม่มีผลเฉลยที่ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ด้อยลงกว่าผลเฉลยเดิมหรือไม่

ตัวอย่างที่ 4.13 จากตัวอย่างที่ 4.11 ถ้าค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ 1 เปลี่ยนแปลงจาก 24 เป็น 28 จะมีผลกระทบต่อผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบันอย่างไร

รูปที่ 4.4 แสดงพื้นที่เป็นไปได้ของปัญหานี้ พบว่าพื้นที่มีขนาดใหญ่กว่าพื้นที่เป็นไปได้ในรูปที่ 4.2 เมื่อนำเส้นผลกำไรเท่ากัน (z) ซึ่งเท่ากับ $5x_1 + 6x_2$ ลากผ่านพื้นที่นี้ จะพบว่า จุดสุดท้ายคือ จุด G′ ซึ่งมีค่า $x_1 = 4/5$ และ $x_2 = 32/5$ โดยที่ค่า $z = 42.4$ แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ 1 จาก 24 เป็น 28 ทำให้ผลเฉลยเดิมไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมต่อไป ผลเฉลยใหม่ที่ได้คือ $(x_1, x_2) = (4/5, 32/5)$ ที่จุด G' โดยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) เท่ากับ 42.4



รูปที่ 4.4 ผลเฉลยวิธีกราฟ

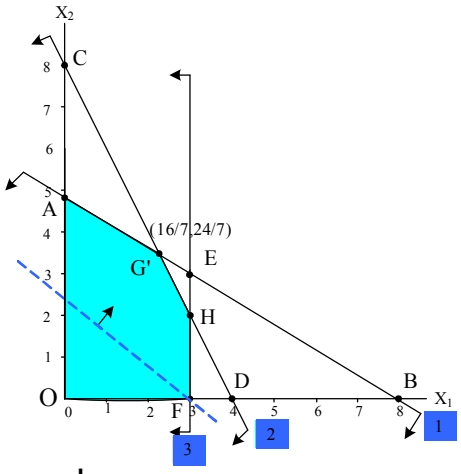
สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัด ซึ่งไม่ใช้ข้อจำกัดผูกพันจะไม่มีผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบัน เช่น การเปลี่ยนแปลงข้อจำกัดที่ 3 ของตัวอย่าง 4.11 จะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

4.7.3 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในข้อจำกัด

การเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในข้อจำกัดนี้ จะทำให้พื้นที่ที่เป็นไปได้มีรูปร่างเปลี่ยนไป แต่การเปลี่ยนแปลงนี้อาจจะส่งผลให้ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมหรือไม่ก็ได้ ขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ที่เปลี่ยนแปลงไปนั้น เป็นสัมประสิทธิ์ของข้อจำกัดผูกพัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.14 จากตัวอย่างที่ 4.11 ถ้าสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในข้อจำกัดที่ 1 เปลี่ยนแปลงจาก 4 เป็น 5 จะมีผลกระทบอย่างไรต่อผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบัน

จากตัวแบบของปัญหาในตัวอย่างนี้ ข้อจำกัดที่ 1 เปลี่ยนแปลงเป็น $3x_1 + 5x_2 \leq 24$ และสามารถเขียนกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 4.5 เมื่อนำเส้นผลกำไรเท่ากันลากผ่านจะพบว่า ผลเฉลยที่เหมาะสมนั้นเปลี่ยนแปลงเป็น $x_1 = 16/7$ $x_2 = 24/7$ ที่จุด G' โดย $z = 32$



รูปที่ 4.5 ผลเฉลยวิธีกราฟ

4.8 การวิเคราะห์ความไวด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

หัวข้อที่ผ่านมา ได้แสดงให้เห็นการวิเคราะห์ความไว เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ คือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์และค่าทางขวามือของข้อจำกัดต่าง ๆ โดยวิธีกราฟมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงการวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ทั้งสองพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาแล้ว โดยวิธีซิมเพล็กซ์ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์อื่น ๆ ของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น รวมทั้งการเพิ่มตัวแปรตัดสินใจและการเพิ่มข้อจำกัด โดยทั่วไปการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์เหล่านี้ จะส่งผลกระทบต่อผลเฉลยที่เหมาะสมเดิม ใน 3 ลักษณะ คือ

(1)สถานะของผลเฉลยเดิม เช่น อาจทำให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดเดิม มีตัวแปรจรและตัวแปรพื้นฐานที่เปลี่ยนแปลงไปหรือเรียกว่าส่งผลต่อ *สภาวะเหมาะสมที่สุด (Optimality)*

(2) ค่าของผลเฉลยเดิม ในกรณีนี้ เซตของตัวแปรพื้นฐานและตัวแปรจรยังคงเดิม แต่ค่าของผลเฉลยหรือค่าของตัวแปรพื้นฐานจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไป

(3) *ความเป็นไปได้ของผลเฉลย* (Feasibility) การเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์อาจส่งผลให้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

การพิจารณาว่า การเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์มีผลกระทบต่อผลเฉลยที่เหมาะสมเดิมหรือไม่และส่งผลกระทบในลักษณะใด สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์ในการวิเคราะห์จากหัวข้อ 3.5 สามารถสรุปสูตรการคำนวณหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์รูปแบบเมทริกซ์และรูปแบบตารางดังนี้

ตารางที่ 4.11 ตารางซิมเพล็กซ์ใด ๆ

ตัวแปรพื้นฐาน	x_j	ค่าทางขวามือ
z	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - \mathbf{c}_j$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
x_B	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

ตารางที่ 4.11 เป็นตารางที่ให้ค่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดก็ต่อเมื่อ ค่าสัมประสิทธิ์ในแถว z มีค่าเป็นทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด และมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ในกรณีปัญหาค่าต่ำสุด ถ้าเราได้ตารางสุดท้ายที่ให้ค่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้ว มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ สิ่งที่ต้องพิจารณาประการหนึ่งก็คือ การพิจารณาว่าการเปลี่ยนแปลงนี้ ทำให้ตารางสุดท้ายนี้ยังคงให้ผลเฉลยที่เหมาะสมอยู่อีกหรือไม่ มีตัวแปรใดที่จะเป็นตัวแปรเข้าหรือไม่ หากมีตัวแปรจรใดสมควรต้องกลายเป็นตัวแปรเข้า เราเรียกว่าการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์นี้ส่งผลกระทบต่อสภาวะเหมาะสมที่สุด นอกจากนี้ อาจส่งผลกระทบต่อความเป็นไปได้ของผลเฉลย ดังนั้น ในหัวข้อย่อยต่อไปนี้ จะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์นั้นส่งผลต่อสภาวะเหมาะสมที่สุด หรือความเป็นไปได้ของผลเฉลย (Feasibility)

4.8.1 การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

จากตารางที่ 4.11 หากมีการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $\left(c_j\right)$ อาจส่งผลต่อความเหมาะสมที่สุดของผลเฉลย ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด ค่า $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - c_j$ ยังคงมีค่าเป็นลบ แสดงว่าผลเฉลยนี้ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมอีกต่อไป ในกรณี

ปัญหาค่าต่ำสุด ค่า $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - c_j$ มีค่าเป็นบวก แสดงว่าผลเฉลยนี้ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสม อีกต่อไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.15 โรงงานผลิตลูกกวาดขนาดเล็กแห่งหนึ่ง ผลิตลูกกวาด 3 ชนิด ที่มีส่วนประกอบ คือ น้ำตาลและช็อคโกแล็ต ส่วนผสมของวัตถุดิบทั้งสองในก้อนลูกกวาดและกำไรจากการขาย ลูกกวาดแต่ละชนิดแสดงในตารางที่ 4.12

ตารางที่ 4.12 ปริมาณส่วนผสมและกำไรต่อกล่องของลูกกวาดแต่ละชนิด

ลูกกวาดชนิดที่	ปริมาณส่วนผสมต่อกล่อง		กำไรต่อกล่อง (บาท)
	น้ำตาล (100 กรัม)	ช็อคโกแล็ต (100 กรัม)	
1	1	2	30
2	1	3	70
3	1	1	50

นอกจากนี้ ปริมาณน้ำตาลและช็อคโกแล็ตที่มีอยู่เท่ากับ 5 และ 10 กิโลกรัม ให้ i เป็นดัชนีแทนชนิดของลูกกวาด และ x_i แทนปริมาณลูกกวาดที่ต้องการผลิต (กล่อง) ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นคือ

ค่าสูงสุด $\quad z = 30x_1 + 70x_2 + 50x_3$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 100 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (53)$$

เมื่อกำหนดให้ s_1 และ s_2 แทนตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตารางซิมเพล็กซ์สุดท้ายที่แสดงผลเฉลยเหมาะสมที่สุด สามารถแสดงในตารางที่ 4.13

(1) ถ้ากำไรต่อหน่วยของลูกกวาดชนิดที่ 2 เปลี่ยนไปจำนวนเท่าใด แล้วทำให้ผลเฉลยในตารางที่ 4.13 ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(2) ถ้ากำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 2 เพิ่มขึ้นจาก 70 เป็น 130 บาทต่อกล่อง ปริมาณการผลิตที่เหมาะสมที่สุดควรเป็นเท่าใด

ตารางที่ 4.13 ตารางซิมเพล็กซ์ที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
z	1	30	0	0	40	10	3,000
x_3	0	1/2	0	1	3/2	–1/2	25
x_2	0	1/2	1	0	–1/2	1/2	25

(1) ถ้ากำไรต่อหน่วยของลูกกวาดชนิดที่ 2 เปลี่ยนไปจำนวนเท่าใด จึงทำให้ผลเฉลยในตารางที่ 4.13 ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

กำหนดให้ $c_2 = 70 + \Delta$ โดยที่ Δ แทนจำนวนของ c_2 ที่เปลี่ยนแปลงจากค่าปัจจุบัน สิ่งที่เราต้องการทราบคือ ค่าของ Δ ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเหมาะสมที่สุด เนื่องจาก c_2 เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_2 ซึ่งเป็นตัวแปรพื้นฐานของผลเฉลยนี้ อาจส่งผลต่อเซตของตัวแปรพื้นฐาน ในที่นี้คือ $\{x_3, x_2\}$ เนื่องจากค่าของ $\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - \mathbf{c}_j$ ถ้า c'_2 และ $c'_3 \geq 0$ แล้ว x_2 และ x_3 ยังคงเป็นตัวแปรพื้นฐาน ดังนั้น จึงต้องตรวจสอบค่าของ c'_2 และ c'_3 ดังนี้

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} c_3 & c_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c'_2 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 50 & 70 + \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - (70 + \Delta)$$

$$= 70 + \Delta - (70 + \Delta) \geq 0 \text{ ดังนั้น } -\infty \leq \Delta \leq \infty$$

$$c'_3 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 50 & 70 + \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 50$$

$$= 50 - 50 = 0 \text{ ดังนั้น } -\infty \leq \Delta \leq \infty$$

นั่นคือ ถ้า Δ เป็นค่าใด ๆ แล้ว x_2 และ x_3 ยังคงเป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่เสมอ

(2) ถ้ากำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 2 เพิ่มขึ้นจาก 70 บาทต่อกล่อง เป็น 130 บาทต่อกล่อง ปริมาณการผลิตที่เหมาะสมที่สุดควรเป็นเท่าใด

จากผลลัพธ์ที่ได้ในตัวอย่างที่ 4.7 พบว่า ถ้าผลกำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 2 เปลี่ยนแปลงจาก 70 เป็น 130 ซึ่งก็คือ $70 + \Delta = 130$ ดังนั้น $\Delta = 50$ แสดงว่า x_2 และ x_3 ยังคงเป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่ และผลเฉลยยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสม

หากเราต้องการทดสอบโดยไม่ใช้ค่าของ Δ ที่หาได้จะสามารถทำได้ดังนี้

$$c'_2 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 - c_2$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 130 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 130 = 130 - 130 = 0$$

$$c'_3 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 - c_3$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 130 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 50 = 50 - 50 = 0$$

อย่างไรก็ตาม การเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรพื้นฐานนี้ ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เปลี่ยนแปลงไปเสมอ ดังนั้น

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}50 & 130\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix} = 4{,}500$$

4.8.2 การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ อาจส่งผลกระทบต่อสภาวะเหมาะสมที่สุดของผลเฉลย สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรมีค่าเป็นลบ แล้วตัวแปรจรนี้จะถูกเลือกให้เป็นตัวแปรเข้า ทำให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดอีกต่อไป สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรมีค่าเป็นบวก แล้วตัวแปรจรนี้จะถูกเลือกให้เป็นตัวแปรเข้า ทำให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดอีกต่อไป

ตัวอย่างที่ 4.16 จากตัวอย่างที่ 4.15 ถ้ากำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 1 เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร (เพิ่มขึ้นหรือลดลงได้สูงสุดเท่าใด) ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

กำหนดให้ Δ เป็นค่าของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_1 ที่เปลี่ยนแปลงจาก 30 เป็น $30 + \Delta$ ดังนั้น $c_1' = c_1 + \Delta = 30 + \Delta$ เนื่องจาก x_1 เป็นตัวแปรจรของผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบัน ซึ่งแสดงในตารางที่ 4.13 ทำให้เราต้องตรวจสอบว่า ตัวแปรจรแต่ละตัวควรเป็นตัวแปรจรอยู่หรือไม่ หากตัวแปรจรตัวใดตัวหนึ่งมีสัมประสิทธิ์ในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเป็นลบ แสดงว่าตัวแปรนี้จะต้องกลายเป็นตัวแปรพื้นฐานแทน ทำให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ดังนั้น เราจึงต้องตรวจสอบสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix}x_1 & s_1 & s_2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix}x_3 & x_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_N = \begin{bmatrix}30+\Delta & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix}5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_N' &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\\ &= \begin{bmatrix}50 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}30+\Delta & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}60 & 40 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}30+\Delta & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}30-\Delta & 40 & 10\end{bmatrix} \geq 0\end{aligned}$$

$$30-\Delta \geq 0 \qquad \Delta \leq 30$$

นั่นคือถ้า $\Delta \leq 30$ แล้วผลเฉลยเหมาะสมที่สุดปัจจุบัน ยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.17 จากตัวอย่างที่ 4.16 ถ้ากำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 1 เพิ่มจาก 30 บาทต่อกล่อง เป็น 65 บาทต่อกล่อง ปริมาณการผลิตเหมาะสมที่สุดควรเป็นเท่าใด

ถ้า $\Delta \leq 30$ ผลเฉลยเดิมนั้นจะยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด แต่เนื่องจาก c_1 เปลี่ยนแปลงค่าจาก 30 เป็น 65 แสดงว่า $\Delta = 35$ ดังนั้น ผลเฉลยเดิมจะไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมอีกต่อไป จึงต้องพิจารณาว่าตัวแปรจรตัวใดที่จะกลายเป็นตัวแปรพื้นฐาน

$$\mathbf{x}_N = [x_1 \quad s_1 \quad s_2] \qquad \mathbf{x}_B = [x_3 \quad x_2]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1' &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}_1 \\ &= [50 \quad 70]\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - [65] \\ &= 60-65 \;=\; -5\end{aligned}$$

จะพบว่า x_1 เป็นตัวแปรเข้า พิจารณาตัวแปรออกโดยพิจารณาอัตราส่วนต่ำสุด

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\25\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$$

พิจารณาการทดสอบอัตราส่วน จะได้ $\text{Min}\left\{\frac{25}{0.5} \;,\; \frac{25}{0.5}\right\}$ เนื่องจากอัตราส่วนนี้เท่ากัน เลือกตัวแปร x_2 หรือ x_3 เป็นตัวแปรออกก็ได้ ในที่นี้ขอเลือก x_2 เป็นตัวแปรออก

$$\mathbf{x}_B = [x_3 \quad x_1] \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\50\end{bmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = [50 \quad 30]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\100\end{bmatrix} = 1{,}500$$

$\therefore$ ผลเฉลยเดิมไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด และผลเฉลยเหมาะสมที่สุดใหม่คือ $x_1 = 50$ $x_2 = x_3 = s_1 = s_2 = 0$ และ $z = 3{,}250$

4.8.3 การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัด

การเปลี่ยนแปลงของค่าทางขวามือของข้อจำกัด ไม่มีผลต่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่างๆ ในแถวที่ 0 จึงกล่าวได้ว่า การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือจะไม่กระทบต่อสภาวะเหมาะสมที่สุด เซตของตัวแปรพื้นฐานของผลเฉลยเหมาะสมที่สุดยังคงเป็นเซตเดิม อย่างไรก็ตาม การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดมีผลกระทบต่อค่าทางขวามือของตารางสุดท้าย ซึ่งค่าทางขวามือนี้คือ ค่าของตัวแปรพื้นฐานว่าจะมีค่าเป็นลบหรือไม่ จึงกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงนี้อาจมีผลต่อความเป็นไปได้ของผลเฉลย กล่าวคือ ถ้าค่าทางขวามือของทุกแถว (ทุกข้อจำกัด) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้ว ผลเฉลยที่ได้นี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด แต่ถ้าค่าทางขวามืออย่างน้อยหนึ่งแถวมีค่าน้อยกว่า 0 แล้ว ผลเฉลยที่คำนวณได้นี้จะเป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4.18 จากตัวอย่างที่ 4.15 ถ้าปริมาณน้ำตาลที่มีอยู่ในคลังเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเพียงใด แล้วยังคงทำให้ผลเฉลยปัจจุบันเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

กำหนดให้ Δ แทนปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปจากปริมาณที่มีอยู่เดิมในคลัง ดังนั้น ปริมาณน้ำตาล (b_1) เท่ากับ $50 + \Delta$

ดังนั้น ค่าทางขวามือในแถวที่ 1 เท่ากับ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50+\Delta \\ 100 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 25 + \frac{3}{2}\Delta \\ 25 - \frac{1}{2}\Delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$25 + \frac{3}{2}\Delta \geq 0$$

$$\Delta \geq -\frac{50}{3}$$

$$25 - \frac{1}{2}\Delta \geq 0$$

$$\Delta \leq 50$$

ดังนั้น $-\frac{50}{3} \leq \Delta \leq 50$

ถ้าปริมาณน้ำตาลในคลังลดลงได้ไม่เกิน 50/3 กิโลกรัมหรือเพิ่มขึ้นได้ไม่เกิน 50 กิโลกรัม แล้วปัญหานี้มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

ตัวอย่างที่ 4.19 จากตัวอย่างที่ 4.18 ถ้าปริมาณน้ำตาลในคลังเพิ่มขึ้นเป็น 60 กิโลกรัม จงหาผลเฉลยของปัญหานี้

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}60\\ 100\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60\\ 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\ 20\end{bmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60\\ 100\end{bmatrix} = 340$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหานี้คือ โรงงานควรผลิตลูกกวาดชนิดที่ 3 เท่ากับ 40 กล่อง ลูกกวาดชนิดที่ 2 จำนวน 20 กล่อง และไม่ผลิตลูกกวาดชนิดที่ 1 การผลิตนี้ทำให้โรงงานได้ผลกำไร 340 บาท

4.8.4 การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในข้อจำกัด

การเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจร เป็นการเปลี่ยนแปลงสมาชิกในเมทริกซ์ $\mathbf{N}$ หรือ $\mathbf{A}_j$ จากตารางที่ 4.11 แสดงให้เห็นว่า เมทริกซ์ $\mathbf{N}$ หรือ $\mathbf{A}_j$ ไม่อยู่ในการคำนวณค่าทางขวามือ แต่อาจมีผลต่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรในแถวที่ 0 ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรมีค่าเป็นลบแล้วผลเฉลยปัจจุบันยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้วผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ในทางตรงข้าม สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจรมีค่าเป็นบวกแล้วผลเฉลยปัจจุบันยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.20 จากตัวอย่างที่ 4.15 เมื่อปริมาณส่วนผสมต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 1 เปลี่ยนแปลงเป็นน้ำตาล 0.5 กิโลกรัม และช็อคโกแล็ต 0.5 กิโลกรัม จงหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

เนื่องจากปริมาณการผลิตลูกกวาดชนิดที่ 1 เป็นตัวแปรจร จึงมีผลกระทบต่อเมทริกซ์ $\mathbf{N}$ หรือ $\mathbf{A}_j$ โดยที่

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}1/2 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ซึ่งการเปลี่ยนแปลงค่า N ส่งผลต่อสภาวะที่เหมาะสมที่สุด จึงต้องพิจารณาว่ามีตัวแปรจรใดบ้างที่สมควรเป็นตัวแปรเข้า เพื่อกลายเป็นตัวแปรพื้นฐานของผลเฉลยใหม่ โดยตรวจสอบ

$$\mathbf{c}_1' = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix}50 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix} - 30$$
$$= -5.25$$

จากค่า $\mathbf{c}_1'$ ที่ได้ พบว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรจร x_1 มีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ค่า z เพิ่มขึ้น ดังนั้น x_1 เป็นตัวแปรเข้า พิจารณาอัตราส่วนต่ำสุด

$$\mathbf{A}_1' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\min\left\{\frac{b_r}{\mathbf{A}_1'},\ a_{r1} \geq 0\right\} = \min\left\{\frac{25}{1/2}, -\right\} = 50$$

x_3 ซึ่งอยู่ในแถวที่ 1 จะเป็นตัวแปรออก ดังนั้น ตัวแปรพื้นฐานคือ x_1 และ x_2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0.5 & 1\\ 0.5 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}50\\ 25\end{bmatrix}$$
$$\mathrm{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$
$$= \begin{bmatrix}30 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix} = 3{,}250$$
$$\mathbf{c}_N' = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$$
$$= \begin{bmatrix}30 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}50 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}10 & 55 & 5\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\mathbf{c}_N' > 0$ แสดงว่า ผลเฉลยที่ได้นี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด โรงงานควรผลิตลูกกวาดชนิดที่ 1 และ 2 เท่ากับ 50 และ 25 กล่อง ส่วนลูกกวาดชนิดที่ 3 โรงงานไม่ควรผลิต หากดำเนินการผลิตตามนโยบายนี้จะได้กำไร 3,250 บาท

4.8.5 การเพิ่มกิจกรรมใหม่หรือตัวแปรตัดสินใจใหม่

ในสถานการณ์ต่าง ๆ มีโอกาสที่จะมีกิจกรรมใหม่เกิดขึ้น เช่น ตัวอย่างการผลิตสินค้าในโรงงานอุตสาหกรรมนั้น กิจกรรมใหม่ในที่นี้อาจหมายถึง การผลิตสินค้าชนิดใหม่ขึ้น ซึ่งสินค้า

ใหม่นี้จะต้องใช้ทรัพยากรในการผลิตร่วมกับสินค้าเดิมที่โรงงานผลิต ทำให้ต้องเพิ่มตัวแปรตัดสินใจเข้าไปในแต่ละข้อจำกัด การผลิตสินค้าใหม่นี้ส่งผลต่อต้นทุน หรือผลกำไรของการผลิตหรือการขาย ทำให้ตัวแปรตัดสินใจใหม่จะถูกเพิ่มในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ด้วย

เมื่อพิจารณาตารางที่ 4.11 พบว่า การเพิ่มตัวแปรตัดสินใจ $\left(x_j\right)$ อาจส่งผลต่อสภาวะเหมาะสมที่สุด สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ถ้า c'_j มีค่าเป็นลบแล้ว ผลเฉลยปัจจุบันยังไม่เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด และตัวแปรตัดสินใจตัวใหม่นี้จะเป็นตัวแปรเข้า ถ้า c'_j มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แสดงว่า ผลเฉลยปัจจุบันเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ถ้า c'_j มีค่าเป็นบวกแล้ว ผลเฉลยปัจจุบันยังไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ถ้า c'_j มีค่าเป็นลบ หรือ 0 แล้ว ผลเฉลยปัจจุบันเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.21 จากตัวอย่างที่ 4.15 สมมติว่าโรงงานต้องการผลิตลูกกวาดชนิดใหม่ ให้เป็นลูกกวาดชนิดที่ 4 โดยลูกกวาดชนิดนี้มีส่วนผสมของน้ำตาล 0.15 กิโลกรัมต่อกล่อง (1.5 หน่วย หน่วยละ 100 กรัมต่อกล่อง) และช็อคโกแล็ต 0.15 กิโลกรัมต่อกล่อง ผลกำไรที่คาดว่าจะได้รับจากการผลิตลูกกวาดชนิดที่ 4 จำนวน 1 กล่อง เท่ากับ 100 บาท จงหาปริมาณการผลิตที่เหมาะสมของลูกกวาดแต่ละชนิด

กำหนดให้ x_4 แทนปริมาณการผลิตลูกกวาดชนิดที่ 4 จะได้ตัวแบบ

ค่าสูงสุด $\quad z = 30x_1 + 70x_2 + 50x_3 + 100x_4$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 &\le 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 1.5x_4 &\le 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (54)$$

สิ่งที่ต้องพิจารณาคือ ตัวแปรตัดสินใจ x_4 จะเข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานได้หรือไม่ สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ต้องตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ 4 ในแถวที่ 0 ในตารางสุดท้ายว่ามีค่าน้อยกว่าศูนย์หรือไม่ ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_4 น้อยกว่าศูนย์แล้ว x_4 จะกลายเป็นตัวแปรเข้า และผลเฉลยในปัจจุบันตามตัวอย่างที่ 4.15 จะไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมอีกต่อไป

พิจารณาค่าของ $\quad c'_4 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_4 - c_4$

โดยที่ $\quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad c_4 = 100 \qquad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 50 & 70 \end{bmatrix}$$

$$c_4' = \begin{bmatrix}70 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1.5\\ 1.5\end{bmatrix} - 100 \qquad = 90 - 100 = -10$$

เนื่องจากค่า $c_4' = -10 < 0$ แสดงว่า x_4 สามารถเป็นตัวแปรเข้าได้ ส่งผลให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด พิจารณาตัวแปรออก โดยพิจารณาอัตราส่วน

$$\mathbf{A}_4' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5\\ 1.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\ 0\end{bmatrix}$$

การทดสอบอัตราส่วน $\text{Min}\left\{\dfrac{25}{3/2} \;,\; -\right\} = \dfrac{50}{3}$ ตัวแปร x_3 เป็นตัวแปรออก ดังนั้น ตัวแปรพื้นฐานคือ x_4 และ x_2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1.5 & 1\\ 1.5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & -1/3\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50/3\\ 25\end{bmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}100 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50/3\\ 25\end{bmatrix} = 3{,}416.667$$

ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = 25$ $x_4 = 50/3$ $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = 0$ โดยที่ $z = 3{,}416.67$ กล่าวคือ ผลิตลูกกวาดชนิดที่ 2 จำนวน 25 กล่อง ชนิดที่ 4 จำนวน 50/3 กล่อง ส่วนลูกกวาดชนิดที่ 1 และ 3 ไม่ผลิต ผลกำไรที่ได้เท่ากับ 3,416.67 บาท

4.8.6 การเพิ่มข้อจำกัดใหม่

ในสถานการณ์ต่าง ๆ มีโอกาสที่จะมีข้อจำกัดใหม่เกิดขึ้น เช่น ข้อจำกัดด้านปริมาณวัตถุดิบบางประเภทที่เดิมโรงงานสามารถจัดหาได้ไม่ยากนักเมื่อต้องการใช้ แต่ต่อมาวัตถุดิบประเภทนี้อาจต้องหาจากแหล่งอื่น ๆ ทำให้ต้องใช้เวลานาน ทำให้ในการวางแผนการผลิตด้วยการโปรแกรมเชิงเส้นต้องคำนึงถึงวัตถุดิบประเภทนี้ โดยการเพิ่มข้อจำกัดของวัตถุดิบนี้ในตัวแบบ ซึ่งการเพิ่มข้อจำกัดลักษณะนี้อาจส่งผลกระทบต่อผลเฉลยปัจจุบันใน 3 กรณี

กรณีที่ 1 ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

กรณีที่ 2 ผลเฉลยไม่สอดคล้องกับข้อจำกัดใหม่ แต่ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นยังคงมีผลเฉลยที่เป็นไปได้ ทำให้ต้องหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดใหม่

กรณีที่ 3 การเพิ่มข้อจำกัดใหม่ทำให้ไม่มีผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่เป็นไปได้

วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์สามารถนำมาใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อมีการเพิ่มข้อจำกัดได้ โดยเราไม่ต้องประมวลผลตัวแบบใหม่ทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.22 จากตัวอย่างที่ 4.15 ถ้าในการผลิตนี้พบว่ามีข้อจำกัดเพิ่มเติมเกี่ยวกับวัตถุดิบชนิดที่ 3 คือ ถั่ว ซึ่มีอยู่ในคลังเพียงเท่ากับ 1 กิโลกรัม จากปริมาณการผสมถั่วลงในลูกกวาดทั้งสองชนิดพบว่า ปริมาณถั่วที่ใส่ใน ลูกกวาดชนิดที่ 1 2 และ 3 เท่ากับ 1/4 1/2 และ 3/8 ขีด (100 กรัม) ต่อกล่อง นอกจากนี้ทางโรงงานต้องการจะผลิตลูกกวาดชนิดที่ 1 ไม่น้อยกว่า 5 กล่อง

ดังนั้นตัวแบบจะมีข้อเพิ่มขึ้น 2 ข้อจำกัดคือ

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{8}x_3 \quad \leq \quad 10$$

$$x_1 \quad \geq \quad 5$$

สำหรับการแก้ปัญหาในกรณีที่มีการเพิ่มข้อจำกัดนั้น วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์สามารถช่วยในการแก้ปัญหานี้ได้ โดยเพิ่มข้อจำกัดใหม่ในตาราซิมเพล็กซ์ที่ให้ค่าเหมาะสมที่สุด

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{8}x_3 + s_3 \quad = \quad 10$$

$$x_1 - e_4 \quad = \quad 5$$

จะได้

$$-x_1 + e_4 \quad = \quad -5$$

จากตารางนี้พบว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 5$ $x_2 = 22.5$ $x_3 = 22.5$ $s_3 = 17/16$ และ $s_1 = s_2 = e_4 = 0$ โดยที่ $z = 2{,}850$ กล่าวคือ ผลิตลูกกวาดชนิดที่ 1 5 กล่อง ลูกกวาดชนิดที่ 2 และ 3 จำนวน 22.5 กล่อง และมีถั่วเหลืองอยู่ 17/16 หน่วย (100 กรัม) ผลกำไรที่ได้เท่ากับ 2,850 บาท

ตารางที่ 4.14 ตารางซิมเพล็กซ์

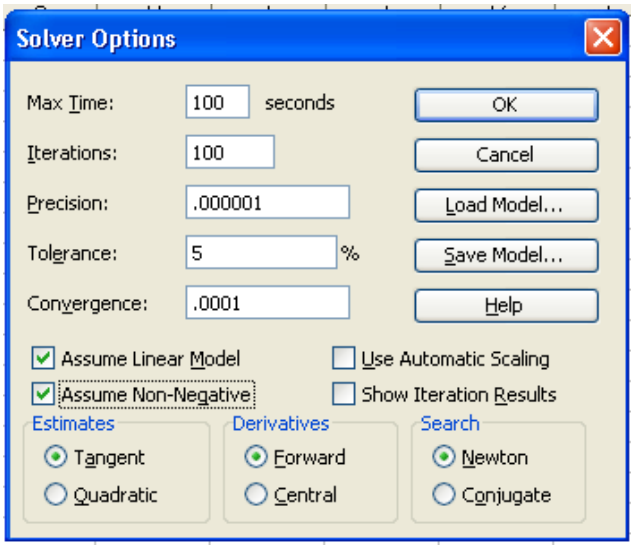
ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_4	
z	1	–30	0	0	–40	–10	0	0	3000
x_3	0	1/2	0	1	3/2	–1/2	0	0	25
x_2	0	1/2	1	0	–1/2	1/2	0	0	25
s_3	0	1/4	1/2	3/8	0	0	1	0	25
e_4	0	–1	0	0	0	0	0	1	–5
z	1	–30	0	0	–40	–10	0	0	3000
x_3	0	1/2	0	1	3/2	–1/2	0	0	25
x_2	0	1/2	1	0	–1/2	1/2	0	0	25
s_3	0	3/16	0	0	–5/16	–1/16	1	0	25/8
e_4	0	–1	0	0	0	0	0	1	–5
z	1	0	0	0	–40	–10	0	–30	2850
x_3	0	0	0	1	3/2	–1/2	0	0.5	22.5
x_2	0	0	1	0	–1/2	1/2	0	0.5	22.5
s_3	0	0	0	0	–5/16	–1/16	1	–3/16	17/16
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	5

4.9 การวิเคราะห์ความไวด้วยโปรแกรม Excel Solver

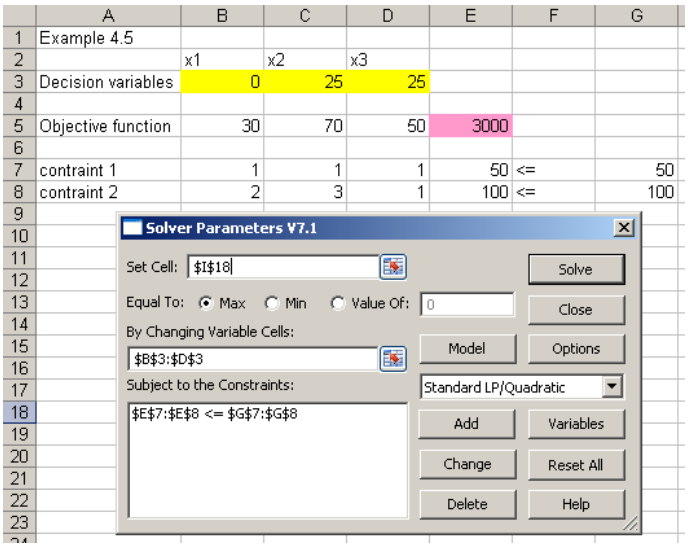
ในที่นี้ขอเสนอการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ด้วยโปรแกรม Excel Solver ซึ่งมีการใช้งานอย่างแพร่หลาย (Baker, 2006; Balakrishman, Render and Stair, 2007) จากตัวอย่างที่ 4.15 เป็นตัวอย่างการประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นด้วย Excel Solver ผู้ใช้โปรแกรมจะต้องเลือก Assume Linear Model ซึ่งอยู่ในหน้าต่าง Solver Options ของ Standard Excel Solver ดังรูปที่ 4.6 หากไม่เลือกตัวเลือกนี้ โปรแกรม Solver จะไม่ประมวลผลตัวแบบในฐานะของการโปรแกรมเชิงเส้น และส่งผลให้รายงานการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์นั้นแตกต่างไปจากรายงานที่จะกล่าวถึงต่อไป ดังนั้น ผู้ใช้ต้องมั่นใจว่า ได้เลือก Assume linear Model

สำหรับโปแกรม Premium Solver Platform นั้นจะไม่มีตัวเลือกให้เลือก Assume Linear Model แต่ในหน้าต่างของ Solver Parameter จะมีตัวเลือก Standard LP/Quadratic ดังรูปที่ 4.7 จากนั้นคลิก Options เลือก Assume Non-Negative แล้วกลับไปที่ Solver Parameters คลิก Solve จะปรากฏหน้าต่าง Solver Result ดังรูปที่ 4.8 ซึ่งจะมีรายงานให้เลือก 3 ประเภท คือ (1) คำตอบ(Answer) (2) การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity) และ (3)

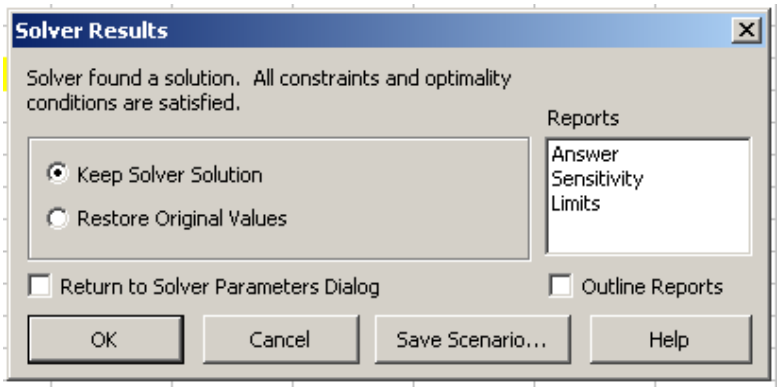
ขอบเขต (Limits) ให้เลือก Answer และ Sentivity โดยการเลื่อนเคอเซอร์ไปที่Answer พร้อมกับกด Shift ค้างไว้แล้วเลื่อนเคอเซอร์ไปที่ Sentivity คลิก OK จะปรากฏแผ่นงาน (Sheet) ในแฟ้มข้อมูลที่มีตัวแบบปัญหาอยู่ 2 แผ่นงาน คือ แผ่นงาน Answer และ แผ่นงาน Sensitivity การประมวลผลด้วยตัวแบบในตัวอย่างที่ 4.15 นั้นจะได้รายงานที่ให้ผลเฉลยของปัญหา ดังรูปที่ 4.9 โดยระบุค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ตัวแปรตัดสินใจ และค่าตัวแปรส่วนขาด ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 สำหรับรายงานที่สองเป็นรายงานการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ ดังรูปที่ 4.10 ซึ่งข้อมูลในรายงานนี้จะนำมาใช้ในการตอบคำถาม What–if สมมติว่า เรากำลังพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ทีละหนึ่งพารามิเตอร์ สำหรับการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงมากกว่าหนึ่งพารามิเตอร์ไปพร้อม ๆ กันจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 4.11



รูปที่ 4.6 หน้าต่าง Solver Options ของ Standard Excel Solver



รูปที่ 4.7 หน้าต่าง Solver Options ของ Premium Solver Platfrom



รูปที่ 4.8 หน้าต่างของ Solver Results

รายงานการวิเคราะห์ความไวประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ

(1) ตารางชื่อ Adjustable Cells ที่แสดงข้อมูลเกี่ยวกับผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่อผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

(2) ตารางชื่อ Constraints แสดงข้อมูลความสัมพันธ์ของผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือต่อผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ในรูปที่ 4.11 ตาราง Adjustable Cells แสดงให้เห็นว่าค่าของตัวแปรตัดสินใจทั้งสามมีค่าเท่าใด ในที่นี้ตัวแปร x_2 และ x_3 เป็นตัวแปรพื้นฐาน โดยที่ x_2 ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 70 ซึ่งค่านี้หมายถึงกำไรต่อกล่องของลูกกวาดชนิดที่ 2 เมื่อพิจารณาค่า Allowable Increase = 80 และ Allowable Decrease = 20 หมายความว่ากำไรต่อกล่องนี้สามารถมีค่าเพิ่มขึ้นได้อีก 80 บาทหรือลดลงได้อีก 20 บาท ก็ยังคงทำให้ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐานต่อไป นั้นหมายความว่า โรงงานจะยังคงผลิตลูกกวาดชนิดที่ 2 ต่อไปถ้ากำไรต่อกล่องอยู่ในช่วง 50 ถึง 150 บาท ในทำนองเดียวกันสำหรับ x_3 บริษัทยังคงผลิต ถ้ากำไรต่อกล่องอยู่ในช่วง 23.33 ถึง 70 บาทและไม่ผลิต x_1 ถ้ากำไรต่อกล่องไม่ถึง 60 บาท สำหรับตาราง Constraints จะพบว่าค่าคอลัมน์ Final Value แทนปริมาณน้ำตาลและช็อคโกแล็ตที่ใช้เมื่อต้องการผลิตลูกกวาดแต่ละชนิดตามปริมาณที่ระบุในผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ส่วนคอลัมน์ Constatint R.H. Side แทนปริมาณที่มีอยู่ ซึ่งตัวเลขในสองคอลัมน์นี้เท่ากัน นั่นหมายความว่าข้อจำกัดด้านปริมาณน้ำตาลและช็อคโกแล็ตนี้เป็นข้อจำกัดผูกพัน เมื่อพิจารณาคอลัมน์ Shadow Price หมายถึงค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่เพิ่มขึ้น ถ้าโรงงานมีปริมาณวัตถุดิบเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ตัวอย่างเช่น พิจารณาข้อจำกัดด้านปริมาณน้ำตาล มีค่า Shadow Price เท่ากับ 40 บาท หมายความว่า หากโรงงานสามารถจัดหาน้ำตาลมาเพิ่มจำนวน 1 หน่วย (100 กรัม) จะทำให้โรงงานมีกำไรเพิ่มขึ้น 40 บาท อย่างไรก็ตาม การเพิ่มขึ้นของปริมาณน้ำตาลนี้จะทำให้กำไรเพิ่มขึ้นในอัตรานี้ถ้าปริมาณน้ำตาลที่เพิ่มขึ้นไม่เกิน 16.66 หน่วย ในทางตรงข้าม ถ้ามีการลดปริมาณน้ำตาลลง 1 หน่วยจะทำให้กำไรลดลง 40 บาททั้งนี้ปริมาณที่ลดลงต้องไม่เกิน 50 หน่วย

เป็นต้น ซึ่งรายละเอียดของรายงานการวิเคราะห์ความไวเมื่อมีการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์นี้จะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

Microsoft Excel 11.0 Answer Report
Worksheet: [Book1]Sheet1
Report Created: 07/04/2007 17:08:59 PM
Result: Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.
Engine: Standard LP/Quadratic
Solution Time: 00 Seconds
Iterations: 2
Subproblems: 0
Incumbent Solutions: 0

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$E$5	Objective function	0	3000

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$3	Decision variables x1	0	0
$C$3	Decision variables x2	0	25
$D$3	Decision variables x3	0	25

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$E$7	contraint 1	50	$E$7<=$G$7	Binding	0
$E$8	contraint 2	100	$E$8<=$G$8	Binding	0

รูปที่ 4.9 รายงานผลเฉลย

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Book1]Sheet1
Report Created: 07/04/2007 17:09:00 PM

Target Cell (Max)

Cell	Name	Final Value
$E$5	Objective function	3000

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$3	Decision variables x1	0	-30	30	30	1E+30
$C$3	Decision variables x2	25	5.21805E-15	70	80.0000002	20.00000007
$D$3	Decision variables x3	25	1.73819E-15	50	20.00000007	26.66666673

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$7	contraint 1	50	40	50	16.66666667	50
$E$8	contraint 2	100	10	100	50	50

รูปที่ 4.10 รายงานการวิเคราะห์ความไว

4.10 การวิเคราะห์ความไวด้วยโปรแกรม SAS

การเขียนโปรแกรม SAS เพื่อวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ต่าง ๆ นั้น สามารถเขียนในขั้นตอนของ Proc step โดยใช้ตัวเลือก (Option) " RANGEPRICE" เพื่อแสดงการวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และ "RANGERHS" เพื่อแสดงการวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดต่าง ๆ นอกจากนี้ยังสามารถระบุขอบเขตของการโปรแกรมพาราเมทริกซ์เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์และค่าทางขวามือของข้อจำกัดโดยระบุตัวเลือก เป็น "PRICEPHI= ϕ" และ "RHSPHI= ϕ" สำหรับตัวอย่างที่ 4.15 สามารถเขียนโปรแกรม SAS ดังรูปที่ 4.11 เพื่อวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ทั้งสองได้ดังนี้

```
DATA candy;
      input _row_ $ x1 x2     x3  _type_ $ _rhs_;
      datalines;
obj   30    70    50    Max   .
Sugar 1     1     1     le    50
Choco 2     3     1     le    100
;
PROC LP rangeprice rangerhs;
RUN;
```

รูปที่ 4.11 โปรแกรม SAS

เมื่อประมวลผลโปรแกรมนี้จะรายงานการวิเคราะห์ความไวของสัมประสิทธิ์ตัวแปรตัดสินใจและค่าทางขวามือดังรูปที่ 4.12 และ4.13 สำหรับการวิเคราะห์ความไวของสัมประสิทธิ์ในรูปที่ 4.12 คอลัมน์ของ Minimum Phi จะแสดงผลว่าค่าต่ำสุดของตัวแปรตัดสินใจที่ทำให้ตัวแปรพื้นฐานนี้กลายเป็นตัวแปรออกพร้อมระบุตัวแปรที่จะเข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานแทน เช่น แถวของตัวแปรพื้นฐาน x_2 ซึ่งปัจจุบันมีค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 70 เมื่อพิจารณา 3 คอลัมน์ย่อยของ Minimum Phi คือ Price Entering และ Objective พบว่ามีค่าเท่ากับ 50 Choco และ 2,500 ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า ถ้าประสิทธิ์ของ x_2 นี้มีค่าน้อยกว่า 50 แล้ว จะกลายเป็นตัวแปรออกและตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัด Choco จะกลายเป็นตัวแปรเข้า โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 2,500 สำหรับแถว x_1 คอลัมน์ย่อยของ Minimum Phi คือ Price Entering และ Objective พบว่ามีค่าเท่ากับ –INFINITY . และ 3,000 ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า ถ้าประสิทธิ์ของ x_1 นี้มีค่าลดลงเท่าใดก็ตาม x_1 ยังคงเป็นตัวแปรพื้นฐานอยู่ โดยมีค่าฟังก์ลดชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 3,000 นั่นคือ โรงงานแห่งนี้ยังคงผลิตลูกกวาดสินค้าชนิดที่ 1 อยู่ไม่ว่ากำไรต่อกล่องลดลง ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ในคอลัมน์ Maximum Phi สามารถอธิบายได้ในลักษณะเดียวกัน

สำหรับการวิเคราะห์ความไวของค่าทางขวามือในรูปที่ 4.13 คอลัมน์ของ Minimum Phi 3 ซึ่งประกอบด้วยคอลัมน์ย่อยคือ RHS Leaving และ Objective ในแถวของ Sugar พบว่ามีค่าเท่ากับ 33.33 x_3 และ 2,333.33 ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า ปริมาณน้ำตาลจะสามารถมีค่าลดลงได้ถึง 33.33 หน่วย (100 กรัม) ที่ยังคงทำให้โรงงานผลิตลูกกวาดชนิดที่ 3 ถ้าปริมาณน้ำตาลที่มีอยู่ต่ำกว่า 33.33 หน่วยแล้ว โรงงานจะไม่ผลิตลูกกวาดชนิดที่ 3 และจะมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 2,333.33 บาท สำหรับคอลัมน์ของ Maximum Phi สามารถพิจารณาผลลัพธ์ได้ในทำนองเดียวกัน

The SAS System 19:26 Tuesday, September 18, 2007

The LP Procedure

Price Range Analysis

	Variable	Minimum Phi			Maximum Phi		
Col	Name	Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	x1	-INFINITY	.	3000	60	x1	3000
2	x2	50	Choco	2500	150	Sugar	5000
3	x3	23.333333	Sugar	2333.3333	70	Choco	3500
4	Sugar	-INFINITY	.	3000	40	Sugar	3000
5	Choco	-INFINITY	.	3000	10	Choco	3000

รูปที่ 4.12 รายงานการวิเคราะห์ความไวของสัมประสิทธิ์ตัวแปรตัดสินใจ

The SAS System 19:26 Tuesday, September 18, 2007

The LP Procedure

RHS Range Analysis

	Minimum Phi			Maximum Phi		
Row	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
Sugar	33.333333	x3	2333.3333	100	x2	5000
Choco	50	x2	2500	150	x3	3500

รูปที่ 4.13 รายงานการวิเคราะห์ความไวของค่าทางขวามือ

แม้ว่าโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจะมีรูปแบบการรายงานผลการวิเคราะห์ความไวแตกต่างกัน แต่ส่วนใหญ่แล้ว จะให้ข้อมูลที่สำคัญ ๆ ในการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ได้ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นหัวข้อถัดไปจะแสดงตัวอย่างที่ใช้โปรแกรม Excel Solver

4.10.1 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัด

การเปลี่ยนค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่เป็น *ข้อจำกัดผูกพัน (Binding constraint)* จะส่งผลต่อขนาดของพื้นที่ที่เป็นไปได้ ถ้าการเปลี่ยนแปลงนี้ส่งผลให้ขนาดของพื้นที่ที่เป็นไปได้มีขนาดใหญ่ขึ้น ทำให้มีโอกาสที่จะได้ผลเฉลยที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีกว่าผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบัน ในทางตรงข้าม ถ้าการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือนี้อาจส่งผลให้ขนาดของพื้นที่ที่เป็นไปได้ลดลง ซึ่งผลเฉลยเหมาะสมที่สุดปัจจุบันอาจถูกตัดออกไป ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าลดลงได้ ซึ่งระดับการเปลี่ยนแปลงค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ถูกกำหนดโดย ราคาเงาของข้อจำกัด ซึ่งการเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัดนั้น ๆ ต้องไม่เกินช่วงที่แสดงในรายงานการวิเคราะห์ความไว

จากตัวอย่างในหัวข้อ 2.2 การวางแผนการผลิตของโรงงานเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่ง ผู้จัดการแผนกวางแผนการผลิต ต้องการวางแผนการผลิตสินค้า 3 ชนิดคือ โต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก (x_1) โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ (x_2) และ เก้าอี้มีพนักพิง (x_3) ในสัปดาห์หน้า โดยมีตัวแบบดังนี้

$$\text{ค่าสูงสุด} \quad z = 120x_1 + 200x_2 + 90x_3$$

ข้อจำกัด

เวลาในขั้นตอนการตัด	$8x_1 + 12x_2 + 10x_3$	$\leq$	2,400
เวลาในขั้นตอนการขัด	$4x_1 + 5x_2 + 5x_3$	$\leq$	2,000
เวลาในขั้นตอนการทา-พ่นสี	$6x_1 + 10x_2 + 5x_3$	$\leq$	1,800
เวลาในขั้นตอนการประกอบ	$5x_1 + 5x_2 + 6x_3$	$\leq$	1,800
ปริมาณไม้แผ่น	$2.5x_1 + 7x_2 + 3x_3$	$\leq$	700
ปริมาณเหล็กท่อน	$5x_1 + 8x_2$	$\leq$	800
ปริมาณแผ่นเหล็ก	$6x_3$	$\leq$	500
ปริมาณความต้องการโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก	x_1	$\leq$	70
ปริมาณความต้องการโต๊ะญี่ปุ่นขนาด	x_2	$\leq$	50
ปริมาณความต้องการเก้าอี้มีพนักพิง	x_3	$\leq$	80

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3$$

การวิเคราะห์ความไวของค่าทางขวามือในข้อจำกัดต่าง ๆ ด้วย Excel Solver จะได้รายงานดังรูปที่ 4.14 และ 4.15

ราคาเงา (Shadow price) ของข้อจำกัดหนึ่ง คือปริมาณการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของค่าทางขวามือจำนวน 1 หน่วย จากรูปที่ 4.15 พบว่าในแถวที่ 20 ของ Excel spreadsheets ต่างก็มีค่า Final Value และ Constraint R.H.Side เท่ากับ 700

และมีค่า Shadow Price เท่ากับ 28.57 หมายความว่า ปัจจุบันโรงงานมีปริมาณไม้แผ่นอยู่ 700 ตารางฟุตและนำมาใช้ในการผลิต 700 ตารางฟุตด้วย ถ้ามีการจัดหาไม้แผ่นมาเพิ่มขึ้น 1 ตารางฟุต จะส่งผลให้กำไรเพิ่มขึ้น 28.57 บาท ขณะที่ในแถวที่ 22 ของ Excel spreadsheets มีค่า Final Value เท่ากับ 480 ส่วน Constraint R.H.Side มีค่าเท่ากับ 500 และ Shadow Price มีค่าเท่ากับ 0 หมายความว่า การเพิ่มขึ้นของเหล็กแผ่นจำนวน 1 ตารางฟุตจะไม่ทำให้ได้กำไรเพิ่มขึ้น เนื่องจากปริมาณเหล็กแผ่นมีอยู่ 500 ตารางฟุตนั้น ใช้เพื่อการผลิตเพียง 480 ตารางฟุต การเพิ่มขึ้นของปริมาณเหล็กแผ่นจึงไม่ทำให้โรงงานผลิตและทำกำไรได้มากขึ้น

ในกรณีที่มีการเพิ่มหรือลดปัจจัยการผลิตต่าง ๆ เกิดขึ้นแล้ว การวิเคราะห์ความไวนี้ทำให้เราทราบว่าการเปลี่ยนแปลงนี้จะส่งผลอย่างไร จากรูปที่ 4.15 ข้อจำกัดต่าง ๆ ในตาราง Constriants จะมีคอลัมน์ของ *การเพิ่มขึ้นที่ยอมให้ได้ (Allowable increase)* และ *การลดลงที่ยอมให้ได้ (Allowable decrease)* เช่น ปริมาณไม้แผ่น ปัจจุบันมีอยู่ 700 ตารางฟุตจะถูกนำออกมาใช้ในการผลิตทั้งหมด ถ้ามีการจัดหาไม้แผ่นมาเพิ่มแล้วจะทำให้โรงงานสามารถผลิตได้เพิ่มขึ้น โดยโรงงานจะได้กำไรเท่ากับราคาเงา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 28.57 บาทต่อปริมาณไม้แผ่นที่เพิ่มขึ้น 1 ตารางฟุต นั่นหมายความว่า ถ้าฝ่ายจัดหาวัตถุดิบของโรงงานสามารถหาไม้แผ่นได้มาเพิ่มเติมเพื่อให้สามารถผลิตได้เพิ่มขึ้นแล้ว ราคาไม้แผ่นต้องไม่สูงกว่า 28.57 บาทต่อตารางฟุต อย่างไรก็ตาม ปริมาณไม้แผ่นที่เพิ่มขึ้นแล้วทำให้กำไรเพิ่มดังกล่าวนั้นจะไม่เกิน 65 ตารางฟุต

ในทางตรงข้าม หากโรงงานต้องการนำไม้แผ่นที่มีอยู่ในปัจจุบันไปใช้ประกอบกิจกรรมอื่น เช่น นำไม้แผ่นออกไปขาย เป็นต้น ทำให้ปริมาณไม้แผ่นที่มีไว้เพื่อการผลิตจะลดลง ทำให้โรงงานได้กำไรลดลง 28.57 บาทต่อตารางฟุต แต่ถ้านำไม้แผ่นไปทำกิจกรรมอื่นต้องไม่มากกว่า 285 ตารางฟุต สำหรับปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ ที่มีปริมาณความต้องการสูงสุดอยู่ที่ 50 ตัว ด้วยปริมาณปัจจัยการผลิตที่มีอยู่ทำให้โรงงานจะผลิต 40.71 ตัว โดยมีกำไรต่อตัวเท่ากับ 200 บาท หากตลาดมีปริมาณลดลง ทำให้ปริมาณความต้องการสูงสุดลดลงจะต้องไม่เกิน 9.28 ตัว ขณะที่ปริมาณความต้องการสูงสุดสามารถเพิ่มขึ้นได้ไม่จำกัด (1E+30) เนื่องจากโรงงานไม่มีทรัพยากรอื่น ๆ ในการผลิตเพิ่มให้ได้ตามความต้องการ จึงทำให้ปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่มีจำนวนเท่าเดิม ดังนั้น การเปลี่ยนแปลปริมาณความต้องการสูงสุดนี้จะไม่ส่งผลต่อทำให้โรงงานผลิตเพิ่มขึ้น ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงปริมาณความต้องการสูงสุดในช่วงนี้ไม่ส่งผลกระทบทำให้ผลเฉลยในปัจจุบันมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ถ้าปริมาณความต้องการโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่นี้ลดลงเกินกว่า 9.28 ตัว อาทิเช่น 12 ตัว จะทำให้ปริมาณความต้องการสูงสุดเท่ากับ 38 ตัว ซึ่งต่ำกว่าปริมาณการผลิตในปัจจุบัน ทำให้โรงงานอาจต้องลดปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ นั่นคือ ผลเฉลยปัจจุบันจะมีการเปลี่ยนแปลงไป แต่ถ้าปริมาณการผลิตสูงสุดลดลงไม่เกินค่าการลดลงที่ยอมให้ได้ จำไม่ทำให้โรงงานเปลี่ยนแปลงปริมาณการผลิตแต่อย่างใด นั่นคือ ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดต่อไป

Worksheet: [บทที่4.xls]ex2.1
Report Created: 8/7/2550 16:43:13

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$E$5	ฟังก์ชันวัตถุประสงค์	0	23742.85714

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$3	ตัวแปรตัดสินใจ x1	0	70
$C$3	ตัวแปรตัดสินใจ x2	0	40.71428571
$D$3	ตัวแปรตัดสินใจ x3	0	80

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$E$7	เวลาในการตัด	1848.571429	$E$7<=$G$7	Not Binding	551.4285714
$E$8	เวลาในการขัด	883.5714286	$E$8<=$G$8	Not Binding	1116.428571
$E$9	เวลาในการทา-พ่นสี	1227.142857	$E$9<=$G$9	Not Binding	572.8571429
$E$10	เวลาในการประกอบ	1033.571429	$E$10<=$G$10	Not Binding	766.4285714
$E$11	ปริมาณไม้แผ่น	700	$E$11<=$G$11	Binding	0
$E$12	ปริมาณเหล็กท่อน	675.7142857	$E$12<=$G$12	Not Binding	124.2857143
$E$13	ปริมาณเหล็กแผ่น	480	$E$13<=$G$13	Not Binding	20
$E$14	ปริมาณการผลิตโต๊ะขนาดเล็ก	70	$E$14<=$G$14	Binding	0
$E$15	ปริมาณการผลิตโต๊ะขนาดใหญ่	40.71428571	$E$15<=$G$15	Not Binding	9.285714286
$E$16	ปริมาณการผลิตเก้าอี้	80	$E$16<=$G$16	Binding	0

รูปที่ 4.14 รายงานผลเฉลย

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [บทที่4.xls]ex2.1
Report Created: 8/7/2550 16:43:13

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$3	ตัวแปรตัดสินใจ x1	70	0	120	1E+30	48.57142857
$C$3	ตัวแปรตัดสินใจ x2	40.71428571	0	200	10	200
$D$3	ตัวแปรตัดสินใจ x3	80	0	90	1E+30	4.285714286

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$7	เวลาในการตัด	1848.571429	0	2400	1E+30	551.4285714
$E$8	เวลาในการขัด	883.5714286	0	2000	1E+30	1116.428571
$E$9	เวลาในการทา-พ่นสี	1227.142857	0	1800	1E+30	572.8571429
$E$10	เวลาในการประกอบ	1033.571429	0	1800	1E+30	766.4285714
$E$11	ปริมาณไม้แผ่น	700	28.57142857	700	65	285
$E$12	ปริมาณเหล็กท่อน	675.7142857	0	800	1E+30	124.2857143
$E$13	ปริมาณเหล็กแผ่น	480	0	500	1E+30	20
$E$14	ปริมาณการผลิตโต๊ะขนาดเล็ก	70	48.57142857	70	58	26
$E$15	ปริมาณการผลิตโต๊ะขนาดใหญ่	40.71428571	0	50	1E+30	9.285714286
$E$16	ปริมาณการผลิตเก้าอี้	80	4.285714286	80	3.333333333	21.66666667

รูปที่ 4.15 รายงานการวิเคราะห์ความไว

4.10.2 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

การเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ไม่ส่งผลต่อขนาดของพื้นที่ที่เป็นไปได้ แต่อาจส่งผลให้เราเลือกตัวแปรบางตัวมาเป็นตัวแปรพื้นฐานแทน การวิเคราะห์ความไวนี้ทำให้เราทราบว่าการเปลี่ยนแปลงนี้จะส่งผลอย่างไร จากตัวอย่างการผลิตสินค้า 3 ชนิดของโรงงานเฟอร์นิเจอร์ ดังรูปที่ 4.15 ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์แสดงในตาราง Adjustable cells โดยมีคอลัมน์ของ *การเพิ่มขึ้นที่ยอมให้ได้ (Allowable increase)* และ *การลดลงที่ยอมให้ได้ (Allowable decrease)* ที่แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์นี้สามารถเพิ่มขึ้นหรือลดลงได้เท่าใด เช่น ในแถวที่ 9 ของ Excel spreadsheets นี้มีค่า Final value และ Objective coefficient เท่ากับ 70 และ 120 ส่วน Allowable increase และ Allowable decrease เท่ากับ 1E+30 และ 48.57 หมายความว่า ปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก (x_1) อยู่ที่ 70 ตัว โดยมีกำไรต่อหน่วยเท่ากับ 120 บาท หากมีการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อหน่วยอาจทำให้ปริมาณการผลิตเปลี่ยนแปลงได้ ถ้ากำไรต่อหน่วยลดลงไม่เกิน 48.57 บาทหรือเพิ่มขึ้นจนถึง ∞ โรงงานยังคงผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กต่อไป ตัวอย่างเช่น กำไรต่อหน่วยของโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กเป็นเหลือ 65 บาทโรงงานไม่ควรผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กและนำปัจจัยการผลิตต่าง ๆ นี้ไปผลิตสินค้าอื่น เป็นต้น ในทำนองเดียวกัน ในแถวที่ 10 ของ Excel spreadsheets นี้มีค่า Final value และ Objective coefficient เท่ากับ 40.71 และ 200 ส่วน Allowable increase และ Allowable decrease เท่ากับ 10 และ 200 หมายความว่า ปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่มีกำไรต่อหน่วยเท่ากับ 200 บาทต่อตัว หากกำไรต่อตัวเพิ่มขึ้นไป 10 บาท โรงงานยังคงเลือกที่จะผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่นี้ หากกำไรต่อตัวเพิ่มขึ้นมากกว่านี้อาจทำให้โรงงานต้องการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งไม่ผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กหรือเก้าอี้มีพนักพิง ซึ่งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะนี้จะทำให้ตัวแปรพื้นฐานกลายเป็นตัวแปรจร ทำให้โรงงานต้องประมวลผลตัวแบบเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดใหม่

4.11 การวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัวแปร

ในทางปฏิบัติมักมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์หลายตัวพร้อม ๆ กัน ทำให้เราไม่สามารถอ่านผลการวิเคราะห์ได้โดยตรงจากรายงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงต้องมีวิธีการวิเคราะห์เพิ่มเติม ในหัวข้อนี้กล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์และค่าทางขวามือ โดยใช้ผลลัพธ์จากการประมวลผลตัวแบบด้วยโปรแกรม Microsoft Excel

4.11.1 การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

การเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์พร้อม ๆ หลายตัวแปรจะส่งผลกระทบต่อผลเฉลยเหมาะสมที่สุดปัจจุบันหรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเหล่านั้นมี *ค่าใช้จ่ายส่วนลด (Reduced cost)* ในตารางสุดท้ายที่บรรจุค่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุด นั้นมีค่าเป็นศูนย์ แล้วจะเกิดการเปลี่ยนแปลงได้ใน 2 ลักษณะคือ

กรณีที่ 1 ทุกตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นตัวแปรที่มี ค่าใช้จ่ายส่วนลด ในแถวฟังก์ชันวัตถุประสงค์นั้น ไม่เป็นศูนย์

กรณีที่ 2 อย่างน้อยหนึ่งตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเปลี่ยนแปลงและมีค่าใช้จ่ายส่วนลดมีค่าเป็นศูนย์

ในกรณีที่ 1 ผลเฉลยปัจจุบันยังเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ยังคงอยู่ใน *ช่วงยอมให้ได้ (Allowable range)* ถ้าผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดแล้วทั้งค่าของตัวแปรตัดสินใจยังคงไม่เปลี่ยนแปลง แต่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์อาจไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใด ๆ ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์อยู่นอกช่วงยอมให้ได้ แล้วผลเฉลยปัจจุบันจะไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดอีกต่อไป ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่างที่ 4.23 จากตัวอย่าที่ 2.11 สามารถสร้างตัวแบบด้วยโปรแกรม Excel ดังรูปที่ 4.16 และใช้ Solver ได้ผลเฉลยที่เหมาะสม ดังรูปที่ 4.17 สมมติว่าค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรีลดลงจาก 400 เป็น 300 บาทต่อหน่วยสินค้าและค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปอุบลราชธานีลดลงจาก 750 เป็น 700 บาทต่อหน่วยสินค้า ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเหมาะสมที่สุดหรือไม่

เพื่อวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ได้ผลแสดงดัง รูปที่ 4.18 ซึ่งจะพบว่า ค่าขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรี มีค่าเท่ากับ 400 บาทต่อหน่วยสินค้า โดยค่ายอมให้ได้ส่วนเพิ่มเท่ากับ 1E=30 หรือ ∞ และค่ายอมให้ได้ส่วนลดเท่ากับ 200 ดังนั้น ช่วงยอมให้ได้เท่ากับ

$$400-200 \leq \text{ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรี} \leq 400+\infty$$

$$200 \leq \text{ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรี} \leq \infty$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปอุบลราชธานีเท่ากับ 750 บาทต่อหน่วยสินค้า ยังคงอยู่ในช่วงยอมให้ได้ คือ

$750 - 100 \leq$ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปอุบลราชธานี $\leq 750 + \infty$

$650 \leq$ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปอุบลราชธานี $\leq \infty$

จะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่เปลี่ยนแปลงทั้งสองค่านี้ อยู่ในช่วงที่ยอมให้ได้ ดังนั้นผลเฉลยที่ได้นี้ยังคงเหมาะสมที่สุด

Microsoft Excel - chapter2.xls

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

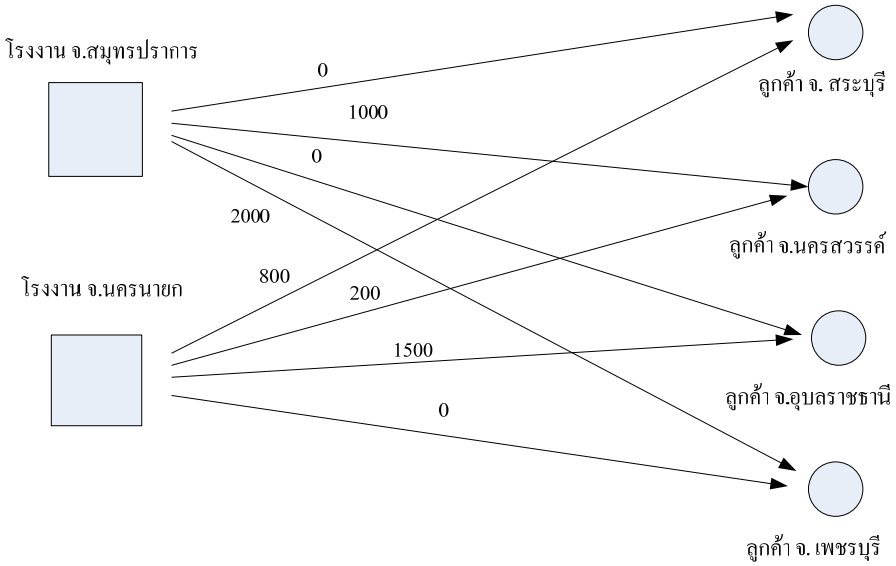
Arial

SnagIt Window

E27

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Transportation							
2	จากโรงงาน			ลูกค้าในจังหวัด				
3		สระบุรี	นครสวรรค์	อุบลราชานี	เพชรบุรี		ฟังก์ชันวัตถุประสงค์	
4	สมุทรปราการ	0	1000	0	2000	3000	2760000	
5	นครนายก	800	200	1500	0	2500		
6		800	1200	1500	2000			
7								
8				ลูกค้าในจังหวัด		กำลังการผลิต		
9	โรงงาน	สระบุรี	นครสวรรค์	อุบลราชานี	เพชรบุรี			
10	สมุทรปราการ	400	500	750	450	3000		
11	นครนายก	250	550	700	600	3000		
12	ความต้องการ	800	1200	1500	2000			

รูปที่ 4.16 โปรแกรม Excel Solver สำหรับปัญหาการขนส่ง



รูปที่ 4.17 ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบัน

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [chapter2.xls]ex2_11 trans
Report Created: 27/6/2550 15:09:41

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$4	สมุทรปราการ สระบุรี	0	200	400	1E+30	200
$C$4	สมุทรปราการ นครสวรรค์	1000	0	500	50	100
$D$4	สมุทรปราการ อุบลราชานี	0	100	750	1E+30	100
$E$4	สมุทรปราการ เพชรบุรี	2000	0	450	100	500
$B$5	นครนายก สระบุรี	800	0	250	200	250
$C$5	นครนายก นครสวรรค์	200	0	550	100	50
$D$5	นครนายก อุบลราชานี	1500	0	700	100	700
$E$5	นครนายก เพชรบุรี	0	100	600	1E+30	100

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$6	สระบุรี	800	250	800	500	800
$C$6	นครสวรรค์	1200	550	1200	500	200
$D$6	อุบลราชานี	1500	700	1500	500	1500
$E$6	เพชรบุรี	2000	500	2000	500	200
$F$4	สมุทรปราการ	3000	-50	3000	200	500
$F$5	นครนายก	2500	0	3000	1E+30	500

รูปที่ 4.18 การวิเคราะห์ความไว สำหรับปัญหาการขนส่ง

ตัวอย่างที่ 4.24 จากตัวอย่างที่ 2.11 สมมติว่าค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรีเพิ่มขึ้นจาก 400 เป็น 450 บาทต่อหน่วยสินค้าและค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่นครนายกไปเพชรบุรีลดลงจาก 600 เป็น 450 บาทต่อหน่วยสินค้า ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ได้ผลแสดงดังรูปที่ 4.17 พบว่า ค่าขนส่งจากโรงงานที่สมุทรปราการไปสระบุรีเท่ากับ 450 บาทต่อหน่วยสินค้า ยังอยู่ในช่วงยอมให้ได้ ส่วนช่วงยอมให้ได้ของค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่นครนายกไปเพชรบุรี

$600 - 100 \leq$ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่นครนายกไปเพชรบุรี $\leq 600 + \infty$

$500 \leq$ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานที่นครนายกไปเพชรบุรี $\leq \infty$

เนื่องจากค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงานนครนายกไปยังจังหวัดเพชรบุรีเท่ากับ 450 บาทต่อหน่วยสินค้า ไม่อยู่ในช่วงยอมให้ได้ ดังนั้นผลเฉลยดังกล่าวข้างต้นไม่เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดอีกต่อไป

<u>กรณีที่ 2</u> เราสามารถแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยปัจจุบันยังเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด โดยใช้กฎ 100 % (100% Rule) โดยกำหนดให้

c_j แทนค่าสัมประสิทธิ์เดิมของตัวแปร j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

c'_j แทนค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ของตัวแปร j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

Δc_j แทนการเปลี่ยนแปลงของค่า c_j โดย $\Delta c_j = c'_j - c_j$

I_j แทนค่าสูงสุดของการเพิ่มที่ยอมให้ได้ (Maximum allowable increase) ของค่า c_j สำหรับผลเฉลยปัจจุบัน

D_j แทนค่าสูงสุดของการลดค่ายอมให้ได้ (Maximum allowable decrease)

สำหรับทุกตัวแปรตัดสินใจ x_j ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันวัตถุประสงค์อัตราส่วน r_j สามารถคำนวณได้จาก

$$\text{ถ้า} \quad \Delta c_j \geq 0 \qquad r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j} \tag{55}$$

$$\text{ถ้า} \quad \Delta c_j \leq 0 \qquad r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j} \tag{56}$$

ถ้า c_j ไม่เปลี่ยนแปลง แล้ว $r_j = 0$ ดังนั้น r_j ใช้วัดอัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงจริงของค่า c_j กับค่าสูงสุดของช่วงที่ยอมรับได้ ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดต่อไป

ถ้ามีค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพียงค่าเดียวที่เปลี่ยนแปลง ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดต่อไป ถ้า $r_j \leq 1$ เนื่องจากค่าของ r_j สามารถแสดงในรูปของเปอร์เซ็นต์ได้ จึงอาจกล่าวว่า $\sum r_j$ มีค่าไม่เกิน 100% สำหรับทุก x_j ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่า c_j จึงเรียกว่า กฎ 100% ของสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ซึ่งในทั่วไปของกฎนี้คือ ถ้า $\sum r_j \leq 1$ แล้วเรามั่นใจว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในปัจจุบัน ยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมต่อไป แต่ถ้า $\sum r_j > 1$ แล้ว ผลเฉลยปัจจุบันอาจเป็นหรือไม่ป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ในกรณีที่ผลเฉลยปัจจุบันนี้ยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด แล้วค่าของตัวแปรตัดสินใจจะไม่เปลี่ยนแปลง แต่ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) อาจเปลี่ยนแปลง (Bradley, Hay and Magnanti, 1977) นอกจากนี้ Cai and Cai (1997) ได้ศึกษาการใช้กฎ 100% สำหรับทุกพารามิเตอร์ในตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้ สำหรับตัวอย่างถัดไป แสดงถึงการนำกฎนี้ไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.25 จากตัวอย่าง 2.11 ถ้าค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากสมุทรปราการไปเพชรบุรีเพิ่มขึ้นจาก 450 เป็น 500 บาทต่อหน่วยสินค้า และค่าขนส่งจากนครนายกไปยังนครสวรรค์

ลดลงจาก 550 เป็น 500 บาทต่อหน่วยสินค้า จะส่งผลให้ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมต่อไปหรือไม่

จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าใช้จ่ายส่วนลดเป็นศูนย์ทั้งคู่ ทำให้ต้องใช้กฎ 100%

กำหนดให้

Δc_{14} แทนค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากสมุทรปราการไปยังเพชรบุรีที่มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

Δc_{22} แทนค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากนครนายกไปยังนครสวรรค์ที่มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

$$\Delta c_{14} = 500 - 450 = 50 \qquad I_{14} = 100 \qquad r_{14} = \frac{50}{10} = 0.5$$

$$\Delta c_{22} = 500 - 550 = -50 \qquad D_{22} = 50 \qquad r_{22} = \frac{-(-50)}{50} = 1$$

$r_{14} + r_{22} = 0.5 + 1 = 1.5 > 1$ หรือ $r_{14} + r_{22} = 50\% + 100\% = 150\%$

ซึ่งมากกว่า 100% จากกฎ 100% สรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงของค่าขนส่งทั้งสองเส้นทางนี้ส่งผลให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมต่อไป ทำให้ต้องมีการนำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ไปประมวลผลเพื่อหาผลเฉลยที่เหมาะสมใหม่ต่อไป

4.11.2 การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือ

การเปลี่ยนแปลงค่าทางขวามือของข้อจำกัด ขึ้นอยู่กับว่าข้อจำกัดนั้นเป็นข้อจำกัดผูกพันหรือไม่ ในการเปลี่ยนแปลงนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

<u>กรณีที่ 1</u> ทุกข้อจำกัดที่มีค่าทางขวามือ เปลี่ยนแปลงนั้นไม่เป็นข้อจำกัดผูกพัน

<u>กรณีที่ 2</u> อย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัดที่มีค่าทางขวามือ เปลี่ยนแปลง เป็นข้อจำกัดผูกพัน

ในกรณีที่ 1 ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ก็ต่อเมื่อแต่ละค่าทางขวามือยังคงอยู่ในช่วงที่ยอมให้ได้ แล้วค่าของตัวแปรตัดสินใจ และค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ยังคงไม่เปลี่ยนแปลง ในทางกลับกัน ถ้าค่าทางขวามือของข้อจำกัดใด ๆ อยู่นอกช่วงที่ยอมให้ได้ แล้วผลเฉลยปัจจุบันจะไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงกรณีที่ 1

ตัวอย่างที่ 4.26 ถ้าความสามารถในการผลิตของโรงงานในจังหวัดนครนายก ลดลงจากเปลี่ยนแปลงเป็น 3,000 และ 2,800 หน่วย จงพิจารณาว่าผลเฉลยในปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่

จากรูปที่ 4.18 จะพบว่า ข้อจำกัดด้านความสามารถในการผลิตของโรงงานที่จังหวัดนครนายกไม่เป็นข้อจำกัดผูกพัน จึงทำให้เราพิจารณาโดยใช้กรณีที่ 1

ให้ b_6 แทนค่าทางขวามือของข้อจำกัดด้านความสามารถของโรงงานที่จังหวัดนครนายก

$$3000 - 500 \leq b_6 \leq 3000 + \infty$$
$$2500 \leq b_6 \leq \infty$$

เนื่องจากความสามารถในการผลิตของโรงงานที่จังหวัดนครนายกเท่ากับ 2,800 หน่วย อยู่ในช่วงที่ยอมให้ได้ ดังนั้น ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.27 จากตัวอย่างที่ 4.26 ถ้าปริมาณความสามารถของโรงงานในจังหวัดนครนายกเปลี่ยนแปลงเป็น 2,000 หน่วย ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมหรือไม่

เนื่องจากความสามารถของโรงงานนครนายกเท่ากับ 2,000 หน่วย ซึ่งไม่อยู่ในช่วงยอมให้ได้ ดังนั้น ผลเฉลยปัจจุบันไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดต่อไป

กรณีที่ 2 ในทำนองเดียวกับการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ กฎ 100% สามารถนำมาใช้ได้ดังนี้

b_j แทนค่าทางขวามือเดิมของข้อจำกัดที่ j

b'_j แทนค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ j

Δb_j แทนการเปลี่ยนแปลงค่าของ b_j โดย $\Delta b_j = b'_j - b_j$

I_j แทนค่าสูงสุดของการเพิ่มค่ายอมให้ได้

D_j แทนค่าสูงสุดของการลดค่ายอมให้ได้

ถ้า $\Delta b_j \geq 0$ $\quad r_j = \dfrac{\Delta b_j}{I_j}$ (57)

ถ้า $\Delta b_j \leq 0$ $\quad r_j = \dfrac{-\Delta b_j}{D_j}$ (58)

ถ้าผลรวมของ r_j ในทุก ๆ ข้อจำกัดที่ค่าทางขวามือเปลี่ยนแปลง มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง $\left(\sum r_j \leq 1\right)$ แสดงว่า ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสม แต่ถ้าผลรวมของ r_j มีค่ามากกว่าหนึ่ง $\left(\sum r_j > 1\right)$ แสดงว่า ผลเฉลยปัจจุบันอาจเป็นหรือไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดก็ได้ ในที่นี้ อาจเขียน r_j ในรูปของเปอร์เซ็นต์ จึงกล่าวได้ว่า ถ้า $\sum r_j \leq 100\%$ แล้ว ผล

เฉลยที่ได้ยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมต่อไป แต่ถ้า $\sum r_j \geq 100\%$ แล้ว ผลเฉลยปัจจุบันอาจเป็นหรือไม่เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดอีกต่อไปหรือไม่ก็ได้

ตัวอย่างที่ 4.28 จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 2.11 ถ้าปริมาณความต้องการสินค้าของลูกค้าในจังหวัดสระบุรี นครสวรรค์ และอุบลราชธานี เพิ่มขึ้นเป็น 1,000 1,400 และ 1,800 หน่วยต่อสัปดาห์ ตามลำดับ จงพิจารณาว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดหรือไม่

เนื่องจากข้อจำกัดด้านปริมาณความต้องการของลูกค้าใน 3 จังหวัดนี้ เป็นข้อจำกัดผูกพัน ดังนั้น กฎ 100% จึงนำมาใช้พิจารณาดังนี้

ให้ Δb_j แทนปริมาณการเปลี่ยนแปลงของความต้องการของลูกค้าในจังหวัด j โดยที่ j = 1, 2, 3 คือ จังหวัดสระบุรี นครสวรรค์ และอุบลราชธานี

I_j แทนค่าสูงสุดของการเพิ่มที่ยอมให้ได้ของปริมาณความต้องการสินค้าในจังหวัด j

$$\Delta b_1 = 1{,}000 - 800 = 200,\ I_1 = 500,\ r_1 = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$
$$\Delta b_2 = 1{,}400 - 1{,}200 = 200,\ I_2 = 500,\ r_2 = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$
$$\Delta b_3 = 1{,}800 - 1{,}500 = 300,\ I_3 = 500,\ r_3 = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$
$$r_1 + r_2 + r_3 = 2/5 + 2/5 + 3/5 = 7/5 \ > \ 1$$

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงปริมาณความต้องการสินค้าข้างต้น ส่งผลให้ผลเฉลยปัจจุบันไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมอีกต่อไป

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จากตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ จงสร้างปัญหาควบคู่

ค่าสูงสุด $z = 12x_1 + 16x_2 + 5x_3$

ข้อจำกัด $4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16$

$6x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2. จงสร้างปัญหาควบคู่ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $z = 20x_1 + 10x_2 + 2x_3$

$$
\begin{aligned}
14x_1 + 6x_2 + 9x_3 &\geq 100 \\
5x_1 + 10x_2 + 7x_3 &= 140 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 60 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \quad x_3 \text{ urs}
\end{aligned}
$$

3. จงสร้างปัญหาควบคู่และหาผลเฉลยโดยใช้ปัญหาควบคู่ที่สร้างขึ้น เมื่อกำหนดปัญหาเดิมของการโปรแกรมเชิงเส้นดังนี้

ค่าต่ำสุด $z = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3$

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geq 50 \\
x_1 + x_2 - x_3 &\geq 20 \\
7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\geq 30 \\
5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\geq 35 \\
2x_1 + 4x_2 - 14x_3 &\geq 10 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

4. พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

ค่าต่ำสุด $z = 2x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 6x_4$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 &\geq 2 \\
-2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq -3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(1) จงสร้างปัญหาควบคู่

(2) จงแก้ปัญหาควบคู่โดยวิธีกราฟ

(3) จงแก้ปัญหาเดิมโดยวิธีซิมเพล็กซ์

(4) จงแก้ปัญหาควบคู่โดยวิธีซิมเพล็กซ์

(5) จงเปรียบเทียบผลเฉลยและค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตารางซิมเพล็กซ์ในข้อ (3) และ (4) และสรุปผล

5. สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มี x_1 x_2 และ x_3 เป็นตัวแปรตัดสินใจ และมี s_1 และ s_2 เป็นตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ค่าสูงสุด $z = -2x_1 + 5x_2 - x_3$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 20x_2 + 30x_3 &\leq 60 \quad \text{(วัตถุดิบ A)} \\
10x_1 + 20x_2 + 50x_3 &\leq 100 \quad \text{(วัตถุดิบ B)} \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

เมื่อนำตัวแบบไปประมวลผลแล้วได้ซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดดังตาราง 4.15

(1) จงสร้างตัวแบบของปัญหาควบคู่

(2) ระบุค่าผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาควบคู่โดยใช้ตารางซิมเพล็กซ์ข้างต้น

ตารางที่ 4.15 ซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
z	1					10	1,000
x_1	0	1	0	4	–1/5	1/5	8
x_2	0	0	1	1/2	1/10	–1/20	1

6. ร้านเบเกอรี่แห่งหนึ่ง กำลังตัดสินใจว่าจะต้องใช้ฟักทอง และ ขนมหวาน (Licorice) เพื่อนำมาทำขนมขายช่วงเทศกาลฮาโลวีน ซึ่งส่วนผสมส่วนใหญ่มีจำนวนจำกัด ยกเว้น ผงถ่านเทียม ผงวนิลา และสีผสมอาหารสีส้ม

ตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทนปริมาณฟักทอง

x_1 แทนปริมาณ ขนมหวาน

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + \frac{3}{2}x_2$

ข้อจำกัด

$$\frac{1}{2}x_2 \leq 1{,}000 \quad \text{(ผงถ่าน)}$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \leq 25 \quad \text{(ผงวนิลา)}$$

$$\frac{1}{10}x_1 \leq 50 \quad \text{(สีผสมอาหารสีส้ม)}$$

$$x_1, x_2 \geq 50$$

โดย s_1 s_2 และ s_3 เป็นตัวแปรส่วนขาดสำหรับข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ

(1) จงสร้างตัวแบบของปัญหาควบคู่

(2) ถ้าปัญหาเดิมมีผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 250$ $x_2 = 2{,}000$ และ $z = 3{,}500$ แล้ว จงคำนวณค่าของตัวแปรส่วนทั้งสาม

(3) จากข้อ (1) และ (2) จงระบุตัวแปรส่วนเกินของปัญหาควบคู่ แล้วนำทฤษฎีเสริม (Complementary slackness) มาคำนวณค่าของผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาควบคู่

7. ในการวัดประสิทธิภาพของการทำงานในระบบโลจิสติกส์ของธุรกิจค้าปลีก พบว่า มีบริษัทค้าปลีกจำนวน 4 ราย ที่นำมาวัดประสิทธิภาพ โดยใช้ข้อมูลของปัจจัยนำเข้าคือ จำนวนพนักงาน เงินลงทุนของบริษัท ช่วงเวลานำสินค้าโดยเฉลี่ย และปัจจัยผลผลิตคือ ยอดขาย จำนวนลูกค้า จำนวนใบสั่งซื้อ ซึ่งมีข้อมูลแสดงดังตารางที่ 4.16 และ 4.17

ตารางที่ 4.16 ข้อมูลปัจจัยนำเข้า

บริษัท	จำนวนพนักงาน (คน)	เงินลงทุนของบริษัท (ล้านบาท)	ช่วงเวลานำสินค้า (วัน)
1	20	12	4
2	10	8	4
3	8	4	3
4	5	1.5	3

ตารางที่ 4.17 ข้อมูลปัจจัยผลผลิต

บริษัท	ยอดขายต่อสัปดาห์ (ล้านบาท)	จำนวนลูกค้า (คน)	จำนวนใบสั่งซื้อ (ใบต่อสัปดาห์)
1	1.2	160	100
2	1.1	150	88
3	1.0	120	45
4	0.9	60	40

(1) จงวัดประสิทธิภาพของบริษัทที่ 4 เทียบกับบริษัทอื่น ๆ โดยใช้ปัจจัยนำเข้าและปัจจัยผลผลิตทั้งหมด

(2) จงวัดประสิทธิภาพของบริษัทที่ 4 เทียบกับบริษัทอื่น ๆ โดยใช้ปัจจัยนำเข้าคือจำนวนพนักงานและเงินลงทุนของบริษัท ปัจจัยผลผลิตคือ ยอดขายต่อสัปดาห์และจำนวนใบสั่งซื้อ

8. การวัดประสิทธิภาพของสถานีโทรศัพท์ 10 สถานีในพื้นที่แห่งหนึ่ง โดยใช้ปัจจัยนำเข้าคือ จำนวนพนักงาน (X_1) ต้นทุนดำเนินงานต่อเดือน (X_2) และจำนวนคู่สายโทรศัพท์ (X_3) ปัจจัยผลผลิตคือ รายได้จากการโทรศัพท์ทางใกล้ (Y_1) รายได้จากการโทรศัพท์ทางไกล (Y_2) รายได้จากการโทรศัพท์ระหว่างประเทศ (Y_3) ระดับของการดำเนินงานและการซ่อมบำรุง (Y_4) และระดับความพึงพอใจของลูกค้า (Y_5) ข้อมูลแสดงดังตารางที่ 4.18

(1) จงวัดประสิทธิภาพของสถานีที่ 3 เทียบกับสถานีอื่น ๆ โดยใช้ DEA

(2) จงระบุหน่วยงานในระดับแนวหน้าของการใช้ปัจจัยนำเข้าแต่ละคู่

ตารางที่ 4.18 ข้อมูลของสถานีโทรศัพท์

สถานีที่	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
1	239	7.03	158	47.1	16.67	34	28	2
2	261	3.94	163	37.5	14.11	20	26	3
3	170	2.1	90	20.7	6.8	12.6	19	3
4	290	4.54	201	41.8	11.07	6.27	23	4
5	200	3.99	1440	33.4	9.81	6.49	30	2
6	283	44.65	214	42.4	11.34	5.16	21	4
7	286	6.54	197	47	14.62	13	9	2
8	375	6.22	314	55.5	16.39	7.31	14	1
9	301	4.82	257	49.2	16.15	6.33	8	3
10	333	6.87	235	47.1	13.86	6.51	6	2

9. จากแบบฝึกหัดบทที่ 2 ข้อ 8 ศูนย์โภชนาการได้ประมวลผลการโปรแกรมเชิงเส้น จะได้ใช้ Excel Solver เพื่อมีการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแล้ว จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จงสร้างรายงานการวิเคราะห์ความไว

(2) จงแปลความหมายของราคาเงาของข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณคาร์โบไฮเดรตและเหล็ก

(3) ถ้าศูนย์แห่งนี้ยืนยันที่จะให้นมแก่นักศึกษา จะมีผลกระทบอย่างไรต่อต้นทุนรวม

(4) ราคาสูงสุดของถั่ว (บาทต่อกิโลกรัม) ที่ศูนย์อาหารสามารถจ่ายได้ มีค่าเท่าใด

(5) ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้ เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียว หรือ เป็นผลเฉลยที่มีหลายคำตอบ

10. โรงงานผลิตเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิดคือ โต๊ะ (T) เก้าอี้ (C) และตู้หนังสือ (B) ซึ่งมีข้อจำกัดด้านปริมาณไม้และชั่วโมงแรงงาน โรงงานได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการผลิตสินค้าทั้ง 3 ชนิด เพื่อให้ได้กำไรสูงสุดดังนี้

ให้ P แทนผลกำไรรวม (พันบาท)

ค่าสูงสุด $P = 20T + 15C + 18B$

ข้อจำกัด $10T + 3C + 10B \leq 100$ (ปริมาณไม้)

$5T + 3C + 5B \leq 60$ (ชั่วโมงแรงงานต่อสัปดาห์)

$T, C, B \geq 0$

กำหนดให้ s_1 และ s_2 แทนตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เมื่อประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะได้ ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ดังตารางที่ 4.19

ตารางที่ 4.19 ซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
		T	C	B	s_1	s_2	
z	1	0	0	2	5/7	18/7	1,580/7
T	0	1	0	1	1/7	–6/70	64/7
C	0	0	1	0	–1/7	2/7	20/7

(1) จงระบุช่วงของปริมาณไม้ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(2) จงระบุช่วงของจำนวนชั่วโมงแรงงานต่อสัปดาห์ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดในปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(3) จงหาผลเฉลยที่เหมาะสมใหม่ เมื่อปริมาณไม้เท่ากับ 90 ฟุต

(4) จงหาผลเฉลยที่เหมาะสมเมื่อปริมาณชั่วโมงแรงงานต่อสัปดาห์เท่ากับ 100 ชั่วโมง

(5) กำหนดช่วงของผลกำไรต่อหน่วยของสินค้าแต่ละชนิดที่ยังคงทำให้ผลเฉลยปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

(6) จงหาผลกำไรรวม เมื่อผลกำไรต่อหน่วยของโต๊ะเปลี่ยนแปลงไปเป็น 18 พันบาท

11. พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรตัดสินใจคือ x_1 x_2 และ x_3

ค่าสูงสุด $z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$ (ผลกำไร)

ข้อจำกัด
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 100$$
$$4x_1 + 2x_3 \geq 5$$
$$-5x_2 + 5x_3 \geq 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

เมื่อนำตัวแบบนี้ไปประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ดังตารางที่ 4.20

ตารางที่ 4.20 ซิมเพล็กซ์รูปแบบตารางที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_4	
z	1	0	0	0	5	0	30		350
x_1	0	1	–1	0	0	–1/2	0	–1	5
x_3	0	0	2	1	0	1/2	0	2	15
s_1	0	0	–3	0	1	–1	0	–6	30
s_3	0	0	15	0	0	5/2	1	10	55

โดยที่ s_1 s_2 และ s_3 แทนตัวแปรส่วนขาดหรือตัวแปรส่วนเกินของข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ ส่วน a_4 แทนตัวแปรเทียมจากข้อจำกัดที่ 4

(1) จงระบุช่วงของค่าทางขวามือทั้ง 4 ข้อจำกัด ที่ยังคงทำให้ผลเฉลยในตารางข้างต้นยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสม

(2) ถ้าค่าทางขวามือของข้อจำกัดด้านวัตถุดิบ A เพิ่มขึ้นเป็น 200 หน่วย แล้วผลเฉลยที่เหมาะสมในปัจจุบันยังคงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดต่อไปหรือไม่

(3) ถ้าค่าทางขวามือของความต้องการในพื้นที่ B เพิ่มขึ้นเป็น 60 หน่วย แล้วผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเท่ากับเท่าใด

(4) จงระบุช่วงของกำไรต่อหน่วยของตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัว

(5) ถ้าผลกำไรต่อหน่วยของ x_1 เพิ่มขึ้นเป็น 12 บาทต่อหน่วย ผลกำไรรวมทั้งหมดมีค่าเท่าใดที่ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

บรรณานุกรม

Bazaraa, M.S, Jarvis, J.J, and Sherali, H.D. (1997*).Linear Programming and Network Flows*, 2nd edition, Wiley & Son, New York,USA.

Balakrishman, N., Render, B., Stair, R.M. (2007). *Managerial Decision Modeling with Spreadsheets*, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Baker, K.R. (2006), *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, California, USA.

Bradley, S., Hax, A., and Magnanti, T. (1977). *Applied Mathematical Programming*, Reading Mass, Addison Wessley.

Bronson, R., Naadimuthu, G. (1997). *Schaum's Outlines: Theory and Problem of Operations Research*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Cai, P. and Cai, J. (1997). On the 100% rule of sentivity analysis in linear programming, *Lecture Notes in Computer Science, Computing and Combinatorics*, Springer Berlin, 1276.

Dantzig, G.B. (1993). *Linear Programming and Extensions*, 10th edition, Princeton University Press, New Jersey, USA

Dantzig, G.B., Thapa, M.N. (1997). *Linear Programming: Theory and Extensions*, Springer, New York, USA.

Hooker, J.N., and Osorio, M.A.(1986). Mixed Logical/Linear Programming, *Discrete Applied Mathematics*, 96-97, 395-442.

Parker, R.G., and Rardin, R.L. (1988) *Discrter Optimization*, Academic Press, New York, USA.

Radin, R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research*, 4th edition, Thomson, NY, USA.

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

5

Integer Linear Programming Model

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับบทที่ 2 เนื่องจากปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่พบเห็นกันโดยทั่วไป บางปัญหาต้องกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็ม เช่น ปัญหาการลงทุนซื้ออุปกรณ์หรือเครื่องจักรเข้ามาใช้ในการทำงาน เราต้องการทราบจำนวนอุปกรณ์หรือเครื่องจักรที่ต้องการซื้อ สำหรับปัญหาการเดินทางของรถขนส่ง จะกำหนดว่าถ้าสินค้าเส้นทางใดแล้ว จะให้ตัวแปรแทนการขนส่งผ่านเส้นทางนั้นมีค่าเป็น 1 หากไม่ขนส่งผ่านเส้นทางดังกล่าวตัวแปรนี้จะมีค่าเป็น 0 เป็นต้น ปัญหาในลักษณะนี้เราไม่สามารถกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นเศษส่วน หรือจำนวนที่มีทศนิยมได้ แต่จะกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ลักษณะตัวแบบของการโปแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแตกต่างจากการโปรแกรมเชิงเส้น ในแง่ที่ตัวแปรตัดสินมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ซึ่งจะเป็นปัญหาการโปรแกรมนี้ว่า การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (Integer Linear programming) ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

(1) การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแท้จริง (Pure integer linear programming) ซึ่งปัญหาประเภทนี้ ตัวแปรตัดสินใจทุกตัวต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น โดยตัวแปรอาจเป็น*จำนวนเต็มแบบทวิภาค (Binary integer)* ที่มีค่าได้เพียง 2 ค่าเท่านั้น เช่น 0 หรือ 1 เป็นต้น ซึ่งปัญหาอาจมีทั้งตัวแปรจำนวนเต็มและตัวแปรจำนวนเต็มแบบทวิภาคอยู่ในปัญหาเดียวกัน ก็ได้

(2) การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบผสม (Mixed Integer linear Programming, MIP) ซึ่งปัญหาประเภทนี้ ตัวแปรตัดสินใจบางตัวเป็นจำนวนเต็ม ขณะที่ตัวแปรที่เหลือไม่เป็นจำนวนเต็ม ในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบผสมในบทที่ 7

สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแท้จริงที่จะกล่าวถึงในบทนี้ เพื่อความสะดวกในบทนี้จะขอเรียกสั้น ๆ ว่า *การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม* การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มสามารถทำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในทางธุรกิจและอุตสาหกรรมได้มากมาย ในบทนี้จะขอกล่าวการประยุกต์ใช้ในเรื่องของการเลือกโครงการลงทุนในหัวข้อ 5.1 ในหัวข้อ 5.2 จะกล่าวถึงการใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาจำนวนและเลือกตำแหน่งของศูนย์บริการหรือที่ตั้งของอุปกรณ์อำนวยความสะดวก เพื่อให้บริการได้ครอบคลุมพื้นที่บริการ หัวข้อ 5.3 จะกล่าวถึงปัญหาการเดินทางและการขนส่ง เพื่อให้ระยะทางรวมของการเดินทางต่ำที่สุด หรือ ทำให้ต้นทุนการขนส่งต่ำที่สุด หัวข้อ 5.4 เป็นการทำการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มไปใช้เลือกรูปแบบในการทำงานหรือการผลิต หัวข้อ 5.5 เป็นการจัดตารางการทำงานของพนักงานเพื่อให้ใช้จำนวนพนักงานน้อยที่สุด และหัวข้อสุดท้ายเป็นการนำไปประยุกต์ใช้ในสายการผลิต เพื่อให้เกิดสมดุลในสายการประกอบ

5.1 ปัญหาการเลือกโครงการลงทุน

ในธุรกิจหรืออุตสาหกรรมมีการเลือกเพื่อจะลงทุนในโครงการต่าง ๆ เพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงที่สุด โดยมีเงื่อนไขในการลงทุนตามที่บริษัทหรือผู้ถือหุ้นกำหนด หรืออาจมีกฎหมายหรือนโยบายภาครัฐมาเป็นข้อจำกัดในการพิจารณาการลงทุนอีกด้วย

ตัวอย่างที่ 5.1 บริษัทแห่งหนึ่งกำลังพิจารณาที่จะลงทุนใน 4 โครงการ โดยที่ทุกโครงการมีอายุโครงการเท่ากัน ซึ่งโครงการที่ 1 2 3 และ 4 มีมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบัน (NPV) ของการลงทุนเท่ากับ 18, 22, 13 และ 8 ล้านบาท ตามลำดับ ปริมาณเงินสดสำหรับลงทุนในปีปัจจุบันของโครงการ 1 2 3 และ 4 เท่ากับ 6, 7, 4 และ 3 ล้านบาท ตามลำดับ แต่บริษัทมีเงินสดที่สามารถใช้ลงทุนในปีปัจจุบันเท่ากับ 15 ล้านบาท เงื่อนไขการลงทุนโครงการเหล่านี้คือ ถ้ามีการลงทุนใดแล้ว บริษัทจะต้องลงทุนทั้งโครงการ ดังนั้นบริษัทต้องการทราบว่าต้องลงทุนโครงการใดบ้าง จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม เพื่อแก้ปัญหานี้ โดยมีวัตถุประสงค์ของตัวแบบคือค่าสูงสุดของมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบัน

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าโครงการที่ i ได้รับการเลือกให้ลงทุนโดย i = 1, 2, 3, 4} \\ 0 & \text{ถ้าโครงการที่ i ไม่ได้รับการเลือกให้ลงทุน} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z = 18x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 8x_4$ (1)

(3) ข้อจำกัด

$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 15 \qquad (2)$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

จากการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้ผลเฉลยคือ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$ และ $x_4 = 1$ โดยที่ $z = 43$ นั่นคือ บริษัทควรลงทุนในโครงการที่ 2 3 และ 4 ซึ่งจะทำให้มูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบันเท่ากับ 43 ล้านบาท

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่างที่ 5.1 จะพบว่า

1. ถ้าเราไม่มีเงื่อนไขว่าตัวแปรต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้ผลเฉลยของปัญหาคือ $x_1 = 0.5$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$ และ $z = 44$ ซึ่งจะได้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงกว่าตัวแบบที่มีเงื่อนไขเป็นจำนวนเต็ม หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ผลเฉลยแบบ IP เป็นสับเซตของ LP ซึ่งจะกล่าวถึงอีกครั้งในบทที่ 6

2. ตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัวมีค่าได้เพียง 2 ค่า เช่น $x_1 = 1$ ถ้าเลือกลงทุนโครงการที่ 1 $x_1 = 0$ ถ้าไม่เลือกลงทุนโครงการที่ 1 เป็นต้น เราเรียกปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่มีตัวแปรตัดสินใจทุกตัวมีค่าได้เพียง 2 ค่า เช่นนี้ว่า *การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค (Binary integer programming, BIP)*

3. ตัวอย่างนี้มีข้อจำกัดเพียงข้อจำกัดเดียวที่แสดงว่าการลงทุนโครงการต่าง ๆ รวมต้องไม่เกินจำนวนเงินที่มีอยู่ ปัญหาลักษณะนี้เรียกว่า *ปัญหาถุงเป้ (Knapsack problem)*

ตัวอย่างที่ 5.2 จากตัวอย่างที่ 5.1 เมื่อมีข้อจำกัดเพิ่มเติม 3 ข้อจำกัดดังนี้

1. การลงทุนจะต้องไม่เกิน 2 โครงการ
2. ถ้าลงทุนโครงการที่ 1 แล้ว จะต้องลงทุนโครงการที่ 3
3. เนื่องจากโครงการที่ 1 และโครงการที่ 2 มีลักษณะธุรกิจคล้ายกันมาก ทำให้บริษัทกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า ถ้าเลือกลงทุนโครงการใดโครงการหนึ่งแล้ว จะไม่ลงทุนอีกโครงการหนึ่ง

ดังนั้น จะได้ตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มได้ดังนี้

(1) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z = 16x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 8x_4 \qquad (3)$

(2) ข้อจำกัด

$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$
$$x_3 \geq x_1 \text{ หรือ } x_1 - x_3 \leq 0 \qquad (4)$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

เมื่อประมวลตัวแบบนี้ ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมคือ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$ และ $x_4 = 0$ โดยที่ $z = 35$ นั่นคือ บริษัทควรเลือกลงทุนในโครงการที่ 2 และ 3 ซึ่งจะได้ผลตอบแทนจากการลงทุน มีมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบันเท่ากับ 35 ล้านบาท

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 5.2 ข้อจำกัดมีลักษณะสำคัญดังนี้

1. ข้อจำกัดที่ 2 นี้ บริษัทจะลงทุนอย่างมากไม่เกิน 2 โครงการ ในลักษณะนี้จะเรียกข้อจำกัดประเภทนี้ว่า *ข้อจำกัด k จาก n ทางเลือก (K out of n choice constraint)* หรืออาจเรียกว่า *ข้อจำกัดขอบเขตล่าง (Lower bound constraint)*

2. ข้อจำกัดที่ 3 เป็นข้อจำกัดประเภท ข้อจำกัด ถ้า–แล้ว (If–then constraint) ถ้าโครงการที่ 1 ได้รับเลือก $(x_1 = 1)$ แล้ว โครงการที่ 3 จะได้รับเลือก $(x_3 = 1)$ ในกรณีที่โครงการที่ 1 ไม่ได้รับเลือก $(x_1 = 0)$ โครงการที่ 3 อาจได้รับเลือกหรือไม่ก็ได้ ดังนั้น สามารถเขียนข้อจำกัดนี้เป็น $x_1 \le x_3$ หรือ $x_1 - x_3 \le 0$

3. ข้อจำกัดที่ 4 เป็นข้อจำกัดที่ลักษณะเป็นทางเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง (Mutually exclusive choices) ในที่นี้จะเลือกโครงการที่ 1 หรือโครงการที่ 2 เพียงโครงการเดียวเท่านั้น เราเรียกข้อจำกัดประเภทนี้ว่า *ข้อจำกัดที่เลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง (Mutually exclusive constraint)*

5.2 ปัญหาการครอบคลุมเซตและการแบ่งเซต

ปัญหาในการกำหนดจำนวนและที่ตั้งศูนย์บริการ หรือ ที่ตั้งอุปกรณ์อำนวยความสะดวก เนื่องจากเงินลงทุนและค่าใช้จ่ายดำเนินงานสำหรับการจัดตั้งศูนย์และอุปกรณ์เหล่านี้ ทำให้เราต้องการทราบจำนวนศูนย์บริการหรือจำนวนอุปกรณ์ที่น้อยที่สุด ที่ยังคงให้บริการในพื้นที่รับผิดชอบได้อย่างเพียงพอ นั่นคือ แต่ละพื้นที่บริการจะได้บริการจากศูนย์บริการหรืออุปกรณ์อำนวยความสะดวกอย่างน้อย 1 แห่ง ปัญหาในลักษณะนี้ เรียกปัญหานี้ว่า *ปัญหาการครอบคลุมเซต (Set–covering problem)* ซึ่งมีตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มดังนี้

ค่าต่ำสุด $$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1 \quad \forall_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (6)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

โดย c_j เป็นเวกเตอร์แถวขนาด n แทนต้นทุนในการดำเนินการ และ/หรือต้นทุนในการสร้างศูนย์บริการนี้ $a_{ij} = 1$ เมื่อศูนย์บริการ j สามารถให้บริการพื้นที่บริการที่ i ได้ในทางตรงกันข้าม $a_{ij} = 0$ เมื่อศูนย์บริการ j ไม่สามารถให้บริการพื้นที่ i ได้ ถ้า $x_j = 1$ แล้วจะมีศูนย์บริการในพื้นที่ j และ ถ้า $x_j = 0$ แล้ว พื้นที่ j ไม่เป็นที่ตั้งของศูนย์บริการ

ถ้า $c_j = 1$ แล้วฟังก์ชันวัตถุประสงค์ แสดงถึงจำนวนศูนย์บริการหรืออุปกรณ์ต่ำที่สุด ถ้า c_j แทนเงินลงทุนและค่าใช้จ่ายดำเนินงาน แล้วฟังก์ชันวัตถุประสงค์ แสดงถึง ต้นทุนรวมในการลงทุนและการดำเนินงานให้มีศูนย์บริการต่ำสุด ส่วนข้อจำกัด (6) ต้องการทำให้มั่นใจว่า ทุกบริเวณทางแยกสามารถได้รับบริการจากศูนย์บริการอย่างน้อย 1 ศูนย์ หรือไม่มีบริเวณทางแยกใดที่ไม่สามารถได้รับบริการจากศูนย์บริการ

นอกจาก ปัญหาการครอบคลุมเซตแล้ว ถ้าข้อจำกัด (6) มีเครื่องหมาย “=” ซึ่งหมายความว่า แต่ละพื้นที่บริการจะได้รับบริการจากศูนย์บริการเพียงแห่งเดียวเท่านั้น จะเรียกปัญหาลักษณะนี้ว่า *ปัญหาการแบ่งเซต (Set–partitioning problem)* (Hillier, 1995; Jensen, 2003)

ตัวอย่างที่ 5.3 บริษัทประกันภัยรถยนต์แห่งหนึ่ง ต้องการระบุตำแหน่งของศูนย์บริการในกรณีที่ลูกค้าแจ้งอุบัติเหตุ พนักงานของศูนย์บริการสามารถออกไปให้บริการได้ทันที จากการศึกษาความพึงพอใจของลูกค้า พบว่า ระยะเวลาระหว่างโทรแจ้งอุบัติเหตุ จนกระทั่งพนักงานของบริษัทฯ มายังบริเวณที่เกิดเหตุต้องไม่เกิน 30 นาที เมื่อศึกษาระยะเวลาเดินทางของพนักงานระหว่างทางแยกที่สำคัญ 10 ทางแยกใน 5 เขตสำคัญของกรุงเทพมหานคร ดังตารางที่ 5.1 บริษัทต้องการจะระบุที่ตั้งของศูนย์บริการ เพื่อให้การบริการครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมด โดยมีวัตถุประสงค์ให้จำนวนศูนย์บริการน้อยที่สุด

ตารางที่ 5.1 ระยะเวลาในการเดินทางระหว่างทางแยก (นาที)

จากทางแยกที่	ถึงทางแยกที่									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	20	40	45	35	40	50	65	90	40
2	20	0	25	45	25	15	40	39	60	35
3	40	25	0	20	40	40	15	35	40	38
4	45	45	20	0	40	50	55	35	38	20
5	35	25	40	40	0	10	20	30	40	40
6	40	15	40	50	10	0	35	45	30	38
7	50	40	15	55	20	35	0	38	40	50
8	65	39	35	35	30	45	38	0	10	20
9	90	60	40	38	40	30	40	10	0	45
10	40	35	38	20	40	38	50	20	45	0

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อมีการตั้งศูนย์บริการที่บริเวณทางแยกที่ j} \quad j = 1, 2, \ldots, 10 \\ 0 & \text{เมื่อไม่มีการตั้งศูนย์ที่บริเวณทางแยกที่ j ถ้าเป็นอย่างอื่น j} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z = \sum_{j=1}^{10} x_j \tag{7}$$

(3) ข้อจำกัด

ในบริเวณทางแยกที่ 1 จะเป็นพื้นที่บริการของศูนย์บริการอย่างน้อย 1 ศูนย์ จากตารางที่ 5.1 ถ้าตั้งศูนย์บริการบริเวณทางแยกที่ 1 หรือ 2 สามารถให้บริการในบริเวณทางแยกที่ 1 ได้ สามารถเขียนข้อจำกัดเป็น $x_1 + x_2 \geq 1$ ในทำนองเดียวกันพื้นที่บริการในบริเวณทางแยกอื่น ๆ ดังนั้นสามารถเขียนข้อจำกัดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &\geq 1 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &\geq 1 \\
x_3 + x_4 + x_{10} &\geq 1 \\
x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 1 \\
x_2 + x_5 + x_6 + x_9 &\geq 1 \\
x_3 + x_5 + x_7 &\geq 1 \\
x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} &\geq 1 \\
x_6 + x_8 + x_9 &\geq 1 \\
x_4 + x_8 + x_{10} &\geq 1 \\
x_j \in \{0, 1\} \quad j &= 1, 2, \ldots, 10
\end{aligned} \tag{8}$$

จากการประมวลผลตัวแบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$ และ $x_8 = 1$ โดยที่ $z = 3$ กล่าวคือ ควรตั้งศูนย์บริการ 3 แห่ง บริเวณทางแยกสำคัญ ๆ คือ ทางแยกที่ 2 3 และ 8 จากการพิจารณาข้อมูลในตารางที่ 5.1 สามารถทราบว่าศูนย์บริการบริเวณทางแยกที่ 2 จะให้บริการเมื่อมีอุบัติเหตุบริเวณทางแยกที่ 1 2 3 5 และ 6 สำหรับศูนย์บริการบริเวณทางแยกที่ 3 จะให้บริการเมื่อมีอุบัติเหตุบริเวณทางแยกที่ 2 3 4 และ 7 ส่วนศูนย์บริการบริเวณทางแยกที่ 8 จะให้บริการบริเวณทางแยกที่ 5 8 9 และ 10

ตัวอย่างที่ 5.4 (Neammanee and Lorchirachoonkul, 2005) การศึกษาการกระจายธนบัตรของธนาคารแห่งประเทศไทย (ธปท.) ต้องการทราบว่าควรจะมีศูนย์กระจายเงินสดของ

ธปท.(RBDC) จำนวนเท่าใด เพื่อให้บริการกับศูนย์เงินสดของธนาคารพาณิชย์ (BDC) โดยระยะทางระหว่างศูนย์กระจายเงินสดของ ธปท.และศูนย์เงินสดของธนาคารพาณิชย์ ไม่เกิน 250 กิโลเมตร ในการศึกษานี้จึงได้ใช้ตัวแบบการครอบคลุมเซต เพื่อหาจำนวนศูนย์กระจายเงินสดของ ธปท. ที่น้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขว่าระยะทางระหว่าง RBDC และ BDC ต้องไม่เกินที่กำหนดไว้ โดยมีศูนย์เงินสดของธนาคารพาณิชย์ 58 แห่ง

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อศูนย์กระจายเงินสดของ ธปท. ตั้งอยู่ในบริเวณ j} \quad j = 1, 2, \ldots, 58 \\ 0 & \text{เมื่อศูนย์กระจายเงินสดไม่ได้ตั้งอยู่ในบริเวณ j} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z = \sum_{j=1}^{58} x_j \tag{9}$$

(3) ข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{58} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall_i \quad i = 1, 2, ..., 58 \tag{10}$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นค่าคงที่ โดย $a_{ij} = 1$ เมื่อระยะทางจากบริเวณที่ i ไปยังบริเวณที่ j ไม่เกินระยะทางที่กำหนด $a_{ij} = 0$ เมื่อระยะทางจากบริเวณที่ i ไปยังบริเวณ j มากกว่าระยะทางที่กำหนด ในการศึกษานี้ยังได้มีการปรับระยะทาง (กิโลเมตร) ด้วยค่าถ่วงน้ำหนัก เพื่อให้ระยะทางที่ถ่วงน้ำหนักแล้วสะท้อนถึงระยะทางที่สามารถเดินทางเมื่อขับด้วยความเร็วปกติบนทางหลวง เช่น ระยะทางระหว่างจังหวัดตากและแม่ฮ่องสอน ค่าถ่วงน้ำหนักเท่ากับ 1.6

จากการประมวลผลจะได้จำนวนศูนย์กระจายเงินสดของ ธปท. 12 แห่ง ระยะทางรวมที่ปรับแล้วเท่ากับ 7,050 กิโลเมตร และไม่มีระยะทางระหว่าง RBDC และ BDC ใช้เวลามากกว่า 250 กิโลเมตร

ตัวอย่างที่ 5.5 จากตัวอย่างที่ 5.3 หากบริษัทประกันภัยแห่งนี้ต้องการตั้งศูนย์บริการเพียง 2 แห่ง บริษัทต้องการทราบว่าควรตั้งอยู่บริเวณทางแยกใด และศูนย์บริการแต่ละแห่งจะดูแลบริเวณทางแยกใดบ้าง ที่ทำให้ระยะเวลาในการเดินทางรวมน้อยที่สุด สมมติว่าในแต่ละวันมีการเดินทางจากศูนย์บริการไปยังแยกต่าง ๆ M ครั้ง เท่ากัน

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าศูนย์บริการ j ต้องเดินทางไปยังบริเวณทางแยก i โดย i , j} = 1,2,\ldots,10 \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 0x_{11} + 20Mx_{12} + \ldots + 40Mx_{1,10} + 20Mx_{21} + \ldots + 45Mx_{10,9} + 0x_{10,10}$

(3) ข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad \forall_i \quad i = 1, 2, \ldots, 10$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{jj} = 2 \qquad (11)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

จากการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ $x_{2,2} = x_{8,8} = 1$ และ $x_{1,2} = x_{3,2} = x_{4,8} = x_{5,2} = x_{6,2} = x_{7,8} = x_{9,8} = x_{10,8} = 1$ โดยที่ $z = 188$ นั่นคือมีศูนย์บริการในบริเวณทางแยกที่ 2 และ 8 โดยศูนย์บริการทางแยกที่ 2 ให้บริการบริเวณทาง 1 2 3 5 และ 6 ส่วนศูนย์บริการทางแยกที่ 8 ให้บริการบริเวณทาง 4 7 8 9 และ 10

<u>หมายเหตุ</u> ตัวแบบในตัวอย่างที่ 5.5 เรียกว่า *ตัวแบบพีมีเดียน (P–median model)* ซึ่งมีลักษณะที่สำคัญคือ

(1) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นต้นทุน หรือระยะทางหรือระยะเวลาในการเดินทางระหว่างศูนย์บริการกับลูกค้า

(2) ลูกค้าแต่ละแห่งจะได้รับบริการจากศูนย์บริการเพียงแห่งเดียว

(3) สามารถระบุจำนวนศูนย์ที่ต้องการ หรือระบุว่าที่ตั้งศูนย์บริการที่มีอยู่แล้ว กล่าวคือ เราสามารถกำหนดจำนวนของศูนย์บริการที่ต้องการได้ (k) โดยเพิ่มข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = k \qquad (12)$$

(4) ข้อจำกัดเพื่อให้มั่นใจว่าศูนย์บริการจะเปิดใช้ เมื่อมีการบริการของศูนย์ให้ลูกค้า ดังนั้น จึงใช้ข้อจำกัด $x_{ij} \leq x_{jj}$ โดย $x_{jj} = 1$ แทนการตั้งศูนย์ที่บริเวณ j

5.3 ปัญหาการหาเส้นทางการขนส่ง

ปัญหาการการจัดเส้นทางและการขนส่งเกี่ยวข้องกับการเลือกเส้นทาง (Route) จากข่ายงาน (Network) ซึ่งสามารถสร้างตัวแบบที่มีลักษณะเป็นการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มได้ แต่ตัวแบบที่ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวแทนเดียวกันทั้งหมด ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับข้อจำกัดของปัญหา แต่

โดยทั่วไปปัญหาจะมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าต่ำสุดและระยะทางรวม หรือค่าต่ำสุดของต้นทุนการขนส่ง ตัวอย่างถ้ามีสถานี เมือง หรือโหนด (node) ที่ต้องเดินทางทั้งหมด 6 เมือง โดยระยะทางระหว่างเมือง แสดงในตารางที่ 5.2 โดยเครื่องหมาย "–" จะปรากฏในตำแหน่งที่ (i, i) แสดงการเดินทางจาก เมือง i ถึง เมือง i ซึ่งจะไม่นำระยะทางนี้มาพิจารณา ส่วนระยะทางจากเมือง i ถึง เมือง j ไม่เท่ากับระยะทางจาก เมือง j ถึง เมือง i จึงทำให้ตัวเลขเหนือเส้นทแยงมุมและใต้เส้นทแยงมุมมีค่าไม่เท่ากัน ปัญหาที่มีข้อมูลระยะทางในลักษณะนี้เรียกว่า *ปัญหาที่ไม่สมมาตร (Asymmetric problem)*

ตารางที่ 5.2 ระยะทางระหว่าง เมือง

จาก เมือง	ถึง เมือง					
	1	2	3	4	5	6
1	–	15	10	5	31	11
2	15	–	6	10	5	10
3	8	10	–	18	12	19
4	7	5	12	–	6	4
5	24	10	10	12	–	10
6	3	19	5	7	25	–

5.3.1 ปัญหาการเดินทางของพนักงานขาย

ปัญหาการเดินทางของพนักงานขาย (Traveling saleman problem, TSP) เป็นปัญหาในการเดินทางออกจากสถานที่หนึ่ง แล้วเดินทางไปยังเมืองต่าง ๆ ต่อเนื่องกันได้ จนครบทุกเมืองที่กำหนด แล้วจึงเดินทางกลับมา ณ เมืองเริ่มต้น ดังนั้น เส้นทางการเดินทางของพนักงานขายมีลักษณะสำคัญ คือ (1) จะผ่านเข้า-ออกแต่ละเมืองเพียงครั้งเดียว (2) เส้นทางมีลักษณะ *เส้นทางปิด (Closed path)* เพียง 1 เส้นทาง และ (3) เส้นทางนี้จะต่อเนื่องกันไปจนผ่านครบทุกเมือง

ให้ n แทนจำนวนเมืองทั้งหมดที่ต้องเดินทาง

c_{ij} แทนระยะทางจากเมือง i ไปยัง j โดย i = 1, 2, …, n j = 1, 2, …, n

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ามีการเดินทางจากเมือง i ไปยังเมือง j} \\ 0 & \text{ถ้าไม่มีการเดินทางจากเมือง i ไปยังเมือง j} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (13)$$

(3) ข้อจำกัด

1. พนักงานขายจะต้องเดินทางเข้าไปในแต่ละเมืองเพียง 1 ครั้ง

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \; i \neq j \;\; , \;\; j = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

2. พนักงานขายจะต้องเดินทางออกจากแต่ละเมืองเพียง 1 ครั้ง

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \; , \; i \neq j \;\; i = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

3. ข้อจำกัดป้องกันการเกิดเส้นทางย่อย

$$u_i - u_j + Nx_{ij} \;\; \leq \;\; N-1 \;\; , \; i \neq j \quad i, j = 1, 2, ..., n \text{ และ } u_i, u_j \geq 0 \tag{16}$$

4. ข้อจำกัดตัวแปรตัดสินใจแบบทวิภาค

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall_{i,\, j} \quad i \neq j$$

ข้อสังเกต ตัวแบบข้างต้นนี้ หากไม่มีข้อจำกัด (16) ปัญหานี้จะเป็น *ปัญหาการจัดสรรงาน (Assingment problem)*

ตัวอย่างที่ 5.6 จากปัญหา TSP ระหว่างเมือง 6 เมือง ที่มีระยะทางระหว่างเมือง แสดงดังตาราง ที่ 5.2 โดยการเดินทางจะกลับมาที่จุดเริ่มต้น และแต่ละเมืองจะมีการเดินทางไปถึงเพียงครั้งเดียว จงสร้างตัวแบบของปัญหานี้

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$\text{ให้ } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ามีการเดินทางออกจากเมือง i ไปยัง เมือง j} \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เพื่อให้ระยะทางรวมต่ำที่สุด

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad z = 15x_{12} + 10x_{13} + \ldots + 11x_{16} + 15x_{21} + \ldots + 25x_{65} \tag{17}$$

(3) ข้อจำกัด

1. แต่ละเมืองมีการเดินทางเข้าเพียง 1 ครั้ง

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \forall i \;\; i \neq j \;\; , \;\; i = 1, 2, \ldots, 6 \tag{18}$$

2. มีการเดินทางออกจากเมืองเพียง 1 ครั้ง

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \forall j \;\; i \neq j \;\; , \;\; j = 1, 2, \ldots, 6 \tag{19}$$

3. ข้อจำกัดป้องกันการเกิดเส้นทางย่อย

$$u_i - u_j + 6x_{ij} \;\; \leq \;\; 5 \;\; , \;\; \forall i, j \;\; i \neq j \quad i, j = 1, 2, ..., 6 \tag{20}$$

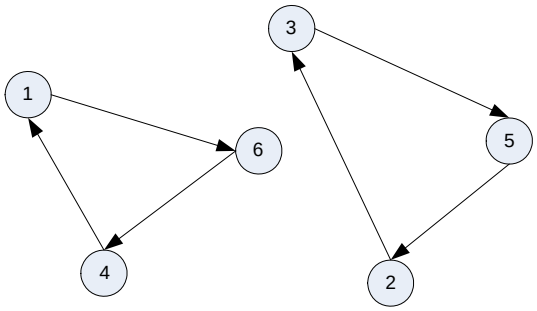
4. ข้อจำกัดตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall_{i,\,j} \quad i \neq j$$

$$u_i, u_j \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 6 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, 6$$

จากตัวแบบนี้ เป็นปัญหาการเดินทางของพนักงานขายที่มีขนาดเล็ก แต่มีอสมการจากข้อจำกัด (20) จำนวน 30 อสมการ ด้วยตัวแปรแบบทวิภาคจำนวน 36 ตัวแปรและตัวแปรเชิงเส้นอีก 6 ตัวแปร ทำให้การประมวลผลปัญหานี้ใช้เวลาในการประมวลผลนาน (ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 6) หากปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้น เวลาในการประมวลผลจะเพิ่มขึ้นแบบเอ็กโปแนลเชียล Baker (2006) และ Garefinkel and Nemhauser (1972) ได้เสนอการประมวลผลปัญหานี้โดยใช้ตัวแบบการจัดสรรงาน แล้วพิจารณาผลเฉลยว่าเกิดเส้นทางย่อยหรือไม่ ถ้าเกิดเส้นทางย่อยแล้วให้เพิ่มข้อจำกัด 1 ข้อจำกัดเพื่อขจัดเส้นทางย่อยและประมวลผลอีกครั้ง จากนั้นตรวจสอบว่าถ้าเกิดเส้นทางย่อยให้เพิ่มข้อจำกัดเพื่อขจัดข้อจำกัดอีก 1 ข้อจำกัดไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งไม่เกิดเส้นทางย่อย ผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

สำหรับตัวอย่างนี้ หากประมวลผลตัวแบบการจัดสรรงานจะได้ ผลเฉลยคือ $x_{16} = x_{23} = x_{35} = x_{41} = x_{52} = x_{64} = 1$ โดย $z = 37$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ผลเฉลยของตัวแบบ

จากรูป 5.1 พบว่าเส้นทางนี้เกิดเส้นทางปิดขึ้นสองเส้นทาง ในลักษณะนี้เราเรียกเส้นทางปิดนี้ว่า *เส้นทางย่อย (Subtour)* ซึ่งเป็นเส้นทางมีลักษณะเป็นเส้นทางปิด (แต่ไม่ได้เดินทางผ่านทุกเมือง) เพื่อป้องกันปัญหานี้เกิดเส้นทางย่อย เราจะต้องเพิ่มข้อจำกัดที่ (3) ในปัญหาการจัดสรรงาน คือ

$$u_i - u_j + Nx_{ij} \leq N-1 \quad , \; i \neq j \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ และ } u_i, u_j \geq 0$$

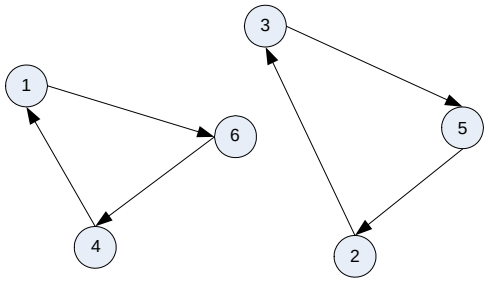
หรือ

$$\sum_{i \in s} \sum_{j \in s} x_{ij} \leq |s| - 1 \text{ โดย } 2 \leq |x| \leq n/2$$

โดยที่ N เป็นเซตของเมืองทั้งหมด และเซต s เป็นสับเซตของ N

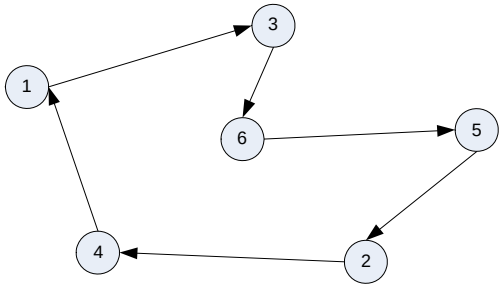
อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถระบุค่าของ s ได้ ในทางปฏิบัติจะใช้การเพิ่มข้อจำกัด เพื่อป้องกันการเกิดเส้นทางย่อยดังนี้

จากตัวอย่าง 5.6 ให้เพิ่มข้อจำกัด $x_{23} + x_{25} \leq 1$ แล้วทำการประมวลผลจะได้ ผลเฉลยคือ $x_{16} = x_{23} = x_{35} = x_{41} = x_{52} = x_{64} = 1$ โดย $z = 37$ จะได้ผลเฉลยดังรูป 5.2



รูปที่ 5.2 ผลเฉลยเมื่อเพิ่ม 1 ข้อจำกัด

จากรูปที่ 5.2 ผลเฉลยยังเกิดเส้นทางย่อยอีก จึงเพิ่มข้อจำกัดอีก 1 ข้อจำกัดคือ $x_{16} + x_{64} \leq 1$ ได้ผลเฉลยคือ $x_{13} = x_{24} = x_{36} = x_{41} = x_{52} = x_{65} = 1$ โดย $z = 38$ ซึ่งแสดงดังรูป 5.3 ไม่เกิดเส้นทางย่อย แสดงว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ TSP



รูปที่ 5.3 ผลเฉลยที่ไม่เกิดเส้นทางย่อย

5.3.2 ปัญหาการเลือกเส้นทางขนส่ง

ปัญหาการเลือกเส้นทางการขนส่ง เป็นปัญหาการเลือกเส้นทางหรืออุปกรณ์ที่ใช้ในการขนส่ง เช่น การเลือกว่าควรส่งสินค้าในเส้นทางใดบ้างและไม่ส่งสินค้าในเส้นทางใดบ้าง หรือ ควรใช้รถบรรทุกคันใดในการขนส่งโดยอาจพิจารณาจากต้นทุนค่าขนส่งที่ต่ำสุด การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มสำหรับปัญหานี้จะระบุให้ตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็ม หรือ มีค่าเป็นจำนวนเต็มแบบทวิภาค (Binary variable) เช่น ตัวแปร x_{ij} แทนเส้นทางการขนส่งสินค้าจากโรงงาน i ไปยังลูกค้า j ถ้า $x_{ij} = 1$ แสดงว่ามีการขนส่งผ่านเส้นทางดังกล่าว ถ้า $x_{ij} = 0$

แสดงว่าไม่มีการขนส่งผ่านเส้นทางดังกล่าว การประยุกต์ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มสำหรับปัญหาการขนส่งนั้นมีการใช้งานอย่างแพร่หลาย อาทิเช่น การศึกษาของ Kuo and Nicholls (2007) เพื่อช่วยรถไฟ (Conrail) เพิ่มประสิทธิภาพการใช้กลุ่มยานพาหนะ (Fleet) ในการขนส่งสินค้าทางรถไฟ Kuo and Nicholls ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มเพื่อระบุแผนต้นทุนต่ำสุดของการสรรจัดยานพาหนะสำหรับการขนย้ายสัมภาระไปยังพื้นที่ที่ต้องการ โดยตัวแบบมีวัตถุประสงค์คือ ต้นทุนรวมต่อสัปดาห์ของค่าจ้างพนักงานและค่าเชื้อเพลิง และมีข้อจำกัดหลัก คือ จำนวนเครื่องยนต์และอุปกรณที่ใช้งานได้ และจำนวนที่จะต้องเข้าซ่อมบำรุงเชิงป้องกัน

ตัวอย่างที่ 5.7 การขนส่งสินค้าจากโรงงาน 3 แห่งไปยังลูกค้า 3 ราย โดยการขนส่งแต่ละครั้งจะใช้รถบรรทุกสินค้าจากโรงงาน โดยมีค่าใช้จ่ายคงที่ของแต่ละครั้งที่บรรทุกสินค้า โดยรถบรรทุกแต่ละคันสามารถขนสินค้าได้ไม่เกิน 2,000 ชิ้น ส่วนค่าใช้จ่ายผันแปรตามจำนวนหน่วยสินค้าที่บรรทุก แสดงดังตารางที่ 5.3 จงหาพิจารณาว่าควรส่งสินค้าจากโรงงานใดไปให้ลูกค้ารายใดเพื่อให้ค่าใช้จ่ายรวมต่ำที่สุด

ตารางที่ 5.3 ค่าใช้จ่ายต่าง ๆ

ลูกค้ารายที่	ค่าใช้จ่ายคงที่ (บาท/ครั้ง)	ค่าใช้จ่ายผันแปร (บาท/ชิ้น)			ปริมาณสินค้า (ชิ้น)
		โรงงาน 1	โรงงาน 2	โรงงาน 3	
1	12,000	10	17	15	1,200
2	11,000	15	14	10	1,700
3	12,000	12	20	11	1,600

เนื่องจากปริมาณที่บรรทุกไปยังลูกค้าแต่ละรายนั้นไม่เกินความจุสูงสุดของรถทำสามารถบรรทุกได้ตามปริมาณความต้องการทั้งหมด เราสามารถหาค่าใช้จ่ายผันแปรเมื่อบรรทุกสินค้าจากโรงงาน 1 ไปยังลูกค้ารายที่ 1 ได้เท่ากับ $10 \times 1,200 = 12,000$ ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าใช้จ่ายผันแปรในการบรรทุกจากโรงงานไปยังลูกค้าอื่น ๆ ได้เช่นกัน

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าขนสินค้าจากโรงงาน i ไปยังลูกค้า j ,โดย } i, j = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ

$$z = 12,000 \sum_{j=1}^{3} x_{1j} + 11,000 \sum_{j=1}^{3} x_{2j} + 12,000 \sum_{j=1}^{3} x_{3j} + 12,000x_{11} + 20,400x_{21} + 18,000x_{31}$$

$$= +25,500x_{12} + 23,800x_{22} + 17,00x_{32} + 19,200x_{13} + 32,000x_{23} + 17,600x_{33}$$

(3) ข้อจำกัด

$$1,200\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \quad \geq \quad 1,200$$

$$1,700\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \quad \geq \quad 1,700$$

$$1,600\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \quad \geq \quad 1,600$$

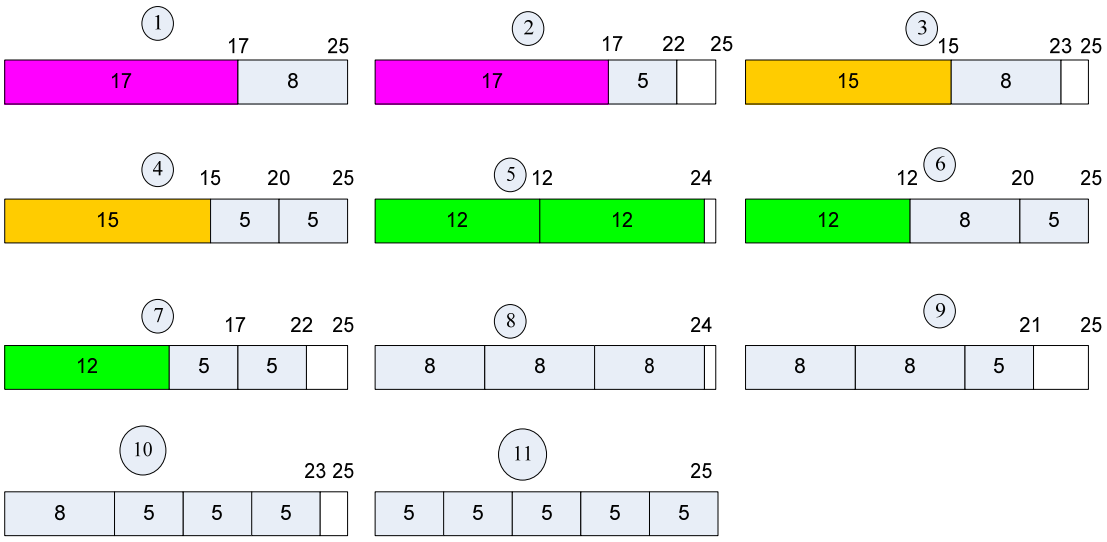
$$x_{ij} \quad \in \quad \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, 3$$

จากการประมวลจะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด คือ $x_{11} = x_{32} = x_{33} = 1$ โดย z = 81,600 บาท นั่นคือ โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าจำนวน 1,200 ชิ้นไปยังลูกค้ารายที่ 1 ส่วนโรงงานที่ 3 ส่งสินค้าจำนวน 1,700 และ 1,600 ชิ้นไปยังลูกค้ารายที่ 2 และ 3 ตามลำดับ โดยมีค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งสิ้น 81,600 บาท

5.4 การเลือกรูปแบบ

การเลือกรูปแบบการตัดวัตถุดิบที่มีขนาดคงที่ ซึ่งอาจอยู่ในรูปมิติเดียวเช่น ม้วนกระดาษ ม้วนผ้า ลำไม้ไผ่ เป็นต้น วัตถุดิบบางชนิดอาจต้องพิจารณาในสองมิติ คือทั้งความกว้างและความยาว เช่น ไม้อัดแผ่น ผ้าผืน เป็นต้น รูปแบบการตัดอาจทำได้หลายรูปแบบ ปัญหาในลักษณะนี้มักให้ตัวแปรตัดสินใจแทนจำนวนการตัดด้วยรูปแบบแต่ละอย่าง ซึ่งวัตถุประสงค์การเลือกรูปแบบที่เหมาะสมมักจะพยายามให้เหลือเศษน้อยที่สุด เพราะเศษที่เหลือเหล่านี้ไม่สามารถนำมาใช้เป็นวัตถุดิบในการผลิตได้อีกต่อไป Yazgac and Ozdemir (2004) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการจัดลำดับชิ้นงานการผลิตเฟอร์นิเจอร์ที่ทำจากไม้อัด โดยใช้เครื่องจักรแบบอัตโนมัติ 4 ขั้นตอนคือ การตัด การอัดกาวเชื่อมตะเข็บ การเจาะ และการกลึง ในขั้นตอนการตัดไม้อัดแผ่น ผู้วิจัยได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มในการเลือก*รูปแบบการตัด (Cutting pattern)* โดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่จะทำให้เหลือเศษน้อยที่สุด โดยมีจำกัดคือ ปริมาณชิ้นงานที่ตัดนั้นเพียงพอกับปริมาณสินค้าที่ต้องการผลิต และปริมาณแผ่นไม้อัดที่มีอยู่ เช่นเดียวกับ Jensen (2003) ได้แสดงตัวอย่างปัญหาการเลือกรูปแบบการตัดกระดาษที่เหมาะสม เพื่อให้เศษที่เหลือหรือขอบที่เหลือ (Trim loss) ให้น้อยที่สุด โดยพิจารณาปริมาณความต้องการสินค้าและปริมาณวัตถุดิบที่มีอยู่ ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงตัวอย่างการสร้างตัวแบบสำหรับปัญหาการเลือกรูปแบบ

ตัวอย่างที่ 5.8 โรงงานกระดาษแห่งหนึ่ง ผลิตกระดาษม้วนออกจำหน่าย 5 ขนาดมาตรฐานที่มีความยาวเท่ากันในแต่ละม้วน แต่ความกว้างหรือหน้ากว้างของกระดาษมีขนาดแตกต่างกัน คือ หน้ากว้าง 5 8 12 15 และ 17 ฟุต โรงงานแห่งนี้ซื้อวัตถุดิบจาก บริษัทผลิตกระดาษวัตถุดิบเป็นม้วนที่มีหน้ากว้าง 25 ฟุต ทำให้โรงงานต้องมีการจัดวางกระดาษที่ต้องการตัดให้ได้หน้ากว้างใกล้เคียงกับ 25 ฟุต จากการจัดวางกระดาษตามขนาดมาตรฐานทั้ง 5 ขนาด ทำให้ได้รูปแบบการตัดเพื่อให้เหลือเศษน้อยที่สุดได้ 11 รูปแบบ ดังรูปที่ 5.4 ในช่วงเวลาที่วางแผนนี้ ความต้องการซื้อกระดาษม้วนของลูกค้าตามหน้ากวางขนาด 5 8 12 15 และ 17 ฟุต เท่ากับ 40 35 30 25 และ 20 ม้วน ตามลำดับ โรงงานต้องการทราบว่าจะต้องตัดกระดาษวัตถุดิบตามรูปแบบต่าง ๆ รูปแบบละกี่ม้วน เพื่อให้โรงงานสามารถผลิตกระดาษได้ตามความต้องการของลูกค้า และใช้กระดาษวัตถุดิบน้อยที่สุด



รูปที่ 5.4 รูปแบบการวางกระดาษ

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_j แทนจำนวนม้วนกระดาษวัตถุดิบ 25 ฟุต ที่ตัดด้วยรูปแบบที่ j, j =1, 2,…, 11

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11}$ (21)

(3) ข้อจำกัด

1. ความต้องการกระดาษขนาด 5 ฟุต 40 ม้วน

$$x_2 + 2x_4 + 1x_6 + 2x_7 + x_9 + 3x_{10} + 5x_{11} \geq 40 \quad (22)$$

2. ความต้องการกระดาษขนาด 8 ฟุต 35 ม้วน

$$x_1 + x_3 + x_6 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} \geq 35 \quad (23)$$

3. ความต้องการกระดาษขนาด 12 ฟุต 30 ม้วน

$$2x_5 + x_6 + x_7 \geq 30 \quad (24)$$

4. ความต้องการกระดาษขนาด 15 ฟุต 25 ม้วน

$$x_3 + x_4 \geq 25 \quad (25)$$

5. ความต้องการกระดาษขนาด 17 ฟุต 20 ม้วน

$$x_1 + x_2 \geq 20 \quad (26)$$

6. ข้อจำกัดตัวแปรมีค่าไม่เป็นลบและเป็นจำนวนเต็ม

x_j เป็นจำนวนเต็ม มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ $j = 1, 2, \ldots, 11$

จากการประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนี้ ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดหลายผลเฉลย ตารางที่ 5.4 แสดงผลเฉลยเหมาะสมที่สุด 3 ผลเฉลย ซึ่งพบว่า ทุกผลเฉลยใช้วัตถุดิบทั้งหมดจำนวน 64 ม้วน แต่ผลเฉลยที่ 1 ได้กระดาษม้วนตามขนาดและปริมาณที่ลูกค้าต้องการ ผลเฉลยที่ 2 ได้กระดาษม้วนขนาด 5 ฟุต เกินความต้องการมา 3 ม้วน และผลเฉลยที่ 3 ได้กระดาษม้วนขนาด 8 ฟุต เกินมา 2 ม้วน

ตารางที่ 5.4 ผลเฉลย

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด	ตัวแปรตัดสินใจ											รวม
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
1	16	4	7	18	15	0	0	4	0	0	0	64
2	19	1	9	16	14	2	0	1	0	2	0	64
3	20	0	5	20	15	0	0	4	0	0	0	64

5.5 การจัดตารางปฏิบัติงาน

ปัญหาการวางแผนกำลังคน (Manpower planning) เป็นการวางแผนเพื่อจัดสรรให้พนักงานทำงานให้สอดคล้องกับความต้องการพนักงาน ซึ่งผลของการวางแผนจะได้ตารางการปฏิบัติงานของพนักงาน (Workforce schedule) เพื่อให้พนักงานมาทำงานตามเวลาที่กำหนด ปัณหาการวางแผนการปฏิบัติงาน เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นใน 3 ลักษณะคือ

(1) ปัญหาการกำหนดว่าในแต่ละวันควรมีพนักงานกี่กลุ่มที่เข้าทำงานในช่วงเวลาต่าง ๆ ตามความต้องการแรงงานที่กำหนด ซึ่งเรียกว่าการทำงานเป็นกะ (Shift)

(2) ปัญหาการกำหนดจำนวนและตารางการทำงานของพนักงาน เพื่อทำให้ต้นทุนหรือค่าใช้จ่ายในการจ้างงานต่ำสุด ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าพนักงานแต่ละคนจะมีจำนวนวันหยุดในแต่ละสัปดาห์ตามกำหนด ซึ่งเรียกว่าการทำงานเป็นรอบ (Days-off)

(3) ปัญหาการจัดตารางทำงานของพนักงานนำเที่ยว (Tour guide) และการผสมผสานปัญหาในข้อ (1) และ (2) เพื่อให้สามารถจัดสรรงานในพนักงานแต่ละคน

ตัวอย่างปัญหาตารางการหยุดงาน (Day–off scheduling problem) เป็นปัญหาที่บริษัทต้องแก้ปัญหาอยู่เสมอ โดยเฉพาะบริษัทซึ่งเปิดดำเนินงาน 6 หรือ 7 วันต่อสัปดาห์ เช่น โรงพยาบาล สายการบิน ห้างสรรพสินค้า เป็นต้น โดยทั่วไป เรามักพบกับปัญหา (k, m)–cyclic staffing ซึ่งปัญหานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำให้ต้นทุนของการจัดสรรพนักงานเข้าทำงานต่ำสุด โดยที่พนักงานจะทำงานตามตารางการทำงานแบบ m ช่วงเวลา เช่น ตารางการทำงาน 1 สัปดาห์ (7 วัน) โดยเงื่อนไขในการจัดตารางการทำงานคือ (1) จะต้องมีพนักงานทำงานเพียงพอกับความต้องการในแต่ละช่วงเวลา (2) ในคาบเวลา (Period) ใด ๆ พนักงานแต่ละคนจะทำงานติดต่อกัน k ช่วงเวลา และว่างหรือได้หยุดงานเป็นเวลา m–k ช่วงเวลา โดยปกติช่วงเวลาที่ m ของคาบใดๆ และช่วงเวลาที่ 1 ของคาบถัดไป ถือว่าเป็นช่วงเวลาที่ต่อเนื่องกัน จึงเรียกว่าเป็น*วัฏจักร (Cyclic)* ตัวอย่างที่พบเห็นโดยทั่วไป เช่น ปัญหา (5, 7)–cyclic staff ที่มีพนักงานทำงาน 5 วันติดต่อกัน และหยุดงาน 2 วัน Morris and Showalter (1983) ได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มเพื่อจัดสรรพนักงานเข้าทำงานในลักษณะเป็นรอบหรือเป็นกะ โดยฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือจำนวนพนักงานน้อยที่สุด ภายใต้ข้อจำกัดว่าจำนวนชั่วโมงทำงานของพนักงานต้องเพียงพอกับความต้องการ Aykin (1996) ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มเพื่อจัดตารางการทำงานเป็นกะ สำหรับโรงงานที่มีการผลิต 24 ชั่วโมง โดยพิจารณาช่วงเวลาพักย่อย ช่วงเวลาพักรับประทานอาหารกลางวัน และช่วงเวลาเปลี่ยนกะ ตัวแบบที่เสนอในงานวิจัยนี้ก็เป็นตัวแบบครอบคลุมแบบเซต ซึ่งมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ ต้นทุนค่าจ้างพนักงานรวมต่ำสุด ภายใต้ข้อจำกัดหลัก 2 ประการคือ ความต้องการสินค้า และจำนวนพนักงานที่ต้องพักในช่วงเวลาต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.9 ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งเปิดดำเนินการ 7 วันต่อสัปดาห์ พนักงานแต่ละคนจะเข้าทำงานติดต่อกัน 5 วัน และหยุดพักงาน 2 วัน ตารางที่ 5.5 แสดงจำนวนพนักงานที่ต้องการในแต่ละวันของแผนกหนึ่งในห้างฯ แห่งนี้ อย่างไรก็ตาม การให้พนักงานเข้าทำงานในวันที่แตกต่างกันจะมีค่าใช้จ่ายแตกต่างกัน ดังแสดงในตารางที่ 5.6 ผู้บริหารของห้างต้องการจัดตารางการทำงานของพนักงานเพื่อทำให้ค่าใช้จ่ายรวมต่ำที่สุด

ตารางที่ 5.5 ความต้องการแรงงาน

วัน	ความต้องการแรงงาน (คน)
จันทร์	15
อังคาร	12
พุธ	9
พฤหัสบดี	10
ศุกร์	15
เสาร์	20
อาทิตย์	18

ตารางที่ 5.6 ค่าแรงงาน

วันที่เริ่มเข้าทำงาน	ค่าแรงของพนักงาน (บาทต่อวัน)
จันทร์	180
อังคาร	200
พุธ	220
พฤหัสบดี	230
ศุกร์	230
เสาร์	250
อาทิตย์	250

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_j แทนจำนวนพนักงานเข้าทำงานในวันที่ j โดยที่ j = 1, 2, …, 7 แทนวันจันทร์ อังคาร, ... , อาทิตย์ ตามลำดับ

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 180x_1 + 200x_2 + \ldots + 250x_7$ (27)

(3) ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &+x_4 \quad +x_5 \quad +x_6 \quad +x_7 \quad \geq 15 \\
x_1 \quad +x_2 \quad &+x_5 \quad +x_6 \quad +x_7 \quad \geq 12 \\
x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad &+x_6 \quad +x_7 \quad \geq 9 \\
x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 \quad &+x_7 \quad \geq 10 \\
x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 \quad +x_5 \quad &\geq 15 \\
x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 \quad +x_5 \quad +x_6 \quad &\geq 20 \\
x_3 \quad +x_4 \quad +x_5 \quad +x_6 \quad +x_7 \quad &\geq 18
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

x_j เป็นจำนวนเต็ม j = 1, 2, …, 7

จากการประมวลผลปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนี้ ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ดังนี้ $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$ $x_4 = 5$ $x_5 = 6$ และ $x_7 = 0$ โดยที่ z = 3,710 นั่นคือ มีพนักงานเริ่มเข้างานวันอังคาร 2 คน วันพุธ 3 คน วันพฤหัสบดี 5 คน วันศุกร์ 6 คน และวันเสาร์ 4 คน

5.6 การจัดสมดุลสายการประกอบ

ในสายการประกอบเพื่อผลิตสินค้าต่าง ๆ เช่น โทรทัศน์ วิทยุ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิค เป็นต้น การประกอบสินค้าเหล่านี้ ประกอบด้วยขั้นตอน (Operations) ต่าง ๆ มากมาย ขั้นตอนหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งขั้นตอนจะถูกดำเนินการโดยสถานีการทำงานเดียวกัน โดยมีลำดับขั้นตอนการทำงานตามที่กำหนดไว้ หรือที่เรียกว่าความสัมพันธ์ก่อน–หลัง (Precedence relations) ซึ่งจะระบุว่างานใดต้องทำให้เสร็จก่อนจึงจะดำเนินการในขั้นตอนหรืองานนี้ได้ โดยปกติแล้วบริษัทจะกำหนดเวลาในการผลิตสินค้าของแต่ละสถานีทำงาน ซึ่งเราเรียกว่า *รอบระยะเวลาการผลิต (Cycle time)* เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง เพื่อให้บริษัทสามารถผลิตสินค้าให้ได้ปริมาณตามที่ต้องการ

พิจารณาตัวอย่างการผลิตสินค้าที่มี m ขั้นตอน มีเวลาในการทำงานแต่ละขั้นตอน และลำดับการทำงานก่อน–หลัง ดังตารางที่ 5.7

ตารางที่ 5.7 ข้อมูลสมดุลสายการประกอบ

ขั้นตอน	เวลาในการทำงาน	งานที่ต้องทำก่อน
1	p_1	–
2	p_2	–
3	p_3	2
4	p_4	2, 3
⋮	⋮	⋮
m	p_m	4, 10, 15

ให้ $x_{ij} = 1$ ถ้าขั้นตอนที่ i ผลิตในสถานี j และ $x_{ij} = 0$ ถ้าขั้นตอนที่ i ไม่ผลิตในสถานี j

k แทนรอบระยะเวลาการผลิต

n แทนจำนวนสถานีสูงสุด

c_j คือ ค่าคงที่มีค่ามากกว่าศูนย์ โดย $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n$

วัตถุประสงค์ เพื่อทำให้จำนวนสถานีน้อยที่สุด ซึ่งสามารถทำได้โดยการให้ค่าถ่วงน้ำหนักให้กับขั้นตอนการทำงานในสถานีแรก ๆ น้อยกว่าสถานีถัดไป ดังนั้น วัตถุประสงค์ควรเป็นดังนี้

ค่าต่ำสุด $z = c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{im}$

ข้อจำกัด

(1) เวลาการทำงานแต่ละสถานี

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \leq k \quad \forall_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(2) ลำดับขั้นตอนการทำงานก่อน–หลัง ในที่นี้ขั้นตอนที่ 2 จะต้องผลิตก่อนขั้นตอนที่ 3 ซึ่งขั้นตอนที่ 2 อาจผลิตในสถานีก่อนหน้า และขั้นตอนที่ 3 ผลิตในสถานีถัดไป หรือขั้นตอนที่ 2 และ 3 อาจผลิตในสถานีเดียวกัน โดยขั้นตอนที่ 2 ถูกผลิต ก่อนขั้นตอนที่ 3 ดังนั้น

$$x_{3J} \leq \sum_{j=1}^{J} x_{2j} \quad \forall J \quad J = 1, 2, \ldots, n$$

สำหรับขั้นตอนที่ 4 ถูกผลิต หลังจากขั้นตอนที่ 2 และ 3 ซึ่งอาจผลิตในสถานีเดียวกันก็ได้ แต่ขั้นตอนที่ 2 และ 3 จะถูกผลิตก่อน หรือขั้นตอนที่ 2 และ 3 ผลิตในสถานีก่อนหน้าสถานีที่ทำขั้นตอนที่ 4 ดังนั้น

$$x_{4J} \leq \sum_{j=1}^{J} x_{2j} \quad \forall J \quad J = 1, 2, \ldots, n$$

และ

$$x_{4J} \leq \sum_{j=1}^{J} x_{3j} \quad \forall J \quad J = 1, 2, \ldots, n$$

(3) แต่ละขั้นตอนต้องถูกผลิตในสถานีเดียวเท่านั้น

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

(4) ข้อจำกัดตัวแปรตัดสินใจเป็นไบนารี

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

ตัวอย่างที่ 5.10 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการปริมาณการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง 160 ชิ้นต่อวัน โดยเวลาในการทำงานเท่ากับ 8 ชั่วโมงต่อวัน (ไม่รวมเวลาพักทำงาน) ในการผลิตสินค้าชนิดนี้ มีขั้นตอนการทำงาน 9 ขั้นตอน โดยเวลาแต่ละขั้นตอนและระบุงานที่ต้องทำก่อน แสดงดังตารางที่ 5.8 จงจัดสมดุลสายการประกอบ

ตารางที่ 5.8 ข้อมูลสมดุลสายการประกอบ

ขั้นตอน	เวลา (วินาที)	งานที่ต้องทำก่อน
1	60	–
2	80	1
3	30	–
4	40	3
5	40	2, 4
6	50	–
7	100	6
8	70	4, 7
9	30	5, 8
รวม	500	

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_{ij} แทนขั้นตอน i ทำการผลิตในสถานี j , i = 1, 2,…, 9 และ j = 1, 2, 3, 4

บริษัทต้องการอัตราการผลิต 160 ชิ้นต่อวัน 1 วัน มี 8 ชั่วโมงทำงาน ดังนั้น อัตราการผลิต 20 ชิ้นต่อชั่วโมง ดังนั้น รอบระยะเวลาการผลิตเท่ากับ 3 นาที

เนื่องจากเวลารวมของทุกขั้นตอนเท่ากับ 500 วินาที จำนวนสถานีต่ำสุดเท่ากับ 500/180 = 2.778 สถานี ในที่นี้เราอาจประมาณว่าไม่เกิน 4 สถานี

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z = \sum_{i=1}^{9} x_{i1} + 2\sum_{i=1}^{9} x_{i2} + 3\sum_{i=1}^{9} x_{i3} + 4\sum_{i=1}^{9} x_{i4} \tag{29}$$

(3) ข้อจำกัด

1. เวลาการทำงานแต่ละสถานี

$$60x_{1j} + 80x_{2j} + 30x_{3j} + 40x_{4j} + 40x_{5j} + 50x_{6j} + 100x_{7j} + 70x_{8j} + 30x_{9j} \le 180 \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{30}$$

2. ลำดับขั้นตอนการทำงานก่อน–หลัง

2.1 ขั้นตอน 2 หลังขั้นตอน 1

$$\begin{aligned} x_{21} &\le x_{11} && J = 1 \\ x_{22} &\le x_{11} + x_{12} && J = 2 \\ x_{23} &\le x_{11} + x_{12} + x_{13} && J = 3 \\ x_{24} &\le x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} && J = 4 \end{aligned} \tag{31}$$

2.2 ขั้นตอน 4 หลังขั้นตอน 3

$$\begin{aligned} x_{41} &\le x_{31} && J = 1 \\ x_{42} &\le x_{31} + x_{32} && J = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{43} &\le x_{31} + x_{32} + x_{33} && J = 3 \\ x_{44} &\le x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} && J = 4 \end{aligned} \qquad (32)$$

2.3 ขั้นตอน 5 หลังจากขั้นตอน 2 และ 4

$$\begin{aligned} x_{51} &\le x_{21} && J = 1 \\ x_{52} &\le x_{21} + x_{22} && J = 2 \\ x_{53} &\le x_{21} + x_{22} + x_{23} && J = 3 \\ x_{54} &\le x_{21} + x_{22} + x_{23} && J = 4 \\ x_{51} &\le x_{41} && J = 1 \\ x_{52} &\le x_{41} + x_{42} && J = 2 \\ x_{53} &\le x_{41} + x_{42} + x_{43} && J = 3 \\ x_{54} &\le x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} && J = 4 \end{aligned} \qquad (33)$$

2.4 ขั้นตอน 7 หลังขั้นตอน 6

$$x_{7J} \le \sum_{j=1}^{J} x_{6j} \qquad J = 1, 2, 3, 4 \qquad (34)$$

2.5 ขั้นตอน 8 หลังขั้นตอน 4 และ 7

$$\begin{aligned} x_{8J} &\le \sum_{j=1}^{J} x_{4j} && J = 1, 2, 3, 4 \\ x_{8J} &\le \sum_{j=1}^{J} x_{7j} && J = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \qquad (35)$$

2.6 ขั้นตอน 9 หลังขั้นตอน 5 และ 8

$$\begin{aligned} x_{9J} &\le \sum_{j=1}^{J} x_{5j} && J = 1, 2, 3, 4 \\ x_{9J} &\le \sum_{j=1}^{J} x_{8j} && J = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \qquad (36)$$

3. แต่ละขั้นตอนจะผลิตในสถานีเดียวเท่านั้น

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 9 \qquad (37)$$

4. ข้อจำกัดตัวแปรเป็นไบนารี

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, \ldots, 9 \\ j &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

เมื่อนำปัญหานี้ไปประมวลผล ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_{11} = x_{23} = x_{31} = x_{41} = x_{53} = x_{61} = x_{72} = x_{82} = x_{93} = 1$ โดยที่ $z = 17$ แสดงว่าจำนวนสถานีทำงานคือ 3 สถานี โดยขั้นตอนในการทำงานแต่ละสถานี แสดงดังตารางที่ 5.9

ตารางที่ 5.9 ผลเฉลยขั้นตอนการทำงานในแต่ละสถานี

สถานี	ขั้นตอนการทำงาน
1	1, 3, 4, 6
2	7, 8
3	2, 5, 9

นอกจากปัญหาดังกล่าวข้างต้นแล้ว การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มยังสามารถประยุกต์กับปัญหาอื่น ๆ ได้อย่างกว้างขวาง Lethford (1996) ได้ประยุกต์การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มเพื่อจัดสรรว่าผู้ประกอบการรายใดบ้างควรได้รับสัญญาจ้างให้เดินรถรับส่งนักเรียน ซึ่งผู้ประกอบการมี 2 ประเภทคือ ผู้ประกอบการบุคคล และผู้ประกอบการกลุ่ม ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผลรวมของราคาที่เสนอนั้นต่ำสุด โดยมีเงื่อนไขว่าจำนวนรถนั้นเพียงพอกับความต้องการของนักเรียน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. บริษัทให้บริการต้องการจะตั้งระบบสื่อสารระหว่าง 5 จังหวัด การวิเคราะห์สื่อต่าง ๆ ระบุว่าต้นทุนต่อเดือนในการติดต่อระหว่างจังหวัด i และ j เท่ากับ c_{ij} ซึ่งแสดงในตารางที่ 5.10 การเชื่อมโยงนี้อนุญาตให้การสื่อสารในลักษณะสองทางคือ จาก i ไป j หรือจาก j ไป i ต้นทุนในการติดตั้งอุปกรณ์ในการสื่อสารระหว่างจังหวัดขึ้นอยู่กับจำนวนของการเชื่อมโยงของจังหวัดนั้น

ตารางที่ 5.10 ต้นทุนต่อเดือน $\left(c_{ij}\right)$

จังหวัด	จังหวัด				
	1	2	3	4	5
1	–	15	13	18	20
2	15	–	10	25	15
3	13	10	–	15	18
4	18	25	15	–	12
5	20	15	18	12	–

โดยการเชื่อมโยงระหว่างกันนั้น ถ้าเชื่อมโยงจังหวัดแรกต้นทุนเท่ากับ d_1 และการเชื่อมโยงจังหวัดที่ 2 มีต้นทุนเพิ่มจากเชื่อมโยง 1 จังหวัด เท่ากับ d_2 (เชื่อมโยง 2 จังหวัด ต้นทุน $d_1 + d_2$) ถ้าเชื่อมโยง 3 จังหวัด จะมีต้นทุนเพิ่มจาก 2 จังหวัด เพียง d_3 โดย $d_1 > d_2 > d_3$

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่มีข้อมูลต่อไปนี้

(1) วัตถุประสงค์เป็นต้นทุนรวมต่ำสุด

(2) การเชื่อมโยงของแต่ละจังหวัดจะต้องติดต่อกับจังหวัดอื่น ๆ อย่างน้อย 1 จังหวัด

(3) การเชื่อมโยงจะเป็นแบบต้นไม้ (Tree)

(4) ไม่มีจังหวัดใดที่มีการเชื่อมโยงมากกว่า 3

(5) ให้ $d_1 = 5$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$

2. ปัญหาการใช้รถยนต์ร่วม (Car pooling) มีคนอยู่ m รายที่กรอกแบบสอบถามว่ายินดีจะใช้บริการรถยนต์ร่วม จากข้อมูล นักวิเคราะห์ได้หาค่าดัชนีการร่วมทางกันได้ระหว่างคนที่ i และ j ให้เท่ากับ c_{ij} ถ้าค่า c_{ij} มีค่าน้อย แสดงว่าไม่สามารถร่วมทางกันได้ ให้ U และ L แทนค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของจำนวนคนที่ต้องการเข้าร่วมในโครงการนี้ ตามลำดับ

กำหนดให้ $x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าคนที่ i จัดสรรให้อยู่ในรถยนต์ร่วมคันที่ k} \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$

ในปัญหานี้ต้องการจัดการเดินรถยนต์ร่วม n คัน เพื่อให้ผลรวมของดัชนีร่วมทางกันได้มีค่าสูงสุด และคนแต่ละคนจะจัดสรรให้เดินทางโดยรถคันเดียวเท่านั้น

(1) จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม เพื่อจัดสรรคนให้เดินทางกับรถยนต์ร่วมแต่ละคัน

(2) จากตัวแบบแบบในข้อ (1) ถ้าเพิ่มเติมข้อจำกัดว่า คนที่ 1 และคนที่ 2 ไม่สามารถใช้รถยนต์ร่วมคันเดียวกันได้ ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มจะเป็นอย่างไร

(3) จากตัวแบบในข้อ (1) ถ้าเพิ่มข้อจำกัดว่าคนที่ 3 และคนที่ 4 ต้องจัดสรรให้ใช้รถร่วมคันเดียวกัน ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มจะเป็นอย่างไร

3. ปัญหาการเลือกกลุ่มหลักทรัพย์หรือพอร์ทการลงทุน (Portfolio selection) สำหรับการลงทุน ผู้จัดการบริษัทเงินทุนแห่งหนึ่งต้องการหารายการลงทุนใดบ้างเหมาะสมที่สุดที่จะอยู่ในพอร์ทการลงทุน (Optimal portfolio) เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อลูกค้าหรือผู้ถือหุ้น โดยเงินทุนทั้งหมดมี 250 ล้านเพื่อการลงทุน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผลตอบแทนทั้งจากเงินปันผล (Dividend) และการเติบโต (Growth) ตลอดระยะเวลาการลงทุน 1 ปี จากการศึกษาพบว่า มี 8 บริษัทที่มีเป็นบริษัทประเภทที่มีเทคโนโลยีสูง (High–tech) ซึ่งมี 3 ภาค (Sector) คือ ภาคธุรกิจซอฟแวร์ จำนวน 3 บริษัท (S_1, S_2, S_3) ภาคธุรกิจฮาร์ดแวร์ จำนวน 3 บริษัท (H_1, H_2, H_3) และภาคธุรกิจให้คำปรึกษาระบบอินเตอร์เน็ต จำนวน 2 บริษัท (C_1, C_2) โดยข้อมูลราคาหุ้น เงินปันผลและอัตราเติบโต แสดงดังตารางที่ 5.11 นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขการลงทุนดังนี้

(1) การลงทุนแต่ละภาคธุรกิจ ไม่เกิน 40% ของการลงทุนทั้งหมด

(2) จะลงทุนอย่างน้อย 10 ล้านบาทในแต่ละบริษัท

(3) จำนวนหุ้นที่ลงทุนแต่ละบริษัท จะต้องเป็นจำนวนเท่า 1,000 หุ้น (เช่น $x_1 = 2$ หมายถึง ลงทุนในบริษัทที่ 1 จำนวน 2,000 หุ้น)

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม เพื่อหาว่าบริษัทเงินทุนนี้ควรลงทุนแต่ละบริษัทจำนวนกี่หุ้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงสุด

ตารางที่ 5.11 รายละเอียดหุ้น

	หุ้น							
	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	C_1	C_2
ราคาหุ้นต่อหน่วย (บาท)	400	500	800	600	450	600	300	250
อัตราเติบโต (%)	0.05	0.10	0.03	0.04	0.07	0.15	0.22	0.25
ร้อยละเงินปันผล (บาท)	2	1.5	3.5	3.0	2.0	1.0	1.8	0

4. ศูนย์เงินสดของธนาคารแห่งหนึ่ง มีแผนกที่ดูแลเติมเงินในตู้เอทีเอ็มต่าง ๆ ในเขตพื้นที่บริการ ทุกๆ วันศูนย์จะตรวจสอบว่าตู้เอทีเอ็มใดบ้างที่ต้องเติมเงิน จากนั้นทางแผนกจะจัดเส้นทางให้รถเติมเงินตามตู้เอทีเอ็มต่าง ๆ ในที่นี้มีตู้เอทีเอ็ม 8 ตู้ที่จะต้องเติมเงินโดยพนักงานและรถเติมเงิน 1 คัน ซึ่งระยะห่างระหว่างตู้เอทีเอ็มเหล่านี้แสดงในตารางที่ 5.12 ทางแผนกต้องการทราบเส้นทางการเดินรถสำหรับรถเติมเงิน 1 คัน เพื่อเติมเงินให้กับตู้เอทีเอ็มทั้ง 8 ตู้ โดยใช้ระยะทางสั้นที่สุด

ตารางที่ 5.12 ระยะทางระหว่างตู้เอทีเอ็ม (กิโลเมตร)

จากตู้เอทีเอ็มที่	ถึงตู้เอทีเอ็มที่							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	15	3	8	17	6	9	4
2	16	0	6	7	12	6	3	1
3	6	7	0	5	8	2	10	6
4	7	4	6	0	4	3	6	8
5	15	10	12	6	0	2	10	12
6	5	4	5	3	7	0	8	7
7	8	6	8	4	9	6	0	6
8	6	2	10	9	12	5	4	0

บรรณานุกรม

Aykin, T. (1996). Optimal shift scheduling with multiple break windows. *Management Science*, 42(4), 591-602.

Baker, K.R. (2006), *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, California, USA.

Hiller, F.S. (1995). *Introduction to Operations Research*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Jensen, P. (2003). *Operations Research Models and Methods*, John Wiley and Sons, New York, USA.

Kuo, C.C., and Nicholls, G.M. (2007). A mathematical modeling approach to improving locomotive utilization at a freight railroad. *Omega*, 35, 472-485.

Letchford, A. N. (1996). Allocation of School Bus Contract by Integer Programming, *Journal of Operational Research Society*, 47, 369-372.

Morris, J. G.and Showalter, M. (1983). *Management Science*, 29(8), 942-950.

Yazgac, T., and Ozdemir, R.G. (2004). A Cutting Sequencing Approach to Modular Manufa cturing, *Journal of Manufacturing Technology Management*, 15(1), 20-28.

Neammanee, P., and Lorchirachoonkul, V. (2005). A two-stage network location problem for banknote distribution system, *The 8th Decision Science Institute International Conference*, Barcelona, Spain.

Garefinkel, R.S., Nemhauser, G.L. (1972). *Integer Programming*. John Wiley&Sons, New York, USA.

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

6

Integer Linear Programming Method

Integer Linear Programming Method

สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบจำนวนเต็ม ที่เรียกย่อ ๆ ว่า การโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม ซึ่งมีลักษณะที่สำคัญคือ (1) ข้อจำกัดและฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นเชิงเส้น และ (2) ตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งแตกต่างจากการโปรแกรมเชิงเส้นเพียงเรื่องของค่าตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ทำให้เกิดความรู้สึกว่าการแก้ปัญหาทั้งสองนี้น่าจะคล้ายกัน และการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มน่าจะง่ายกว่า เนื่องจากจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้ของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มนั้น มีจำนวนจำกัด (Finite number of solutions) ขณะที่การโปรแกรมเชิงเส้นมีจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้เป็นอนันต์ (Infinite number of solutions) อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ขึ้น เช่น ปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจเป็นทวิภาค ถ้ามีจำนวนตัวแปรทวิภาค n ตัวแปรแล้ว จำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้เท่ากับ 2^n เช่น ถ้าจำนวน 10 ตัวแปร แล้วจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้เท่ากับ $2^{10} = 1,024$ ผลเฉลยถ้าจำนวนตัวแปรเท่ากับ 20 ตัวแปรแล้ว จำนวนผลเฉลยเท่ากับ $2^{20} = 1,048,576$ ผลเฉลยในกรณีนี้การเพิ่มขึ้นของตัวแปรตัดสินใจ 1 ตัว ทำให้จำนวนผลเฉลยเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า การเพิ่มขึ้นของตัวแปรและผลเฉลยในลักษณะนี้ เป็นการเพิ่มขึ้นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential growth) ดังนั้น แม้แต่คอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูง ทำให้ดูว่าการแก้ปัญหาน่าจะง่ายกว่าการโปรแกรมเชิงเส้น เนื่องจากจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้ของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มนั้น จะมีจำนวนจำกัด (Finite number) ก็ไม่สามารถทำการตรวจสอบผลเฉลยทั้งหมดได้ ขณะที่วิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีประสิทธิภาพหลายวิธี เช่น วิธีซิมเพล็กซ์ วิธีคารมาร์คาร เป็นต้น สำหรับวิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีแก้ปัญหาโดยหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจากจุดมุมต่าง ๆ โดยไม่ต้องค้นหาผลเฉลยภายในพื้นที่ที่เป็นไปได้ จำนวนจุดมุมของปัญหาจะขึ้นอยู่กับจำนวนข้อจำกัดของปัญหา ซึ่ง

มีจำนวนไม่มากนัก ทำให้จำนวนการทำซ้ำในการคำนวณมีไม่มากนัก สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม จุดมุมอาจไม่ใช่ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหา ดังนั้น การใช้วิธีซิมเพล็กซ์มาแก้ปัญหานี้ไม่สามารถทำได้โดยตรง

อย่างไรก็ตาม ปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่มีรูปแบบชัดเจน เช่น ปัญหาข่ายงานและการขนส่ง เป็นต้น มีนักวิจัยคิดค้นวิธีทำให้การแก้ปัญหาเหล่านี้ทำได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 6.1 และวิธีการแจงนับ (Enumerative method) ในหัวข้อ 6.2 แต่สำหรับปัญหาที่มีรูปแบบปัญหาเฉพาะของปัญหาเอง การแก้ปัญหาอาจทำได้ยากขึ้น ในหนังสือนี้ได้กล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาโดยการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต (Branch–and–Bound method) ในหัวข้อ 6.3 และ 6.4 พร้อมกับวิธีการสร้างระนาบตัดเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาอีกวิธีหนึ่ง นอกจากนี้ได้กล่าวถึงวิธีลากรานเจียน เพื่อช่วยลดจำนวนข้อจำกัดลง ซึ่งจะทำให้ความซับซ้อนในการแก้ปัญหาลดลงได้ สำหรับส่วนสุดท้ายของบทนี้จะแสดงถึงวิธีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

6.1 กรีดี้อัลกอริทึม

กรีดี้อัลกอริทึม (Greedy algorithm) เป็นวิธีการที่มีการดำเนินงานเป็นขั้นตอนที่มีการทำซ้ำ ในแต่ละการทำซ้ำจะมีการหาผลเฉลยบางส่วน โดยพยายามทำให้ได้ผลประโยชน์มากสุด (ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด) หรือทำให้ต้นทุนหรือระยะทางรวมน้อยสุด (ในกรณีปัญหาค่าต่ำสุด) ลักษณะเพิ่มเติมของอัลกอริทึมนี้คือ (1) การเลือกผลเฉลยบางส่วนในแต่ละขั้นตอน จะไม่คำนึงถึงผลเฉลยบางส่วนขั้นตอนอื่น ๆ ที่จะตามมา และ (2) จำนวนขั้นตอนจะเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential function) ตามขนาดปัญหา (Problem size) กรีดี้อัลกอริทึมมีขั้นตอนดังนี้

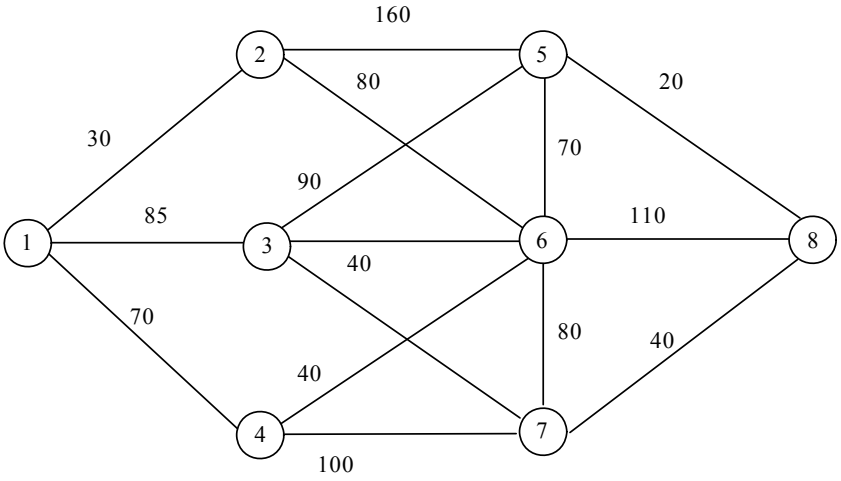
(1) ขั้นตอนกำหนดค่าเริ่มต้น ให้ m แทนจำนวนโหนดในกราฟ ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตที่มีสมาชิกแต่ละตัวไม่ซ้ำกัน เลือกให้โหนดที่ i อยู่ในเซต S_1 ส่วนโหนดที่เหลืออยู่ในเซต S_2 ดังนั้น S_2 มีสมาชิก m–1 ตัว

(2) ขั้นตอนการเลือกสมาชิก 1 ตัว ใน S_2 เข้ามาใส่ใน S_1 และลบออกจากเซต S_2 โดยการเลือกนี้จะพิจารณาจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ว่าจะทำให้วัตถุประสงค์มีค่าดีขึ้นได้เร็วสุดในการทำซ้ำครั้งนี้ โดยไม่คำนึงถึงการเลือกสมาชิกขั้นตอนต่อไปว่าจะทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าดีขึ้นมากน้อยเพียงใด

(3) ขั้นตอนการสร้างและการตรวจสอบผลเฉลย เป็นการเชื่อมโยงผลเฉลยที่เพิ่มเติมขึ้นมาจากขั้นตอนการเลือก ถ้า $S_2 = \phi$ แล้วอัลกอริทึมนี้จะหยุดทำงาน มิฉะนั้นจะกลับไปขั้นตอนที่ 2 อีกครั้ง

6.1.1 กรีดี้อัลกอริทึม สำหรับปัญหาการแผ่สั้นที่สุด

พิจารณา*ปัญหาการแผ่สั้นที่สุด (Minimum spanning tree problem, MST)* ที่มีจำนวน m โหนด และ n เส้นทาง โดยทุกโหนดจะไม่เชื่อมต่อกับโหนดอื่นทุกโหนด รูปที่ 6.1 แสดงตัวอย่างปัญหาการแผ่สั้นที่สุดในการกระจายสินค้าจากโรงงานที่จังหวัดหนึ่งไปยังจังหวัดต่าง ๆ จำนวน 8 จังหวัด บน 14 เส้นทาง โดยมีระยะทางที่ใช้บนแต่ละเส้นทาง ต้องการเลือกเส้นทางเพื่อกระจายสินค้าไปยังลูกค้าในจังหวัดต่าง ๆ โดยให้มีระยะทางรวมสั้นที่สุด



รูปที่ 6.1 เส้นทางและระยะทางระหว่าง 8 จังหวัด

กรีดี้อัลกอริทึมสำหรับปัญหาการแผ่สั้นที่สุด (Jensen, 2003) มีขั้นตอนดังนี้

(1) ขั้นตอนกำหนดค่าเริ่มต้น ให้โหนด m เป็นจำนวนโหนด ซึ่งแทนที่ตั้งของโรงงานและลูกค้าในจังหวัดต่าง ๆ โดยในแผนภาพ ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตที่ไม่เชื่อมต่อกัน (Disjoint) กล่าวคือ สมาชิกในแต่ละเซตไม่ซ้ำกัน เลือกโหนด i ที่จะเป็นจุดเริ่มต้นใส่ลงใน S_1 ส่วนโหนดที่เหลือใส่ไว้ใน S_2

(2) ขั้นตอนการเลือก พิจารณาทุกเส้นทางที่มีปลายด้านหนึ่งอยู่ใน S_1 และปลายอีกด้านหนึ่งอยู่ใน S_2 เลือกเส้นทางที่สั้นที่สุด ให้เป็นเส้นทาง (i, j) โดย $i \in S_1$ และ $j \in S_2$

(3) ขั้นตอนการสร้างต้นไม้แผ่นสั้นที่สุด ใส่เส้นทาง (i, j) ลงในต้นไม้แผ่ลบโหนด j ออกจาก S_2 และใส่โหนด j ลงใน S_1 ถ้า $S_2 = \phi$ แล้วอัลกอริทึมนี้จะหยุดทำงาน ถ้า $S_2 \neq \phi$ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 2

เมื่อนำกรีดี้อัลกอริทึม มาแก้ปัญหาตัวอย่างในรูปที่ 6.1 สามารถแสดงขั้นตอนการทำงานได้ดังตารางที่ 6.1 โดยโหนดที่ 1 ถูกเลือกเป็นโหนดเริ่มต้นให้เข้ามาอยู่ใน S_1 ก่อน ความยาวรวมของ MST เท่ากับ 310 หน่วย

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า การเลือกเส้นทางที่สั้นที่สุด ในแต่ละครั้งนั้นจะพิจารณาเฉพาะเส้นทางที่เชื่อมต่อกับโหนดใน S_1 โดยมิได้พิจารณาถึงระยะทางรวมของโหนดที่จะเลือกใน

ขั้นตอนต่อไป ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้อาจไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดก็ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าเกิดเป็นวัฏจักร (Cycle) เกิดขึ้น แล้วเราสามารถเลือกลงเส้นทางใดเส้นทางหนึ่ง ก็ยังคงทำให้ผลเฉลยที่ได้นี้สอดคล้องกับเงื่อนไขของอัลกอริทึม

ในปัญหา MST ที่มี m โหนด จะพบว่ามีขั้นตอนการเลือก m–1 ครั้ง และมีการตรวจสอบความยาวของเส้นทางอย่างมากสุด m–1 เส้นทางในแต่ละการทำซ้ำ (Iteration) ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า ความซับซ้อน (Complexity) อยู่ในเทอมของ $O\left(m^2\right)$ อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหา MST ประเภทที่เชื่อมต่อกันทุกโหนด (Directed network) สามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้เวลาในการประมวลผลเป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลของขนาดปัญหา แต่ไม่สามารถหาผลเฉลยโดยกรีดี้อัลกอริทึม (Lawler, 1976)

ตารางที่ 6.1 ต้นไม้แผ่สั้นที่สุดของตัวอย่างในรูป 6.1

เซต S_1 และ S_2	เส้นทางที่เลือก	ความยาว	ระยะทางรวม
$S_1 = \{1\}$ $S_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	(1, 2)	30	–
$S_1 = \{1, 2\}$ $S_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	(1, 4)	70	30
$S_1 = \{1, 2, 4\}$ $S_2 = \{3, 5, 6, 7, 8\}$	(4, 6)	40	100
$S_1 = \{1, 2, 4, 6\}$ $S_2 = \{3, 5, 7, 8\}$	(6, 3)	40	140
$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $S_2 = \{5, 7, 8\}$	(6, 5)	70	180
$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $S_2 = \{7, 8\}$	(5, 8)	20	250
$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ $S_2 = \{7\}$	(8, 7)	40	270
$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	–	–	310

6.1.2 กรีดี้อัลกอริทึม สำหรับปัญหาการจัดลำดับงาน

สำหรับปัญหาการจัดลำดับงานบนเครื่องจักร 1 เครื่อง โดยไม่มีข้อจำกัดด้านอื่น ๆ และฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีลักษณะเชิงเส้นตรง กรีดี้ อัลกอริทึม สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้ เช่น การจัดลำดับงาน m งานบนเครื่องจักร 1 เครื่อง เวลาที่ใช้บนเครื่องจักรของงานที่ i เท่ากับ p(i)

ต้นทุนการปรับโทษ (Penalty cost) เท่ากับ c(i) คูณด้วย T(i) โดยที่ c(i) > 0 T(i) แทนเวลาเสร็จงาน (Completion time) ของงานที่ i และ c(i) แทนต้นทุนการปรับโทษต่อหน่วยเวลาที่งาน i เสร็จช้ากว่ากำหนด สมมติว่าเวลาในการติดตั้ง (Setup time) ในการเปลี่ยนการผลิตจากงานหนึ่งเป็นอีกงานหนึ่งนั้นมีค่าน้อยมาก

ให้ลำดับของงานเขียนในรูปของเวคเตอร์ $(J_1, J_2, \ldots, J_m)$ โดยที่ $J_k = i$ หมายถึงงาน i อยู่ในลำดับที่ k เวลาในการเสร็จงาน (T(i)) และผลรวมต้นทุนการปรับโทษ (z) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$T(i) = \sum_{k=1}^{i} p(i) \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

$$z = \sum_{k=1}^{m} c(J_k) T(J_k) \tag{2}$$

ปัญหาการจัดลำดับงาน เพื่อให้ผลรวมต้นทุนการปรับโทษต่ำสุด (z) นั้นมีผลเฉลยเป็นไปได้ m! ผลเฉลย ทำให้ปัญหานั้นซับซ้อนในการใช้กรีดี้อัลกอริทึม อย่างไรก็ตาม หากต้องการให้ z มีค่าน้อยแล้ว งานที่มีค่าต้นทุนการปรับโทษ (c(i)) มากควรนำมาจัดลำดับก่อน และงานที่มีเวลาการผลิต (p(i)) น้อยก็ควรนำมาจัดลำดับก่อนเช่นกัน ดังนั้น การจัดลำดับงานตามอัตราส่วนของ c(i)/p(i) จากค่ามากไปหาค่าน้อยสามารถนำมาใช้กับกรีดี้อัลกอริทึมในกรณีนี้

ตัวอย่างการจัดงาน 7 งานบนเครื่องจักร 1 เครื่อง โดยมี p(i) และ c(i) ดังตารางที่ 6.2 กรีดี้อัลกอริทึม เริ่มจาก $S_1 = \{\ \}$ และ $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เนื่องจากงานที่ 2 มี c(i)/p(i) มากที่สุด ดังนั้น เลือกงานที่ 2 ในการจัดลำดับก่อน จึงใส่งานที่ 2 ใน S_1 และลบงานที่ 2 จาก S_2 จะได้ $S_1 = \{2\}$ และ $S_2 = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จากนั้นเลือกงานที่ 7 มาจัดเป็นลำดับที่ 2 เมื่อประมวลโดยใช้ กรีดี้ อัลกอริทึม จะได้ลำดับคือ (2, 7, 1, 6, 5, 4, 3)

ตารางที่ 6.2 การจัดงาน 7 งานบนเครื่องจักร 1 เครื่อง

งานที่ i	p(i)	c(i)	c(i)/p(i)
1	6	14	2.33
2	3	12	4.00
3	10	3	0.30
4	5	2	0.40
5	12	20	1.67
6	4	8	2.00
7	8	24	3.00

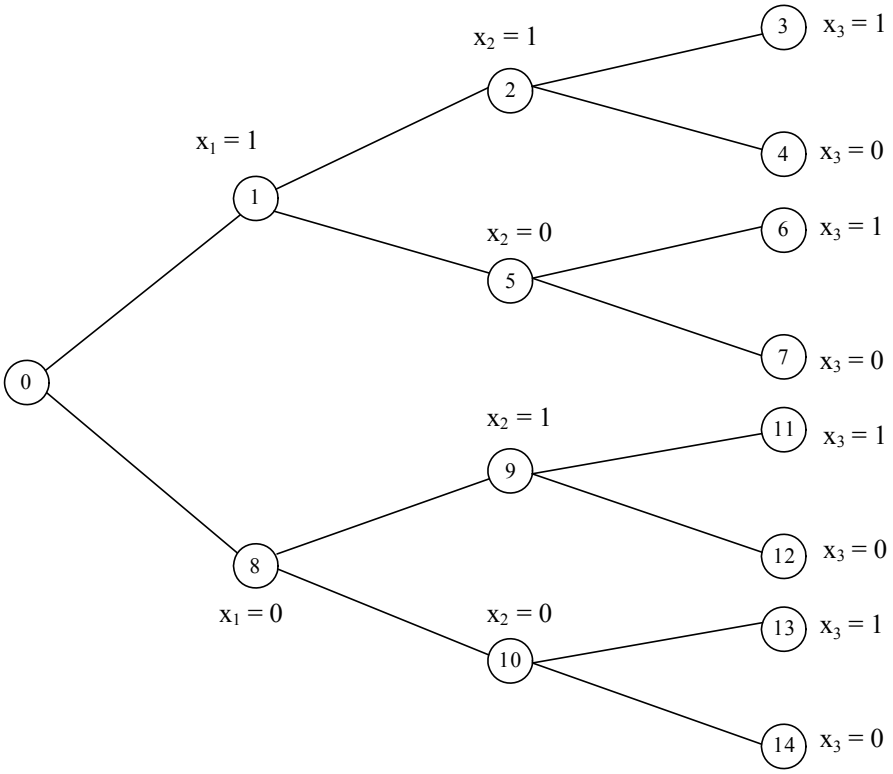
6.1.3 การใช้กรีดี้ในวิธีฮิวริสติกส์

การใช้กรีดี้สำหรับปัญหาอื่น ๆ เช่น ปัญหาถุงเป้ เป็นต้น สำหรับการบรรจุสินค้าลงกล่องเพื่อให้ได้ผลประโยชน์สูงสุด มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ ค่าสูงสุด $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ และข้อจำกัดคือ $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$, $x_j \in \{0, 1\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$ พิจารณาอัตราส่วนของผลประโยชน์กับน้ำหนัก $\left(c_j / a_j\right)$ ของแต่ละสินค้า j เราสามารถใช้อัตราส่วนมากสุดในการเลือกสินค้าบรรจุลงไปก่อนในการใช้กรีดี้อัลกอริทึม อย่างไรก็ตาม วิธี กรีดี้ ไม่ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดเสมอ แต่วิธีนี้ใช้หลักการง่าย ๆ ทำให้เราได้ผลเฉลยที่ดีพอสมควร โดยใช้เวลาในการประมวลผลไม่มากนัก

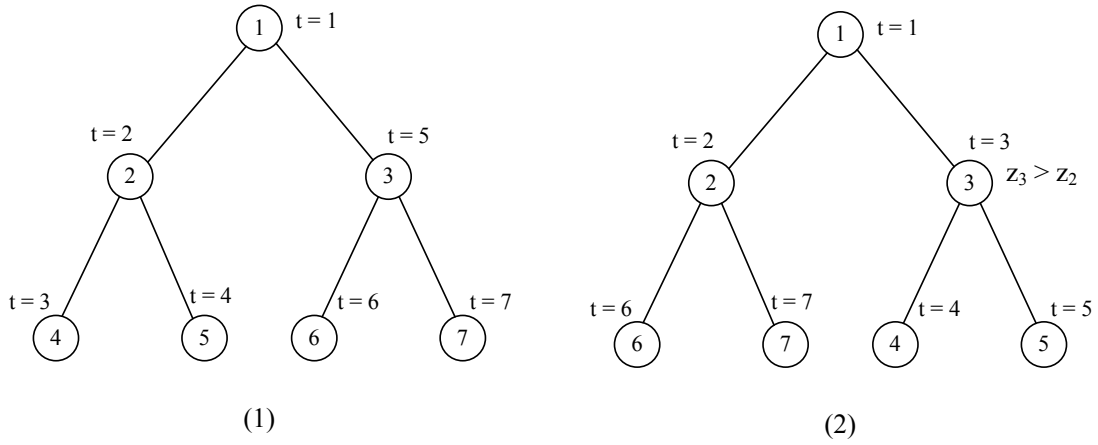
6.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีการแจงนับ

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม ที่มีตัวแปรทวิภาค n ตัวแปร เช่น ปัญหาถุงเป้ เป็นต้น ดังหัวข้อ 6.1.3 ถ้า $n = 3$ จำนวนผลเฉลยเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $2^3 = 8$ การค้นหาและตรวจสอบผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมด เพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจะเรียกว่า *การแจงนับทั้งหมด (Exhaustive enumeration)* รูปที่ 6.2 แสดงแผนภาพต้นไม้ในการค้นหาแบบทั้งหมดจะมีผลเฉลยทั้งสิ้น $2^3 = 8$ ผลเฉลย สำหรับผลเฉลยสุดท้ายที่มี $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ นั้น เป็นผลเฉลยที่ไม่มีการบรรทุกทั้งสามชนิด เนื่องจากมีข้อจำกัดด้านน้ำหนักสูงสุดเพียงอย่างเดียว และฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ ต้องการให้ได้ผลประโยชน์สูงสุด เราอาจไม่จำเป็นต้องพิจารณาผลเฉลยนี้ ดังนั้น จำนวนผลเฉลยที่ค้นหาเท่ากับ $2^3 - 1$

การดำเนินการตามโหนดต่าง ๆ ในกระบวนการแจงนับ (Enumeration) โดยทั่วไปนิยมใช้ 2 วิธีคือ *แตกกิ่งทางซ้ายก่อน (Left–first branching)* และ*แตกกิ่งเชิงกำหนด (Arbitrary branching)* รูปที่ 6.3 (1) แสดงการใช้กฎแตกกิ่งทางซ้ายก่อน เมื่อค้นหาไปถึงโหนด 3 แล้วจะมีการย้อนกลับมาที่โหนด 4 ขณะที่รูปที่ 6.3 (2) แสดงการใช้กฎแตกกิ่งเชิงกำหนด โดยเริ่มค้นหาโหนดในระดับเดียวกันทั้งหมดก่อน จากนั้นจึงหาในระดับถัดไปภายในระดับเดียวกัน เราอาจต้องหาเกณฑ์ในการเลือกว่าจะค้นหาที่โหนดใดก่อน เช่น ตัวอย่างปัญหาถุงเป้ อาจเลือกโหนดที่มีผลประโยชน์รวมสูงสุดก่อน เป็นต้น



รูปที่ 6.2 แผนภาพต้นไม้ที่มีตัวแปรทวิภาค 3 ตัวแปร



รูปที่ 6.3 แผนภาพต้นไม้แสดงกฎแตกกิ่งซ้าย (1) และแตกกิ่งเชิงกำหนด (2)

อัลกอริทึม สำหรับการแจงนับทั้งหมด เริ่มจากการกำหนดตัวแปรตัดสินใจว่ามีค่าเป็นไปได้อะไรบ้าง จากนั้นแตกกิ่งของตัวแปรเหล่านี้ เพื่อหาผลเฉลยทั้งหมด แล้วจึงค้นหาและตรวจสอบหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ให้ z_B เป็นค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ดีที่สุด ℓ เป็นดัชนีแทนระดับ j_ℓ เป็นดัชนีของตัวแปรปัจจุบันที่ระดับ ℓ n แทนจำนวนโหนดทั้งหมด x_B แทน

เวคเตอร์ของผลเฉลยเหมาะสมที่สุด x_k แทนเวคเตอร์ของผลเฉลยโหนดที่ k โดยขั้นตอนของวิธีการแจงนับทั้งหมด (Jensen, 2003) มีดังนี้

(1) ขั้นตอนเริ่มต้น สร้างโหนด 0 ให้ $k = 0$ และ $\ell = 0$ และ $j_o = 0$ ให้ $z_B = -M$ และ $P_0 = \{\ \}$

(2) ขั้นตอนการแตกกิ่ง ให้ $\ell = \ell + 1$ และ $k = k + 1$ และ $j_\ell = j_{\ell-1} + 1$ ให้ $P_k = P_{k-1}$ สร้างโหนด k ที่มีการตัดสินใจ j_ℓ เพิ่ม j_ℓ ในเซตของ P_k

(3) ขั้นตอนปรับปรุงค่า ถ้า $\ell < n$ ให้กลับไปขั้นตอน (2) มิฉะนั้น ให้ $\ell = n$ และสร้างผลเฉลย x_k จาก P_k ถ้า x_k เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ แล้วให้คำนวณหาค่า z_k ถ้า x_k เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ และ $z_k > z_B$ แล้วให้ $x_B = x_k$ และ $z_B = z_k$

(4) ขั้นตอนการย้อนกลับ ในเวคเตอร์ P_k เลือกหมายเลขโหนดทางซ้ายสุดที่ยังคงเชื่อมต่อกับโหนดที่ยังไม่ได้เปิด หรือโหนดที่ยังไม่ได้ขีดเส้นใต้ ถ้าทุกโหนดใน P_k ถูกขีดเส้นใต้หมดแล้ว หยุดการทำงาน และได้ x_B เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ถ้าบางโหนดใน P_k ยังไม่ได้ขีดเส้นใต้ ให้เลือก j_i และทำการย้อนกลับโดยให้ $\ell = i$ ลบทุกโหนดใน P_k ที่อยู่ทางขวาของ j_i ให้ $j_i = -j_i$ จากนั้นขีดเส้นใต้ j_i จะได้ P_{k+1} ให้ $k = k + 1$ และสร้างโหนด k กลับไปขั้นตอน (3)

ตัวอย่างที่ 6.1 ปัญหาถุงเป้ที่มีตัวแปรตัดสินใจ 3 ตัวแปรที่มีตัวแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ \leq \ 7 \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ในที่นี้ขออ้างอิงรูป 6.2 เพื่อสร้างผลเฉลยทั้งหมดโดยวิธีแจงนับ โดยโหนดที่มี $x_1 = 1$ มี $P_k = 1$ และ โหนดที่มี $x_1 = 0$ มี $P_k = -1$ ส่วนโหนดที่มี $x_2 = 1$ มี $P_k = 2$ และ โหนดที่มี $x_2 = 0$ มี $P_k = -2$ ในทำนองเดียวกัน โหนดที่มี $x_3 = 1$ มี $P_k = 3$ และ โหนดที่มี $x_3 = 0$ มี $P_k = -3$ โดยการแก้ปัญหาวิธีการแจงนับทั้งหมดแสดงขั้นตอนการทำงานดังตารางที่ 6.3

จากตารางที่ 6.3 พบว่า ต้องประมวลผลทั้งสิ้น 14 โหนด และผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,0)$ โดยที่ $z = 8$

ตารางที่ 6.3 ขั้นตอนการทำงานของวิธีการแจงนับ

โหนด	P_k	z_k	x_k	j_k	การดำเนินการ
0	ϕ	–	–	0	ค่า x_1
1	(1)	–	–	1	ค่า x_2
2	(1, 2)	–	–	2	ค่า x_3
3	(1, 2, 3)	–	(1, 1, 1)	3	ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
4	(1, 2, –3)	8	(1, 1, 0)	–3	มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
5	(1, –2)	–	–	–2	ค่า x_2
6	(1, –2, 3)	–	(1, 0, 1)	3	ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
7	(1, –2, –3)	3	(1, 0, 0)	–3	มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
8	(–1)	–	–	–1	ค่า x_1
9	(–1, 2)	–	–	2	ค่า x_2
10	(–1, 2, 3)	–	(0, 1, 1)	3	ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
11	(–1, 2, –3)	5	(0, 1, 0)	–3	มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
12	(–1, –2)	–	–	–2	ค่า x_2
13	(–1, –2, 3)	7	(0, 0, 1)	3	มีผลเฉลยที่เป็นไปได้
14	(–1, –2, –3)	0	(0, 0, 0)	–3	มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

6.3 วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

จากหัวข้อ 6.2 จะพบว่า การใช้วิธีการแจงนับนั้น ผลเฉลยเกือบทั้งหมดถูกค้นหาและตรวจสอบ หากปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มมีขนาดใหญ่ขึ้น การแก้ปัญหาโดยวิธีต้องค้นหาผลเฉลยจำนวนมาก ทำให้เวลาในการประมวลผลนานมาก ซึ่งอาจยอมรับไม่ได้ในทางปฏิบัติ *วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต (Branch and bound method)* เป็นวิธีที่พยายามลดจำนวนโหนดในการค้นหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ซึ่งการค้นหาผลเฉลยโดยวิธีนี้มีประสิทธิภาพมาก วิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ทั้งปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม และการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 8

ก่อนที่จะกล่าวถึง การแก้ปัญหาโดยวิธีนี้ ให้พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (IP) ปัญหาหนึ่ง ถ้ามีปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีข้อจำกัดเหมือนการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนี้ ยกเว้นผ่อนคลายข้อจำกัดให้ตัวแปรไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม เราจะเรียกตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ว่า *ปัญหาผ่อนคลายแบบการโปรแกรมเชิงเส้น(Linear*

programming relaxation) ในที่นี้จะขอเรียกสั้น ๆ ว่า *ปัญหาผ่อนคลาย* ถ้าผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP นี้ เป็นจำนวนเต็มแล้ว ผลเฉลยนี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ IP ด้วย แต่ถ้าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ LP นี้ ไม่เป็นจำนวนเต็มแล้ว ผลเฉลยของ IP จะมีคุณภาพด้อยกว่าผลเฉลยนี้ กล่าวคือ มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำกว่าในกรณีของปัญหาค่าสูงสุด หรือมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงกว่าในกรณีของปัญหาค่าต่ำสุด

แนวคิดพื้นฐานของวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต คือ จากปัญหาเริ่มต้นที่มีขนาดใหญ่ มีผลเฉลยที่เป็นไปได้จำนวนมาก ทำให้ยากแก่การแก้ปัญหา จะถูกแบ่งเป็นปัญหาย่อยลงไปเรื่อยๆ จนกระทั่งปัญหาย่อยจะสามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดได้ ซึ่งการแบ่งนี้จะเรียกว่า การแตกกิ่ง (Branching) จะทำเพื่อแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย คำถามถัดมาคือ จะแตกปัญหาย่อยนี้ออกเป็นปัญหาย่อยอีกต่อไปอีก หรือควรหยุดการแตกกิ่ง การหยุดการแตกกิ่งปัญหาย่อยนี้ ซึ่งประกอบด้วยหลัก 2 ประการ (1) การกำหนดขอบเขต (Bound) ของผลเฉลยที่ดีที่สุดในขณะที่ดำเนินการอยู่โดยไม่จำเป็นต้องแตกเป็นปัญหาย่อย และ (2) การขจัดปัญหาย่อยที่มีเซตของผลเฉลยที่ไม่มีโอกาสที่จะมีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาเริ่มต้น ซึ่งจะเรียกว่า *การถ่วง (Fathoming)*

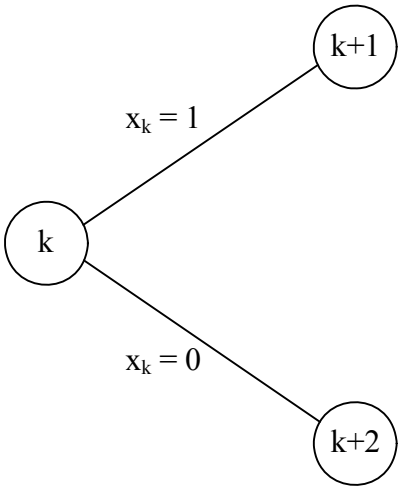
ดังนั้น ขั้นตอนพื้นฐานของวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต คือ การแตกกิ่ง การกำหนดขอบเขต และการถ่วง

6.3.1 การแตกกิ่ง

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มแบบทวิภาคที่มีข้อจำกัดของตัวแปรตัดสินใจ $x_j \in \{0, 1\}$ โดย $j = 1, 2, \ldots, n$ เมื่อนำปัญหานี้มาพิจารณาโดยไม่คำนึงถึงข้อจำกัด $x_j \in \{0, 1\}$ และให้ $0 \le x_j \le 1$ ทำให้ปัญหานี้กลายเป็นปัญหาผ่อนคลายแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ถ้าผลเฉลยจากการแก้ปัญหานี้มีตัวแปรบางตัว (x_k) มีค่าเป็นเศษส่วน ทำให้ผลเฉลยนี้ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม ดังนั้น เราจะแตกปัญหาผ่อนคลายนี้ออกเป็นปัญหาย่อย 2 ปัญหา โดยการเพิ่มข้อจำกัดให้กับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเดิม

$$x_k = 1 \text{ และ } x_k = 0$$

การแตกปัญหาข้างต้นให้เป็นปัญหาย่อย เรียกว่า การแตกกิ่ง เนื่องจาก x_k เป็นตัวแปรทวิภาคซึ่งมีค่าได้เพียง 1 หรือ 0 เท่านั้น รูปที่ 6.4 แผนภาพต้นไม้ แสดงปัญหาย่อยที่โหนด k ที่แตกกิ่งออกเป็นโหนด $k + 1$ และ $k + 2$ โดยมีข้อจำกัด $x_k = 0$ และ $x_k = 1$ ตามลำดับ จากนั้นทำการประมวลผล



รูปที่ 6.4 การแตกกิ่งโหนด k

จากนั้นทำการประมวลผลปัญหาย่อยที่เกิดขึ้นไปเรื่อย ๆ ถ้าผลเฉลยของปัญหาย่อยยังมีบางตัวแปรที่มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม แล้วให้เลือกตัวแปรเหล่านั้น 1 ตัวมาสร้างข้อจำกัดและแตกเป็นปัญหาย่อยต่อไป จนกระทั่งการประมวลผลของปัญหาย่อยใดปัญหาหนึ่งได้ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยนี้จะกลายเป็น *ผลเฉลยน่าจะได้รับคัดเลือก (Candidate solution)* เพื่อเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดที่ค้นพบขณะนั้นจะเรียกว่า *อินคัมเบนท์ (Incumbent)* วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตจะบันทึกค่าผลเฉลยที่น่าจะได้รับคัดเลือก พร้อมกับค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของผลเฉลยนี้

การแตกกิ่งของปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยนั้น จะแตกกิ่งอย่างไร และจำนวนกิ่งที่แตกออกจากแต่ละโหนดจะมีจำนวนเท่าใดนั้น มีความแตกต่างกันไปตามลักษณะของปัญหา เช่น ปัญหาถุงเป้ที่มีตัวแปรตัดสินใจเป็นแบบทวิภาค การแตกกิ่งออกจากโหนดจะแตกเป็น 2 กิ่ง คือ กำหนดให้ตัวแปรมีค่าเป็น 0 และเป็น 1 ขณะที่ปัญหาการจัดลำดับงาน n งานบนเครื่องจักรที่มีตัวแปรแบบทวิภาคเช่นเดียวกัน (ดูตัวอย่างที่ 6.5) จะแตกกิ่งออกจากโหนดเป็นจำนวน n กิ่ง เป็นต้น

โดยทั่วไปในการเลือกว่าปัญหาย่อยใด ควรแก้ปัญหาถัดไปนั้น มีกฎที่นำมาใช้ 2 วิธีคือ เข้าหลัง–ออกก่อน (Last–In–First–Out, LIFO) ซึ่งจะเลือกแก้ปัญหาย่อยที่สร้างขึ้นหลังสุดก่อน วิธีเข้าหลัง–ออกก่อนทำให้การแก้ปัญหาย่อยจะลงมาในแนวดิ่งข้างหนึ่งของแผนภาพต้นไม้ จากนั้นจึงกลับมาแก้ปัญหาย่อยอีกข้างหนึ่งในระดับบนสุด ดังตัวอย่างที่ 6.1 ส่วนวิธีที่สองเรียกว่า วิธีขอบเขตดีสุด (Best bound) เมื่อมีการแตกกิ่งที่ปัญหาย่อยหนึ่ง เราจะแก้ปัญหาย่อยทั้งหมดที่แตกออกมาจากปัญหาย่อยนั้น จากนั้นจะแตกกิ่งออกไปอีกครั้งโดยเลือกปัญหาย่อยที่ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีที่สุด กล่าวคือ ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุดสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด หรือค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุดสำหรับปัญหาค่าสูงสุด วิธีขอบเขตดีสุดอาจจะมีการกระโดดข้ามจากข้างหนึ่งของแผนภาพต้นไม้ไปยังอีกข้างหนึ่ง วิธีนี้มักจะมีจำนวนปัญหาย่อย และต้องใช้

หน่วยความจำในการเก็บค่าต่าง ๆ ของปัญหาย่อยมากกว่าวิธีเข้าหลัง–ออกก่อน แนวคิดวิธีขอบเขตดีสุดนั้นจะเคลื่อนไปยังปัญหาย่อยที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีกว่า ซึ่งควรจะทำให้ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดโดยเร็วขึ้น ตัวอย่างการแตกกิ่งด้วยวิธีขอบเขตดีสุด แสดงในตัวอย่างที่ 6.5

6.3.2 การจำกัดขอบเขต

ในแต่ละปัญหาย่อย เราจำเป็นต้องทราบข้อมูลว่าผลเฉลยที่ดีที่สุดในขณะนี้มีค่าเท่าใด เพื่อลดการประมวลผลสำหรับปัญหาย่อยบางปัญหาที่มีผลเฉลย ไม่ดีกว่าผลเฉลยที่ค้นพบในขณะนี้ ซึ่งผลเฉลยที่ดีที่สุดที่ค้นพบเรียกว่า *อินคัมเบนท์ (Incumbent)* ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของอินคัมเบนท์ จะเรียกว่า *ขอบเขตล่าง (Lower bound)* สำหรับปัญหาค่าสูงสุด หรือ *ขอบเขตบน (Upper bound)* สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด การจำกัดขอบเขตเป็นขั้นตอนในการตรวจสอบปัญหาที่โหนดใด ๆ และพยายามสร้างขอบเขตของผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ซึ่งแสดงด้วยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ผลลัพธ์ของขั้นตอนการกำจัดขอบเขต สามารถระบุได้ว่า ปัญหา ณ โหนด k ใด ๆ คาดว่าจะมีผลเฉลยที่ดีกว่า อินคัมเบนท์ โดยการเปรียบเทียบค่าขอบเขตล่าง ในกรณีปัญหาค่าสูงสุด หรือค่าขอบเขตบนในกรณีปัญหาค่าต่ำสุด กับค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของผลเฉลยที่โหนด k หากค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของโหนด k ดีกว่าค่าขอบเขต จะมีการปรับปรุงค่าอินคัมเบนท์และค่าขอบเขต เพื่อใช้ในการค้นหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดตามกิ่งต่าง ๆ ต่อไป

6.3.3 การถ่วง

กำหนดให้ IP_k แทนปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่โหนด k LP_k แทนปัญหาผ่อนคลายของ IP_k ให้ z_B แทนค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของอินคัมเบนท์ และ z_k แทนค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาผ่อนคลายที่โหนด k สำหรับปัญหาค่าสูงสุดของการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม ที่นำมาแก้ปัญหาโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้นแบบผ่อนคลาย หนึ่งในสี่ทางเลือกจะเกิดเสมอ ณ โหนด k ใด ๆ

1. LP_k มีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ ในกรณีนี้จะแสดงว่าไม่มีผลเฉลยของ IP ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่โหนด k

2. LP_k เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด แต่ $z_k \le z_B$ แสดงว่าผลเฉลยของ IP_k จะมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ไม่เกินค่า z_B ดังนั้น ผลเฉลยของ IP_k จะไม่ดีกว่าอินคัมเบนท์

3. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ LP_k เป็นจำนวนเต็ม และให้ค่า $z_k > z_B$ ในกรณีนี้แสดงว่าผลเฉลยใหม่นี้ดีกว่าอินคัมเบนท์

4. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ LP_k ไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ $z_k > z_B$ ในกรณีนี้แสดงว่ามีความเป็นไปได้ที่ผลเฉลยของ IP_k มีค่าดีกว่าอินคัมเบนท์

จากกรณีทั้ง 4 ข้างต้นนี้ จะพบว่าในกรณี 1 ปัญหาย่อยในโหนดที่ k ไม่ควรแตกเป็นปัญหาย่อยลงไปอีก เพราะจะไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้อยู่ ดังนั้น โหนด k ถูกถ่วงเนื่องจากความเป็นไปไม่ได้ (Fathomed by infeasibility) ส่วนกรณี 2 ปัญหา LP_k มีผลเฉลยที่มี z_k น้อยกว่า z_B การแตกปัญหาของโหนด k ออกไปเป็นปัญหาย่อย ปัญหาย่อยเหล่านี้จะมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ไม่มากกว่า z_k ดังนั้น จึงไม่มีประโยชน์ที่จะแตกกิ่งออกจากโหนด k ดังนั้น โหนด k จึงเป็นถูกถ่วงเนื่องจากขอบเขต (Fathomed by bounds) กรณี 3 โหนด k จะไม่แตกกิ่งเช่นเดียวกัน เนื่องจากการแตกออกเป็นปัญหาย่อยลงอีก ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาย่อยจะมีค่าไม่มากกว่า z_k กรณีนี้โหนด k จะเป็นจุดสุดเขตเนื่องจากขอบเขตเช่นเดียวกัน สำหรับกรณี 4 เซตของผลเฉลยสำหรับปัญหาที่โหนด k อาจบรรลุผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา IP เริ่มต้น ดังนั้น ปัญหาที่โหนด k ควรมีการแตกกิ่งออกไปเป็นปัญหาย่อยต่อไป

6.3.4 ขั้นตอนของวิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ดังที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปขั้นตอนวิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตมีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การถ่วงและจำกัดขอบเขต เลือกปัญหาย่อยซึ่งเป็นปัญหาผ่อนคลาย (LP_k) เพื่อตรวจสอบโดยแก้ปัญหานี้ด้วยวิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ปัญหาผ่อนคลายในโหนดนี้จะถูกถ่วงเมื่อเกิดสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่งต่อไปนี้

(1) ปัญหาย่อยนั้นมีคำตอบที่เป็นไปไม่ได้
(2) ปัญหาย่อยนั้นให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด และผลเฉลยนั้นมีตัวแปรตัดสินใจทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม
(3) ปัญหาย่อยนั้นให้ผลเฉลยที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ไม่ดีกว่าค่าขอบเขต เช่น ปัญหาค่าสูงสุด ถ้าปัญหาย่อยนั้นมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำกว่า ค่าขอบเขตล่าง (Lower bound) เป็นต้น

ในสถานการณ์ (2) ถ้า LP_k นี้ถูกถ่วงและได้ผลเฉลยที่ดีกว่าค่าขอบเขตแล้วจะปรับปรุง (Update) ค่าขอบเขต ถ้าทุกปัญหาผ่อนคลายถูกถ่วงแล้วให้หยุดการประมวลผล ถ้าปัญหาผ่อนคลายของปัญหาย่อย k (LP_k)ไม่ถูกถ่วงแล้วกลับไปขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 การแตกกิ่ง สำหรับโหนดของปัญหา LP_k เลือก x_j ซึ่งตัวแปรตัดสินใจ 1 ตัวที่ยังมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็มแต่ปัญหา IP มีเงื่อนไขว่าต้องเป็นจำนวนเต็ม แตกปัญหา LP_k เป็นสองปัญหาย่อยแต่แล้วเพิ่มเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในปัญหาย่อย เงื่อนไขคือ

(1) $x_j \le \lceil x_j \rceil$ โดยที่ $\lceil x_j \rceil$ เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดแต่มีค่าน้อยกว่า x_j

(2) $x_j \ge \lceil x_j \rceil + 1$

จากนั้นกลับไปขั้นตอนที่ 1 เพื่อพิจารณาว่าปัญหาย่อยนี้ควรจะถูกถ่วงและจำกัดขอบเขตหรือไม่

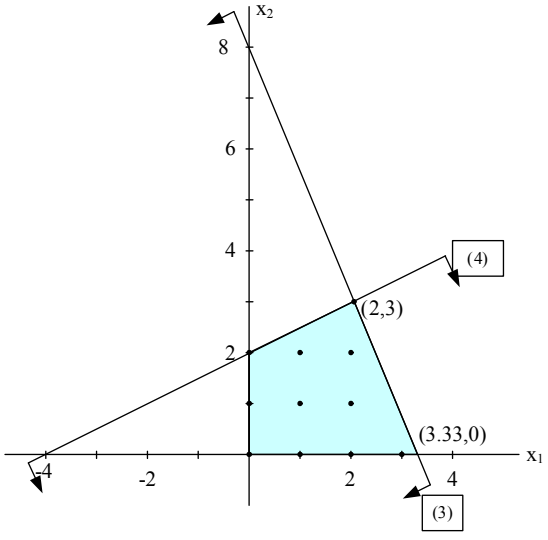
ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหานี้ โดยวิธีแตกสาขาและจำกัดขอบเขต

$$\begin{aligned} &\text{ค่าสูงสุด} && 22x_1 + 8x_2 \\ &\text{ข้อจำกัด} && 5x_1 + 2x_2 \le 16 \\ & && -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & && x_1, x_2 \ge 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned} \qquad (3)$$

จากปัญหานี้สามารถเขียนเป็นปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผ่อนคลาย ซึ่งในที่นี้จะเรียกปัญหานี้ว่า LP1

$$\begin{aligned} &\text{ค่าสูงสุด} && z = 22x_1 + 8x_2 \\ & && 5x_1 + 2x_2 \le 16 \\ & && -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & && x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

จากปัญหา LP1 ซึ่งมีพื้นที่เป็นไปได้ ดังรูป 6.5 มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ



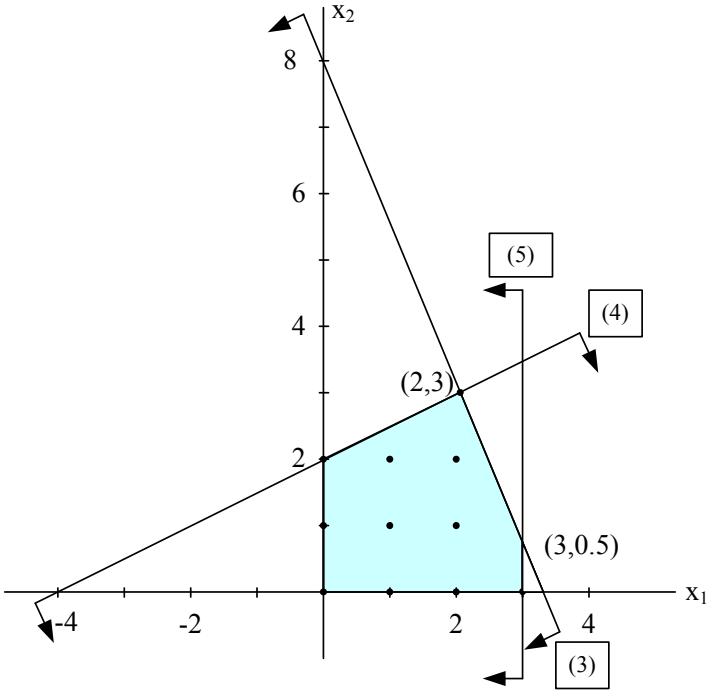
รูปที่ 6.5 พื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาย่อย 1

ผลเฉลยที่ได้คือ $x_1 = 3.33$ $x_2 = 0$ $z = 70.40$ เนื่องจากผลเฉลยนี้มี x_1 ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น จึงมีการแตกปัญหา LP1 เป็นปัญหาย่อย 2 ปัญหาคือ LP2 และ LP3 โดยปัญหา LP2 เกิดจากปัญหา LP1 โดยเพิ่มข้อจำกัด $x_1 \leq 3$ ส่วนปัญหา LP3 เกิดจากปัญหา LP1 โดยเพิ่มข้อจำกัด $x_1 \geq 4$

LP2 คือ LP1 + ข้อจำกัด $x_1 \leq 3$ (5)

LP3 คือ LP1 + ข้อจำกัด $x_1 \geq 4$ (6)

เมื่อประมวลผล LP2 มีพื้นที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 6.6 และผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 3$ $x_2 = 0.5$ โดย $z = 70$ ซึ่งจะพบว่า ปัญหาย่อยนี้มียังไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น จึงต้องมีแตกปัญหา LP2 เป็น LP4 และ LP5



รูปที่ 6.6 พื้นที่เป็นไปได้ของ LP2

LP4 คือ LP2 + ข้อจำกัด $x_2 \leq 0$ (7)

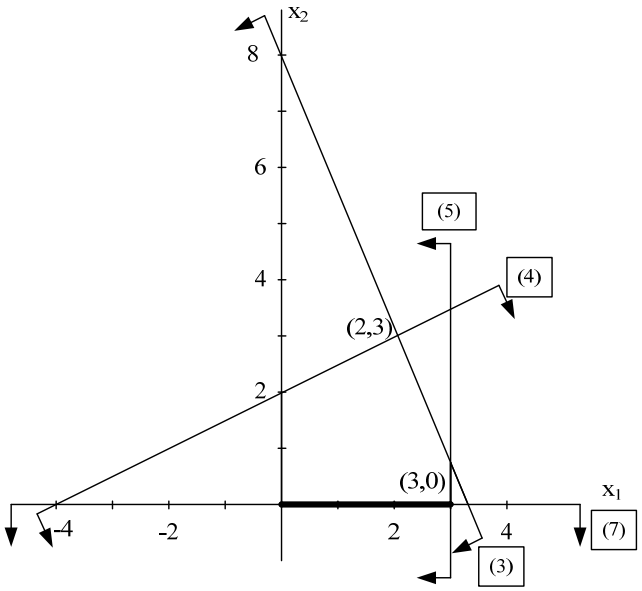
LP5 คือ LP2 + ข้อจำกัด $x_2 \geq 1$ (8)

เมื่อประมวลผล LP4 มีพื้นที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 6.7 ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 3$ $x_2 = 0$ โดย $z = 66$ ซึ่งพบว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเป็นไปได้สำหรับการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม ดังนั้น LP4 ไม่ต้องแตกเป็นปัญหาย่อย และกำหนดให้ขอบเขตล่าง (LB) มีค่าเท่ากับ 66 พิจารณา LP5 ซึ่งมีพื้นที่เป็นไปได้ดังรูป 6.8 ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 2.8$ $x_2 = 1$

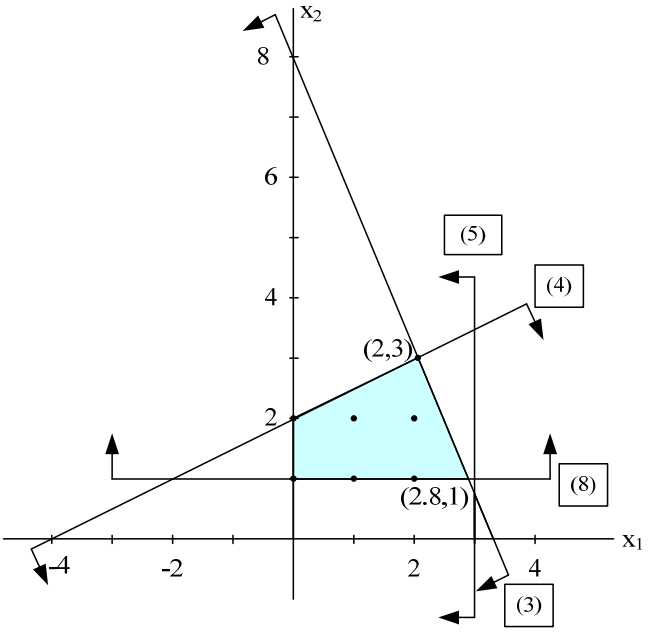
โดยที่ z = 69.60 เนื่องจากผลเฉลยนี้ยังไม่เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม จึงต้องแตกปัญหา LP5 เป็นปัญหาย่อย คือ

LP6 คือ LP5 + ข้อจำกัด $x_1 \leq 2$ (9)

LP7 คือ LP5 + ข้อจำกัด $x_1 \geq 3$ (10)

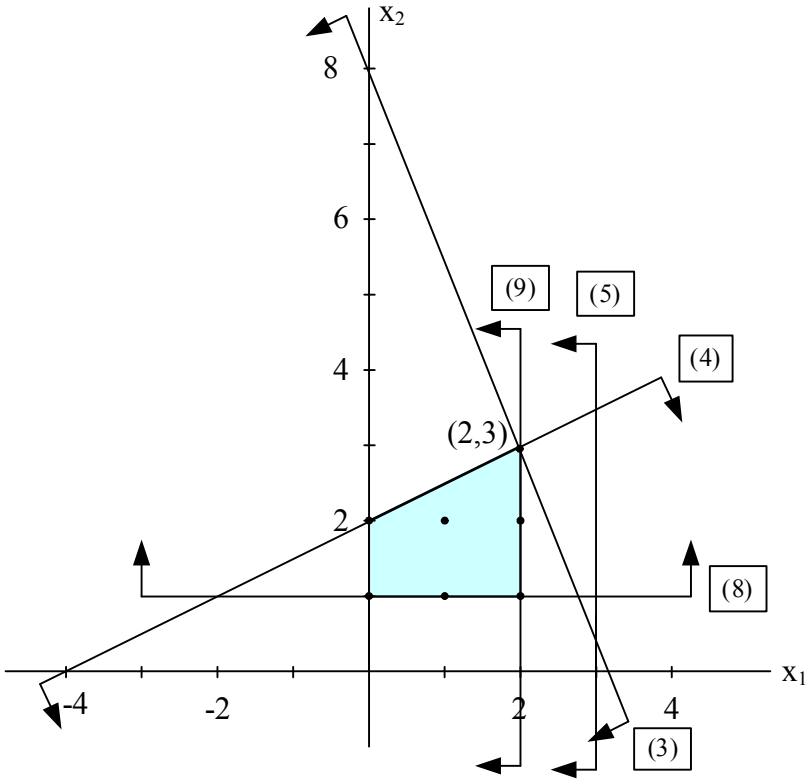


รูปที่ 6.7 พื้นที่เป็นไปได้ของ LP4



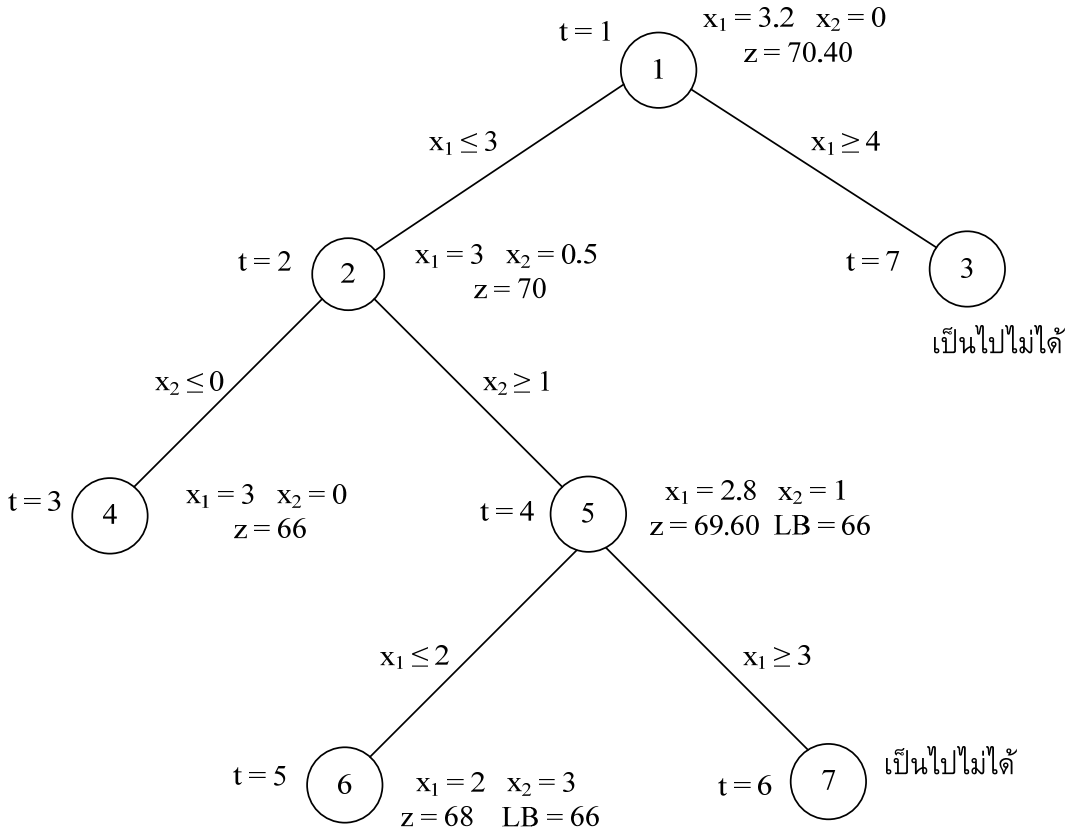
รูปที่ 6.8 พื้นที่เป็นไปได้ของ LP5

พิจารณา LP6 ที่มีพื้นที่เป็นไปได้ดังรูปที่ 6.9 และมีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ โดยที่ $z = 68$ เนื่องจากผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม จึงทำให้ไม่ต้องแตกปัญหานี้ และค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้มีค่าสูงกว่าขอบเขตล่าง (LB) จึงปรับปรุงค่าของขอบเขตล่าง (LB) เป็น 68



รูปที่ 6.9 พื้นที่เป็นไปได้ของ LP6

พิจารณา LP7 ไม่มีพื้นที่เป็นไปได้ จึงไม่แตกปัญหานี้ออกเป็นปัญหาย่อย เมื่อพิจารณาย้อนกลับมาที่ LP3 จะพบว่าปัญหาย่อยนี้ไม่มีพื้นที่เป็นไปได้เช่นเดียวกัน ดังนั้น จึงไม่แตกปัญหานี้เช่นกัน ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ โดยที่ $z = 68$ จากการแตกปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยและใช้หลักการจำกัดขอบเขตนั้นสามารถแสดงปัญหาย่อยต่าง ๆ โดยใช้แผนภาพต้นไม้ ดังรูปที่ 6.10 โดย t แทนลำดับการแก้ปัญหาย่อย และหมายเลขของโหนดแทนปัญหาย่อย LP ที่ i โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, 7$



รูปที่ 6.10 แผนภาพแสดงการแก้ปัญหา

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม โดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ค่าสูงสุด $z = 28x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 22x_4 + 8x_5 + 13x_6 + 35x_7 + 18x_8$

ข้อจำกัด $10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 12x_7 + 6x_8 \le 30$

$x_j \in \{0, 1\}$ $j = 1, 2, \ldots, 8$

จากปัญหานี้ สามารถเขียนเป็นปัญหาผ่อนคลายเป็นปัญหา LP1 ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 28x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 22x_4 + 8x_5 + 13x_6 + 35x_7 + 18x_8$

ข้อจำกัด $10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 12x_7 + 6x_8 \le 30$

$x_j \ge 0$ $j = 1, 2, \ldots, 8$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ $x_3 = 0.43$ $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ โดย $z = 89.57$ เนื่องจาก x_3 มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงแตกปัญหา LP1 เป็น LP2 และ LP3 ดังแสดงใน (11) และ (12)

LP2 คือ LP1 + ข้อจำกัด $x_3 = 0$ (11)

LP3 คือ LP1 + ข้อจำกัด $x_3 = 1$ (12)

เมื่อเลือกประมวลผล LP2 พบว่า ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ $x_1 = 0.3$ และ $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ โดยที่ $z = 89.40$ จะพบว่า x_1 ยังไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงต้องแตกปัญหา LP2 ออกเป็น LP4 และ LP5

LP4 คือ LP2 + ข้อจำกัด $x_1 = 0$ (13)

LP5 คือ LP2 + ข้อจำกัด $x_1 = 1$ (14)

เลือกประมวลผล LP4 ก่อน พบว่า ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ $x_1 = x_3 = 0$ และ $x_4 = 0.38$ โดยที่ $z = 89.25$ เมื่อ x_4 ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงต้องแตกปัญหาย่อย LP4 เป็น LP6 และ LP7

LP6 คือ LP4 + ข้อจำกัด $x_4 = 0$ (15)

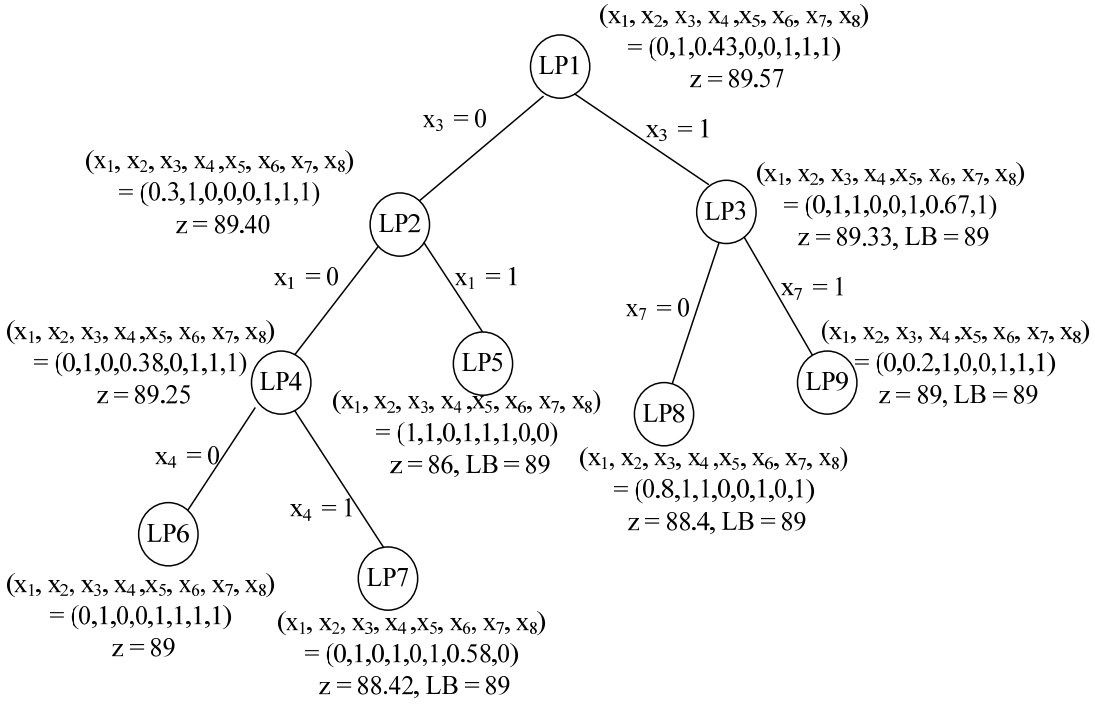
LP7 คือ LP4 + ข้อจำกัด $x_4 = 1$ (16)

เลือกประมวลผล LP6 และได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ และ $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ โดยที่ $z = 89$ จะเห็นว่า ผลเฉลยของปัญหาย่อยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม (17) จึงถือได้ว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลย และค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นค่าของขอบเขตล่าง (LB) เท่ากับ 89 เลือกประมวลผลปัญหาย่อยที่เหลืออยู่โดยเริ่มจาก LP7 พบว่า ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 1$ $x_7 = 0.58$ และ $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ โดยที่ $z = 88.42$ เนื่องจากว่า z นี้มีค่าต่ำกว่า LB จึงไม่ควรแตก LP7 ออกเป็นปัญหาย่อยอีกต่อไป พิจารณา LP5 พบว่า ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_3 = x_7 = x_8 = 0$ และ $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$ โดยที่ $z = 86$ ซึ่ง z มีค่าน้อยกว่า LB จึงหยุดการแตกปัญหานี้ ในทำนองเดียวกับ LP3 ที่มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_3 = x_6 = x_8 = 1$ $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ และ $x_7 = 0.67$ โดยที่ $z = 89.33$ จึงแตกปัญหานี้เป็นปัญหาย่อย LP8 และ LP9 ดังแสดงใน (17) และ (18)

LP8 คือ LP3 + ข้อจำกัด $x_7 = 0$ (17)

LP9 คือ LP3 + ข้อจำกัด $x_7 = 1$ (18)

ปัญหาย่อย LP8 มีผลเฉลยคือ $x_2 = x_3 = x_6 = x_8 = 1$ $x_4 = x_5 = x_7 = 0$ และ $x_1 = 0.8$ โดย $z = 88.40$ สำหรับLP9 มีผลเฉลยคือ $x_3 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ $x_2 = 0.20$ และ $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ โดย $z = 89$ จะเห็นว่า ผลเฉลยจากปัญหาย่อยทั้งสองนี้ยังเป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นข้างต้น แต่ค่า z น้อยกว่า LB ทำให้เราไม่ควรแตกปัญหาย่อยทั้งสองนี้ ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 1$ $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ โดยที่ $z = 89$ แผนภาพต้นไม้แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาที่แสดงในรูปที่ 6.11



รูปที่ 6.11 ขั้นตอนการแก้ปัญหา

<u>หมายเหตุ</u> ตัวอย่างที่ 6.3 นี้เป็นการใช้วิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตเพื่อแก้ปัญหาถุงเป้ ในกรณีที่มีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1 ตัวแปรมีค่าเป็นเศษส่วน Winston (2003) ได้เสนอเกณฑ์ในการเลือกว่าควรแตกกิ่งตัวแปรใดก่อน โดยให้พิจารณาอัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์(c_j) กับค่าสัมประสิทธิ์ในข้อจำกัด(a_j) ในการแตกกิ่งนั้น Winston เสนอให้เลือกตัวแปรที่มีอัตราส่วนสูงสุด

ตัวอย่างที่ 6.4 จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มนี้ โดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + \frac{9}{2}x_2 + 7x_3 + \frac{7}{2}x_4$

ข้อจำกัด $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6$

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 8$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

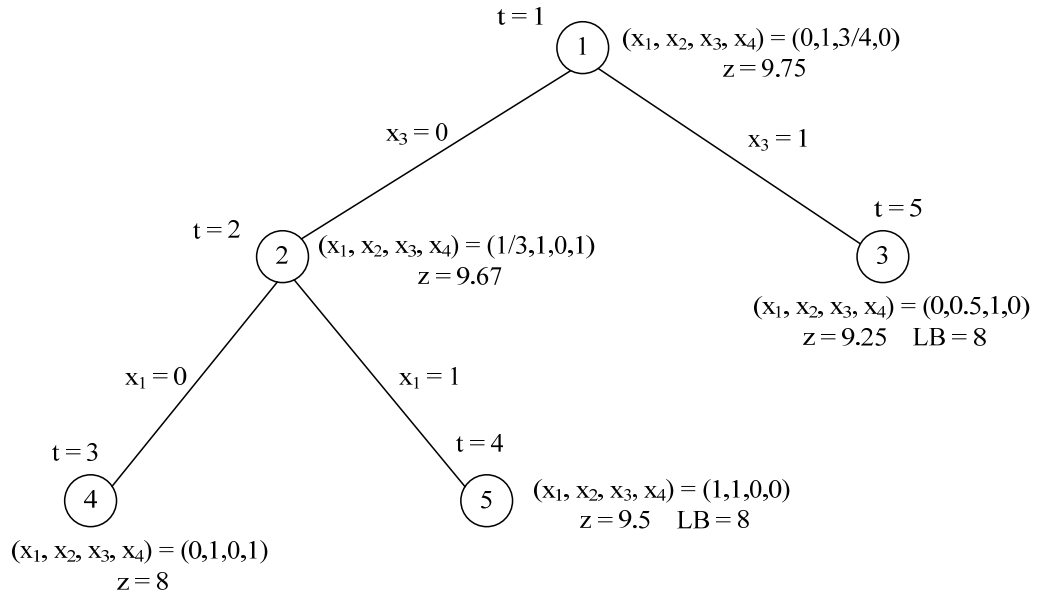
ผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนี้ (LP1) คือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 3/4, 0)$ โดย $z = 9.75$ เนื่องจาก x_3 ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงต้องแตกออกเป็นปัญหาย่อย LP2 และ LP3

LP2 คือ LP1 + $x_3 = 0$
LP3 คือ LP1 + $x_3 = 1$

ผลเฉลยของ LP2 คือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/3, 1, 0, 1)$ โดย $z = 9.67$ เมื่อแตกปัญหา LP2 เป็น LP4 และ LP5 จะได้

LP4 คือ LP2 + $x_1 = 0$
LP5 คือ LP2 + $x_1 = 1$

ผลเฉลยของ LP4 คือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1)$ โดย $z = 8$ จะพบว่าตัวแปรทุกตัวมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ผลเฉลยนี้จึงเป็นอินคัมเบนท์ที่มี LB = 8 จากนั้นจึงประมวลผล LP5 ได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ โดย $z = 9.5$ ผลเฉลยนี้ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงกว่า LB และตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม จึงต้องปรับปรุงให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด LP5 เป็นอินคัมเบนท์ และ LB = 9.5 โหนดของปัญหา LP4 และ LP5 จึงถือว่าถูกถ่วง พิจารณาโหนดที่ยังมิได้ประมวลผลคือ LP3 จึงทำการประมวลผลปัญหานี้ได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0.5, 1, 0)$ โดย $z = 9.25$ เนื่องจาก z มีค่าน้อยกว่า LB จึงไม่แตกปัญหา LP3 หรือกล่าวได้ว่า โหนดของ LP3 นั้นเป็นจุดสุดเขตเนื่องจากขอบเขต ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = x_2 = 1$ $x_3 = x_4 = 0$ โดย $z = 9.5$ โดยรูปที่ 6.12 แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต ซึ่ง t แทนหมายเลขของโหนดที่ถูกดำเนินการตามลำดับ



รูปที่ 6.12 การแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตปัญหา

ตัวอย่างที่ 6.5 พิจารณาปัญหาการจัดลำดับงาน 5 งาน บนเครื่องจักร 1 เครื่อง เพื่อให้เวลาเสร็จงานล่าช้า (Job tardiness) มีค่าน้อยที่สุด โดยมีข้อมูลดังตารางที่ 6.4 สมมติว่าเวลาในการผลิตของงานแต่ละงานเป็นอิสระจากลำดับงานก่อน–หลังบนเครื่องจักร (Sequence independent)

ตารางที่ 6.4 เวลาในการผลิตของงานและกำหนดส่ง

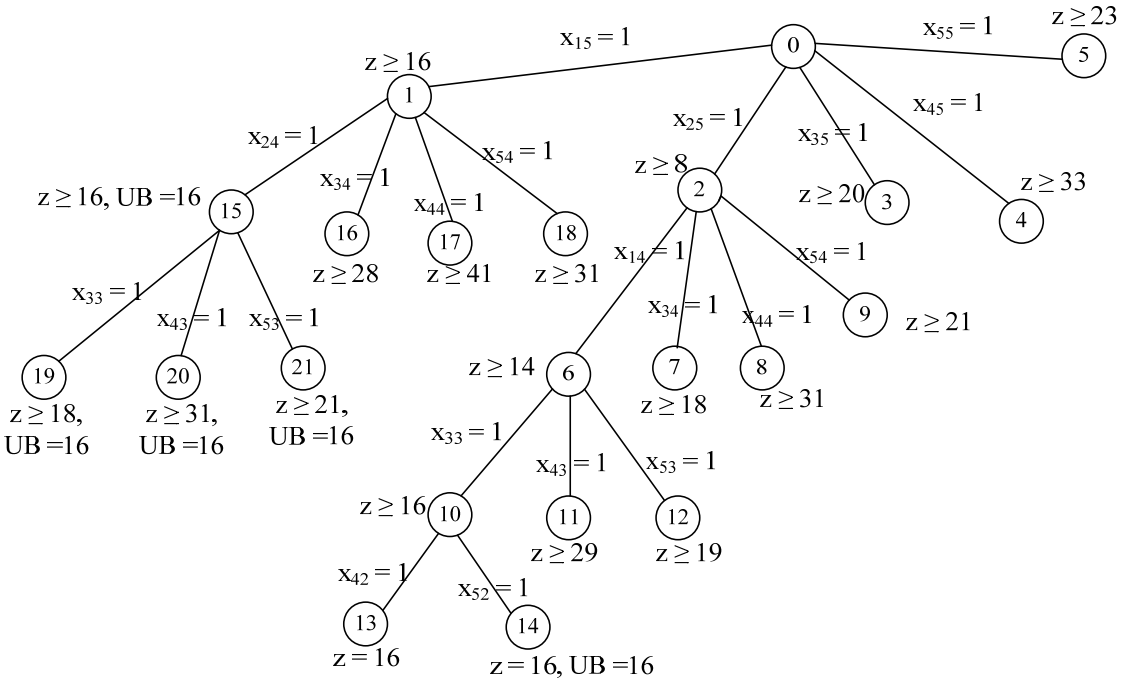
งานที่	เวลาในการผลิต (วัน)	กำหนดส่ง (วัน)
1	8	32
2	10	40
3	15	28
4	12	20
5	16	30

ให้ x_{ij} เมื่องานที่ i จัดอยู่ในลำดับที่ j $i = 1, 2, \ldots, 5$ $j = 1, 2, \ldots, 5$

เริ่มพิจารณาจากลำดับที่ 5 ก่อน เช่น โหนดที่ 1 มี $x_{15} = 1$ แสดงว่างาน 1 อยู่ในลำดับที่ 5 ส่วนงานอื่น ๆ อยู่ในลำดับที่ 1 ถึง 4 เมื่อพิจารณาความล่าช้าอันเนื่องมาจากงาน 1 อยู่ในลำดับที่ 5 เพียงงานเดียวพบว่า งาน 1 จะมีเวลาแล้วเสร็จ (Completion time) เท่ากับ 10+15+9+6+8 = 32 โดยมีกำหนดส่ง เท่ากับ 48 วัน ดังนั้น เวลาเสร็จงานล่าช้าของงาน 5 เท่ากับ 48-32 = 16 วัน จะกล่าวได้ สำหรับการจัดลำดับงานที่กำหนดให้งาน 1 อยู่ในลำดับที่ 5 นั้นผลรวมของเวลาเสร็จงานล่าช้าของงานทั้งหมด จะมากกว่าหรือเท่ากับ 16 ดังนั้น ทำให้ค่า $z \geq 16$ สำหรับโหนดอื่น ๆ จะพิจารณาในทำนองเดียวกัน การใช้วิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตสามารถแสดงดังรูปที่ 6.13

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด คือ $x_{51} = x_{42} = x_{33} = x_{14} = x_{25} = 1$ โดย $z = 16$ นั่นคือลำดับของงาน คือ 5-4-3-1-2

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 6.5 แสดงถึงการใช้วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตกับปัญหาการหาค่าเหมาะสมมที่สุดเชิงการจัด (Combinatorial Optimization) ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตสามารถนำมาใช้กับการแจงนับโดยปริยาย (Implicit enumeration) ของปัญหาการหาค่าเหมาะสมมที่สุดเชิงการจัดที่มีจำนวนทางเลือกจำนวนมาก



รูปที่ 6.13 แผนภาพการแตกกิ่งของปัญหาการจัดลำดับงาน

6.4 การหาผลเฉลยสำหรับการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค

สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มแบบทวิภาค (Binary integer programming) เป็นการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่มีตัวแปรตัดสินใจทุกตัวมีค่าเพียง 2 ค่า คือ 0 หรือ 1 เท่านั้น ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาคนี้ สามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตดังแสดงในหัวข้อ 6.3 เนื่องจากปัญหานี้มีตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าเพียง 0 หรือ 1 จึงทำให้เราสามารถใช้วิธีการแจงนับโดยปริยาย (Implicit enumeration) เข้ามาช่วยหาผลเฉลยในวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต โดยพิจารณาค่าความเป็นไปได้ของการกำหนดค่าของตัวแปรตัดสินใจว่าควรมีค่าเป็น 0 หรือ 1 โดยไม่จำเป็นต้องใช้วิธีซิมเพล็กซ์

การแก้ปัญหานี้เริ่มจากทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ กล่าวคือ สำหรับปัญหาค่าสูงสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจตัวหนึ่งในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว การเพิ่มค่าของตัวแปรตัดสินใจนี้จากค่า 0 เป็น 1 จะทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ลดลง ดังนั้น ตัวแปรตัดสินใจนี้จึงควรมีค่าเท่ากับ 0 ในทางตรงกันข้าม สำหรับปัญหาค่าต่ำสุด ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจตัวหนึ่งในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แล้วการเพิ่มค่าของตัวแปรตัดสินใจนี้ จากค่า 0 เป็น 1 จะทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพิ่มขึ้น ดังนั้น ตัวแปรดังกล่าวนี้จึงควรมีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้น รูปแบบของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ต้องการคือ

ค่าสูงสุด $z = c'_0 + c'_1x_1 + c'_2x_2 + \ldots + c'_nx_n$ (21)

เมื่อ $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n \leq 0$

และ

ค่าต่ำสุด $z = c'_0 + c'_1x_1 + c'_2x_2 + \ldots + c'_nx_n$ (22)

เมื่อ $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n \geq 0$

เมื่อกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์แล้ว

ตัวอย่างที่ 6.6 จงจัดรูปแบบปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตามแบบที่ต้องการและแก้ปัญหานี้

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4$

ข้อจำกัด

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 15$$
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

ต้องการจัดรูปแบบให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดยกำหนดให้ $x'_j = 1 - x_j$ จะได้

$$z = 3(1-x'_1) + 2(1-x'_2) + 4(1-x'_3) + 5(1-x'_4)$$
$$z = 14 - 3x'_1 - 2x'_2 - 4x'_3 - 5x'_4$$

และข้อจำกัด

$$2(1-x'_1) + 3(1-x'_2) + (1-x'_3) + 4(1-x'_4) \leq 12$$
$$-2x'_1 - 3x'_2 - x'_3 - 4x'_4 \leq 2$$
$$3(1-x'_1) + 4(1-x'_2) + 2(1-x'_3) + 5(1-x'_4) \leq 15$$
$$-3x'_1 - 4x'_2 - 2x'_3 - 5x'_4 \leq 1$$

จะได้ตัวแบบของปัญหาในรูปแบบที่ต้องการคือ

ค่าสูงสุด $z = 14 - 3x'_1 - 2x'_2 - 4x'_3 - 5x'_4$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
-2x'_1 - 3x'_2 - x'_3 - 4x'_4 &\le 2 \\
-3x'_1 - 4x'_2 - 2x'_3 - 5x'_4 &\le 1 \\
x'_j &\in \{0, 1\}\ j = 1, 2, 3, 4 \text{ โดยที่ } x'_1 = 1 - x_j
\end{aligned}
\tag{23}
$$

จากตัวแบบ (21) ซึ่งเป็นตัวแบบของปัญหาค่าสูงสุด พบว่า ถ้าตัวแปร x'_j มีค่าเท่ากับ 0 ทุกตัวแปรแล้ว จะทำให้ z มีค่ามากที่สุด เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเหล่านี้ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ มีค่าน้อยกว่าศูนย์ทั้งหมด การเพิ่มค่าของตัวแปร x'_j ใด ๆ จะไม่ทำให้ค่า z เพิ่มขึ้นได้ เมื่อพิจารณาข้อจำกัดทั้งสองพบว่า ถ้า x'_j มีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว ข้อจำกัดทั้งสองยังคงเป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x'_j = 0$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, 4$ หรือ $x_j = 1$ เมื่อ $j = 1, 2, 3, 4$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงจัดรูปแบบปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตามแบบที่ต้องการ

ค่าต่ำสุด $z = -5x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &\le 4 \\
6x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 &\le 10 \\
x_j &\ge 0 \qquad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x_j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยกว่าศูนย์ จึงกำหนดตัวแปรใหม่ $x'_j = 1 - x_j$ หรือ $x_j = 1 - x'_j$ จะได้

$$
\begin{aligned}
z &= -5(1 - x'_1) - 2(1 - x'_2) - 6(1 - x'_3) - 4(1 - x'_4) \\
&= 17 + 5x'_1 + 2x'_2 + 6x'_3 + 4x'_4
\end{aligned}
$$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
4(1 - x'_1) + 2(1 - x'_2) + 5(1 - x'_3) - 3(1 - x'_4) &\le 4 \\
6(1 - x'_1) - 2(1 - x'_2) + 6(1 - x'_3) - 5(1 - x'_4) &\le 10
\end{aligned}
$$

จะได้ตัวแบบที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตามต้องการคือ

ค่าต่ำสุด $z = 17 + 5x'_1 + 2x'_2 + 6x'_3 + 4x'_4$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
-4x'_1 - 2x'_2 - 5x'_3 + 3x'_4 &\le -4 \\
-6x'_1 + 2x'_2 - 6x'_3 + 5x'_4 &\le 5 \\
x'_j &\in \{0, 1\} \qquad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
\tag{24}
$$

จากตัวแบบ (24) จะพบว่า z มีค่าต่ำสุด ถ้า x'_j ทุกตัวแปรมีค่าเท่ากับ 0 อย่างไรก็ตาม ถ้าพิจารณาข้อจำกัดทั้งสองแล้ว พบว่า x'_j ไม่สามารถมีค่าเท่ากับ 0 ทั้งหมด เนื่องจากค่า

ทางขวามือในข้อจำกัดที่ 1 มีค่าเท่ากับ -1 ดังนั้น จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตัวแปร x'_j ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์

กำหนดให้ Q_k แทนเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกคือ ดัชนีของข้อจำกัดที่มีค่าทางขวามือน้อยกว่าศูนย์ สำหรับปัญหาที่ k ใด ๆ และ T_k เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกคือ ดัชนีของตัวแปรตัดใจ (j) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบในข้อจำกัดที่มีค่าทางขวามือน้อยกว่าศูนย์ นั่นคือ

$$Q_k = \{i \mid b_i < 0\}$$
$$T_k = \{j \mid a_{ij} < 0 \quad \text{เมื่อ} \quad i \in Q_k\}$$

ในตัวอย่างที่ 6.6 ตัวแบบ (23) พบว่า ไม่มีข้อจำกัดใดที่มีค่าทางขวามือน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น $Q_k = \phi$ ทำให้ $T_k = \phi$ ขณะที่ตัวอย่างที่ 6.7 ปัญหา (24) พบว่า ข้อจำกัดที่ 1 มีค่าทางขวามือน้อยกว่าศูนย์ เมื่อพิจารณาภายในข้อจำกัดนี้ พบว่า ตัวแปร x'_1 x'_2 และ x'_3 มีค่าสัมประสิทธิ์น้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น $Q_k = \{1\}$ และ $T_k = \{1, 2, 3\}$ พิจารณาข้อจำกัดที่ 1 ในตัวแบบ (24) เราสามารถพิจารณา ตัวแปรตัดสินใจที่มีดัชนีอยู่ในเซต T_k นั่นคือ x'_1 x'_2 หรือ x'_3 ว่าสามารถเพิ่มค่าจาก 0 เป็น 1 แล้วยังคงทำให้ข้อจำกัดที่ 1 เป็นจริง ดังนั้น ปัญหานี้จะมีผลเฉลยที่เป็นไปได้ อย่างไรก็ตาม ถ้าข้อจำกัดเปลี่ยนเป็น $4x'_1 + 2x'_2 + 4x'_3 + x'_4 \le -3$ นั่นคือ $T_k = \phi$ เราไม่สามารถกำหนดค่าตัวแปรใด ๆ ให้มีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 แล้วสอดคล้องกับข้อจำกัดนี้ได้เลย ดังนั้น ขั้นตอนการแก้ปัญหา จะต้องตรวจสอบว่ามีผลเฉลยที่เป็นไปได้หรือไม่ โดยให้ t_i แทนผลรวมค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจ j ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ i น้อยกว่าศูนย์

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} \min\{0, a_{ij}\} \quad \text{โดยที่} \quad j \in T_k \tag{25}$$

ถ้า $t_i > b_i$ แสดงว่าไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ ตัวอย่างเช่น ในตัวแบบ (24) ข้อจำกัดที่ 1 สามารถหาค่า t_1 ได้ดังนี้

$$t_1 = \min\{0, -4\} + \min\{0, -2\} + \min\{0, -5\}$$
$$= -11$$

เนื่องจาก $t_1 = -11 < -4 = b_1$ ดังนั้น ปัญหานี้ผลเฉลยที่เป็นไปได้ จากนั้นจะพิจารณาต่อไปว่า ควรจะเพิ่มค่าของตัวแปรใด โดยการคำนวณค่า $I_k(j)$ ซึ่งจะเป็นผลรวมความเป็นไปได้ เมื่อให้ตัวแปร j มีค่าเท่ากับ 1 ในปัญหา k โดย

$$I_k(j) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, -b_i + a_{ij}\} \quad \text{โดย} \quad j \in T_k \tag{26}$$

เลือกตัวแปร j ที่มีค่า $I_k(j)$ ต่ำสุด กำหนดให้ $I = \min\left(I_k(j)\right)$

พิจารณาตัวแบบปัญหา (24)

$$\begin{aligned} -4x_1' - 2x_2' - 5x_3' + 3x_4' &\leq -4 \\ -6x_1' + 2x_2' - 6x_3' + 5x_4' &\leq 5 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $Q_k = \{1\}$ และ $T_k = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} I_k(1) &= \max\{0, -(-4) + (-4)\} + \max\{0, -(5) + (-6)\} \\ &= \max\{0, 0\} + \max\{0, 1\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_k(2) &= \max\{0, -(-4) + (-2)\} + \max\{0, -5 + 2\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_k(3) &= \max\{0, -(-4) + (-6)\} + \max\{0, -5 + (-6)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$I = \min\{0, 2, 0\} = 0$$

ดังนั้น สามารถเลือก x_1' หรือ x_3' ให้มีค่าเท่ากับ 1 จะทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นไปได้

ในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดบางข้อจำกัดมีค่าน้อยกว่าศูนย์ จะต้องทำการเปรียบเทียบ เพื่อกำหนดค่าของตัวแปรตัดสินใจบางค่าให้มีค่าเท่ากับ 1 โดยเปรียบเทียบจากค่า $I_k(j)$ เราจะกำหนดค่าของตัวแปรตัดสินใจจนกระทั่งสรุปได้ว่ามีผลเฉลยที่เป็นไปได้ จากนั้นจะย้อนกลับมาทำการพิจารณาปัญหาที่แตกกิ่งมาจากปัญหาเดียวกัน แต่มีตัวแปรตัดสินใจเป็นศูนย์ทำการแตกกิ่งออกไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งไม่มีปัญหาที่แตกกิ่งออกมาให้พิจารณา

ดังนั้น เราสามารถสรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค ได้ดังนี้

1. การจัดรูปแบบฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดให้อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ โดยข้อจำกัดมีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ กำหนดให้ปัญหาเริ่มต้นเป็นปัญหาที่ 1 ($k = 1$)
2. การพิจารณาค่ากำหนดขอบเขต พิจารณาปัญหาที่ k ว่ามีค่าทางขวามือของข้อจำกัดน้อยกว่าศูนย์หรือไม่

   2.1 ถ้าค่าทางขวามือของทุกข้อจำกัดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้ว $Q_k = \phi$ และสรุปได้ว่าผลเฉลยที่เป็นไปได้แล้ว โดยกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจขณะนั้นมีค่าเท่ากับ 0 ทั้งหมด คำนวณค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์โดยใช้ผลเฉลยที่ได้ ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ จะใช้เป็นขอบเขต (Bound) ในการเปรียบเทียบกับปัญหาในการแตกกิ่งและจำกัด

ขอบเขตต่อไป ในกรณีนี้ปัญหา k จะเป็นปัญหาที่ถูกถ่วง เราจะไม่แตกกิ่งปัญหานี้ออกมาเป็นปัญหาย่อยต่อไป จากนั้นพิจารณาขั้นตอนที่ 4 (ขั้นตอนย้อนกลับ)

2.2 ถ้าค่าทางขวามือของข้อจำกัดมีค่าน้อยกว่าศูนย์อย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัด จะพิจารณาตามขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

3. การแตกกิ่งสาขาปัญหา พิจารณาปัญหาที่ k ว่ามีผลเฉลยที่เป็นไปได้หรือไม่ โดยคำนวณค่า t_i จากสมการ (25)

3.1 ถ้า $t_i > b_i$ แสดงว่าไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ ให้หยุดการพิจารณาปัญหาที่ k

3.2 ถ้า $t_i < b_i$ แสดงว่ามีผลเฉลยที่เป็นไปได้ หา $I_k(j)$ จากสมการ (26) เพื่อระบุว่าตัวแปรตัดสินใจที่ j ใดจะมีค่าเท่ากับ 1 จะทำให้ได้ปัญหาที่ k + 1 ซึ่งเป็นปัญหาย่อยที่แตกสาขาออกจากปัญหาที่ k จากนั้นพิจารณาปัญหาที่ k + 1 โดยย้อนกลับไปขั้นตอนที่ 2

4. การพิจารณาย้อนกลับ เมื่อได้ผลเฉลยหรือข้อสรุปจากปัญหาที่ k ที่กำลังพิจารณาอยู่ ให้พิจารณาย้อนกลับไปพิจารณาปัญหาที่ k – 1 ต่อไป แต่กำหนดค่าของตัวแปรตัดสินใจให้มีค่าเท่ากับ 0 แทน และย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่ หากปัญหาที่ k – 1 ที่เป็นปัญหาที่ถูกถ่วง จะสรุปว่าได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้ว หรือไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ แล้วแต่กรณี และหยุดการคำนวณได้

ตัวอย่างที่ 6.8 จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยวิธีหาผลเฉลยสำหรับการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาคของปัญหาในตัวอย่างที่ 6.4

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + \frac{9}{2}x_2 + 7x_3 + \frac{7}{2}x_4$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &\le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\le 5 \\ x_j \in \{0, 1\} \qquad j &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(1) จัดรูปแบบฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดให้อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ $x'_j = 1 - x_j$

ค่าสูงสุด $z = 5(1-x'_1) + \frac{9}{2}(1-x'_2) + 7(1-x'_3) + \frac{7}{2}(1-x'_4)$

$$\begin{aligned} 3(1-x'_1) + (1-x'_2) + 2(1-x'_3) + (1-x'_4) &\le 6 \\ 4(1-x'_1) + 2(1-x'_2) + 5(1-x'_3) + (1-x'_4) &\le 8 \\ 3(1-x'_1) + 2(1-x'_2) + 4(1-x'_3) + 2(1-x'_4) &\le 5 \end{aligned}$$

จะได้ตัวแบบดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 20 - 5x'_1 - \frac{9}{2}x'_2 - 7x'_3 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -3x'_1 - x'_2 - 2x'_3 - x'_4 &\le -1 \\ -4x'_1 - 2x'_2 - 5x'_3 - x'_4 &\le -4 \\ -3x'_1 - 2x'_2 - 4x'_3 - 2x'_4 &\le -6 \\ x'_j \in \{0, 1\} \qquad & j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \qquad \text{(BIP1)}$$

(2) ให้ $k = 1$ $Q_1 = \{1, 2, 3\}$ $T_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ หาค่า t_i

$t_i = \sum_{j=1}^{n} \min\{0, a_{ij}\}$ โดยที่ $j \in T_1$

$t_1 = \min\{0, -3\} + \min\{0, -1\} + \min\{0, -2\} + \min\{0, -1\} = -7$

$t_2 = -12$ $t_3 = -11$ เนื่องจาก $t_i < b_i$ ทุกค่าของ i

แสดงว่าปัญหา BTP1 มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังนั้น ต้องพิจารณา $I_1(j)$

$I_k(j) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, -b_i + a_{ij}\}$ โดย $j \in T_k$

$I_1(1) = \max\{0, -(-1) - 3\} + \max\{0, -(-4) - 4\} + \max\{0, -(-6) - 3\}$

$= \max\{0, -2\} + \max\{0, 0\} + \max\{0, 3\} = 3$

$I_1(2) = 6$ $I_1(3) = 6$ และ $I_1(4) = 7$

$I_1 = \min\{3, 6, 6, 7\} = 3$ ดังนั้น เลือก x'_1 ให้มีค่าเท่ากับ 1

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาคที่พิจารณาต่อไปคือ BIP2 ($k = 2$)

ค่าสูงสุด $z = 15 - \frac{9}{2}x'_2 - 7x'_3 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} - x'_2 - 2x'_3 - x'_4 &\le 2 \\ -2x'_2 - 5x'_3 - x'_4 &\le 0 \\ -2x'_2 - 4x'_3 - 2x'_4 &\le -3 \\ x'_j \in \{0, 1\} \qquad & j = 2, 3, 4 \end{aligned} \qquad \text{(BIP2)}$$

(3) พิจารณาขอบเขตจากตัวแบบ (BIP2) ทำให้ได้ $Q_2 = \{3\}$ และ $T_2 = \{2, 3, 4\}$

หาค่า $t_3 = \min\{0, -1\} + \min\{0, -4\} + \min\{0, -2\} = -7$

เนื่องจาก $t_3 < b_3$ แสดงว่าปัญหา BIP2 มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

พิจารณา $I_2(j) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, -b_i + a_{ij}\}$

$I_2(2) = \max\{0, -2, -1\} + \max\{0, -2\} + \max\{0, -(-3) - 2\}$

$= 0 + 0 + 1 = 1$

$I_2(3) = 0$ และ $I_2(4) = 1$ $I_2 = \min\{1, 0, 1\} = 0$

ดังนั้น เลือก x'_3 ให้มีค่าเท่ากับ 1

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาคใหม่ BIP3 ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 8 - \frac{9}{2}x'_2 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_2 \quad &-\ x'_4 \ \le\ 4 \\ -2x'_2 \quad &-\ x'_4 \ \le\ 5 \\ -2x'_2 \quad &-\ 2x'_4 \ \le\ 1 \end{aligned} \qquad \text{(BIP3)}$$

(4) เมื่อ $k = 3$ เนื่องจากค่าทางขวามือของทุกข้อจำกัดใน BIP3 มีค่ามากกว่าศูนย์ ทำให้ $Q_3 = \phi$ ดังนั้น กำหนดให้ค่าของตัวแปร $x'_1 = x'_3 = 1$ และ $x'_2 = x'_4 = 0$ โดย $z = 8$ เราจึงยุติการพิจารณาการแตกกิ่งสาขาจากปัญหา BIP3 และให้ $UB = 8$

(5) ย้อนกลับไปที่ปัญหา BIP2 และกำหนดให้ $x'_3 = 0$ จะได้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค BIP4 ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 15 - \frac{9}{2}x'_2 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_2 \quad &-\ x'_4 \ \le\ 2 \\ -2x'_2 \quad &-\ x'_4 \ \le\ 0 \\ -2x'_2 \quad &-2x'_4 \ \le\ -3 \\ x'_j &\in \{0, 1\} \qquad j = 2, 4 \end{aligned} \qquad \text{(BIP4)}$$

(6) ให้ $k = 4$ $Q_4 = \{3\}$ $T_3 = \{2, 4\}$

หาค่า $t_3 = \min\{0, -2\} + \min\{0, -2\} = -4$

เนื่องจาก $t_3 < b_3$ แสดงว่าปัญหา BIP4 มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ พิจารณา

$I_4(2) = 1$ $I_4(4) = 1$ และ $I = \min\{1, 1\} = 1$

เลือก x'_2 ให้มีค่าเท่ากับ 1 ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาคใหม่ ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = \frac{21}{2} - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_4 \ &\le\ 3 \\ -\ x'_4 \ &\le\ 2 \\ -2x'_4 \ &\le\ -1 \\ x'_4 &\in \{0, 1\} \end{aligned} \qquad \text{(BIP5)}$$

(7) ให้ $k = 5$ $Q_5 = \{3\}$ $T_5 = \{4\}$ ได้ค่า $T_3 = -2$

$t_3 < b_3$ แสดงว่าปัญหา BIP4 มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

โดย $x'_4 = 1$ ผลเฉลยนี้คือ $x'_1 = x'_2 = x'_4 = 1$ และ $x'_3 = 0$ $z = 7$ เนื่องจากตัวแปรทุกตัวถูกกำหนดค่าแล้ว จึงไม่แตกกิ่งปัญหานี้ และค่า z ที่ได้น้อยกว่า UB

(8) ย้อนกลับไปที่ปัญหา BIP4 และกำหนดให้ $x'_2 = 0$ ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบทวิภาคใหม่ ได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $z = 15 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_4 &\le 2 \\ -\ x'_4 &\le 0 \\ -2x'_4 &\le -3 \\ x'_4 &\in \{0, 1\} \end{aligned} \qquad \text{(BIP6)}$$

(9) ให้ $k = 6$ $Q_6 = \{3\}$ $T_6 = \{4\}$ ได้ค่า $t_3 = -2$

$t_3 > b_3$ แสดงว่าไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ จึงไม่แตกสาขาปัญหานี้

(10) ย้อนกลับมาที่ BIP1 กำหนดให้ $x'_1 = 0$ จะได้

ค่าสูงสุด $z = 20 - \frac{9}{2}x'_2 - 7x'_3 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_2 - 2x'_3 -\ x'_4 &\le -1 \\ -2x'_2 - 5x'_3 -\ x'_4 &\le -4 \\ -2x'_2 - 4x'_3 - 2x'_4 &\le -6 \end{aligned} \qquad \text{(BIP7)}$$

(11) ให้ $k = 7$ $Q_7 = \{1, 2, 3\}$ $T_7 = \{2, 3, 4\}$

$t_1 = -4$ $t_2 = -8$ $t_3 = -8$ $t_1 < b_i$ โดย $i = 2, 3, 4$

คำนวณหา $I_7(2) = 6$ $I_7(3) = 1$ $I_7(4) = 7$

$I = \min\{6, 1, 7\} = 1$ เลือก $x'_3 = 1$ จะได้ปัญหาใหม่คือ

ค่าสูงสุด $z = 13 - \frac{9}{2}x'_2 - \frac{7}{2}x'_4$

$$\begin{aligned} -\ x'_2 -\ x'_4 &\le 1 \\ -2x'_2 -\ x'_4 &\le 1 \\ -2x'_2 - 2x'_4 &\le -2 \end{aligned} \qquad \text{(BIP8)}$$

(12) ให้ $k = 8$ $Q_8 = \{3\}$ $T_8 = \{2, 4\}$

$t_3 = -4 < b_3$ หาค่า $I_8(2) = 0$ $I_8(4) = 0$

$I = \min\{0, 0\}$ เลือก $x'_4 = 1$ หากแตกสาขาจากปัญหานี้ จะได้ค่า z มากที่สุด ไม่เกิน 19/2 ซึ่งมีมูลค่าสูงกว่า UB จึงปรับปรุงค่า UB = 19/2 ผลเฉลยคือ $x'_1 = x'_2 = 0$ และ $x'_3 = x'_4 = 1$ โดยที่ $z = 19/2$

(13) ย้อนกลับมาพิจารณา BIP7 กำหนดให้ $x'_3 = 0$ จะได้ปัญหาย่อย (BIP9)

ค่าสูงสุด $z = 20 - \frac{9}{2}x'_2 - \frac{7}{2}x'_4$

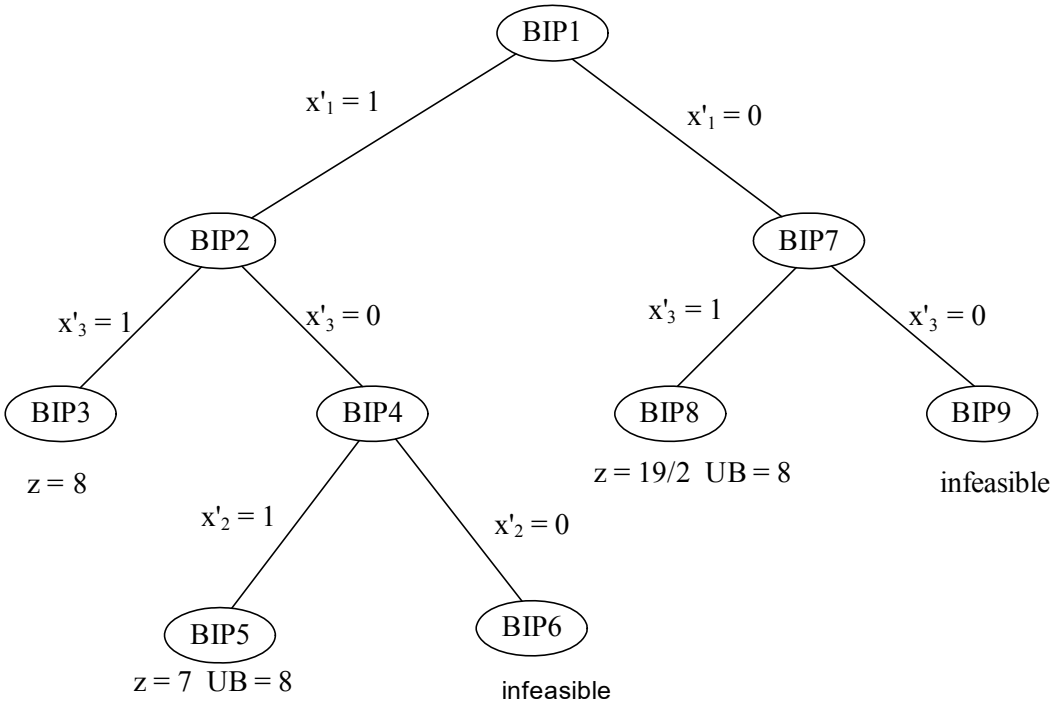
$$\begin{aligned} -\ x'_2 -\ x'_4 &\le -1 \\ -2x'_2 -\ x'_4 &\le -4 \\ -2x'_2 - 2x'_4 &\le -6 \end{aligned} \qquad \text{(BIP9)}$$

(14) ให้ $k = 9$ $Q_9 = \{1, 2, 3\}$ $T_9 = \{2, 4\}$

$t_2 > b_2$ และ $t_3 > b_3$ ดังนั้น ปัญหา BIP9 ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x'_1 = x'_2 = 0$ หรือ $x_1 = x_2 = 1$

ขณะที่ $x'_3 = x'_4 = 1$ หรือ $x_3 = x_4 = 0$ โดย $z = 19/2$ โดยแผนภาพต้นไม้แสดงการแตกกิ่งเพื่อแก้ปัญหานี้ แสดงดังรูปที่ 6.14



รูปที่ 6.14 แสดงแผนผังการแก้ปัญหานี้ตามลำดับ

6.5 วิธีระนาบตัด

วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตนั้น มีพื้นฐานมาจากแนวคิดของการผ่อนคลายข้อจำกัดเกี่ยวกับตัวแปรมีค่าเป็นจำนวนเต็ม และแก้ปัญหาโดยวิธีผ่อนคลายปัญหาแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรง และการแบ่งเซตของผลเฉลยออกเป็นเซตย่อย ในหัวข้อนี้ได้เสนอแนวทางการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มโดยการสร้างข้อจำกัดหรือเรียกว่า *ระนาบตัด (Cutting plane)* จำนวนหนึ่ง เข้ามาเป็นข้อจำกัดเพิ่มเติมของปัญหา แล้วแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้อีกครั้ง ถ้าปัญหาไม่สามารถสร้างข้อจำกัด ที่ทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นไปได้ แล้วเราจะขจัดข้อจำกัดนั้น เราจะดำเนินการสร้างระนาบไปเรื่อย ๆ จนไม่สามารถสร้างระนาบเพิ่มได้ ในที่สุดผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม และผลเฉลยนี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (IP)

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

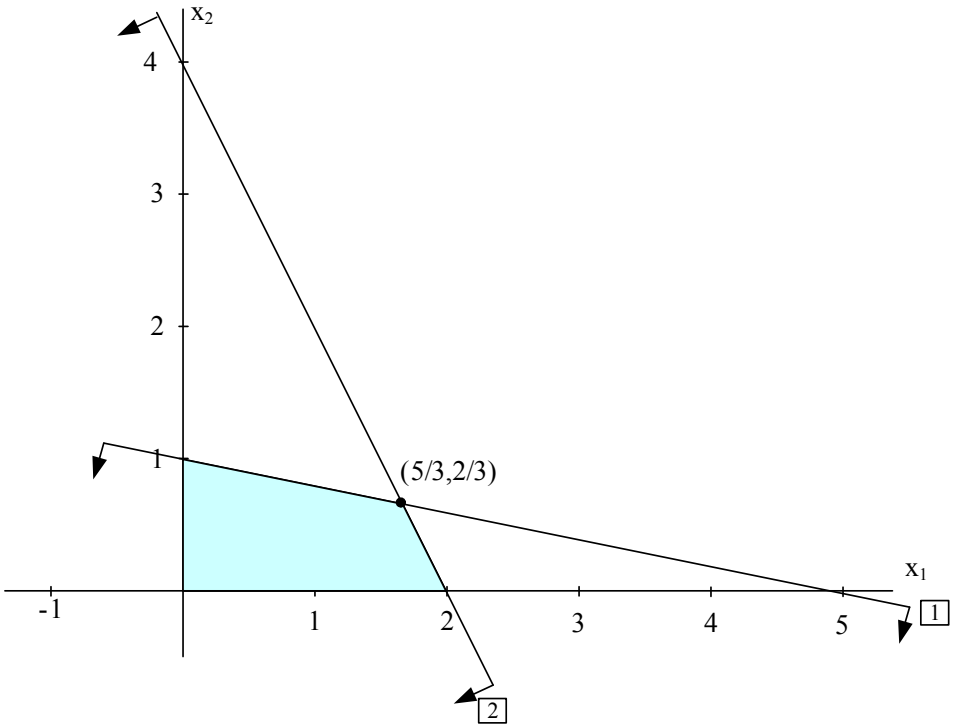
ค่าสูงสุด $z = x_1 + x_2$

ข้อจำกัด $x_1 + 5x_2 \leq 5$ (27)

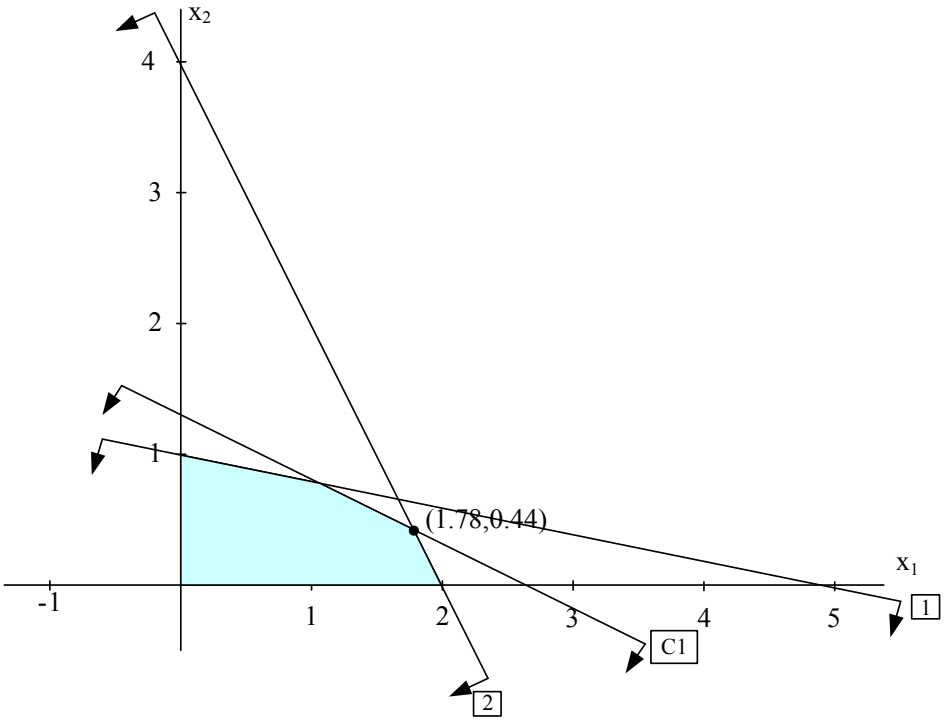
$2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

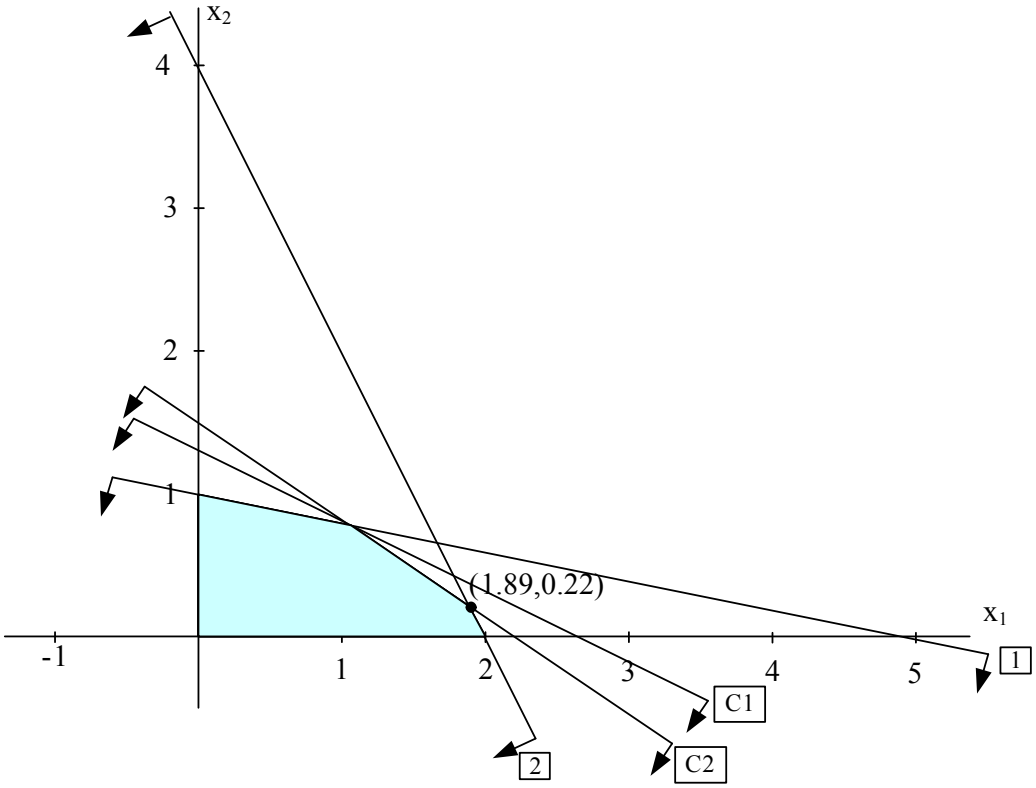
แนวทางหนึ่งก็คือ การลดขนาดของพื้นที่เป็นไปได้ ลงจนกระทั่งจุดมุมนั้น มีค่าของตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม ทำให้ผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งขอเรียกสั้นๆ ว่า ปัญหาผ่อนคลายแบบ LP เป็นจำนวนเต็ม และผลเฉลยนี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม รูปที่ 6.15 (1) แสดงพื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP รูป 6.15 (2) แสดงระนาบตัด C1 คือ $3x_1 + 6x_2 \leq 8$ ทำให้ผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายนี้คือ $(x_1, x_2) = (1.78, 0.44)$ สำหรับรูปที่ 6.15 (3) แสดงระนาบตัด C2 คือ $5x_1 + 7x_2 \leq 11$ ทำให้ได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2) = (1.89, 0.22)$ รูปที่ 6.14 (4) แสดงระนาบตัด C3 คือ $7x_1 + 8x_2 \leq 14$ ได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2) = (2, 0)$



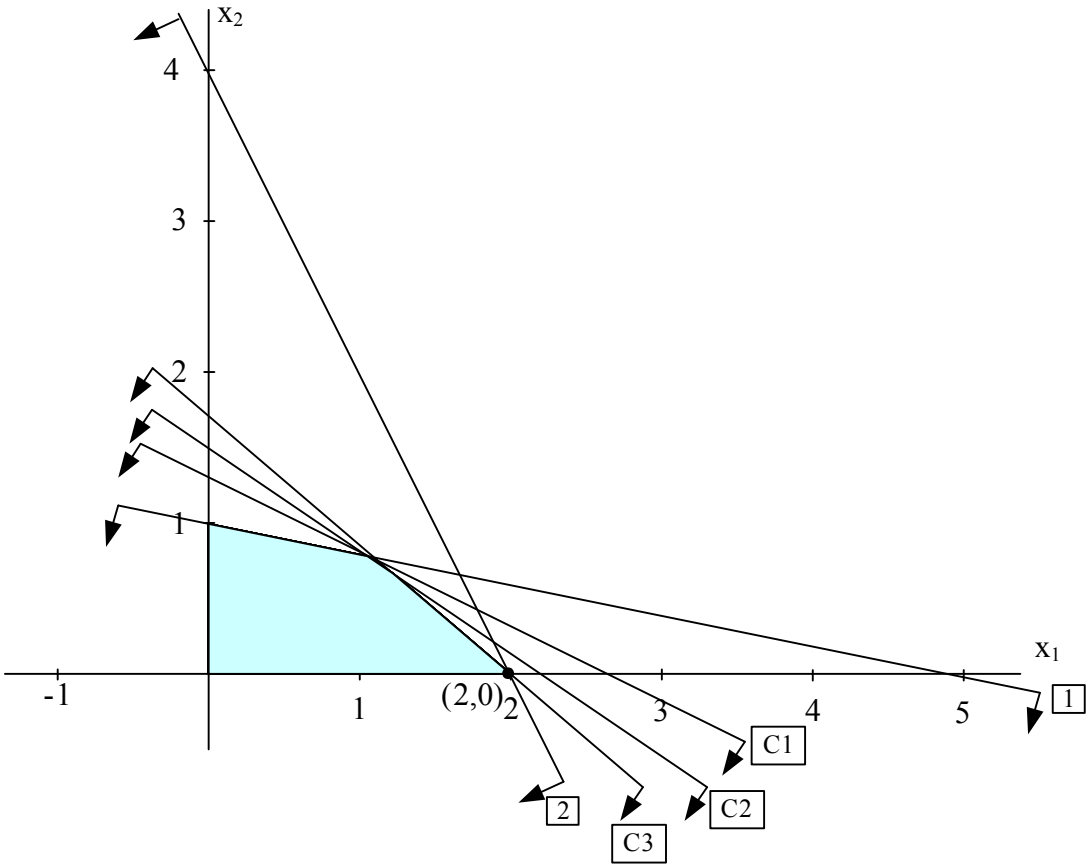
รูปที่ 6.15 (1) พื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของระนาบตัด C1



รูปที่ 6.15 (2) พื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของระนาบตัด C2



รูปที่ 6.15 (3) พื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของระนาบตัด C3



รูปที่ 6.15 (4) พื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของระนาบตัด C4

เพื่ออธิบายการตัดระนาบให้ $s = \left\{x \in I_+^n : Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม และ s เป็นพื้นที่ที่มีขอบเขต (Bounded) โดย I_+^n เป็น n–มิติสเปสของจำนวนเต็มบวก ให้ n′ แทนจำนวนจุดใน s แล้ว conv(s) เป็นเซตของผลรวมคอนเวกซ์ (Convex combination)

$$\text{conv}(s) = \left\{ y : y = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j x_j,\ \alpha_j \geq 0 \text{ และ } \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j = 1,\ x^k \in s \right\} \qquad (28)$$

ให้ s′ เป็นเซตของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายที่มี x เป็นตัวแปร โดย $s' = \left\{x : Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ แล้วจะได้ว่า

$$s \subseteq \text{conv}(s) \subseteq s' \qquad (29)$$

ในตัวอย่างข้างต้นเป็นการสร้าง conv(s) โดยสร้างข้อจำกัดทั้ง 4 ดังรูปที่ 6.15 (ง) อย่างไรก็ตามปัญหาพิเศษหลายปัญหา เช่น ปัญหาถุงเป้ ปัญหาการเดินทางของพนักงานขาย เป็นต้น เป็นปัญหาที่ยากจะสร้างหรือกำหนดระนาบตัดทั้งหมด

เมื่อทำการตัดระนาบ เราจะเพิ่มอย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัดในแต่ละรอบการคำนวณ โดยแต่ละรอบการคำนวณต้องมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. ผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเส้นปัจจุบัน จะต้องเป็นไปไม่ได้ สำหรับข้อจำกัดที่เพิ่มใหม่นี้

2. ทุกผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอยู่ในพื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาเริ่มต้น จะยังคงเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับปัญหาที่เพิ่มข้อจำกัดใหม่นี้

ข้อจำกัดใหม่นี้ จะตัดผลเฉลยที่ไม่เป็นจำนวนเต็มออกไปจากพื้นที่เป็นไปได้ของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP หลังจากเพิ่มข้อจำกัดแล้ว จะประมวลตัวแบบอีกครั้งไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลเฉลยที่ได้แป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยนี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มเริ่มต้นด้วย

การลู่เข้าของขั้นตอนนี้ ขึ้นอยู่กับชนิดของระนาบตัดที่เพิ่มเข้ามาในแต่ละรอบการคำนวณ โดยทั่วไปแล้วไม่ได้รับประกันว่าจะลู่เข้าในจำนวนที่จำกัด ในหลาย ๆ กรณี การลู่เข้านี้ขึ้นอยู่กับชนิดของปัญหาด้วย ในหัวข้อนี้จะคำนึงถึงเฉพาะปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มเท่านั้น และจะกล่าวถึงวิธีการตัดระนาบสองวิธีคือ *การตัดแบบแดนท์ซิก (Dantzig cut)* และ *การตัดแบบโกโมรี (Gomory cut)*

6.5.1 การตัดแบบแดนท์ซิก

พิจารณาปัญหา ILP1 ที่มีตัวแบบคือ

ค่าสูงสุด $\quad z = \mathbf{cx}$ (30)

ข้อจำกัด $\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ และเป็นจำนวนเต็ม

กำหนดให้สมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์ $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ ขนาด $m \times (n+1)$ เป็นจำนวนเต็ม ปัญหาผ่อนคลายของ (30) โดยให้ $\mathbf{x} \geq 0$ เพียงอย่างเดียว จะทำให้กลายเป็นปัญหา LP1 จากทฤษฎีการโปรแกรมเชิงเส้น เราทราบว่าตัวแปรพื้นฐานสามารถเขียนในรูปของพารามิเตอร์และค่าของตัวแปรจร ดังนี้

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \tag{31}$$

เมื่อ $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T$ $\mathbf{x}_N$ มีค่าเป็นศูนย์ในผลเฉลยพื้นฐาน แต่ในทุก ๆ ผลเฉลยที่เป็นไปได้ จะรวมผลเฉลยจำนวนเต็ม ซึ่งจะมีค่า $\mathbf{x}_N$ เป็นมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ผลเฉลยของ LP1 คือ $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ถ้า $\mathbf{x}_B$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว $\mathbf{x}_B$ จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ ILP1 ถ้า $\mathbf{x}_B$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม แล้วผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ ILP1 จะต้องมีตัวแปรจร

บางตัวมีค่ามากกว่าศูนย์ ให้ u เป็นเซตของตัวแปรจร หากตัวแปรจรตัวใดตัวหนึ่ง เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานจะต้องมีเป็นจำนวนเต็มบวก ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 จึงกล่าวได้ว่าผลรวมของตัวแปรจรทั้งหมดต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 จึงกำหนดให้

$$\sum_{j \in u} x_j \geq 1 \tag{32}$$

ผลเฉลยของ LP1 จะสอดคล้องกับเงื่อนไข (32) ขณะที่ผลเฉลย ILP1 จะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ ดังนั้น เงื่อนไขนี้จะเป็นระนาบที่นำมาข้อจำกัดเพิ่มเติมในปัญหาผ่อนคลาย

ตัวอย่างที่ 6.8 จากปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (27) จงใช้วิธีการตัดแบบแดนท์ซิก

ให้ s_1 และ s_2 แทนตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัด 1 และ 2

ค่าสูงสุด $z = x_1 + x_2$

ข้อจำกัด $x_1 + 5x_2 + s_1 = 5$

$2x_1 + x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$s_1, s_2 \geq 0$

ผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของปัญหานี้คือ $(x_1, x_2) = (5/3, 2/3)$ โดย z = 7/3 ตัวแปรจรคือ s_1 และ s_2 จะได้

$$s_1 + s_2 \geq 1$$

$$(5 - x_1 - 5x_2) + (4 - 2x_1 - x_2) \geq 1$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 8 \tag{33}$$

เพิ่มข้อจำกัด (33) ลงในปัญหาข้างต้น ผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP คือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1.78, 0.44, 1, 0, 0)$ โดย $z = 2.22$ โดยที่มีตัวแปรจรคือ s_2 และ s_3

$$s_2 + s_3 \geq 1$$

$$(4 - 2x_1 - x_2) + (8 - 3x_1 - 6x_2) \geq 1$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 11 \tag{34}$$

ผลเฉลยจากการเพิ่มข้อจำกัด (34) คือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4)$ = (1.89, 0.22, 2, 0, 1, 0) โดย $z = 2.11$ โดยมี s_2 และ s_4 เป็นตัวแปรจร

$$s_2 + s_4 \geq 1$$

$$(4-2x_1-x_2)+(11-5x_1-7x_2) \geq 1$$
$$7x_1+8x_2 \leq 14 \qquad (35)$$

เมื่อเพิ่มข้อจำกัด (35) ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (2, 0, 3, 0, 2, 1, 0)$ โดย $z = 2$ เนื่องจากตัวแปรตัดสินใจในผลเฉลยนี้เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด เมื่อพิจารณาระนาบการตัดทั้ง 3 ระนาบในข้อจำกัด (33)–(35) ก็คือ C1–C3 แสดงในรูปที่ 6.15 (ง) นั่นเอง

6.5.2 การตัดแบบโกโมรี

การตัดประเภทที่สองนี้ มีประสิทธิภาพดีกว่าการตัดแบบแดนท์ซิก ซึ่งเรียกว่า *วิธีการสร้างจำนวนเต็ม (Method of integer forms)* พิจารณาจากวิธีการตัดแบบแดนท์ซิก เราทราบว่ามีตัวแปรจรอย่างน้อย 1 ตัวที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ในผลเฉลยหนึ่ง ๆ จากข้อมูลนี้ทำให้เกิดการสร้างวิธี*การตัดแบบโกโมรี (Gomory Cutting)* โดยมีแนวคิดว่า ค่าของพจน์ที่เป็นเศษส่วนในตัวแปรจรจะต้องสมดุลกับค่าของเศษส่วนที่อยู่ในค่าคงที่ทางขวามือ เพื่อให้ค่าตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็ม (Hu, 1969, Hiller,1995, Bronson and Nadimuthu, 1997, Taha, 1997; สุดา, 2550)

ให้ a (mod 1) เป็นเศษจากการนำ a ลบด้วยเลขจำนวนเต็มที่น้อยกว่า c ดังนั้น

$$a \pmod 1 = a - \lfloor a \rfloor$$

เช่น $5 \pmod 1 = 0$ $3.6 \pmod 1 = 0.6$ $-4.2 \pmod 1 = 0.8$ เป็นต้น แม้ว่าสมการที่เกี่ยวข้องกับโมดูลัส (Moduls) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ “mod” จะไม่เป็นเชิงเส้น แต่ค่าของตัวแปรจรที่สอดคล้องกับสมการโมดูลัสแล้วจะต้องสอดคล้องกับข้อจำกัดเศษส่วน

พิจารณาตัวอย่างที่ 6.8 เมื่อ x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐาน

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$$
$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{9}s_1 + \frac{5}{9}s_2 \\ \frac{2}{9}s_1 - \frac{1}{9}s_2 \end{bmatrix}$$

พิจารณา $\frac{2}{9}s_1 + \frac{1}{9}s_2 \geq \frac{2}{3}$

หรือ $x_2 \leq 0$

เมื่อเพิ่มข้อจำกัด $x_2 \leq 0$ แล้วผลเฉลยที่ได้คือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 3, 0, 0)$ โดย $z = 2$ และเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มเริ่มต้น

สำหรับการตัดระนาบ $x_1 \leq 1$ หรือ $\frac{1}{9}s_1 + \frac{5}{9}s_2 \geq \frac{2}{3}$ นั้น เป็นระนาบที่ตัดผลเฉลย $(x_1, x_2) = (2, 0)$ ที่เป็นจำนวนเต็มออกไป ทำให้ระนาบการตัดนี้ใช้ไม่ได้ จะเห็นได้ว่า การสร้างระนาบการตัดต้องมั่นใจว่าระนาบจะไม่ตัดผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่เป็นจำนวนเต็มออกไป

จึงได้มีการเสนอแนะวิธีการตัดแบบเศษส่วนขึ้น

ให้ $a_j = \lfloor a_j \rfloor + f_j$

$b = \lfloor b \rfloor + d$

โดยที่ $0 < f_j < 1$ และ $0 < d < 1$

$\lfloor a_j \rfloor$ และ $\lfloor b \rfloor$ แทน เลขจำนวนเต็มใหญ่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ a_j และ b ตามลำดับ

จากปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม เมื่อนำข้อจำกัดมาบวกกันจะได้

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

สำหรับข้อจำกัดใหม่ จะอยู่ในรูป

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\lfloor a_j \rfloor + f_j\right)x_j = \lfloor b \rfloor + d \tag{37}$$

เมื่อตัดเศษส่วนทางซ้ายมือจะได้

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b \rfloor + d \tag{38}$$

เนื่องจากค่าทางขวามือของ (38) ต้องเป็นจำนวนเต็ม เราจึงตัด f ออกจาก (38) จะได้

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b \rfloor \tag{39}$$

นำ (39) ลบออกจาก (37) และบวกตัวแปรส่วนขาด s_k จะได้

$$\sum_{j=1}^{n} f_j x_j - s_k = d \qquad (40)$$

ความสัมพันธ์ (40) แสดงถึงระนาบการตัดแบบเศษส่วนของโกโมรี (Gomory fraction cut)

ให้ u เป็นเซตของตัวแปรจร สำหรับผลเฉลยที่มีตัวแปรพื้นฐานไม่เป็นจำนวนเต็มอย่างน้อย 1 ตัว แล้วระนาบการตัดคือ

$$\sum_{j \in u} f_j x_j - s_k = f_i \qquad (41)$$

จาก (41) จะเห็นว่า ตัวแปรส่วนขาด s_k จะมีค่าเป็นลบในผลเฉลยของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ทำให้ผลเฉลยนี้เป็นไปไม่ได้ ในการหาผลเฉลยใหม่เมื่อเพิ่มข้อจำกัด (41) จึงใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ การเพิ่มข้อจำกัด (41) จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทุกตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็ม และรับรองได้ว่าจะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ดังนั้น การตัดแบบโกโมรีมี (ประกอบ, 2535) ขั้นตอนสรุปได้ดังนี้

(1) ขั้นตอนเริ่มต้น แก้ปัญหาผ่อนคลายแบบ LP ของปัญหาเริ่มต้น

(2) ขั้นตอนทดสอบความเหมาะสมที่สุด (Optimality test) ถ้าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดปัญหาผ่อนคลายแบบ LP มีตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็ม แล้วผลเฉลยที่ได้นี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มด้วย ถ้าตัวแปรตัดสินใจทุกตัวไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ทำขั้นตอนที่ 3

(3) ขั้นตอนการตัดและการหาผลเฉลยใหม่ เลือกแถวที่ r โดย $f_r > 0$ และเพิ่มข้อจำกัด (41) ในตารางสุดท้ายที่ให้ค่าเหมาะสมที่สุด จากนั้นหาผลเฉลยใหม่ โดยใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 2

ตัวอย่างที่ 6.9 พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุด $\quad z = x_1 + x_2$

ข้อจำกัด $\quad -2x_1 + 5x_2 \leq 5$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 4$$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

จงใช้วิธีการตัดแบบโกโมรี และวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์หาผลเฉลยเมื่อเพิ่มระนาบการตัด

เมื่อสร้างปัญหาผ่อนคลายของปัญหาเริ่มต้น สามารถหาผลเฉลยได้ในตารางที่ 6.5 คือ $(x_1, x_2) = (5/2, 2)$ โดย $z = 9/2$ เนื่องจากตัวแปรตัดสินใจยังมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงต้องเลือกแถวที่ 2 มาพิจารณาดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{14}s_1 + \frac{5}{14}s_2 &= \frac{5}{2} \\ \frac{3}{14}s_1 + \frac{5}{14}s_2 - s_3 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{14}s_1 - \frac{5}{14}s_2 + s_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (42)$$

นำข้อจำกัด (42) เพิ่มในตารางซิมเพล็กซ์ และประมวลผลด้วยวิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ ได้ดังตารางที่ 6.6 ได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 9/5, 0, 7/5, 0)$ โดย $z = 19/5$ เนื่องจาก x_2 ยังไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเลือกแถวที่ 1 มาเพื่อสร้างระนาบตัด

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_3 &= \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_3 - s_4 &= \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{5}s_3 + s_1 &= -\frac{4}{5} \end{aligned} \qquad (43)$$

นำข้อจำกัด (43) เพิ่มในตารางซิมเพล็กซ์ ดังตารางที่ 6.7 ผลเฉลยของปัญหาคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (7/4, 1, 7/2, 0, 1/4, 0)$ โดย $z = 11/4$ นำแถวที่ 2 มาสร้างระนาบตัด

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{4}s_2 + \frac{3}{4}s_4 &= \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4}s_2 + \frac{3}{4}s_4 - s_5 &= \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}s_2 - \frac{3}{4}s_4 + s_5 &= -\frac{3}{4} \end{aligned} \qquad (44)$$

นำข้อจำกัด (44) เพิ่มในตารางซิมเพล็กซ์ ดังตารางที่ 6.8 ผลเฉลยของปัญหาคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (1, 1, 2, 3, 1, 0, 0)$ โดย $z = 2$ จะเห็นว่าผลเฉลยนี้มีตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มข้างต้น

ข้อสังเกต จากตารางที่ 6.8 พบว่า s_4 ซึ่งเป็นตัวแปรจรนั้น มีค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 0 มีค่าเป็น 0 แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบได้มากมาย (Alternative solutions) ถ้านำ s_4 เข้าเป็นตัวแปรพื้นฐาน และให้ x_2 เป็นตัวแปรออกจะได้ผลเฉลยคือ $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (2, 0, 3, 0, 2, 1, 0)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยเดียวกับตัวอย่างที่ 3.7 นั่นเอง

ข้อจำกัด (36)

$$\frac{3}{4}s_1 + \frac{5}{14}s_2 \geq \frac{1}{2}$$
$$x_1 \leq 2 \qquad \text{(C1)}$$

ข้อจำกัด (37)

$$\frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_3 \geq \frac{4}{5}$$
$$x_2 \leq 11/10 \qquad \text{(C2)}$$

ข้อจำกัด (38)

$$\frac{1}{4}s_2 + \frac{3}{4}s_4 \geq \frac{3}{4} \qquad \text{(C3)}$$

ตารางที่ 6.5 ตารางซิมเพล็กซ์ที่ให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ				ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	0	1/2	1/2	9/2
x_2	0	0	1	2/7	1/7	2
x_1	0	1	0	3/14	5/14	5/2

ตารางที่ 6.6 ตารางซิมเพล็กซ์สำหรับระนาบตัด 1

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	0	1/2	1/2	0	9/2
x_2	0	0	1	2/7	1/7	0	2
x_1	0	1	0	3/14	5/14	0	5/2
s_3	0	0	0	–3/14	–5/14	1	–1/2
z	1	0	0	1/5	0	7/5	19/5
x_2	0	0	1	1/5	0	2/5	9/5
x_1	0	1	0	0	0	1	2
s_2	0	0	0	3/5	1	–14/5	7/5

ตารางที่ 6.7 ตารางซิมเพล็กซ์สำหรับระนาบตัด 2

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	0	1/5	0	7/5	0	19/5
x_2	0	0	1	1/5	0	2/5	0	9/5
x_1	0	1	0	0	0	1	0	2
s_2	0	0	0	3/5	1	–14/5	0	7/5
s_4	0	0	0	–1/5	0	–2/5	1	–4/5
z	1	0	0	0	0	1	1	3
x_2	0	0	1	0	0	0	1	1
x_1	0	1	0	0	0	1	0	2
s_2	0	0	0	0	1	–4	3	–1
s_1	0	0	0	1	0	2	–5	4
z	1	0	0	0	1/4	0	3/4	11/4
x_2	0	0	1	0	0	0	1	1
x_1	0	1	0	0	1/4	0	3/4	7/4
s_3	0	0	0	0	–1/4	1	–3/4	1/4
s_1	0	0	0	1	1/2	0	–7/2	7/2

ตารางที่ 6.8 ตารางซิมเพล็กซ์สำหรับระนาบตัด 3

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ							ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
z	1	0	0	0	1/4	0	3/4	0	11/4
x_2	0	0	1	0	0	0	1	0	1
x_1	0	1	0	0	1/4	0	3/4	0	7/4
s_3	0	0	0	0	–1/4	1	–3/4	0	1/4
s_1	0	0	0	1	1/2	0	–7/2	0	7/2
s_5	0	0	0	0	–1/4	0	–3/4	1	–3/4
z	1	0	0	0	0	0	0	1	2
x_2	0	0	1	0	0	0	1	0	1
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
s_3	0	0	0	0	0	1	0	–1	1
s_1	0	0	0	1	0	0	–5	–1/2	2
s_2	0	0	0	0	1	0	3	–4	3

6.6 การผ่อนคลายแบบลากรานเจียน

จากการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มในหัวข้อที่ผ่านมา จะพบว่าเมื่อจำนวนตัวแปรตัดสินใจมากขึ้น เวลาในการประมวลผลจะเพิ่มขึ้นยากมาก โดยเวลาในการประมวลผลมีความสัมพันธ์กับจำนวนตัวแปรในลักษณะที่เป็นเอกซ์โปเนนเชียล ดังนั้น เทคนิคในการประมวลผลโดยวิธีการผ่อนคลาย (Relaxation) เพื่อผ่อนคลายเงื่อนไขบางประการ ในหัวข้อที่ผ่านมา การผ่อนคลายปัญหาแบบ LP เป็นการผ่อนคลายเงื่อนไขว่าตัวแปรตัดสินใจต้องเป็นจำนวนเต็ม เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้นได้ สำหรับในหัวข้อนี้เป็นการผ่อนคลายปัญหาแบบลากรานเจียน (Lagrangian relaxation) เป็นการผ่อนคลายข้อจำกัดของปัญหาให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ซึ่งการผ่อนคลายในลักษณะนี้จะช่วยทำให้จำนวนข้อจำกัดของปัญหาลดลง ส่งผลให้เวลาในการประมวลผลลดลง

การสร้างตัวแบบการผ่อนคลายปัญหาลากรานเจียนสามารถทำโดยการนำข้อจำกัดตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม มาเป็นข้อจำกัดเชิงเส้นในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \sum_j a_{ij}x_j &\geq b_i \\ x_j &\geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned} \tag{45}$$

ให้ ν_i เป็นตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multiplier) ตัวแบบปัญหาผ่อนคลายแบบลากรานเจียน คือ

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + \nu_i\left(b_i - \sum_j a_{ij}x_j\right)$$

$$x_j \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

ถ้าปัญหา (45) เป็นปัญหาค่าสูงสุด แล้ว ν_i จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ถ้าปัญหา (45) เป็นปัญหาค่าต่ำสุด ν_i จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \sum_j a_{ij}x_j &\leq b_i \\ x_j &\geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned} \tag{46}$$

ให้ ν_i เป็นตัวคูณลากราน จะได้ตัวแบบการผ่อนคลายแบบลากรานเจียน คือ

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + \nu\left(b_i - \sum_j a_{ij}x_j\right)$$

$x_j \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ถ้าปัญหา (46) เป็นปัญหาค่าสูงสุด $\nu_i \geq 0$ ถ้าปัญหา (46) เป็นปัญหาค่าต่ำสุด $\nu_i \leq 0$ ในกรณีปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \sum_j a_{ij}x_j &= b_i \end{aligned} \qquad (47)$$

ตัวแบบการผ่อนคลายปัญหาแบบลากรานเจียน (Garefinkel and Nemhauser, 1972) สามารถเขียนได้เป็น

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + \nu_i\left(b_i - \sum_j a_{ij}x_j\right)$$

$x_j \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ν_i ไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับเครื่องหมาย (urs)

ตัวอย่างที่ 6.10 พิจารณาปัญหาต่อไปนี้ จงใช้การผ่อนคลายแบบลากรานเจียน ในข้อจำกัดที่ 2 และ 3

ค่าสูงสุด $z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 720y_2$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 - 200y_1 &\leq 0 \\ x_2 - 75y_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

ให้ ν_1 และ ν_2 แทนตัวคูณลากรานสำหรับข้อจำกัดที่ 2 และ 3 จะได้

ค่าสูงสุด $z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 720y_2 + \nu_1(0 - x_1 + 200y_1) + \nu_2(0 - x_2 + 75y_2)$

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \\ \nu_1, \nu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าข้อจำกัดของปัญหานี้ลดลง แม้ว่าจะมีตัวแปรเพิ่มขึ้นอีกสองตัวแปร แต่ตัวแปรเหล่านี้เป็นตัวแปรที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงไม่ทำให้การแก้ปัญหายุ่งยากนัก

6.7 การหาผลเฉลยด้วย Microsoft Excel Solver

การใช้โปรแกรม Microsoft Excel Solver (Baker, 2006, Balakrishman, Render and Stair, 2007; Frontline, 2008) เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มนั้น การกำหนดเซลล์ของตัวแปรตัดสินใจ การสร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนั้นจะเหมือนกันกับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ส่วนที่แตกต่างกันคือการระบุว่าตัวแปรใดที่จำเป็นต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็ม หรือมีค่าแบบทวิภาค เมื่อต้องการกำหนดว่าตัวแปรมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ผู้ใช้ต้องเพิ่มข้อจำกัดของปัญหา โดยการคลิกปุ่ม Add จากนั้นจะปรากฏหน้าต่าง Add Constraint ในช่อง Cell Reference ใส่ตัวแปรที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม เลือกเครื่องหมายของข้อจำกัดให้เป็น “int” จากนั้นจะปรากฏคำว่า “integer” ในช่อง Constraint สำหรับการกำหนดว่าตัวแปรเป็นแบบทวิภาคสามารถทำให้โดย ผู้ใช้ต้องเพิ่มข้อจำกัดโดยการคลิกปุ่ม Add เช่นเดียวกัน ใส่ตัวแปรที่ต้องการให้เป็นแบบทวิภาคในช่อง Cell Reference เลือกเครื่องหมายของข้อจำกัดให้เป็น “bin” จากนั้นจะปรากฏคำว่า “binary” ในช่อง Constraint ในกรณีที่มีขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของตัวแปรจำนวนเต็ม ผู้ใช้สามารถกำหนดขอบเขตของตัวแปรนี้เหมือนกับเป็นข้อจำกัดของปัญหา

เมื่อสร้างกำหนดตัวแปรตัดสินใจ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดแล้ว ผู้ใช้ต้องเลือก Options ในหน้าต่าง Solver Parameters เพื่อกำหนดค่า Tolerance ให้มีค่าเท่ากับ 0 และกำหนด Precision ให้มีค่าน้อย ๆ เช่น 0.1 หรือ 0.01 เพื่อให้โปรแกรมให้ค่าตัวแปรตัดสินใจที่เป็นจำนวนเต็ม เลือก Assume Linear Model จากนั้นคลิก OK เพื่อปิดหน้าต่าง Solver Options แล้วคลิก Solve โปรแกรม Excel จะประมวลผลตัวแบบ และปรากฏหน้าต่าง Solver Results ที่ระบุข้อความว่าโปรแกรมสามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดหรือไม่ หากมีผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ผู้ใช้สามารถเลือกให้ออกรายงาน Answer หรือเลือกเก็บผลเฉลยในเซลล์ของตัวแปรตัดสินใจ จะสังเกตว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มจะไม่ให้ผลการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ สำหรับ Standard Excel Solver สามารถประมวลผลการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่มีตัวแปรจำนวนเต็มไม่เกิน 100 ตัว

ตัวอย่างที่ 6.33 จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้ Microsoft Excel Solver

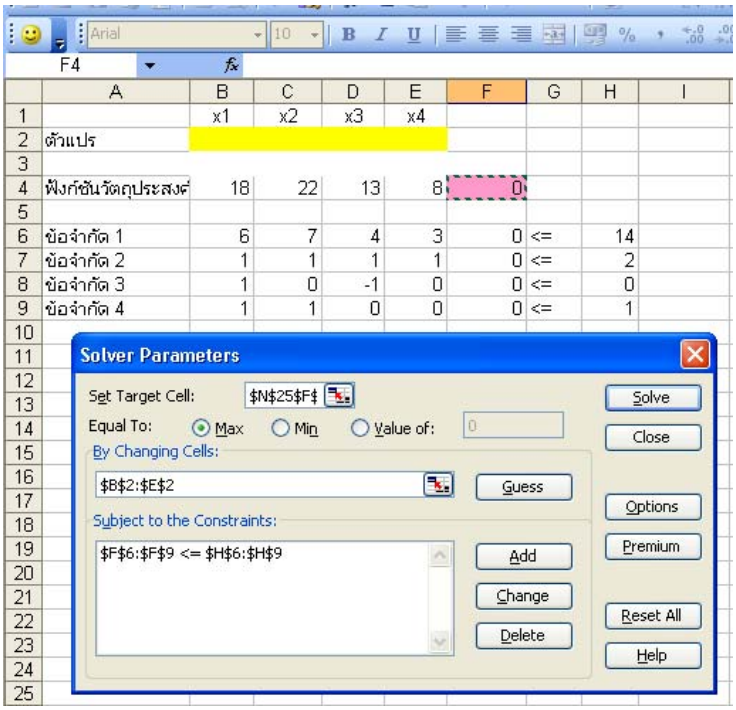
ค่าสูงสุด $z = 18x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 8x_4$

ข้อจำกัด $6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$

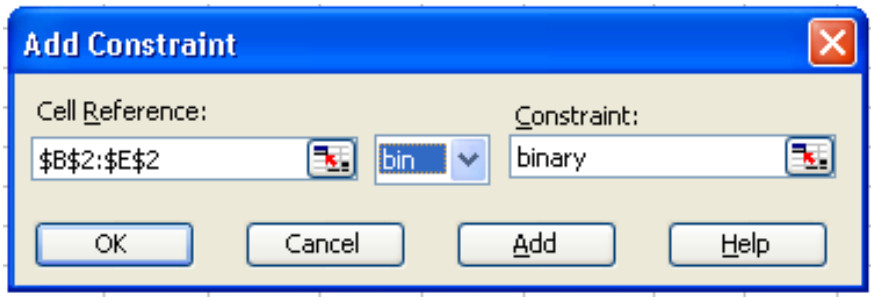
$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &\leq 2 \\
1x_1 - 1x_3 &\leq 0 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 1 \\
x_j \in \{0, 1\} \quad j &= 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

จากตัวแบบข้างต้น สามารถเขียนสูตร เพื่อสร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และข้อจำกัดทั้ง 4 ข้อจำกัดเหมือนกับการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในบทที่ 3 ดังรูปที่ 6.16 จากนั้นเพิ่มข้อจำกัดให้ตัวแปรตัดสินใจทั้ง 4 ตัวแปรเป็นแบบทวิภาค โดยเลือก Add ในหน้าต่าง Solver Parameters ทำให้ปรากฏหน้าต่าง Add Constraint ใส่ค่าเซลล์ B2:E2 ในช่อง Cell Refernces และเลือก “bin” ในช่องเครื่องหมายข้อจำกัด จากนั้นจะปรากฏข้อความว่า “binary” ในช่อง Constraints ดังรูปที่ 6.17 แล้วคลิก OK

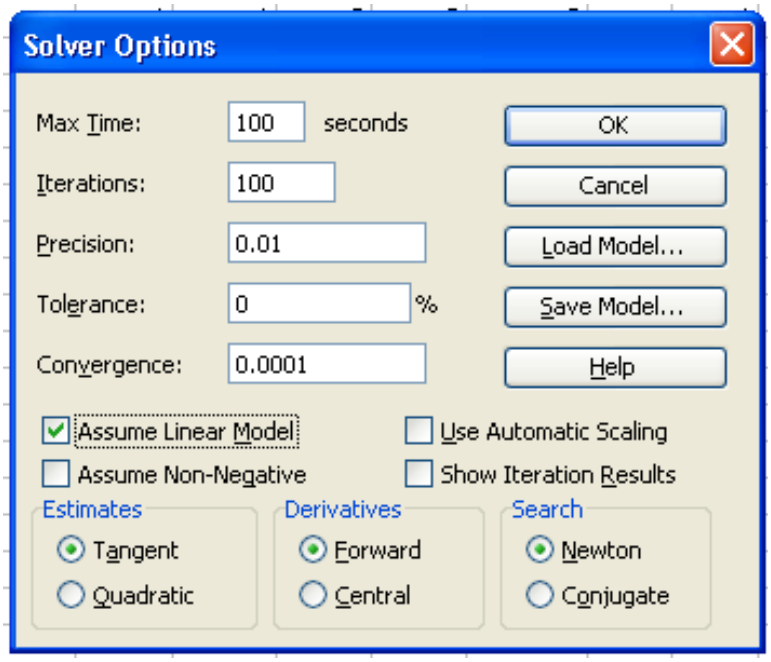
สำหรับการกำหนด Options เพิ่มเติม ดังรูปที่ 6.18 ใส่ค่า Precision = 0.01 และ Tolerance = 0 รวมทั้งเลือก Assume Linear Model จากนั้นคลิก OK เลือก Solve ในหน้าต่าง Solver Parameters เมื่อประมวลผลแล้วโปรแกรม Excel Solver จะให้หน้าต่าง Solver Results ดังรูปที่ 6.19 เพื่อให้ผู้ใช้เลือกว่าจะแสดงผลลัพธ์ที่ใด ในที่นี้เลือกให้แสดงผลลัพธ์ใน Sheet ใหม่จึงเลือก Answer ทำให้ได้รายงานผลลัพธ์ดังรูปที่ 6.20 ซึ่งผลเฉลยที่เหมาะสมคือ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 1$ โดยที่ $z = 35$



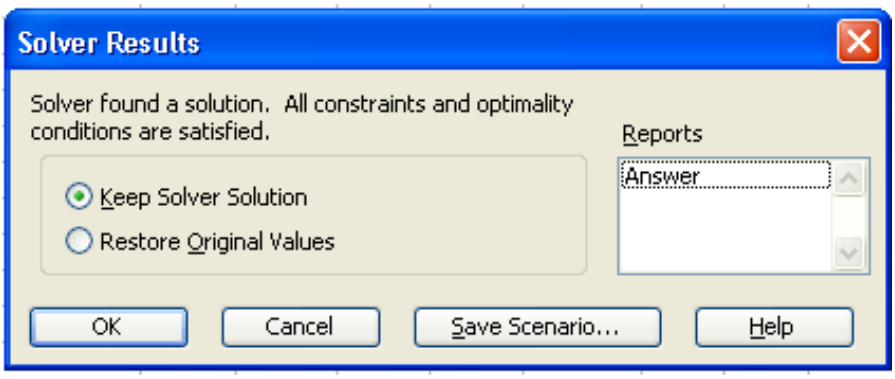
รูปที่ 6.16 การสร้างตัวแบบ



รูปที่ 6.17 หน้าต่างเพิ่มข้อจำกัด



รูปที่ 6.18 หน้าต่าง Solver Options



รูปที่ 6.19 หน้าต่าง Solver Results

Microsoft Excel 11.0 Answer Report
Worksheet: [Book1]model
Report Created: 12/2/2551 17:38:28

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$4	ฟังก์ชันวัตถุประสงค์	0	35

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$2	ตัวแปร x1	0	0
$C$2	ตัวแปร x2	0	1
$D$2	ตัวแปร x3	0	1
$E$2	ตัวแปร x4	0	0

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$F$6	ข้อจำกัด 1	11	$F$6<=$H$6	Not Binding	3
$F$7	ข้อจำกัด 2	2	$F$7<=$H$7	Binding	0
$F$8	ข้อจำกัด 3	-1	$F$8<=$H$8	Not Binding	1
$F$9	ข้อจำกัด 4	1	$F$9<=$H$9	Binding	0

รูปที่ 6.20 รายงานจากการประมวลผล

6.8 การหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม SAS

การเขียนโปรแกรม SAS สำหรับแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มนั้นประกอบด้วย 2 ขั้นตอนเช่นเดียวกับการเขียนโปรแกรมสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น กล่าวคือ ขั้นตอน DATA step เป็นขั้นตอนในการสร้างชุดข้อมูลแบบ SAS สำหรับตัวแบบซึ่งสามารถสร้างได้ทั้งรูปแบบเดนส์และสปารส์ โดยในการสร้างชุดข้อมูลนี้อาจมีเงื่อนไขหรือข้อจำกัดเพิ่มเติมเกี่ยวกับตัวแปรตัดสินใจ เช่น ตัวแปรแบบทวิภาค ตัวแปรเป็นจำนวนเต็มที่มีขอบเขตสูงสุดหรือค่าสูงสุดระบุไว้ เป็นต้น การกำหนดค่าของตัวแปรในลักษณะเหล่านี้สามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

การระบุตัวแปรทวิภาค ซึ่งโดยปกติหมายถึงการกำหนดให้ตัวแปรมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ในรูปแบบเดนส์จะสร้างข้อจำกัดใหม่ขึ้นมา 1 ข้อจำกัดซึ่งสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทวิภาคทุกตัวจะมีค่าเป็น 1 ส่วนตัวแปร Type (_type_) ให้มีค่าเป็น “Binary” พร้อมทั้งค่าทางขวามือ (_rhs_) มีค่าเป็น “ .” จากตัวแบบในตัวอย่างที่ 6.33 ต้องการกำหนดให้ตัวแปร $x_2, x_3 \in \{0,1\}$ สามารถระบุข้อจำกัดดังนี้

```
   data Integer_problem;
  input _row_ $3. x1    x2    x3    x4    _type_ $ _rhs_;
  datalines;
bin   0     1     1     0     binary      .
;
```

การระบุตัวแปรจำนวนเต็มและขอบเขตของตัวแปร จะระบุให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรจำนวนเต็มทุกตัวมีค่าเป็น 1 ส่วนตัวแปร Type (_type_) ให้มีค่าเป็น “Integer” พร้อมทั้งค่าทางขวามือ (_rhs_) มีค่าเป็น “ .” ส่วนการกำหนดขอบเขตของตัวแปรแต่ละตัวจะกำหนดให้มีสัมประสิทธิ์เท่ากับ 1 ถ้าเป็นขอบเขตบน แล้วจะตัวแปร _type_ เท่ากับ “LE” ถ้าเป็นขอบเขตล่าง แล้วจะตัวแปร _type_ เท่ากับ “GE” ส่วนค่าของตัวแปร _rhs_ เท่ากับขอบเขตที่กำหนด เช่น จากตัวแบบในตัวอย่างที่ 6.33 ต้องการกำหนดให้ตัวแปร $x_1 \leq 10$ โดยที่ x_1 เป็นจำนวนเต็ม จะสามารถระบุข้อจำกัดดังนี้

```
   data Integer_problem;
  input _row_ $5. x1    x2    x3    x4    _type_ $ _rhs_;
  datalines;
Integ 1     0     0     0     integer     .
Bound 1     0     0     0     Upperbd     10
;
```

ส่วนขั้นตอน PROC step สามารถเขียนคำสั่งได้เหมือนกันกับการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ยกเว้นผู้ใช้ต้องการกำหนด Options เพิ่มเติม เช่น จำนวนการทำซ้ำสูงสุด เป็นต้น สำหรับการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มเราสามารถกำหนดจำนวนรอบการคำนวณสูงสุดให้มีค่าเท่าใดก็ได้ดังนี้

“Maxit 1 = 999999” เป็นการระบุจำนวนรอบการคำนวณสูงสุด
“Maxit 2 = 999999” เป็นการระบุจำนวนรอบการคำนวณสูงสุด
“Maxit 3 = 999999” เป็นการระบุจำนวนรอบการคำนวณสูงสุด

ตัวอย่างที่ 6.34 จากตัวอย่างที่ 6.33 สามารถเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มได้ดังนี้

```
   data binary2;
  input _row_ $4. x1    x2    x3    x4    _type_ $ _rhs_;
  datalines;
obje  18    22    13    8     max   .
con1  6     7     4     3     le    14
con2  1     1     1     1     le    2
con3  1     0     -1    0     le    0
con4  1     1     0     0     le    1
bin   1     1     1     1     binary      .
;
    data;
```

```
    set binary2;
run;

proc lp;
run;
```

สำหรับผลลัพธ์จากการประมวลผลโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มโดยใช้โปรแกรม SAS นั้น จะได้รายงาน 3 ประเภท เช่นเดียวกับการประมวลผลการโปรแกรมเชิงจำนวนเส้นจำนวนเต็มจะได้รายงาน 3 ประเภท ดังรูปที่ 6.21 ถึง 6.23 ซึ่งแสดงผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ค่าตัวแปรและข้อจำกัด ตามลำดับ ทำให้ทราบว่าผลเฉลยของปัญหานี้คือ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ และ $x_4 = 1$ โดยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z) = 35

Solution Summary

Integer Optimal Solution

Objective Value	35
Phase 1 Iterations	0
Phase 2 Iterations	6
Phase 3 Iterations	0
Integer Iterations	0
Integer Solutions	1
Initial Basic Feasible Variables	6
Time Used (seconds)	0
Number of Inversions	4
Epsilon	1E-8
Infinity	1.797693E308
Maximum Phase 1 Iterations	100
Maximum Phase 2 Iterations	100
Maximum Phase 3 Iterations	99999999
Maximum Integer Iterations	100
Time Limit (seconds)	120

รูปที่ 6.21 รายงานผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

Variable Summary

Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	x1	DEGEN	BINARY	18	0	0
2	x2		BINARY	22	1	4
3	x3	BASIC	BINARY	13	1	0
4	x4		BINARY	8	0	-5
5	con1	BASIC	SLACK	0	3	0
6	con2		SLACK	0	0	-13
7	con3	BASIC	SLACK	0	1	0
8	con4		SLACK	0	0	-5

รูปที่ 6.22 รายงานค่าตัวแปร

Constraint Summary

Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	obje	OBJECTVE	.	0	35	.
2	con1	LE	5	14	11	0
3	con2	LE	6	2	2	13
4	con3	LE	7	0	-1	0
5	con4	LE	8	1	1	5

รูปที่ 6.23 รายงานข้อจำกัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลเฉลยโดยวิธีการแจงนับ

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 5x_2 + 5x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$

$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5$

$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3$

2. จงหาผลเฉลยโดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขตของปัญหาต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6$

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3$

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

ข้อจำกัด $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 20$

$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

4. จงหาผลเฉลยต่อไปนี้โดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$

ข้อจำกัด $2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 20$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 25$

$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 10$

$x_j \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม $j = 1, 2, 3, 4$

5. จงหาผลเฉลยโดยวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4$

ข้อจำกัด $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15$

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 10$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20$

$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \leq 5$

$x_j \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม $s = 1, 2, 3, 4$

6. จงจัดลำดับงาน 6 งานต่อไปนี้เข้าเครื่องจักร 1 เครื่อง เพื่อทำให้ความล่าช้าของงานรวมน้อยที่สุด โดยให้เวลาในการผลิตเป็นอิสระจากลำดับการผลิตของงานบนเครื่องจักร

ตารางที่ 6.9 เวลาการผลิตและกำหนดส่ง

งาน	เวลาในการผลิต (วัน)	กำหนดส่ง
1	10	20
2	7	10
3	3	4
4	6	10
5	12	20
6	11	30

7. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยการตัดระนาบแบบแดนท์ซิก

ค่าสูงสุด $z = 2x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด $2x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + 3x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

8. จากข้อ 3 จงหาผลเฉลยโดยวิธีการตัดระนาบแบบโกโมรี

9. จากข้อ 6 จงหาผลเฉลยโดยวิธีการตัดระนาบแบบโกโมรี

10. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้โปรแกรมแบบ SAS

ค่าสูงสุด $z = 5x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23}$

ข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 10$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 10$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 10$$
$$3x_{11} + 4x_{12} + \frac{7}{2}x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 3x_{23} \leq 90$$
$$x_{11}, x_{12} \geq 5$$
$$x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 4$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม } i, j = 1, 2, 3$$

11. จงหาผลเฉลยของปัญหาโดยใช้การโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Excel Solver

ค่าสูงสุด $z = 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 16x_4$

ข้อจำกัด

$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 \leq 80$$
$$\frac{5}{2}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \frac{3}{2}x_4 \geq 30$$
$$-\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 10$$
$$x_1 \geq 7$$
$$x_2 \geq 10$$
$$x_j \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม } j = 1, 2, 3, 4$$

บรรณานุกรม

Balakrishman, N., Render, B., Stair, R.M. (2007). *Managerial Decision Modeling with Spreadsheet*, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Baker, K.R. (2006). *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, CA, USA.

Bronson, R., Naadimuthu, G. (1997). *Schaum's Outlines: Theory and Problem of Operations Research*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Frontline (2008). Excel Solver Tutorial from Frontline Systems. **http://www.solver.com/**

Garefinkel, R.S., Nemhauser, G.L. (1972). *Integer Programming*. John Wiley&Sons, New York, USA

Hiller, F.S. (1995). *Introduction to Operations Research*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Hu, T.C. (1969). *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley, California, USA.

Jensen, P. (2003). *Operations Research Models and Methods*, John Wiley and Sons, New York, USA.

Lawler, E.L. (1976) *Combinatorial Optimization:Networks and Methods*, Holt, Rinehart &Winston, New York, USA.

Taha, H.A. (1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, New York, USA.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research*, 4th edition, Thomson, NY, USA.

สุดา เถลิงตระการ (2550). การวิจัยดำเนินงาน1, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร นครปฐม

ประกอบ จิรกิติ (2535) การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม โครงการส่งเสริมเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ กรุงเทพฯ

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม
(Mixed Integer Programming)

7

จากบทที่ 2 ได้แสดงถึงการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ที่มีตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าเป็นได้ทั้งจำนวนเต็มและไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ จากนั้นในบทที่ 5 ได้กล่าวถึง การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่มีตัวแปรตัดสินใจเป็นมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ปัญหาในทางธุรกิจและอุตสาหกรรมหลายปัญหา ที่มีตัวแปรตัดสินใจบางตัวต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็ม หรือมีค่าเป็นจำนวนเต็มแบบทวิภาค ขณะที่ตัวแปรตัดสินใจที่เหลือเป็นตัวแปรที่ไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ ปัญหาในลักษณะนี้เมื่อนำมาสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ เพื่อหาผลเฉลยของปัญหา จะเรียกตัวแบบประเภทนี้ว่า ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม (Mixed integer linear programming model)

ในบทนี้จึงขอกล่าวถึงการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม สำหรับปัญหาการหาที่ตั้งของสิ่งอำนวยความสะดวก (Facility location) ปัญหาการออกแบบข่ายงาน (Network design) และปัญหาการวางแผนการผลิต (Production planning)

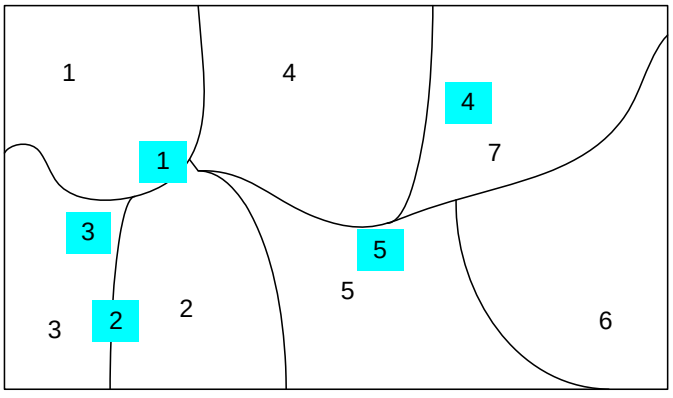
7.1 ปัญหาการหาตำแหน่งของศูนย์บริการหรืออุปกรณ์

การสร้างตัวแบบ เพื่อหาว่า ศูนย์บริการ อุปกรณ์ สิ่งอำนวยความสะดวก หรือคลังสินค้าใดบ้างควรจะเปิดให้บริการแก่ลูกค้าตามปริมาณความต้องการลูกค้า ภายใต้ต้นทุนรวมต่ำที่สุด โดยทั่วไปต้นทุนจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ต้นทุนดำเนินงานที่ผันแปรตามจำนวนหน่วยที่ให้บริการ และต้นทุนคงที่ตามปริมาณของ ศูนย์บริการ อุปกรณ์ สิ่งอำนวยความสะดวก หรือ

คลังสินค้าที่เปิดให้บริการ โดยทั่วไปเราจะพิจารณาต้นทุนคงที่ต่อช่วงเวลา เช่น ต้นทุนคงที่ต่อเดือน เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้บางครั้งแรกว่า *ปัญหาที่มีค่าใช้จ่ายคงที่มาเกี่ยวข้อง (Fixed-charge problem)* (Taha, 1997; Baker, 2006) อย่างไรก็ตาม ศูนย์บริการ สิ่งอำนวยความสะดวก หรือคลังสินค้า มักมีความสามารถในการทำงานต่อช่วงเวลาได้ในระดับหนึ่ง ตราบใดที่ระดับความต้องการรับบริการยังไม่เกินความสามารถสูงสุดของอุปกรณ์หรือสิ่งอำนวยความสะดวกเหล่านี้ จะมีค่าใช้จ่ายหรือต้นทุนคงที่ต่อช่วงเวลา หากระดับความต้องการรับบริการสูงกว่าความสามารถสูงสุด อาจส่งผลทำให้ต้นทุนคงที่นั้นมีค่าเพิ่มขึ้นได้ หรือในบางกรณีอาจไม่สามารถเพิ่มความสามารถสูงสุด เพื่อรองรับปริมาณความต้องการของลูกค้าที่สูงขึ้นได้

ปัญหาประเภทนี้ที่เราต้องคำนึงถึง ความสามารถสูงสุดของ ศูนย์บริการ อุปกรณ์ สิ่งอำนวยความสะดวก หรือคลังสินค้า จะเรียกว่า การหาที่ตั้งของสิ่งอำนวยความสะดวกโดยคำนึงถึงความสามารถสูงสุด (Capacitate facility location) ขณะที่ปัญหาที่ไม่ต้องคำนึงถึงความสามารถสูงสุดจะเรียกว่า การหาที่ตั้งของสิ่งอำนวยความสะดวกโดยไม่คำนึงถึงความสามารถสูงสุด (Uncapacitate facility location)

ตัวอย่างที่ 7.1 ร้านขายอาหารส่งถึงบ้าน (Home delivery) แห่งหนึ่ง กำลังพิจารณาจัดตั้งร้านจัดส่งเพื่อให้บริการลูกค้าใน 7 โซน (Zone) ดังรูป 7.1 โดยวงกลมทั้ง 5 แห่งแทนตำแหน่งที่คาดว่าจะเป็นที่ตั้งของร้าน โดยการประมาณต้นทุนคงที่ต่อปี แสดงดังตารางที่ 7.1 ซึ่งต้นทุนนี้ประกอบด้วย ค่าจ้างบุคลากร ค่าอุปกรณ์ ค่าเช่าอาคาร และค่าใช้จ่ายสำนักงานต่าง ๆ จากการศึกษาต้นทุนในการขนส่งอาหารไปยังบ้านลูกค้าในบริเวณต่าง ๆ แสดงดังตารางที่ 7.2 นอกจากนี้ ทางบริษัทได้ประมาณยอดขายในแต่ละบริเวณ แสดงในตารางที่ 7.2 เช่นกัน จงหาว่าร้านอาหารแห่งนี้ควรตั้งร้านจัดส่งในตำแหน่งใดบ้าง เพื่อให้เพียงพอกับความต้องการ และมีต้นทุนรวมต่ำที่สุด



j หมายเลขแทนโซนลูกค้าที่ j และ i ที่ตั้งของร้านจัดส่งที่ i

รูปที่ 7.1 พื้นที่ให้บริการ

ตารางที่ 7.1 ต้นทุนคงที่

ตำแหน่งร้านจัดส่งที่	ต้นทุนคงที่ต่อเดือน (บาท)	ความสามารถในการจัดส่ง (หน่วย/เดือน)
1.	460,000	2,000
2.	300,000	1,500
3.	350,000	1,600
4.	400,000	1,800
5.	400,000	1,800

ตารางที่ 7.2 ต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยและความต้องการ

หน่วย : บาทต่อหน่วย

โซน	ตำแหน่งร้านจัดส่งที่					ความต้องการในแต่ละโซน (หน่วย/เดือน)
	1	2	3	4	5	
1	3	4	6	10	4	500
2	4	2	2	8	9	400
3	5	2	1	5	8	600
4	1	4	8	10	5	400
5	3	9	10	5	2	300
6	5	10	8	4	1	600
7	10	8	3	1	2	500

ให้ C_j แทนความสามารถสูงสุดของร้านจัดส่งในตำแหน่งที่ j $j = 1, 2, \ldots, 5$

D_i แทนปริมาณความต้องการในโซนที่ i $i = 1, 2, \ldots, 7$

d_{ij} แทนต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยจากร้านส่ง j ไปยังโซนที่ i

f_j แทนต้นทุนคงที่ต่อเดือน เมื่อมีการตั้งร้านในตำแหน่ง j

x_{ij} แทนปริมาณจัดส่งจากร้าน j ไปยังลูกค้าในโซนที่ i

$y_j = 1$ ถ้าร้านจัดส่งตั้งในตำแหน่งที่ j $y_j = 0$ ถ้าร้านจัดส่งไม่ตั้งในตำแหน่งที่ j

ค่าต่ำสุด $$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{7} D_j d_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{5} f_j y_j$$

ข้อจำกัด

(1) ลูกค้าในแต่ละโซนได้รับบริการจากร้านจัดส่ง 1 ร้าน

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad \forall_i$$

(2) ปริมาณจัดส่งไม่เกินความสามารถสูงสุดของร้าน

$$\sum_{i=1}^{7} D_i x_{ij} \leq C_j y_j \qquad \forall_j$$

(3) ข้อจำกัดของตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall_{i,j}$$
$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall_j$$

จากการประมวลผล พบว่า ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $y_3 = y_5 = 1$ $x_{13} = 500$ $x_{23} = 400$ $x_{33} = 600$ $x_{45} = 400$ $x_{55} = 300$ $x_{65} = 600$ และ $x_{75} = 500$ โดย $z = 708{,}600$ บาท นั่นคือจะตั้งร้านจัดส่งในตำแหน่งที่ 3 และ 5 โดยร้านในตำแหน่งที่ 3 จะจัดส่งสินค้าให้ลูกค้าในโซน 1 2 และ 3 โดยปริมาณขนส่งเท่ากับ 500 400 และ 600 หน่วยตามลำดับ ส่วนร้านในตำแหน่งที่ 5 จะจัดส่งสินค้าให้ลูกค้าในโซน 4 5 6 และ 7 โดยปริมาณขนส่งเท่ากับ 400 300 600 และ 500 หน่วยตามลำดับ

สำหรับตัวอย่างการประยุกต์ใช้การโปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาการหาตำแหน่งที่ตั้งของศูนย์บริการหรืออุปกรณ์สามารถดูรายละเอียดได้จาก Lapin (1991) Radin (1998) และ Jensen (2003).

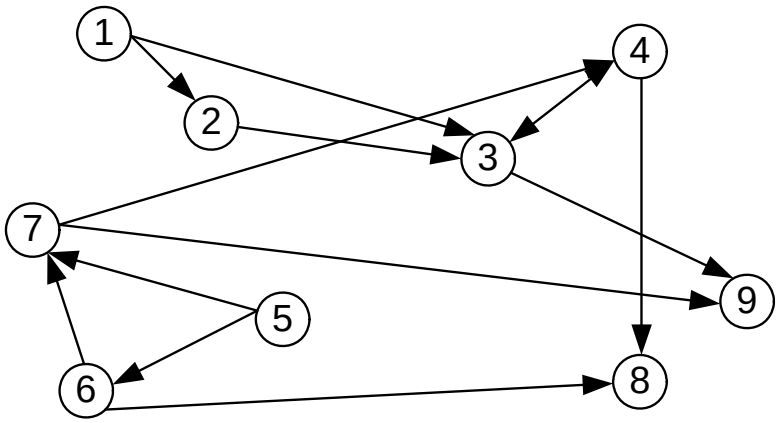
7.2 ตัวแบบการออกแบบข่ายงาน

หัวข้อการเลือกตำแหน่งของอุปกรณ์อำนวยความสะดวกในหัวข้อที่ผ่านมา เป็นการพิจารณาโหนดใดในข่ายงาน (Network) ควรจะเปิดใช้หรือเปิดให้บริการ ในขณะที่หัวข้อนี้เป็นการระบุเส้นทางในการเดินทางหรือขนส่งระหว่างโหนดต่าง ๆ โดยทั่วไปต้นทุนหรือค่าใช้จ่ายตามเส้นทางต่าง ๆ มักผันแปรตามระยะทางหรือปริมาณการขนส่ง จึงถือได้ว่าต้นทุนในส่วนนี้เป็นต้นทุนผันแปร ในทางปฏิบัติการขนส่งอาจขึ้นอยู่กับจำนวนเที่ยวการขนส่ง ระยะทาง และ/หรือ ขนาดของพาหนะ นอกจากนี้ ยังมีค่าสัมปทานการขนส่ง ซึ่งเป็นต้นทุนหรือค่าใช้จ่ายที่ไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณขนส่ง แต่ขึ้นอยู่กับว่าถ้าเส้นทางนี้มีการเปิดใช้ขนส่ง การสร้างตัวแบบเพื่อระบุเส้นทางที่จะเปิดใช้ โดยตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็มแทนเส้นทางต่าง ๆ ที่ต้องการตัดสินใจว่าจะเปิดใช้หรือไม่ ข้อจำกัดในตัวแบบมักประกอบด้วย สมดุลย์ของปริมาณเข้า–ออก และปริมาณที่เหลืออยู่ในแต่ละโหนด ความสามารถในการขนส่งสูงสุดในแต่ละเส้นทาง เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 7.2 ระบบการกำจัดขยะของเทศบาลเมืองแห่งหนึ่ง ประกอบ จุดจัดเก็บขยะ 5 จุด จุดคัดแยกขยะ 3 จุด และจุดกำจัดขยะ 1 จุด ดังรูปที่ 7.2 โดยแต่ละเส้นทางการขนส่งมีต้นทุนคงที่เมื่อมีการขนส่งผ่านเส้นทางนั้น และต้นทุนผันแปรตามปริมาณที่จัดเก็บผ่านเส้นทางนั้น ต้นทุนคงที่และต้นทุนผันแปร แสดงดังตารางที่ 7.3 จากการสำรวจปริมาณขยะทิ้ง 5 จุด และความสามารถในการจัดเก็บขยะที่คัดแยกแล้วของจุดคัดแยกขยะ แสดงดังตารางที่ 7.4 ผู้จัดการระบบกำจัดขยะนี้ต้องการทราบว่า ควรจะขนขยะผ่านเส้นทางใดบ้าง จำนวนเท่าใด เพื่อนำขยะไปคัดแยกและกำจัด โดยพิจารณาให้ต้นทุนรวมต่ำที่สุด

ตัวอย่างที่ 7.3 ต้นทุนคงที่และต้นทุนผันแปร

(i, j)	ต้นทุนคงที่ (บาท/วัน)	ต้นทุนผันแปร (บาท/ตัน)
(1, 2)	300	21
(1, 3)	350	30
(2, 3)	250	22
(3, 4)	700	60
(3, 9)	600	40
(4, 3)	3,500	8
(4, 8)	2,000	45
(5, 6)	800	60
(5, 7)	700	40
(6, 7)	850	50
(6, 8)	500	55
(7, 4)	600	95
(7, 9)	1,200	80
(8, 9)	4,000	5



รูปที่ 7.2 แสดงข่ายงานการจัดเก็บและกำจัดขยะ

ตารางที่ 7.4 ความสามารถในการจัดเก็บและปริมาณขยะต่อวัน

จุด	ปริมาณขยะ (ตัน/วัน)	ความสามารถในการจัดเก็บ (ตัน/วัน)
1	30	–
2	5	–
3	–	15
4	35	–
5	25	–
6	10	–
7	–	15
8	–	0
9	–	0

1. กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

x_{ij} แทนปริมาณขยะที่ขนจากจุด i ไปยังจุด j

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ามีการขนขยะจากจุด i ไปยังจุด j} \\ 0 & \text{ถ้าไม่มีการขนขยะจากจุด i ไปยังจุด j} \end{cases}$$

2. ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด

$$\begin{aligned} z = {} & 21x_{12} + 30x_{13} + 22x_{23} + 60x_{34} + 40x_{39} + 8x_{43} \\ & + 45x_{48} + 60x_{56} + 40x_{57} + 50x_{67} + 55x_{68} + 95x_{74} \\ & + 80x_{79} + 5x_{89} + 300y_{12} + 350y_{13} + 250y_{23} \\ & + 700y_{34} + 600y_{39} + 3{,}500y_{43} + 2{,}000y_{48} + 800y_{56} \\ & + 700y_{57} + 850y_{67} + 500y_{68} + 600y_{74} + 1{,}200y_{79} \\ & + 400y_{89} \end{aligned}$$

3. ข้อจำกัด

(1) ปริมาณเข้า–ออก และที่เหลืออยู่แต่ละจุด

$$\begin{aligned} -x_{12} - x_{13} &= -30 && \text{(จุดที่ 1)} \\ +x_{12} - x_{23} - x_{24} &= -5 && \text{(จุดที่ 2)} \\ +x_{13} + x_{23} + x_{43} - x_{34} - x_{39} &= 15 && \text{(จุดที่ 3)} \\ +x_{24} + x_{34} + x_{74} - x_{43} - x_{48} &= -35 && \text{(จุดที่ 4)} \\ -x_{56} - x_{57} &= -25 && \text{(จุดที่ 5)} \\ +x_{56} + x_{76} - x_{68} &= -10 && \text{(จุดที่ 6)} \\ +x_{57} - x_{76} - x_{74} - x_{79} &= 15 && \text{(จุดที่ 7)} \\ +x_{48} + x_{68} + x_{98} &= 0 && \text{(จุดที่ 8)} \\ +x_{39} + x_{79} - x_{98} &= 0 && \text{(จุดที่ 9)} \end{aligned}$$

(2) ปริมาณการไหลที่เป็นไปได้สูงสุด (Maximum possible flow)

$$\begin{aligned} &0 \le x_{12} \le 30y_{12} && 0 \le x_{13} \le 30y_{13} \\ &0 \le x_{23} \le (30+5)y_{23} && 0 \le x_{24} \le (30+5)y_{23} \\ &0 \le x_{34} \le (30+5+15)y_{34} && 0 \le x_{39} \le 85y_{39} \\ &0 \le x_{43} \le 125y_{43} && 0 \le x_{48} \le 125y_{48} \\ &0 \le x_{56} \le 25y_{56} && 0 \le x_{57} \le 25y_{57} \\ &0 \le x_{67} \le 40y_{67} && 0 \le x_{68} \le 50y_{68} \\ &0 \le x_{74} \le 40y_{67} && 0 \le x_{79} \le 40y_{79} \\ &0 \le x_{89} \le (85+40)y_{89} \end{aligned}$$

(3) ค่าตัวแปรตัดสินใจ

$y_{ij} \in \{0, 1\}$ ทุกเส้นทาง

$x_{ij} \ge 0$

การประยุกต์ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมกับปัญหาข่ายงานนั้นมีอยู่อย่างแพร่หลาย อาทิเช่น Milan, Fernandez and Aragones (2006) ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมสำหรับแก้ปัญหาการตัดอ้อยและขนส่งจากไร่ไปยังโรงหีบอ้อย วัตถุประสงค์ของตัวแบบคือเพื่อทำให้ต้นทุนการตัดและการขนส่งดังกล่าวต่ำที่สุด โดยมีข้อจำกัดในระดับปฏิบัติการคือ (1) ปริมาณอ้อยที่จะต้องส่งให้โรงหีบอ้อยในแต่ละวัน (2) ความจุของโกดังเก็บอ้อย (3) สมการการเข้า-ออกจากโกดัง (4) ความสามารถในการขนส่งทางถนน และ (5) ข้อจำกัดเกี่ยวกับความสามารถในการตัดด้วยวิธีต่าง ๆ และความสามารถในการปลูกทดแทน Bilgen and Ozkarahan (2007) ได้สร้างตัวแบบการวางแผนผสมและการขนส่งข้าวสาลีลงเรือบรรทุกสินค้า เพื่อทำให้ต้นทุนการผสม การยกขนสินค้า การเก็บรักษาสินค้าในคลัง และการขนส่งรวมต่ำที่สุด นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณการผสมในแต่ละช่วงเวลา ความสามารถของท่าเรือ (Port) ทั้งต้นทางและปลายทาง และปริมาณความต้องการสินค้า

7.3 การวางแผนการผลิต

การวางแผนการผลิตสินค้าในอุตสาหกรรมหลายประเภทที่มีการผลิตสินค้าหลายชนิดบนสายการผลิตเดียวกัน ทำให้แผนกผลิตจะต้องมีการติดตั้งและจัดเตรียมอุปกรณ์ต่าง ๆ สำหรับการผลิตสินค้าชนิดถัดไป เวลาที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงการผลิตจากสินค้าหนึ่งไปผลิตสินค้าอีกชนิดหนึ่ง เรียกว่า *เวลาติดตั้ง (Setup time)* เมื่อเราติดตั้งสายการผลิตเสร็จแล้ว จะทำการผลิตสินค้าต่อไป โดยในที่นี้จะเรียกว่าเป็น*เวลาในการผลิต (Processing time)* โดยทั่วไปในการผลิตสินค้าจำนวนหนึ่งเวลาในการผลิตนี้จะมีค่าคงที่ต่อชิ้น หากมีการผลิตสินค้าล็อตเล็ก ทำให้จำนวนครั้งการติดตั้งมากขึ้น ทำให้ต้นทุนรวมในการติดตั้งและเวลารวมในการติดตั้งจะสูง ขณะที่การผลิตล็อตใหญ่ ๆ ทำให้จำนวนครั้งการติดตั้งน้อยลง ส่งผลให้ต้นทุนและเวลารวมในการติดตั้งจะต่ำลง อย่างไรก็ตาม การผลิตล็อตอาจใหญ่ อาจมีต้นทุนในการเก็บรักษาตามมาด้วย ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7.3 การวางแผนการผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ สินค้า A และ B ที่มีขั้นตอนการผลิตเพียงขั้นตอนเดียว และมีเครื่องจักรที่ใช้เพียง 1 เครื่อง ดังนั้น สินค้าทั้ง 2 นี้จะต้องใช้เครื่องจักรเดียวกัน ในการติดตั้งอุปกรณ์และเครื่องจักร (Setup) เพื่อผลิตสินค้า A และ B คิดเป็นมูลค่า 1,000 และ 500 บาทต่อครั้ง ส่วนต้นทุนการผลิตต่อชิ้นยังคงเท่าเดิมไม่ว่าจะผลิตในขนาดล็อตเท่าใด ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสินค้า A และ B เท่ากับ 20 และ 30 บาทต่อชิ้นต่อวัน ส่วนความต้องการสินค้า A และ B ในแต่ละวันแสดงดังตารางที่ 7.5 ในการวางแผนนี้ต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดเมื่อใด จำนวนการผลิตแต่ละครั้งเท่ากับเท่าใด โดยกำหนดให้จำนวน

สินค้าคงคลังต้นงวดของสินค้าแต่ละชนิดเท่ากับ 10 ชิ้น และจำนวนสินค้าคงคลังของสินค้าแต่ละชนิดสิ้นในวันที่ 5 เท่ากับ 0 ชิ้น

จากการตรวจสอบความสามารถของการผลิตบนเครื่องจักรนี้ พบว่า ปริมาณการผลิตสูงสุดสำหรับสินค้า A และ B เท่ากับ 10 และ 20 ชิ้นต่อวัน ในการผลิตแต่ละวันจะผลิตเพียงสินค้าเดียว

ให้ D_{At} แทนความต้องการสินค้า A ในวันที่ t

D_{Bt} แทนความต้องการสินค้า B ในวันที่ t

1. กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

A_t แทนปริมาณการผลิตสินค้า A ในวันที่ t

B_t แทนปริมาณการผลิตสินค้า B ในวันที่ t

I_t แทนปริมาณสินค้าคงคลัง A เมื่อสิ้นวันที่ t

J_t แทนปริมาณสินค้าคงคลัง B เมื่อสิ้นวันที่ t

$$x_t = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อมีการผลิตสินค้า A ในวันที่ t} \\ 0 & \text{เมื่อไม่มีการผลิตสินค้า A ในวันที่ t} \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อมีการผลิตสินค้า B ในวันที่ t} \\ 0 & \text{เมื่อไม่มีการผลิตสินค้า B ในวันที่ t} \end{cases}$$

2. ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $$z = \sum_{t=1}^{5} \left(1{,}000x_t + 500y_t + 20I_t + 30J_t\right)$$

3. ข้อจำกัด

(1) สมการการผลิต

$$I_t = I_{t-1} + A_t - D_{At} \qquad t = 1, 2, \ldots, 5$$

$$J_t = J_{t-1} + B_t - D_{Bt}$$

(2) ปริมาณสินค้าต้นงวดและปลายงวด

$$I_0 = 10, \qquad J_0 = 10$$

$$I_5 = 0, \qquad J_5 = 0$$

(3) กำลังการผลิต

$$A_t \leq 10x_t$$

$$B_t \leq 20y_t$$

(4) ผลิตสินค้าเพียงชนิดเดียวในแต่ละวัน

$$x_t + y_t \leq 1$$

(5) ตัวแปรตัดสินใจ

$$A_t, B_t, I_{At}, I_{Bt} \geq 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, 5$$

$$x_t, y_t \in \{0, 1\}$$

ตารางที่ 7.5 ปริมาณความต้องการสินค้า A และ B (ชิ้น)

วันที่	ปริมาณความต้องการสินค้า A	ปริมาณความต้องการสินค้า B
1	5,000	3,000
2	5,500	5,000
3	6.000	6,000
4	5,000	3,000
5	4,000	2,000

หมายเหตุ ในการวางแผนการผลิต อาจมีเงื่อนไขการผลิตเป็นช่วงได้ หรือการผลิตเป็นล็อต ที่มีขนาดของล็อตกำหนดไว้ชัดเจน เช่น ให้ x แทนปริมาณการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ถ้ามีการผลิตสินค้าชนิดนี้ต้องผลิตในปริมาณตั้งแต่ 50 ถึง 100 ชิ้น มิฉะนั้นจะไม่ผลิต การสร้างข้อจำกัดปัญหาโดย กำหนดให้ y เป็นตัวแปรแบบทวิภาค ถ้า $y = 1$ แล้วจะมีการผลิตสินค้าชนิดนี้ แต่ถ้า $y = 0$ แล้วจะไม่ผลิตสินค้าชนิดนี้ เราสามารถสร้างข้อจำกัดเป็น 2 ข้อจำกัดคือ $x \geq my$ และ $x \leq My$ โดย m แทนขอบเขตล่าง (Lower bound) ซึ่งในตัวอย่างคือ 50 ชิ้น และ M แทนขอบเขตล่าง (Upper bound) ซึ่งในตัวอย่างคือ 100 ชิ้น

นอกจากการวางแผนด้านการผลิตแล้ว ยังมีปัญหาด้านอื่น ๆ ที่ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมสามารถนำไปประยุกต์ใช้ เช่น การวางแผนการขนส่งสินค้า Ronen (2002) ได้ศึกษาปัญหาการวางแผนการจัดส่งสินค้าประเภทที่เป็นของเหลว การวางแผนเริ่มจากการผลิตแล้วใส่ไว้ในแทงค์ จากนั้นจึงขนส่งมายังปลายทางโดยทางเรือ Ronen ได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมที่มีวัตถุประสงค์เพื่อทำให้ต้นทุนต่ำสุด ภายใต้ข้อจำกัด คือ ความจุของแทงค์ที่โรงงาน ความจุของเรือลำเลียง เวลาในการขนส่ง จุดต้นทาง-ปลายทาง และปริมาณสินค้าที่จัดส่ง เพื่อกำหนดวิธีการขนส่งสินค้าประเภทนี้จากผู้ผลิตไปยังลูกค้าปลายทาง ในการศึกษาการกลึงเหล็กแท่งของโรงงานแห่งหนึ่ง ซึ่งมีการตัดแท่งเหล็กให้มีขนาดความยาวที่ต้องการ โดยไม่ให้มีเศษเหลืออยู่ Hajizadeh and Lee (2007) ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม เพื่อทำให้ผลรวมของเวลาในการตัดของเครื่องตัดและเวลาปรับเปลี่ยนระยะการตัดของใบมีดนั้นต่ำที่สุด การตัดบนเครื่องตัดนี้จะสามารถใส่ใบมีดได้ไม่เกิน 4 ใบทำให้สามารถตัดชิ้นงานได้สูงสุด 5 ท่อน นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดของตัวแบบคือ (1) ความต้องการสินค้าของลูกค้า (2) ความยาวของเหล็กแท่งที่เป็นวัตถุดิบ (3) รูปแบบ (Pattern) การตัด และ(4) จำนวนชิ้นงานพิเศษที่มีความยาวมากซึ่งสามารถตัดทางด้านหัวหรือท้ายของแท่งเหล็กเท่านั้น Koch, Konig, and Wascher (2008) ได้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม มาใช้ในการวางแผนการตัดไม้แผ่น เพื่อให้ต้นทุนรวมต่ำสุด โดยพิจารณาความต้องการไม้แผ่นในแต่ละขนาดและเศษไม้ที่เหลือให้สามารถนำเหลือเศษไปใช้ประโยชน์ให้ได้มากที่สุด

สำหรับการแผนการปฏิบัติการ เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดในการปฏิบัติ Bazargan (2007) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการทำภาระกิจของผู้โดยสาร ที่ไปขัดขวางในช่องทางเดินบนเครื่องบน (Boarding interferences) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อมีผู้โดยสารคนหนึ่งขึ้นบนเครื่องบินและกำลังเก็บสัมภาระของตนในตู้เก็บของเหนือศรีษะ ทำให้เขาขวางทางเดินของผู้โดยสารท่านอื่นที่เดินตามหลังมาไม่สามารถเดินไปยังที่นั่งได้ บางครั้งอาจส่งผลต่อความล่าช้าของเครื่องบินที่จะบินขึ้น Bazargan จึงใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมสำหรับจัดลำดับในการเรียกผู้โดยสารขึ้นเครื่องบิน เพื่อทำให้จำนวนการขัดขวางกันบนเครื่องบน นั้นมีค่าต่ำสุด โดยมีข้อจำกัดในแง่ขั้นตอนในการเก็บสัมภาระ และต่ำแหน่งที่นั่งที่จะก่อให้เกิดการขัดขวางกัน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. บริษัท พิบูลย์กิจ จำกัด ผู้ผลิตน้ำดื่มรายใหญ่แห่งหนึ่งในประเทศไทย ต้องการตัดสินใจเลือกสร้างคลังสินค้า 2 แห่งจากสถานที่ตั้งที่เลือกไว้ 4 แห่ง คือ คลังสินค้า A B C และ D จากการศึกษาพื้นที่ในการก่อสร้างและสำรวจแรงงาน พบว่า ต้นทุนคลังสินค้า แบ่งเป็นต้นทุนคงที่ต่อเดือน และต้นทุนผันแปรตามปริมาณสินค้าที่ส่งจากคลังไปยังพื้นที่ลูกค้าโดยแบ่งพื้นที่ลูกค้าเป็น 3 พื้นที่ คือ ภาคเหนือ ภาคใต้และภาคตะวันออกเฉียง- เหนือ ดังแสดงในตารางที่ 7.6 นอกจากนี้ ยังได้ศึกษาขนาดของคลังแต่ละแห่งที่คาดว่าจะสร้าง ดังตารางที่ 7.7 สำหรับการสำรวจความต้องการสินค้าของลูกค้าในแต่ละพื้นที่ แสดงในตารางที่ 7.8
   จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม โดยให้ต้นทุนรวมต่ำสุด เพื่อให้ทราบว่าควรเปิดคลังที่ใดและจะขนส่งสินค้าจากคลังใดไปยังลูกค้าบริเวณใดบ้าง

ตารางที่ 7.6 ต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยสินค้า (บาท)

คลังสินค้า	ภาคเหนือ	ภาคใต้	ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ
A	4	7	9
B	6	3	12
C	5	6	6
D	8	10	3

ตารางที่ 7.7 ความสามารถของคลังสินค้าและต้นทุนคงที่

คลังสินค้า	ความสามารถของคลังสินค้า (หน่วย)	ต้นทุนคงที่ (บาท/เดือน)
A	25,000	100,000
B	26,000	80,000
C	28,000	120,000
D	27,000	70,000

ตารางที่ 7.8 ปริมาณความต้องการสินค้าต่อเดือน

บริเวณลูกค้า	ปริมาณความต้องการ (หน่วยต่อเดือน)
ภาคเหนือ	20,000
ภาคใต้	18,000
ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ	12,000

2. โรงงานเฟอร์นิเจอร์ไม้แห่งหนึ่ง มีความสามารถในการผลิตไม่จำกัด เนื่องจากความต้องการสินค้ามีมาก สินค้าของโรงงานแห่งนี้คือ โต๊ะ ตู้หนังสือ และเก้าอี้ ในการผลิตสินค้าแต่ละชนิด โรงงานจะต้องเช่าเครื่องมือที่เหมาะสมมาใช้ในการผลิต โดยค่าเช่าต่อสัปดาห์ของเครื่องมือสำหรับผลิตโต๊ะ ตู้หนังสือ และเก้าอี้ เท่ากับ 20,000 25,000 และ 15,000 บาท ตามลำดับ ความต้องการแรงงานและปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตสินค้าแต่ละชนิด รวมทั้งราคาขายสินค้า แสดงดังตารางที่ 7.9 ในการวางแผนสัปดาห์หนึ่ง ซึ่งมีแรงงาน 2,500 ชั่วโมง และจำนวนไม้แผ่นที่สามารถใช้ในการผลิตเท่ากับ 4,000 ตารางฟุต จงวางแผนการผลิตสินค้าเพื่อทำให้ได้กำไรสูงสุด

ตารางที่ 7.9 ปริมาณทรัพยากรการผลิตสินค้า 1 หน่วย และราคาขายสินค้า

สินค้า	แรงงาน (ชั่วโมงต่อหน่วย)	ไม้แผ่น (ตารางฟุต)	ราคาขาย (บาท)	ต้นทุนผันแปร (บาท)
โต๊ะ	3	10	1,200	820
ตู้หนังสือ	4	12	1,450	1,000
เก้าอี้	2	6	650	400

3. สำนักพิมพ์แห่งหนึ่งกำลังพิจารณาที่จะจัดพิมพ์หนังสือแบบเรียน (Textbook) 5 ประเภท คือ B1 B2 B3 B4 และ B5 จากการสำรวจความต้องการหนังสือแต่ละประเภท ต้นทุนคงที่ ต้นทุนผันแปรต่อเล่มที่ผลิต และราคาขายต่อเล่มของหนังสือแบบเรียนแต่ละประเภท แสดงดังตารางที่ 7.10 นอกจากนี้ สำนักพิมพ์แห่งนี้มีความสามารถในการผลิตหนังสือแบบเรียนเพียง 20,000 เล่ม จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม เพื่อตัดสินใจว่าควรผลิตหนังสือแบบเรียนประเภทใดบ้าง แต่ละประเภทผลิตจำนวนเท่าใด เพื่อให้สำนักพิมพ์มีกำไรสูงสุด

ตารางที่ 7.10 ปริมาณความต้องการและต้นทุน

หนังสือแบบเรียน	ความต้องการ (เล่ม)	ต้นทุนคงที่ (บาท)	ต้นทุนผันแปร (บาทต่อเล่ม)	ราคาขาย (บาทต่อเล่ม)
B1	5,000	160,000	300	520
B2	7,000	190,000	200	450
B3	9,000	130,000	190	400
B4	6,000	120,000	200	350
B5	8,000	220,000	280	600

บรรณานุกรม

Baker, K.R. (2006). *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thomson Books/Cole, CA, USA.

Bazargan, A. (2007). Linear programming for approach for aircraft boarding strategy. *European Journal of Operational Research*, 183, 394-411.

Bilgen, B., Ozkarahan, I. (2007). A mixed-integer linear programming model for bulk grain. *International Journal of Production Economics*, 107, 555-571.

Hajizadeh, I., Lee, C. (2007). Alternative configuration for cutting machines in a tube cutting mill. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183, 1385-1396.

Jensen, P. (2003). *Operations Research Models and Methods*, John Wiley and Sons, New York, USA.

Koch, S., Konig, S., and Wascher, G. (2008). *Linear programming for a cutting problem in the wood processing industry--a case study*. Working paper No.14, Faculty of Economics and Management. Otto-Von-Guericke University Magderg, Germany.

Lapin, L.L. (1991). *Quantitative Methods for Business Decisions with Cases*, 5th edition, Harcourt Brace Jovanovich, New York, USA

Milan, E.L., Fernandez, S.M., and Aragones, L.M.P. (2006). Sugar cane transportation in Cuba, a case study. *European Journal of Operational Research*, 174, 374-386.

Radin, R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Ronen, D. (2002). Marine inventory routing: shipments planning. *Journal of Operational Research Society*, 53, 108-114.

Taha, H.A. **(**1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, New York, USA**.**

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม
Mixed Integer Programming Method

8

Mixed Integer Programming Method

ในบทที่ 7 ได้แสดงให้เห็นถึงการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมมาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ซึ่งวิธีการแก้ปัญหานี้แตกต่างจากการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มไปบ้าง โดยเราจะพิจารณาหาผลเฉลยที่ทำให้ตัวแปรตัดสินใจที่ต้องการให้มีค่าเป็นจำนวนเต็มก่อน จากนั้นจึงจะพิจารณาตัวแปรตัดสินใจอื่น ๆ ที่มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ ในบทนี้จึงเสนอวิธีการแก้ปัญหา 2 วิธีคือ วิธีการสร้างระนาบตัดแบบผสม (Cutting plane) และวิธีการแบ่งแยก (Partitioning) ส่วนวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น เราสามารถเขียนโปรแกรมในลักษณะของการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม โดยระบุว่าตัวแปรใดบ้างที่กำหนดให้มีค่าเป็นจำนวนเต็มลงในโปรแกรม

8.1 รูปแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ซึ่งจะเรียกย่อ ๆ ว่า MILP นั้นมีรูปแบบมาตรฐานสำหรับปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด ดังนี้

ค่าสูงสุด $\quad z = \mathbf{cx} + \mathbf{dv}$ (1)

ข้อจำกัด $\quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Dv} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ และเป็นจำนวนเต็ม

$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$

ค่าต่ำสุด $\quad z = \mathbf{cx} + \mathbf{dv}$ (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{Dv} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าตัวแบบปัญหาทั้งสองนี้ มีตัวแปรตัดสินใจ 2 ประเภทคือ ตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะเป็นสมาชิกของเวกเตอร์ **x** ส่วนตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็มที่เป็นสมาชิกของเวกเตอร์ **v**

8.2 วิธีการสร้างระนาบตัดแบบผสม

จากบทที่ 6 ได้นำเสนอวิธีการสร้างระนาบตัด เพื่อตัดพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มอยู่ ออกไปจากการพิจารณา ซึ่งการสร้างระนาบตัดนี้ไม่สามารถนำมาใช้กับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมได้ เนื่องจากพื้นที่ที่มีผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็ม สามารถผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ดังนั้น การสร้างระนาบตัดสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม จึงแตกต่างจากระนาบตัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (Hu, 1996, สุดา, 2550; ประกอบ, 2535)

พิจารณาปัญหาค่าสูงสุดต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\text{ค่าสูงสุด} && z = \mathbf{cx} + \mathbf{dv} \\ &\text{ข้อจำกัด} && \mathbf{Ax} + \mathbf{Dv} \leq \mathbf{0} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{และเป็นจำนวนเต็ม} \\ & && \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

สมมติว่า ผลเฉลยพื้นฐานของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP (LP relaxation) ในแถวที่ i คือ

$$x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R_1} y_{ij} x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij} v_j \tag{4}$$

โดยที่ R_1 แทนเซตของตัวแปรจรที่เป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ สมาชิกใน R_1 เป็นสมาชิกของ **x**

R_2 แทนเซตของตัวแปรจรที่ไม่มีข้อจำกัดว่าเป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ สมาชิกใน R_2 เป็นสมาชิกของ **v**

x_{B_i} เป็นตัวแปรพื้นฐานในแถวที่ i ที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม

y_{i0} เป็นค่าของตัวแปรพื้นฐาน x_{B_i} สำหรับปัญหาผ่อนคลายแบบ LP

ให้ $\lfloor a \rfloor$ แทนเลขจำนวนเต็มที่มากที่สุด ซึ่งมีค่าน้อยกว่า a เช่น $\lfloor 5.3 \rfloor = 5$ เป็นต้น

$\lceil a \rceil$ แทนเลขจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด ซึ่งมีค่ามากกว่า a เช่น $\lceil 6.8 \rceil = 7$ เป็นต้น

สมมติว่า $f_{i0} > 0$ เราต้องการจะสร้างระนาบตัดที่ไม่รวมผลเฉลยที่ $x_{B_i} = y_{i0}$ และ $x_j = 0$ โดย $j \in R_1$ และ $v_j = 0$ โดย $j \in R_2$ จาก (4) ให้ $y_{i0} = \lfloor y_{i0} \rfloor + f_{i0}$ และ $y_{ij} = \lfloor y_{ij} \rfloor + f_{ij}$ โดย $f_{ij} \geq 0$ จะได้

$$x_{B_i} = \lfloor y_{i0} \rfloor + f_{i0} - \sum_{j \in R_1} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j - \sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j - \sum_{j \in R_2} y_{ij} v_j$$

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2} y_{ij} v_j - f_{i0} = \lfloor y_{i0} \rfloor - \sum_{j \in R_1} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j - x_{B_i} \qquad (5)$$

พิจารณา x_{B_i} มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $x_{B_i} \leq \lfloor y_{i0} \rfloor$ หรือ $x_{B_i} \geq \lceil y_{i0} \rceil$ เช่น ถ้า $x_{B_i} = 5.8$ แล้ว $x_{B_i} \geq \lceil 5.8 \rceil = 6$ หรือ $x_{B_i} \leq \lfloor 5.8 \rfloor = 5$ ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับการแตกกิ่งของวิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต ดังนั้น เราสามารถพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ

(1) ในกรณีที่ $x_{B_i} \leq \lfloor y_{i0} \rfloor$

$$\lfloor y_{i0} \rfloor - \sum_{j \in R_1} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j - x_{B_i} \geq 0 \qquad (6)$$

นำอสมการ (6) แทนค่าในสมการ (5) นั่นคือ

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2} y_{ij} v_j - f_{i0} \geq 0 \qquad (7)$$

พิจารณาตัวแปร v_j ในอสมการ (7) สามารถแบ่งเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่มีสัมประสิทธิ์ (y_{ij}) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดย $j \in R_2^+$ และ $R_2^+ \subset R_2$ และกลุ่มที่มีสัมประสิทธิ์ (y_{ij}) มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดยที่ $j \in R_2^-$ และ $R_2^- \subset R_2$ จากสมการ (7) จะได้

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij} v_j + \sum_{j \in R_2^-} y_{ij} v_j - f_{i0} \geq 0$$

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij} v_j + \sum_{j \in R_2^-} y_{ij} v_j \geq f_{i0}$$

เนื่องจาก $f_{i0} > 0$ ดังนั้น ตัวแปรจร v_j ที่มี $y_{ij} \leq 0$ ไม่สามารถเป็นตัวแปรเข้าได้ ดังนั้น $\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij} v_j - f_{i0} \geq 0$

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij} x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij} v_j \geq f_{i0} \qquad (8)$$

(2) ในกรณี $x_{B_i} \geq \lceil y_{i0} \rceil$

$$\lfloor y_{i0} \rfloor - \sum_{j \in R_1} \lfloor y_{i0} \rfloor x_j - x_{B_i} \leq -1 \qquad (9)$$

จากสมการ (5) และอสมการ (9) จะได้

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j \in R_2} y_{ij}v_j - f_{i0} \leq -1$$

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 จะได้

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij}v_j + \sum_{j \in R_2^-} y_{ij}v_j \leq -1 + f_{i0} \quad (10)$$

เนื่องจาก $0 < f_{i0} < 1$ ทำให้ $-1 + f_{i0}$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น v_j ที่มี $y_{ij} \geq 0$ จึงไม่สามารถเป็นตัวแปรเข้าได้ และ $f_{ij} \geq 0$ ทำให้ x_j ไม่สามารถเป็นตัวแปรเข้าได้เช่นกัน ดังนั้น จากสมการ (10) จะได้

$$\sum_{j \in R_2^-} y_{ij}v_j \leq -1 + f_{i0}$$

นำ $f_{i0}/(-1 + f_{i0}) < 0$ คูณทั้งสองด้านของอสมการจะได้

$$\frac{\sum_{j \in R_2^-} f_{i0}y_{ij}v_j}{1 - f_{i0}} \geq f_{i0} \quad (11)$$

นำอสมการ (8) และ (11) มารวมกัน

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j \in R_2} y_{ij}v_j + \frac{\sum_{j \in R_2^-} f_{i0}y_{ij}v_j}{1 - f_{i0}} \geq 2f_{i0} \geq f_{i0}$$

หรือ $$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j \in R_2^+} y_{ij}v_j + \sum_{j \in R_2^-} \left(\frac{f_{i0}}{-1 + f_{i0}}\right) y_{ij}v_j \geq f_{i0} \quad (12)$$

พิจารณาสมการ (12) ถ้า $R_2^- = R_2^+ = \phi$ แล้ว สมการ (12) จะเป็นระนาบตัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม จะได้

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j \geq f_{i0}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $j \in R_1$ ในสมการ (12) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่มคือ $R_1^+ = \{j/j \in R_1 \text{ และ } f_{ij} \leq f_{i0}\}$ และ $R_1^- = \{j/j \in R_1 \text{ และ } f_{ij} > f_{i0}\}$ ถ้า $f_{i0} > 0$ แล้ว $f_{ij} > 0$ เมื่อ $j \in R_1^-$ จากสมการ (5) จะได้

$$\sum_{j\in R_1^+} f_{ij}x_j + \sum_{j\in R_1^-} f_{ij}x_j + \sum_{j\in R_2} y_{ij}v_j - f_{i0}$$
$$= \lfloor y_{i0}\rfloor - \sum_{j\in R_1^+}\lfloor y_{ij}\rfloor x_j - \sum_{j\in R_1^-}\lfloor y_{ij}\rfloor x_j - x_{B_i}$$

นำ $\sum_{j\in R_1^-}(-1)x_j$ ลบทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\sum_{j\in R_1^+} f_{ij}x_j + \sum_{j\in R_1^-}(f_{ij}-1)x_j + \sum_{j\in R_2} y_{ij}v_j - f_{i0}$$
$$= \lfloor y_{i0}\rfloor - \sum_{j\in R_1^+}\lfloor y_{ij}\rfloor x_j - \sum_{j\in R_1^-}\lfloor y_{ij}\rfloor x_j - x_{B_i} \qquad (13)$$

ในทำนองเดียวกับอสมการ (8) และ (11) สมการ (13) จะได้

$$\sum_{j\in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j\in R_2} y_{ij}v_j \geq f_{i0} \qquad (14)$$

หรือ
$$\frac{f_{i0}}{1-f_{i0}}\left(\sum_{j\in R_1^-}(f_{ij}-1)x_j + \sum_{j\in R_2^-} y_{ij}v_j\right) \geq f_{i0} \qquad (15)$$

รวมอสมการ (14) และ (15) จะได้ระนาบตัดคือ

$$\sum_{j\in R_1^+} f_{ij}x_j + \sum_{j\in R_1^-}\frac{f_{i0}(1-f_{ij})}{1-f_{i0}}x_j + \sum_{j\in R_2^+} y_{ij}v_j - \sum_{j\in R_2^-}\left(\frac{f_{i0}}{1-f_{i0}}\right)y_{ij}v_j \geq f_{i0} \qquad (16)$$

สมการ (12) และ (16) ต่างกันเฉพาะกรณีที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_j โดย $j\in R_1^-$ กล่าวคือ มีตัวแปรจรที่มีเงื่อนไขต้องเป็นจำนวนเต็ม (x_j) มีสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นลบในแถวที่ i เมื่อ $f_{ij} \geq f_{i0}$ แล้ว $f_{ij} - f_{i0}f_{ij} > f_{i0} - f_{i0}f_{ij}$

$$f_{ij} \geq \frac{f_{i0}(1-f_{ij})}{1-f_{i0}} \qquad (17)$$

ดังนั้น ขั้นตอนการประมวลผลโดยการสร้างระนาบตัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม (Garefinkel and Nemhauser, 1972) มีดังนี้

(1) คำนวณหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม โดยผ่อนคลายข้อจำกัดว่าตัวแปรตัดสินใจบางค่าต้องเป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ ประมวลผลเสมือนว่าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมที่ไม่มีข้อจำกัดว่าตัวแปรตัดสินใจต้องเป็นจำนวนเต็ม

(2) พิจารณาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในขั้นตอนที่ 1 ถ้าตัวแปรตัดสินใจที่มีข้อจำกัดระบุว่าเป็นจำนวนเต็มนั้น มีค่าเป็นจำนวนเต็มทั้งหมดแล้ว ผลเฉลยที่ได้นี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมสุดที่ต้องการ แต่ถ้าตัวแปรตัดสินใจเหล่านั้นบางตัวแปรมีค่าเป็นทศนิยมหรือเศษส่วน ให้ไปดำเนินการขั้นตอนที่ 3

(3) สร้างระนาบตัด โดยใช้อสมการ (12) เพิ่มระนาบตัดนี้ ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 ทำการประมวลผลโดยใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ เพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

(4) พิจารณาผลเฉลยในขั้นตอนที่ 3 ถ้าค่าตัวแปรที่จะต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็ม มีค่าเป็นจำนวนเต็มทั้งหมดแล้ว ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหา และหยุดการประมวลผล แต่ถ้าตัวแปรที่ต้องการให้มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ยังคงมีบางตัวแปรมีค่าเป็นทศนิยมหรือเศษส่วนอยู่ ให้ย้อนกลับไปดำเนินการในขั้นตอนที่ 3

การคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม วิธีนี้มีการสร้างระนาบตัดขึ้นมาในทุก ๆ การวนซ้ำ เพื่อจะครอบคลุมเงื่อนไขที่ว่าค่าของตัวแปรบางตัวแปรที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม จะมีค่าเป็นจำนวนเต็ม และค่าของตัวแปรที่เหลือไม่ต้องเป็นจำนวนเต็มก็ได้ เราเรียกระนาบตัดนี้ว่า *การตัดแบบผสม (Mixed integer cuts)* ตัวอย่างการประมวลผลเพื่อหาผลเฉลยการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมโดยวิธีการตัดระนาบ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 8.1 จงหาผลเฉลยของปัญหาต่อไปนี้ โดยวิธีการสร้างระนาบตัดแบบผสม

ค่าสูงสุด $z = 4x_1 + 3x_2$

ข้อจำกัด

$2x_1 + x_2 \leq 14$

$3x_1 + 2x_2 \leq 23$

$3x_1 + 5x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_2 \geq 0$

ในการหาผลเฉลยสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมนี้ เริ่มต้นจากการประมวลผลปัญหาผ่อนคลายแบบ LP กล่าวคือ ไม่คำนึงถึงว่าค่าของตัวแปร x_1 จะต้องเป็นจำนวนเต็ม การหาผลเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ดังตารางที่ 8.1 โดยที่มีตัวแปรพื้นฐานคือ x_1 x_2 และ s_1 ตัวแปรจรคือ s_2 และ s_3 เมื่อ s_1 s_2 และ s_3 เป็นตัวแปรส่วนขาดของข้อจำกัดที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ เนื่องจาก x_1 มีค่าเท่ากับ 3.89 ซึ่งยังมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น จึงต้องสร้างระนาบตัดเพื่อตัดพื้นที่เป็นไปได้ที่มีค่า x_1 ไม่เป็นจำนวนเต็มออกไป โดยระนาบตัดคือ

$$\sum_{j \in R_1} f_{ij}x_j + \sum_{j \in R_2} y_{ij}v_j + \sum_{j \in R_2^-} \left(\frac{f_{i0}}{-1 + f_{i0}} \right) y_{ij}v_j \geq f_{i0}$$

$$0.56s_2 + \left(\frac{0.89}{-1 + 0.89} \right)(-0.22s_3) \geq 0.89$$

$$0.56s_2 + 1.78s_3 \geq 0.89$$

$$-0.56s_2 - 1.78s_3 \leq -0.89$$

$$-0.56s_2 - 1.78s_3 + s_4 = -0.89$$

ดังนั้น เพิ่มระนาบตัดลงในตารางซิมเพล็กซ์ ได้ดังตารางที่ 8.2

ตารางที่ 8.1 ตารางสุดท้ายของปัญหาผ่อนคลายแบบ LP

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ					ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	0	0	1.22	0.11	32.56
x_1	0	1	0	0	0.56	–0.22	3.89
x_2	0	0	1	0	–0.33	0.33	5.67
s_1	0	0	0	1	–0.78	–0.11	0.56

ตารางที่ 8.2 ตารางซิมเพล็กซ์เมื่อเพิ่มระนาบตัด

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	0	0	1.22	0.11	0	32.56
x_1	0	1	0	0	0.56	–0.22	0	3.89
x_2	0	0	1	0	–0.33	0.33	0	5.67
s_1	0	0	0	1	–0.78	–0.11	0	0.56
s_4	0	0	0	0	–0.56	–1.78	1	–0.89

เมื่อใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์ จะได้ในตารางที่ 8.3 โดยมีผลเฉลยคือ $x_1 = 4.0$ $x_2 = 5.50$ $s_1 = 0.62$ $s_3 = 0.5$ ส่วน $s_2 = s_4 = 0$ โดย $z = 32.50$ เนื่องจาก x_1 มีค่าเป็นจำนวนเต็มแล้ว จึงหยุดขั้นตอนการทำงาน และผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด จากตัวอย่างนี้ ระนาบตัดนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปตัวแปร x_1 และ x_2 ได้ดังนี้

$$0.56s_1 + 1.78s_3 \geq 0.89$$

$$0.56(14 - 2x_1 + x_2) + 1.78(40 - 3x_1 - 5x_2) \geq 0.89$$

$$7.84 - 1.12x_1 + 0.56x_2 + 71.2 - 5.34x_1 - 8.9x_2 \geq 0.89$$

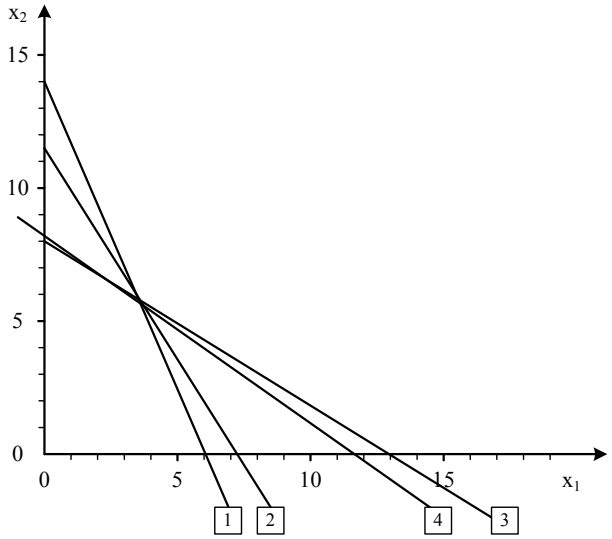
$$79.04 - 6.46x_1 - 8.34x_2 \geq 0.89$$

$$6.46x_1 + 8.34x_2 \leq 78.15$$

ตารางที่ 8.3 ตารางซิมเพล็กซ์เมื่อใช้วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์

ตัวแปรพื้นฐาน	z	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าทางขวามือ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	0	0	1.19	0	0.06	32.50
x_1	0	1	0	0	0.63	0	–0.12	4.00
x_2	0	0	1	0	–0.43	0	0.19	5.50
s_1	0	0	0	1	–0.75	0	–0.06	0.62
s_3	0	0	0	0	0.31	1	–0.56	0.5

เมื่อนำระนาบตัดนี้ เขียนในกราฟดังรูปที่ 8.1 ซึ่งจะเห็นได้ว่าระนาบตัดนี้จะตัดพื้นที่ที่ไม่มีผลเฉลยเป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสมออกไปเลย กล่าวคือ ไม่ได้ตัดพื้นที่ที่ x_1 มีค่าเป็นจำนวนเต็มออกไปจากการพิจารณา



รูปที่ 8.1 พื้นที่ที่เป็นไปได้

8.3 วิธีการแบ่งแยก

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม (MILP) ต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $z^* = \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{c}_2\mathbf{v}$

ข้อจำกัด

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2\mathbf{v} \leq \mathbf{b} \qquad (18)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \text{และเป็นจำนวนเต็ม}$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

ให้ $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ โดย $\mathbf{x}_0$ เป็นเวกเตอร์ของจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะได้

$$z^*(x_0) = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_0 + \text{ค่าสูงสุด } \mathbf{c}_2\mathbf{v}$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{v} \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}_0 \tag{19}$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

ตัวแบบ (19) เป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ถ้าตัวแบบนี้มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ แล้ว x_0 จะเป็นหนึ่งในผลเฉลยที่เป็นไปได้ ปัญหาควบคู่ของปัญหา (19) คือ

$$w^*(x_0) = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_0 + \text{ค่าต่ำสุด } \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}_0)$$
$$\mathbf{A}_2'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}_2 \tag{20}$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแบบ (18) (19) และ (20) พบว่า

1. ถ้าปัญหา (18) และ (19) เป็นปัญหาไม่มีขอบเขต หรือปัญหาที่มีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้แล้ว ปัญหาควบคู่ (20) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ เนื่องจากข้อจำกัดของปัญหาควบคู่เป็นอิสระจาก x_0 ดังนั้น x_0 ยอมรับไม่ได้ (Not admissible)

2. ถ้าปัญหา (18) และ (19) เป็นปัญหามีผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้แล้ว ปัญหาควบคู่ (20) จะเป็นปัญหาไม่มีขอบเขต

3. เมื่อกำหนด $x_0 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม ถ้าปัญหา (18) และ (19) สามารถหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดได้คือ $v_0(x_0)$ และ $(x_0, v_0(x_0))$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมของปัญหา MILP (18) แล้ว ปัญหาควบคู่ (24) จะมีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $y_0(x_0)$ โดยที่

$$z^*(x_0) = w^*(x_0) \leq z^* \tag{21}$$

เนื่องจากตัวแบบ (21) มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ รวมทั้ง A_1 และ A_2 สามารถหาอินเวอร์สได้ ทำให้ (19) เป็นปัญหามีขอบเขต (Bounded) ดังนั้น (18) มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุด

เนื่องจาก (18) สามารถเขียนได้เป็น

$$z^* = \text{ค่าสูงสุด } z(x) \qquad x \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

หรือ

$$z^* = \text{ค่าสูงสุด } w^*(x) \qquad x \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

หรือ

$$z^* = \text{ค่าสูงสุด} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \text{ค่าต่ำสุด } \mathbf{y}(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{y}\mathbf{A}_2 \geq \mathbf{c}_2 \\ \text{และเป็นจำนวนเต็ม} \qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{22}$$

ให้ y_t เป็นจุดมุม (Extreme point) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัด (20)

T เป็นเซตของ u_t และ T เป็นเซตจำกัด

จากตัวแบบ (20) จะได้

$$w^*(x_0) = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_0 + \text{ค่าต่ำสุด } \mathbf{y}^t(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0) \tag{23}$$
$$y^t \in T$$

เมื่อกำหนดให้ (20) มีผลเฉลยที่เป็นไปได้แล้ว เราอาจเพิ่มข้อจำกัดเกี่ยวกับตัวแปรจำนวนเต็ม ซึ่งจะทำให้ $\mathbf{x}$ ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มถูกขจัดออกไป ซึ่งจะทำให้ (20) เป็นปัญหาที่มีขอบเขต ในกรณีที่ $\mathbf{x}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม ปัญหา (20) จะไม่มีขอบเขต เพราะ $\mathbf{y}^t(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0)$ มีค่าลดลง ตามรังสีขอบ (Extreme ray) หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า จุด $\mathbf{y}^t$ และทิศทาง d ที่ทุกจุดบนรังสีขอบ $\mathbf{y}^t + \theta\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับ (20) ดังนั้น

$(\mathbf{y}^t + \theta\mathbf{d})(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0)$ ลดลงด้วย θ หรือ $\theta\mathbf{d}(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0)$ ลดลงด้วย θ หรือ $\mathbf{d}(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0) \leq 0$ ให้ Q เป็นรังสีขอบ สำหรับ $y^t \in T$

$$Q = \left\{ d^q \middle| y^t + \theta d^q, \theta \geq 0 \right\}$$

และ $\mathbf{d}^q(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $d^q \in Q$ จาก (22) และ (23) ปัญหา MILP (18) สามารถเขียนเป็น

$$z^* = \text{ค่าสูงสุด } \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \text{ค่าต่ำสุด } \mathbf{y}^t(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}) \\ y^t \in T \\ \mathbf{d}^q(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{d}^q \in Q \end{pmatrix} \tag{24}$$

จากสมการนี้ จะได้ว่า

$$w \leq \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^t(\mathbf{b}-\mathbf{A}_1\mathbf{x}) \text{ สำหรับ } y^t \in T$$

จาก (24) จะได้

z^* = ค่าสูงสุด w

$$\begin{aligned} w &\le \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^t(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{y}^t \in T \\ 0 &\le \mathbf{d}^q(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{d}^q \in Q \end{aligned} \tag{25}$$

จาก (25) เป็นปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม ที่มีตัวแปร w เป็นตัวแปรเดียว เพื่อความสะดวกจะเรียก (25) ว่า ปัญหา ILP จะเห็นว่าปัญหา MILP (18) สามารถแบ่งออกเป็นปัญหา LP (20) และปัญหา ILP (25) ในการสร้างตัวแบบ ILP (25) จุดและรังสีขอบของปัญหา LP (20) จะต้องทราบค่า เนื่องจากปัญหา ILP (25) อาจมีจำนวนข้อจำกัดมาก ทำให้ยากในการประมวลผล อย่างไรก็ตาม ILP (25) อาจแก้ปัญหาที่มีการคำนวณซ้ำเป็นรอบ (Iterative) ซึ่งจะสร้างเฉพาะข้อจำกัดที่ต้องการใช้ เรียกเทคนิคนี้ว่า การหาผลเฉลยโดยคำนวณซ้ำเป็นรอบ

ในการทำซ้ำครั้งที่ k, T(k) เป็นเซตของจุดของตัวแบบ (20) และ Q(k) เป็นเซตที่มีสมาชิกคือ ทิศทางของรังสีขอบ โดยที่เราทราบสมาชิกทุกตัวของ T(k) และ Q(k) สมมติให้

R แทนเซตของ y โดยที่ $\mathbf{y}\mathbf{A}_2 \ge \mathbf{c}_2$ และ $\mathbf{y} \ge 0$

$R \ne \phi$ ถ้า $R = \phi$ แล้วปัญหา MILP ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

ขั้นตอนที่ 1 (กำหนดค่าเริ่มต้น) k แทนดัชนีของคำนวณซ้ำเป็นรอบ ให้ $k = 1$ หาค่า T(1) และ Q(1) ถ้า $T(1) = \phi$ และ $Q(1) = \phi$ แล้วให้ w^1 มีขนาดใหญ่ที่สุด และ $\mathbf{x}^1$ เป็นเวกเตอร์ของจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และไปขั้นตอนที่ 3 ถ้า $T(1) \ne \phi$ หรือ $Q(1) \ne \phi$ แล้วไปขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 (การแก้ปัญหา ILP) จากปัญหา ILP โดย

ค่าสูงสุด w

$$\begin{aligned} w &\le \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^t(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{y}^t \in T(k) \\ \mathbf{0} &\le \mathbf{d}^q(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{d}^q \in Q(k) \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned} \tag{26}$$

(2.1) ถ้าตัวแบบ (26) มีผลเฉลย แล้วจะไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้สำหรับตัวแบบ (25) เนื่องจากข้อจำกัดใน (26) ได้รวมข้อจำกัดต่าง ๆ ใน (25) ดังนั้น ตัวแบบ (22) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

(2.2) ถ้าตัวแบบ (26) มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\left(w^k, \mathbf{x}^k\right)$ แล้วไปขั้นตอนที่ 3

(2.3) ถ้าตัวแบบ (26) เป็นปัญหาไม่มีขอบเขตแล้ว ให้ $w\left(\mathbf{x}^k\right)$ มีขนาดใหญ่ และ $\mathbf{x}^k$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมของ (26) โดย $w = w^k$ ไปขั้นตอนที่ 3

ในกรณี (2.2) และ (2.3) $z \le w^k \le w^{k-1}$ เนื่องจาก (26) ในการคำนวณซ้ำรอบที่ k–1 เป็นปัญหาผ่อนคลายของปัญหา (26) ในการคำนวณซ้ำรอบที่ k และเนื่องจาก (26) ในการทำซ้ำใด ๆ เป็นการผ่อนคลายของ (25)2

ขั้นตอนที่ 3 (การแก้ปัญหาควบคู่) จากปัญหาควบคู่ของ LP ที่มีตัวแบบดังนี้

$$\begin{aligned} w\left(\mathbf{x}^k\right) \;=\; & \mathbf{c}_1\mathbf{x}^k + \text{ค่าต่ำสุด } \mathbf{y}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}^k\right) \\ & \mathbf{y}\mathbf{A}_2^T \;\ge\; \mathbf{c}_2 \\ & \mathbf{y} \;\ge\; \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (27)$$

(3.1) ถ้า $w^*\left(\mathbf{x}^k\right)$ มีค่าเข้าใกล้อนันต์ทางลบ $\left(-\infty\right)$ ตามรังสี $\mathbf{y}^k + \theta\mathbf{d}^k$ แล้วให้ $T(k+1) = T(k) \cup \left\{\mathbf{y}^k\right\}$ $Q(k+1) = Q(k) \cup \left\{\mathbf{y}^k\right\}$ และให้ $k = k + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

(3.2) ถ้าตัวแบบ (26) มีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $w^*\left(\mathbf{x}^k\right)$ และให้ $\mathbf{v}^k$ ในตัวแบบ (19) เมื่อใช้ตัวแบบ (25) จะได้ $w^*\left(\mathbf{x}^k\right) \le z \le w^k$ ถ้า $w^*\left(\mathbf{x}^k\right) = w^k$ ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของ (18) คือ $\left(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k\right)$ ถ้า $w^*\left(\mathbf{x}^k\right) < w^k$ ให้ $T(k+1) = T(k) \cup \left\{\mathbf{y}^k\right\}$ ให้ $k = k + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

ตัวอย่างที่ 8.2 จงแก้ปัญหาต่อไปนี้ ด้วยวิธีการแบ่งแยก

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด} \qquad z \;=\; & -5x_1 - 2x_1 - 4x_3 - 6x_4 \\ & x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 \;\le\; -6 \\ & -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 \;\le\; -8 \\ & x_1, x_2 \;\ge\; 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \\ & x_3, x_4 \;\ge\; 0 \end{aligned}$$

ให้ $T(1) = Q(1) = \phi$ ให้ $k = 1$ และ w มีค่ามาก ๆ

<u>การคำนวนซ้ำรอบที่ 1</u> เนื่องจาก $T(1) = Q(1) = \phi$ ให้ $\mathbf{x}^1 = \left(x_1, x_2\right) = \left(0, 0\right)$ สร้างตัวแบบควบคู่สำหรับการคำนวณซ้ำรอบที่ 1

$$w\left(\mathbf{x}^1\right) \;=\; \text{ค่าต่ำสุด } -6y_1 - 8y_2$$

$$\begin{aligned} -3y_1 - 4y_2 &\geq -4 \\ -\ y_1 - 2y_2 &\geq -6 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด คือ $\mathbf{y}^1 = (y_1, y_2) = (8, 0)$ $w^*(\mathbf{x}^1) = -48$ เนื่องจาก $w^*(\mathbf{x}^1) < w$ จึงทำให้ได้ T(2) = {(8, 0)} และ k = 2

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 2</u> พิจารณาปัญหา ILP

จาก
$$\begin{aligned} w &\leq c_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}) \\ w &\leq -5x_1 - 2x_2 + [y_1\ y_2]\begin{bmatrix} -6 - (\ x_1 - 3x_2) \\ -8 - (-2x_1 - 4x_2) \end{bmatrix} \\ w &\leq -5x_1 - 2x_2 + [8, 0]\begin{bmatrix} -6 - \ x_1 + 3x_2 \\ -8 + 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \\ w &\leq -48 - 13x_1 + 22x_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวแบบ ILP คือ

ค่าสูงสุด w
$$\begin{aligned} w &\leq -48 - 13x_1 + 22x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned}$$

จากตัวแบบนี้จะเห็นได้ว่า ถ้า x_2 มีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ w เพิ่มขึ้น แต่ถ้า x_1 เพิ่มขึ้น จะทำให้ w ลดลง ดังนั้น เลือก $x_1 = 0$ และ $x_2 = L$ โดย L มีค่ามาก ดังนั้น w จะมีค่ามาก เช่นกัน ดังนั้น แก้ปัญหา LP โดย

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}^2) &= -5x_1 - 2x_2 + \text{ค่าต่ำสุด } [y_1\ y_2]\begin{bmatrix} -6 - (\ x_1 - 3x_2) \\ -8 - (-2x_1 - 4x_2) \end{bmatrix} \\ &= -2L + \text{ค่าต่ำสุด } (3L - 6)y_1 + (4L - 8)y_2 \end{aligned}$$

ตัวแบบคือ

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}^2) &= -2L + \text{ค่าต่ำสุด } (3L - 6)y_1 + (4L - 8)y_2 \\ & \qquad -3y_1 - 4y_2 \geq -4 \\ & \qquad -\ y_1 - 2y_2 \geq -6 \\ & \qquad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของตัวแบบคือ $y^2 = (y_1, y_2) = (0, 0)$ โดย $w^*(\mathbf{x}^2) = -2L$ เนื่องจาก $w^*(\mathbf{x}^2) < w$ ให้ T = {(8, 0), (0, 0)} และ k = 3

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 3</u> พิจารณา $w \leq \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$

เมื่อ $(y_1, y_2) = (8, 0)$ $\quad w \leq -48 - 13x_1 + 22x_2$

เมื่อ $(y_1, y_2) = (0, 0)$ $\quad w \leq -5x_1 - 2x_2$

ดังนั้น ตัวแบบ ILP คือ

ค่าสูงสุด w

$$w \leq -48 - 13x_1 + 22x_2$$
$$w \leq -5x_1 - 2x_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2) = (0, 0)$ และ $w = 0$

เมื่อ $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ตัวแบบปัญหาควบคู่

$w(\mathbf{x}^3) = 0 +$ ค่าต่ำสุด $-6y_1 - 8y_2$

$$-3y_1 - 4y_2 \geq -4$$
$$-y_1 - 2y_2 \geq -6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด คือ $\mathbf{y}^3 = (y_1, y_2) = (2, 0)$ $w^*(\mathbf{x}^3) = -12$ เนื่องจาก $w^*(\mathbf{x}^3) < w$ ดังนั้น T(3) = {(8, 0), (0, 0), (2, 0)} และ k = 4

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 4</u> พิจารณาปัญหา ILP

ค่าสูงสุด w

$$w \leq -48 - 13x_1 + 22x_2$$
$$w \leq -5x_1 - 2x_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\mathbf{x}^3 = (x_1, x_2) = (0, 2)$ $w = -4$

พิจารณาปัญหาควบคู่

$$w\left(\mathbf{x}^4\right) = -4 + \text{ค่าต่ำสุด } 6y_1 + 8y_2$$
$$-3y_1 - 4y_2 \geq -4$$
$$-\ y_1 - 2y_2 \geq -6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

ผลเฉลยของปัญหาควบคู่นี้คือ $\mathbf{y}^4 = (y_1, y_2) = (0, 0)$ และ $w^*\left(\mathbf{x}^4\right) = -4$ เนื่องจาก $w^*\left(\mathbf{x}^4\right) = w$ ดังนั้น จึงหยุดการประมวลผล และผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา MILP นี้คือ $x_1 = 0,\ x_2 = 2\ x_3 = x_4 = 0$ โดยที่ $z = -4$

ตัวอย่างที่ 8.3 จงแก้ปัญหาต่อไปนี้ โดยวิธีการแบ่งแยก

ค่าสูงสุด $z = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 6x_4$
$$-3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -5$$
$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -4$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$
$$x_3, x_4 \geq 0$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $T(1) = Q(1) = \phi$ และ $k = 1$ w มีค่ามาก ๆ

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 1</u> เนื่องจาก $T(1) = Q(1) = \phi$ เลือก $\mathbf{x}^1 = (x_1, x_2) = (0, 0)$ และแก้ปัญหา

$$w\left(\mathbf{x}^1\right) = \text{ค่าต่ำสุด } -5y_1 - 4y_2$$
$$y_1 - y_2 \geq -2$$
$$-2y_1 + 3y_2 \geq -6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

เมื่อพิจารณาพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังรูปที่ 8.2 พบว่ามีจุดมุม (Extreme point) อยู่ 3 จุด และ 2 รังสีขอบ ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา $\left(w^*\left(\mathbf{x}^1\right)\right)$ มีค่าเข้าใกล้ $-\infty$ ตามรังสีขอบที่ 1 (Ray 1) คือ $(3, 0) + d(3, 2)$ ให้ $T(2) = \{(3, 0)\}$ $Q(2) = \{(3, 2)\}$ และ $k = 2$

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 2</u> พิจารณาเงื่อนไข

สำหรับ $T(2) = \{(3, 0)\}$
$$w \leq \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^t\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}\right)$$

$$\leq -2x_1 - 3x_2 + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 - (-3x_1 + x_2) \\ -4 - (-2x_1 - 2x_2) \end{bmatrix}$$

$$\leq -2x_1 - 3x_2 + \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 + 3x_1 - x_2 \\ -4 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$w \leq -2x_1 - 3x_2 - 15 + 9x_1 - 3x_2$$

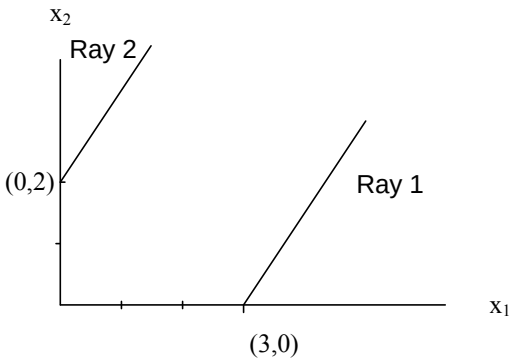
$$w \leq -15 + 7x_1 - 6x_2$$

สำหรับ $Q(2) = \{(3, 2)\}$

$$0 \leq \mathbf{y}^q (\mathbf{b} - \mathbf{A}_1 \mathbf{x})$$

$$\leq \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 + 3x_1 - x_2 \\ -4 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq -23 + 13x_1 + 2x_2$$



รูปที่ 8.2 พื้นที่ที่เป็นไปได้

ดังนั้น ตัวแบบคือ

ค่าสูงสุด w

$$w \leq -15 + 7x_1 - 6x_2$$

$$0 \leq -23 + 13x_1 + x_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม}$$

ผลเฉลยของตัวแบบ ILP นี้ ไม่มีขอบเขต เนื่องจาก x_1 เพิ่มค่าแล้วทำให้ w มีค่าเพิ่มขึ้นได้โดยไม่มีขอบเขต เลือกให้ $\mathbf{x}^2 = (x_1, x_2) = (L, 0)$ โดยที่ L มีค่ามาก จนทำให้ w มีค่ามาก

พิจารณาปัญหา LP

$$w(\mathbf{x}^2) = -2L + \text{ค่าต่ำสุด } (3L - 5)y_1 + (2L - 4)y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq -2 \\ -2y_1 + 3y_2 &\geq -6 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\mathbf{y}^2 = (y_1, y_2) = (0, 0)$ โดย $w^*(\mathbf{x}^2) = -2L$ เนื่องจาก $w^*(\mathbf{x}^2) < w$ ให้ T(3) = {(3, 2), (0, 0)} Q(3) = Q(2) และ k = 3

<u>การคำนวณซ้ำรอบที่ 3</u> พิจารณาปัญหา ILP

ค่าสูงสุด w

$$\begin{aligned} w &\leq -15 + 7x_1 + 6x_2 \\ w &\leq -2x_1 - 3x_2 \\ 0 &\leq -23 + 13x_1 + x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned}$$

ผลเฉลยของตัวแบบนี้คือ $\mathbf{x}^3 = (x_1, x_2) = (2, 0)$ และ $w = -4$ ในขณะที่ปัญหา LP

$w(\mathbf{x}^3) = -4 +$ ค่าต่ำสุด y_1

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq -2 \\ -2y_1 + 3y_2 &\geq -6 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\mathbf{y}^3 = (2, 0)$ $w^*(\mathbf{x}^3) = -4 = w$ ดังนั้น ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของปัญหา MILP คือ $x_1 = 2$ $x_2 = 0$ $x_3 = x_4 = 0$ โดยที่ $z = -4$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลเฉลยของปัญหา โดยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าสูงสุด $z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 34 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\ 3x_1 + 7x_2 &\leq 50 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \text{ และเป็นจำนวนเต็ม} \end{aligned}$$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหา โดยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าต่ำสุด $z = x_1 + 2x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 19$

$4x_1 + 3x_2 \leq 25$

$3x_1 + 4x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_2 \geq 0$

3. จงหาผลเฉลยของปัญหา โดยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าต่ำสุด $z = 2x_1 + 2x_2 + 2.5x_3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 25$

$4x_1 + 6x_2 + 3.5x_3 \geq 45$

$2.5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_3 \geq 0$

4. จงหาผลเฉลยของปัญหา โดยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 30$

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 42$

$2.5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_3 \geq 0$

5. จงแก้ปัญหาต่อไปนี้ ด้วยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าสูงสุด $z = 3x_1 + 4.5x_2 + 4x_3$

ข้อจำกัด

$1.5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

$2x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 \leq 20$

$2.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$

$x_1, x_3 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_2 \geq 0$

6. จงแก้ปัญหาต่อไปนี้ ด้วยวิธีการสร้างระนาบตัด

ค่าสูงสุด $z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 23$

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25$

$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 40$

$x_1 \geq 0$

$x_2, x_3 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

7. จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม โดยวิธีการแบ่งแยก

ค่าสูงสุด $z = -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4$

$x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -2$

$-x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \leq -3$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_3, x_4 \geq 0$

8. จงแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม โดยวิธีการแบ่งแยก

ค่าสูงสุด $z = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4$

$-x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \leq -2$

$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \leq -5$

$x_1, x_2 \geq 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

$x_3, x_4 \geq 0$

บรรณานุกรม

Bronson, R., Naadimuthu, G. (1997). *Schaum's Outlines: Theory and Problem of Operations Research*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Hu, T.C. (1969). *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley, California, USA.

Garefinkel, R.S., Nemhauser, G.L. (1972). *Integer Programming*. John Wiley&Sons, New York, USA.

Radin, R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, New York. USA.

สุดา เถลิงตระการ (2550). การวิจัยดำเนินงาน 1, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปกร, นครปฐม

ประกอบ จิรกิติ (2535) การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม โครงการส่งเสริมเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ กรุงเทพฯ 160 หน้า

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

9

Goal Programming Model

Goal Programming Model

จากบทที่ผ่านมาข้างต้น จะเกี่ยวข้องกับปัญหาที่มีวัตถุประสงค์เดียว เช่น องค์กรต้องการจะทำให้ได้กำไรสูงสุด หรือทำให้ต้นทุนรวมต่ำสุด ธุรกิจและอุตสาหกรรมอาจมีวัตถุประสงค์ในการดำเนินกิจกรรมในองค์กรมากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ เช่น ธุรกิจแห่งหนึ่งอาจต้องการทั้งให้ได้กำไรสูงสุด ส่วนแบ่งตลาดเพิ่มขึ้นสูงสุด และต้องการในจำนวนวงเงินทุนสำรองต่ำสุด เป็นต้น เป้าหมายเหล่านี้มีความสำคัญและควรนำมาพิจารณาร่วมกัน เพื่อจะเลือกผลเฉลยที่ดีที่สุด

อย่างไรก็ตาม อาจเป็นไปไม่ได้ที่จะทำให้ได้ครบถ้วนทุกวัตถุประสงค์ วัตถุประสงค์บางอย่างอาจมีลักษณะที่ทำให้ผู้ตัดสินใจกลืนไม่เข้าคายไม่ออก หรือยุ่งยากใจ (Dilemma) เช่น การลงทุนในตลาดหุ้น ที่มีวัตถุประสงค์คือ ต้องการผลตอบแทนสูงสุด และความเสี่ยงต่ำสุด โดยทั่วไปปัญหาการลงทุนในตลาดหุ้นจะไม่มีลักษณะสองอย่างไปพร้อม ๆ กัน

นักลงทุนต่าง ๆ จะต้องถ่วงดุล (Trade-off) ระหว่างผลตอบแทน และความเสี่ยงในการตัดสินใจที่จะจัดสรรเงินเพื่อลงทุนได้อย่างไร การลงทุนที่มีโอกาสได้ผลตอบแทนสูงสุดส่วนใหญ่จะมีความเสี่ยงสูง ดังนั้น ธนาคารจะต้องมีความระมัดระวังเป็นพิเศษในการจัดให้เกิดความสมดุลของผลตอบแทนและความเสี่ยงที่เกิดขึ้น ซึ่งดีเลมมาในลักษณะนี้ จำเป็นต้องใช้การหาค่าที่เหมาะสมแบบหลายวัตถุประสงค์ นอกจากนี้ องค์กรจะมีเป้าหมายในการดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์กรมักมีเป้าหมายหลายประการ ทำให้การโปรแกรมเชิงเส้นหรือการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มไม่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้

ในบทนี้จะกล่าวถึง การโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ ประเภทของการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์เมื่อพิจารณาระดับความสำคัญ (Priority level) ของวัตถุประสงค์การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย รวมทั้งการประยุกต์ใช้ในทางธุรกิจและอุตสาหกรรม

9.1 การโปรแกรมที่มีหลายวัตถุประสงค์

ตัวอย่างที่ 9.1 ธนาคารแห่งหนึ่ง ต้องการจัดสรรเงินทุนและเงินฝากธนาคารเพื่อลงทุนธุรกิจประเภทต่าง ๆ 8 ประเภท ผลตอบแทน เงินทุนที่สำรองไว้ และความเสี่ยงของแต่ละประเภท ดังแสดงตารางที่ 9.1 โดยเงินทุนสำรองนี้ จะสำรองไว้เพื่อให้เพียงพอกับการชำระหนี้ เงินทุนนี้แสดงถึงความสามารถในการชำระหนี้ของธนาคาร (Bank solvency)

ตารางที่ 9.1 โอกาสในการลงทุน

การลงทุน	ผลตอบแทน (%)	Liquid part (%)	เงินทุนสำรอง (%)	ความเสี่ยง
1. เงินสด	0.0	100.0	0.0	No
2. การลงทุนระยะสั้น	4.0	99.5	0.5	No
3. พันธบัตรระยะ 5 ปี	4.5	96.0	4.5	No
4. พันธบัตรระยะ 10 ปี	5.5	90.0	5.0	No
5. พันธบัตรระยะมากกว่า 10 ปี	7.0	85.0	7.5	No
6. สินเชื่อส่วนบุคคล	10.5	0.0	10.0	Yes
7. สินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย	8.5	0.0	10.0	Yes
8. สินเชื่อเพื่อการลงทุนทางธุรกิจ	9.2	0.0	10.0	Yes

ปัจจุบันธนาคารแห่งนี้มีเงินกองทุนซึ่งประกอบด้วย เงินฝากออมทรัพย์ 150 ล้านบาท เงินฝากประจำ 80 ล้านบาท และทรัพย์สินของธนาคาร 20 ล้านบาท ในการลงทุนครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์ 3 ประการคือ (1) ผลตอบแทนสูงสุด (2) อัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุน (Captial–adequacy ratio) ต่ำสุด และ (3) อัตราส่วนทรัพย์สินเสี่ยง(Risk–asset ratio) มีค่าต่ำสุด โดยอัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุนเป็นอัตราส่วนของเงินทุนสำรองต่อเงินลงทุนจริง (Actual capital) ซึ่งในที่นี้คือ ทรัพย์สินของทรัพย์สินของธนาคาร 20 ล้านบาท สำหรับอัตราส่วนทรัพยสินเสี่ยงเป็นตัวเลขชี้วัดความมั่นคงของสถาบันการเงิน ซึ่งเท่ากับ เงินลงทุนในโครงการที่มีความเสี่ยงต่อเงินลงทุนจริงของธนาคาร

ส่วนข้อจำกัดในการลงทุนมีดังนี้

(1) ผลรวมของเงินลงทุนทั้งหมดเท่ากับผลรวมของทรัพย์สินที่มีอยู่กับจำนวนเงินฝาก

(2) จำนวนเงินสดอย่างน้อย 14% ของเงินฝากออมทรัพย์ บวกกับ 4% ของเงินฝากประจำ

(3) สภาพคล่อง ซึ่งเท่ากับ liquid part คูณเงินลงทุน ต้องมีอยู่อย่างน้อย 47% ของเงินฝากออมทรัพย์ บวกกับ 36% ของเงินฝากประจำ

(4) อย่างน้อย 5% ของเงินกองทุนต้องกระจายอยู่ในแต่ละประเภทธุรกิจ

(5) อย่างน้อย 30% ของเงินกองทุนจะลงทุนในสินเชื่อเพื่อการลงทุนทางธุรกิจ เพื่อจะคงสถานภาพของธนาคารในชุมชน

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

ให้ x_j แทนจำนวนเงินลงทุนในประเภทที่ j $j = 1, 2, \ldots, 8$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์แรกของธุรกิจคือ ผลตอบแทนสูงสุด จะได้ ค่าสูงสุด z_1

$$z_1 = 0.04x_2 + 0.045x_3 + 0.055x_4 + 0.070x_5 + 0.105x_6 + 0.085x_7 + 0.092x_8 \quad (1)$$

วัตถุประสงค์ที่สองคือ อัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุนต่ำสุด จะได้ ค่าต่ำสุด z_2

$$z_2 = \frac{1}{20}\left(0.005x_2 + 0.045x_3 + 0.050x_4 + 0.075x_5 + 0.100x_6 + 0.100x_7 + 0.100x_8\right) \quad (2)$$

วัตถุประสงค์ที่สามคือ จะได้ ค่าต่ำสุด z_3

ค่าต่ำสุด $$z_3 = \frac{1}{20}\left(x_6 + x_7 + x_8\right) \quad (3)$$

(3) ข้อจำกัด

1. เงินลงทุนทั้งหมด

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 20 + 150 + 80 \quad (4)$$

2. เงินสดสำรอง

$$x_1 \geq 0.14(150) + 0.04(80) \quad (5)$$

3. สภาพคล่อง

$$1.00x_1 + 0.995x_2 + 0.960x_3 + 0.900x_4 + 0.85x_5 \geq 0.47(150) + 0.36(80) \quad (6)$$

4. การกระจายการลงทุน

$$x_j \geq 0.05(20 + 150 + 80) \qquad \forall_j \quad (7)$$

5. สินเชื่อทางการค้า

$$x_8 \geq 0.30(20 + 150 + 80) \quad (8)$$

6. ข้อจำกัดตัวแปรไม่ติดลบ

$$x_j \geq 0 \qquad \forall_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 8$$

ตัวอย่างที่ 9.2 การศึกษาหาตำแหน่งที่จะเป็นจุดทำลายขยะติดเชื้อ โดยบริเวณที่เก็บขยะติดเชื้อมีทั้งหมด 8 บริเวณ โดยตำแหน่งที่คาดว่าจะเป็นที่ตั้งของแหล่งหรือจุดทำลายขยะติดเชื้อมีอยู่ 3 บริเวณ จากการศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับความหนาแน่นของประชากรในแต่ละเส้นทางที่มีการขนส่งขยะ พบว่า อาจไม่ปลอดภัยจากการขน ดังนั้น จึงได้ศึกษาระยะทางจากแหล่งเก็บถึงจุดทำลายขยะ และจำนวนประชากรตามเส้นทางดังกล่าว โดยการศึกษาครั้งนี้ คาดว่ามีการขนส่งเป็น 2 เส้นทาง

วัตถุประสงค์การหาตำแหน่งเตาทำลายขยะ 2 แห่ง และกำหนดเส้นทางการเก็บขยะทั้งสองนี้คือ เพื่อให้ระยะทางรวมในการขนส่งต่ำที่สุด และการขนส่งนี้ผ่านบริเวณที่มีประชากรอยู่น้อยที่สุด โดยมีข้อมูลแสดงในตารางที่ 9.2

ให้ O_i แทนจำนวนขยะติดเชื้อที่คาดว่าจะเกิดขึ้นในบริเวณที่ i โดย i = 1, 2, …, 8

C_j แทนความสามารถสูงสุดในการทำลายขยะ เมื่อมีการสร้างเตาทำลายขยะที่ j

d_{ijk} แทนระยะทางจากบริเวณที่ i ไปยังจุดทำลายขยะที่ j โดยใช้เส้นทาง k

P_{ijk} แทนจำนวนประชากรตามเส้นทาง k จากบริเวณที่ i ไปยังจุดทำลายขยะที่ j

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อจุดทำลายขยะที่ i เปิดใช้} \\ 0 & \text{เมื่อจุดทำลายขยะที่ i ไม่เปิดใช้} \end{cases}$$

x_{ijk} แทนจำนวนขยะที่ขนส่งจากบริเวณ i ไปยังจุดทำลายขยะที่ j โดยใช้เส้นทาง k เมื่อ i = 1, 2, …, 8 j = 1, 2,3 และ k = 1, 2

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

1. ระยะทางรวมน้อยที่สุด

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z_1 = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} d_{ijk}x_{ijk} \tag{9}$$

2. ผลรวมของจำนวนประชากรตามเส้นทางขนขยะน้อยที่สุด

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z_2 = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} P_{ijk}x_{ijk} \tag{10}$$

(3) ข้อจำกัด

1. ขยะจากทุกบริเวณได้รับการขนทั้งหมด

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} = O_i \quad \forall i \quad i = 1, 2, \ldots, 8 \tag{11}$$

2. จำนวนจุดทำลายขยะมีเพียง 2 แห่ง

$$\sum_{j=1}^{3} y_j = 2 \qquad (12)$$

3. ข้อจำกัดเพื่อให้มั่นใจว่ามีการเปิดใช้จุดทำลายขยะ

$$x_{ijk} \leq C_j y_j \qquad \forall i, j, k \qquad (13)$$

4. ข้อจำกัดตัวแปรตัดสินใจ

$$x_{ijk} \geq 0 \qquad \forall i, j, k \quad i = 1, 2, \ldots, 8 \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \qquad j = 1, 2, 3$$

ตารางที่ 9.2 การขนขยะติดเชื้อเกี่ยวกับระยะทาง (กิโลเมตร) ประชากร (พันคน)

บริเวณที่ i		บริเวณทำลายขยะที่						ปริมาณขยะ (ตัน)
		1		2		3		
		k = 1	k = 2	k = 1	k = 2	k = 1	k = 2	
1	ระยะทาง ประชากร	20 50	30 18	80 250	109 80	80 400	120 190	1.2
2	ระยะทาง ประชากร	40 105	53 60	75 380	80 200	50 350	60 200	0.5
3	ระยะทาง ประชากร	50 300	75 80	55 500	60 350	25 300	28 150	0.4
4	ระยะทาง ประชากร	90 600	100 500	45 700	60 450	20 900	36 600	0.8
5	ระยะทาง ประชากร	80 200	65 150	40 450	45 400	40 700	80 500	0.6
6	ระยะทาง ประชากร	70 400	110 200	20 180	30 190	130 500	150 800	0.2
7	ระยะทาง ประชากร	100 350	150 300	100 80	12 50	100 700	120 500	0.1
8	ระยะทาง ประชากร	50 100	60 400	40 150	50 100	80 200	90 280	0.3

9.1.1 การหาผลรวมแบบถ่วงน้ำหนักวัตถุประสงค์

ในกรณีที่มีหลายวัตถุประสงค์ แต่วัตถุประสงค์เหล่านั้นมีระดับความสำคัญเท่ากัน กล่าวคือ สามารถวัดให้อยู่ในรูปของหน่วยนับเดียวกันได้ (Commeasurable) เช่น ตัวอย่างที่ 9.2

ถ้าผลเฉลยหนึ่งที่ระบุที่ตั้งของเตาเผาขยะ และเส้นทางมีระยะทางรวมน้อย แต่ผลรวมของประชากรตามเส้นทางมีค่อนข้างมาก ขณะที่ผลเฉลยที่สองมีระยะทางรวมปานกลาง และผลรวมของประชากรตามเส้นทางมีจำนวนปานกลาง เมื่อวัตถุประสงค์ทั้งสองมีระดับความสำคัญเท่ากัน สร้างสมการที่เป็นผลรวมถ่วงน้ำหนักแต่ละวัตถุประสงค์ เช่น ในตัวอย่าง 9.2 ให้ค่าถ่วงน้ำหนักวัตถุประสงค์ระยะทางรวมน้อยที่สุดคือ α_1 เท่ากับ 7 และค่าถ่วงน้ำหนักวัตถุประสงค์ผลรวมของประชากรตามเส้นทางน้อยที่สุดคือ α_2 เท่ากับ 5 จะได้สมการใหม่คือ

$$z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$$
$$z = 7z_1 + 5z_2$$

ในตัวแบบนี้จะใช้วัตถุประสงค์คือ ค่าต่ำสุด $z = 7z_1 + 5z_2$ ซึ่งอาจทำให้ผลเฉลยที่สองนั้นเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดก็ได้ ทั้ง ๆ ที่ผลเฉลยที่สองนั้นไม่ได้ให้ค่า z_1 หรือ z_2 ต่ำที่สุด

9.1.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยมีระดับความสำคัญ

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า องค์กรมีวัตถุประสงค์มากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ที่ต้องการในการดำเนินงานหากบุคลากรขององค์กรไม่สามารถบรรลุวัตถุประสงค์เหล่านั้นได้พร้อม ๆ กัน หรืออาจบรรลุวัตถุประสงค์เหล่านั้นได้ที่ระดับความสำเร็จแตกต่างกันไป องค์กรอาจกำหนดระดับความสำคัญ (Priority) ของแต่ละวัตถุประสงค์ไว้ไม่เท่ากัน วัตถุประสงค์ที่อยู่ในระดับ (Rank) ที่สูงกว่าจะได้รับการพิจารณาก่อน จากนั้นจึงพิจารณาวัตถุประสงค์ในระดับรองลงมา ตัวแบบการโปรแกรมหลายเป้าหมายในลักษณะนี้ จะเรียกว่า พรีเอมพ์ทีพ (Preemptive) ตัวอย่างที่ 9.1 ถ้าธนาคารระบุว่าทั้งสามวัตถุประสงค์มีความสำคัญไม่เท่ากัน วัตถุประสงค์ที่สำคัญเป็นอันดับหนึ่งคือ อัตราส่วนทรัพย์สินเสี่ยงต่ำสุด รองลงมาคือ ผลตอบแทนสูงสุด และอันดับสุดท้ายคือ อัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุนต่ำสุด ดังนั้น ในการแก้ปัญหาจะต้องพิจารณาอัตราส่วนทรัพย์สินต่อความเสี่ยงต่ำสุด เมื่อบรรลุเป้าหมายนี้แล้วจึงจะพิจารณาผลตอบแทนสูงสุด ในทำนองเดียวกันเมื่อบรรลุวัตถุประสงค์เรื่องผลตอบแทนแล้ว จึงพิจารณาอัตราส่วนเงินกองทุนต่อทรัพย์สินต่ำสุด

9.2 การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย เป็นส่วนที่ปรับปรุงและขยายผลมาจากการโปรแกรมเชิงเส้นที่ต้องระบุค่าเป้าหมายที่ต้องการ วิธีการของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายจะพิจารณาหลายวัตถุประสงค์ไปพร้อม ๆ กัน กล่าวคือ การโปรแกรมเชิงเป้าหมายเป็นเทคนิคซึ่งสามารถใช้กับ

ปัญหาที่มีเป้าหมายเดียว แต่มีเป้าหมายย่อยหลายเป้าหมาย นอกจากนี้ สามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีหน่วยวัดแตกต่างกัน เช่น เป้าหมายหนึ่งมีหน่วยวัดเป็นบาท ขณะที่อีกเป้าหมายหนึ่ง หน่วยวัดเป็นชั่วโมง

สำหรับการจัดการปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ แต่วัตถุประสงค์เหล่านี้มีความขัดแย้งกัน กล่าวคือ ผลเฉลยของปัญหาหนึ่ง การบรรลุเป้าหมายหนึ่ง แต่อาจทำให้เกิดข้อด้อยในอีกเป้าหมายหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้น เป้าหมายเหล่านี้อาจไม่สามารถชดเชยกันได้ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาในลักษณะนี้ต้องมีการสร้างระดับชั้นความสำคัญของเป้าหมายต่าง ๆ โดยเป้าหมายที่มีระดับสูงจะถูกนำมาพิจารณาก่อน เมื่อได้ผลเฉลยเหมาะสมสำหรับเป้าหมายในระดับสูงแล้ว จึงเพิ่มเป้าหมายในระดับรองลงมาเพื่อเลือกผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ถ้าสามารถทำให้จัดลำดับของเป้าหมายโดยพิจารณาลำดับที่ของความสำคัญหรือผลประโยชน์กับองค์กร และพยายามแปลงหรือเทียบเคียงเป้าหมายเหล่านี้ให้มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกัน ปัญหาในลักษณะนี้ก็สามารถแก้ได้โดยใช้การโปรแกรมเชิงเป้าหมายเช่นกัน

ลักษณะของเป้าหมายสามารถแบ่งได้เป็น 3 ประเภท (Lee,1972) คือ

1. เป้าหมายขอบล่าง (Lower, one–sided goal) เป้าหมายลักษณะนี้จะกำหนดขอบเขตล่าง (Lower limit) ที่ผู้ตัดสินใจไม่ต้องการให้เป้าหมายต่ำกว่าขอบเขตล่าง เช่น ผลกำไรจากการขายจะต้องไม่น้อยกว่า 500,000 บาท เป็นต้น

2. เป้าหมายขอบบน (Upper, one–sided goal) เป้าหมายลักษณะนี้จะกำหนดขอบเขตบน (Upper limit) ที่ผู้ตัดสินใจไม่ต้องการให้เป้าหมายสูงกว่าขอบเขตบน เช่น ชั่วโมงการทำงานล่วงเวลา (Over time) ต้องไม่เกิน 30 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ เป็นต้น

3. เป้าหมายสองด้าน (Two–sided goal) เป้าหมายลักษณะนี้จะกำหนดค่าเป้าหมาย (Target value) ซึ่งผู้ตัดสินใจไม่ต้องการให้ผิดพลาดจากค่าเป้าหมายทั้งในด้านต่ำกว่าหรือสูงกว่าค่าเป้าหมาย เช่น งบประมาณที่ใช้ในการโฆษณาประชาสัมพันธ์งานนิทรรศการให้อยู่ที่ 300,000 บาท เป็นต้น

หลักการของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายนั้นคล้ายกับการโปรแกรมเชิงเส้น กล่าวคือ มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดต่าง ๆ โดยฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายจะไม่มีตัวแปรตัดสินใจปรากฏอยู่ แต่จะมีตัวแปรความเบี่ยงเบน (Deviational variable) ซึ่งเป็นค่าที่เบี่ยงเบนไปจากเป้าหมาย สำหรับเป้าหมายใด ๆ จะมีตัวแปรความเบี่ยงเบน 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรความเบี่ยงเบนทางบวก (Positive deviation) และตัวแปรความเบี่ยงเบนทางลบ (Negative deviation) ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นการหาค่าต่ำสุดของผลรวมความเบี่ยงเบนจากเป้าหมายต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับความสำคัญและระดับชั้นความสำคัญที่กำหนด

9.2.1 การสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์

การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย เป็นตัวแบบเชิงเส้นทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพยายามหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดเพื่อให้บรรลุเป้าหมายต่าง ๆ ภายใต้ข้อจำกัดหรือเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการตัดสินใจ ซึ่งเงื่อนไขหรือข้อจำกัดนี้จะมีความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจต่าง ๆ

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนตัวแปรตัดสินใจ ให้เป้าหมายของปัญหาแทนด้วยฟังก์ชัน f คือ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (14)$$

ให้ **x** เป็นเวคเตอร์คอลัมน์ขนาด $n \times 1$ ที่ประกอบด้วย $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ **a** แทนเวคเตอร์แถวขนาด $1 \times n$ ประกอบด้วย $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จาก (14) จะได้

$$\mathbf{ax} = b \qquad (15)$$

ถ้าการโปรแกรมเชิงเป้าหมายนำมาใช้กับ (15) จะได้

ค่าต่ำสุด $z = d^- + d^+$

ข้อจำกัด $\mathbf{ax} + d^- - d^+ = b$

$\mathbf{x}, d^-, d^+ \geq 0$

เมื่อ **x** เป็นตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าไม่เป็นลบและ d^- และ d^+ แทนตัวแปรความเบี่ยงเบนจากเป้าหมาย d^- ถือเป็นตัวแปรส่วนขาด ซึ่งจะมีค่ามากกว่าศูนย์ถ้าผลรวมของ **ax** น้อยกว่าเป้าหมาย (b) ส่วน d^+ ถือเป็นตัวแปรส่วนเกินซึ่งจะมีค่ามากกว่าศูนย์ถ้าผลรวมของ **ax** มากกว่าเป้าหมาย

ถ้าข้อจำกัดของปัญหาทำให้มีผลเฉลยที่เป็นไปได้แล้ว ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะพยายามที่จะทำให้ d^+ และ d^- มีค่าเป็นศูนย์ ถ้า d^- และ d^+ มีค่าเป็นศูนย์ แล้วทำให้เราสามารถบรรลุค่าเป้าหมาย (Target value) ซึ่งมีค่าเท่ากับ b ได้

ตัวอย่างที่ 9.3 โรงงานเฟอร์นิเจอร์ 2 ชนิด คือ โต๊ะ และเก้าอี้ โดยมีกำไรต่อหน่วยเท่ากับ 3,000 บาทสำหรับโต๊ะ และ 1,500 บาทสำหรับเก้าอี้ ผู้จัดการต้องการทำกำไรรวมให้ได้สัปดาห์ละ 200,000 บาท ดังนั้น เป้าหมายของการผลิตนี้คือ กำไรรวม 200,000 บาทต่อสัปดาห์ ทำให้ได้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายคือ

ค่าต่ำสุด $z = d^- + d^+$

ข้อจำกัด $3000x_1 + 1500x_2 + d^- - d^+ = 200{,}000$

$x_1, x_2, d^-, d^+ \geq 0$

โดยที่ x_1 และ x_2 แทนจำนวนโต๊ะ และเก้าอี้ที่ผลิตต่อสัปดาห์

ถ้าผลกำไรรวมไม่ถึง 200,000 บาทแล้ว ตัวแปรส่วนขาด $\left(d^-\right)$ จะมีค่าเป็นบวก ถ้าผลกำไรรวมเกินกว่า 200,000 บาทแล้ว ตัวแปรส่วนเกิน $\left(d^+\right)$ จะมีค่าเป็นบวก

นอกจากข้อจำกัดซึ่งเป็นเป้าหมายของปัญหาที่เราต้องการทำให้ได้ค่าใกล้เคียงกับเป้าหมายแล้ว ยังมีข้อจำกัดของปัญหาที่เป็นเงื่อนไขหรือข้อจำกัดจากสภาวะแวดล้อมเพิ่มเติม เช่น ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ต้องไม่เกินกว่าปริมาณที่มีอยู่ในคลัง เป็นต้น แต่ข้อจำกัดนี้มิได้เป็นเป้าหมายที่ต้องให้ปริมาณการใช้วัตถุดิบให้ใกล้เคียงกับจำนวนวัตถุดิบที่มีอยู่ ข้อจำกัดประเภทนี้จะเรียกว่า *ข้อจำกัดเป้าหมายย่อย (Subgoal constraint)* ซึ่งเราสามารถสร้างตัวแปรข้อจำกัดเช่นเดียวกับข้อจำกัดของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นหรือการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มในบทที่ผ่านมาแล้วข้างต้น

จากตัวอย่างที่ 9.3 พบว่าแต่ละเป้าหมายจะถูกปรับให้อยู่ในรูปของข้อจำกัดรูปแบบมาตรฐาน กล่าวคือ มีเครื่องหมายเท่ากับ โดยการบวกด้วยตัวแปรความเบี่ยงเบนเชิงลบ $\left(d^-\right)$ และลบด้วยตัวแปรเบี่ยงเบนเชิงบวก แต่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับเป้าหมายของปัญหา ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะคือ

1. เป้าหมาย $\mathbf{ax} = b$

เพื่อบรรลุเป้าหมายนี้ เราต้องการให้ตัวแปรความเบี่ยงเบนเชิงลบ $\left(d^-\right)$ และตัวแปรความเบี่ยงเบนเชิงบวก มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะทำให้ตัวแปรทั้งสองนี้มีค่าน้อยที่สุด จะได้ตัวแบบปัญหาคือ

$$\begin{aligned} \text{ค่าต่ำสุด} \quad & z = d^- + d^+ \\ & \mathbf{ax} + d^- - d^+ = b \\ & \mathbf{ax} \geq 0,\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

2. เป้าหมาย $\mathbf{ax} \geq b$

พิจารณา $\mathbf{ax} + d^- - d^+ = b$ ถ้า $d^- = 0$ และ $d^+ \geq 0$ แล้ว $\mathbf{ax} \geq b$ ถ้า $d^- \geq 0$ และ $d^+ = 0$ แล้ว $\mathbf{ax} \leq b$ ด้วยเป้าหมาย $\mathbf{ax} \geq b$ เราต้องพยายามทำให้ d^- มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น ตัวแบบคือ

$$\begin{aligned} \text{ค่าต่ำสุด} \quad & z = d^- \\ & \mathbf{ax} + d^- - d^+ = b \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ d^-,\ d^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

3. เป้าหมาย $\mathbf{ax} \leq b$

ในทำนองเดียวกันกับเป้าหมายประเภทที่ 2 $\mathbf{ax} + d^- - d^+ = b$ ถ้า $d^- = 0$ และ $d^+ \geq 0$ แล้ว $\mathbf{ax} \geq b$ ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ขัดแย้งกับเป้าหมาย เราจึงต้องพยายามทำให้ มีค่าน้อยที่สุด จะได้

ค่าต่ำสุด $z = d^+$

$$\mathbf{ax} + d^- - d^+ = b \qquad (18)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ d^-,\ d^+ \geq 0$$

9.2.2 ระดับความสำคัญของเป้าหมาย

ในกรณีที่ปัญหามีเป้าหมายมากกว่าหนึ่งเป้าหมาย เราจะต้องพิจารณาระดับความสำคัญของเป้าหมายเหล่านี้ เนื่องจากปัญหาส่วนใหญ่มักไม่พบผลเฉลยที่ทำให้บรรลุเป้าหมายทุกประการขององค์กร ผลเฉลยหนึ่งอาจทำให้บรรลุเป้าหมายประการที่หนึ่ง แต่ไม่อาจทำให้บรรลุเป้าหมายที่เหลือขององค์กร ขณะที่มีผลเฉลยอื่นที่บรรลุเป้าหมายที่เหลือได้ดีกว่า องค์กรจะเลือกผลเฉลยนี้ถ้าเป้าหมายประการที่หนึ่งมีระดับความสำคัญสูงสุด ในทางตรงกันข้าม ถ้าเป้าหมายอื่นมีระดับความสำคัญสูงกว่าเป้าหมายที่หนึ่ง ผลเฉลยนี้จะไม่ได้รับเลือก ดังนั้น องค์กรจึงต้องกำหนดระดับความสำคัญ (Priority level) ของเป้าหมายต่าง ๆ (Lapin,1991; Hiller, 1995)

ตัวอย่างที่ 9.4 จากตัวอย่างที่ 9.1 เมื่อได้มีการสอบถามเป้าหมาย ค่าเป้าหมายและระดับความสำคัญของเป้าหมายจากผู้ตัดสินใจ พบว่า เป้าหมายสามารถเรียงตามลำดับความสำคัญคือ

1. อัตราส่วนของความเสี่ยงในทรัพย์สินต่อทุนไม่เกิน 7.0
2. ผลตอบแทนมากกว่าหรือเท่ากับ 18.5 ล้านบาท
3. อัตราส่วนเงินกองทุนต่อสินทรัพย์เสี่ยง ไม่เกิน 0.8

ดังนั้น สามารถเขียนตัวแบบที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใน (19) โดยมีข้อจำกัดเพิ่มเติม (20) ถึง (22) พร้อมทั้งข้อจำกัดเดิมจากตัวอย่างที่ 9.1

ค่าต่ำสุด $z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+$ (19)

$$\frac{1}{20}(x_6 + x_7 + x_8) + d_1^- - d_1^+ = 0.7 \qquad (20)$$

$$0.040x_2 + 0.045x_3 + 0.055x_4 + 0.070x_5 + 0.105x_6 + 0.085x_7 + 0.092x_8 + d_2^- - d_2^+ = 18.5 \qquad (21)$$

$$\frac{1}{20}(0.005x_2 + 0.040x_3 + 0.050x_4 + 0.075x_5 + 0.100x_6 + 0.100x_7 + 0.100x_8) + d_3^- - d_3^+ = 0.8 \qquad (22)$$

9.2.3 การถ่วงน้ำหนักเป้าหมาย

สำหรับปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งเป้าหมายที่มีระดับความสำคัญเท่ากัน ทำให้เราสามารถถ่วงน้ำหนัก (Weighted) เป้าหมายต่าง ๆ จนกระทั่งเป้าหมายที่ถ่วงน้ำหนักนี้สามารถนำมารวมกันได้ ดังนั้น ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย จะกลายเป็นผลรวมแบบถ่วงน้ำหนักของความเบี่ยงเบนของเป้าหมาย

ตัวอย่างที่ 9.5 จากตัวอย่างที่ 9.2 ถ้ากำหนดเป้าหมายของระยะทางรวมไม่เกิน k กิโลเมตร และผลรวมของจำนวนประชากรตามเส้นทางต้องไม่เกิน D พันคน โดยเป้าหมายทั้งสองมีระดับความสำคัญเท่ากัน และใช้ค่าถ่วงน้ำหนักเป้าหมายเท่ากับ 0.7 และ 0.5 ดังนั้น เราสามารถสร้างตัวแบบที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (23) และข้อจำกัดเพิ่มเติมจากตัวอย่างที่ 9.2 คือ ข้อจำกัด (24) และ (25)

$$z = 0.7d_1^+ + 0.5d_2^+ \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} d_{ijk}x_{ijk} + d_1^- - d_1^+ = k \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} P_{ijk}x_{ijk} + d_2^- - d_2^+ = D \tag{25}$$

แม้วิธีการถ่วงน้ำหนักเป้าหมายจะเป็นวิธีที่ง่าย ทำให้เราสามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายด้วยฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพียง 1 วัตถุประสงค์ (รายละเอียดแสดงในบทที่ 10) อย่างไรก็ตาม ข้อเสียของวิธีนี้มี 2 ประการคือ (1) วิธีสามารถใช้ได้กับทุกเป้าหมายที่มีหน่วยวัดเดียวกัน เช่น เป็นจำนวนเงินเหมือนกัน ถ้าหน่วยวัดของเป้าหมายต่างกัน ทำให้ยากแก่การกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม เนื่องจากตัวแปรความเบี่ยงเบนแต่ละตัวมีหน่วยวัดที่ต่างกัน (2) ถึงแม้หน่วยวัดจะเป็นหน่วยเดียวกัน แต่เราอาจกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักได้ยาก เนื่องจากลักษณะของกิจกรรม ตัวอย่างเช่น เป้าหมายให้ชั่วโมงแรงงานล่วงเวลาของพนักงานแผนกผลิตเป็น 2 เท่าของชั่วโมงแรงงานล่วงเวลาของพนักงานธุรการ หรือเป้าหมายยอดขายสินค้าทุกประเภทของบริษัท มีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 3 เท่าของเป้าหมายยอดขายของสินค้า A เป็นต้น ซึ่งการกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักนี้จะส่งผลต่อผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ว่าจะมีค่าของกิจกรรมใดสูง และกิจกรรมใดต่ำ (Balakrishman, Render and Stair, 2007)

9.3 การประยุกต์การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

เป็นที่ทราบกันดีว่า องค์กรธุรกิจ อุตสาหกรรม รวมทั้งภาครัฐมักมีเป้าหมายในการดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ ขององค์กรหลายเป้าหมาย ถ้าผู้ตัดสินใจต้องการพิจารณาเป้าหมายเหล่านี้พร้อมกันแล้ว การโปรแกรมเชิงเป้าหมายสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้เหมาะสมกว่าการโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งมีวัตถุประสงค์หรือเป้าหมายเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายสำหรับปัญหาด้านการวางแผนการผลิต การตลาด การเงิน และการดูแลด้านสุภาพ (Health care)

9.3.1 ปัญหาการวางแผนการผลิต

ในภาคอุตสาหกรรมนั้น องค์กรส่วนใหญ่ต้องการมีการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด และต้องการให้ปริมาณผลผลิตนั้นเพียงพอกับความต้องการของลูกค้า ด้วยเหตุนี้องค์กรจึงมักจะมีนโยบายที่เกี่ยวข้องกับ การจ้างงาน สินค้าคงคลัง การผลิต และการจ้างผู้รับเหมาช่วง ดังนั้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องมีการวางแผนการผลิตรวม

โดยทั่วไป การวางแผนการผลิตรวม มักจะประสพกับปริมาณความต้องการสินค้าที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ความผันผวนของปริมาณความต้องการนี้ สามารถรองรับได้โดยการใช้นโยบายคือ

1. การปรับขนาดของแรงงาน โดยการจ้างงานใหม่ การทำล่วงเวลา และการให้พนักงานออกจากงาน
2. การปรับระดับสินค้าคงคลัง
3. การปรับระดับผู้รับเหมาช่วง

ในการวางแผนการผลิต อาจพิจารณาว่า ต้นทุนการขาดแคลนสินค้าสูงกว่าต้นทุนในการเปลี่ยนระดับของการจ้างงาน และต้นทุนการเปลี่ยนระดับการจ้างงานสูงกว่าต้นทุนสินค้าคงคลัง ดังนั้น 3 เป้าหมายในการวางแผนคือ ระดับของการผลิต ระดับแรงงาน และระดับสินค้าคงคลัง หากเราใช้การโปรแกรมเชิงเป้าหมายในการแก้ปัญหาก็สามารถกระทำได้ โดยให้เป้าหมายของการวางแผนการผลิตรวม เป็นเป้าหมายแต่ละระดับของการโปรแกรมเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 9.6 บริษัท เอ็ม อิเล็กทรอนิคส์ มีการผลิตวิทยุเทปติดรถยนต์ และเครื่องเล่น DVD การผลิตสินค้าทั้งสองชนิดนี้ในเครื่องจักรคนละชนิดกัน การผลิตวิทยุเทปติดรถยนต์ 1 เครื่อง ต้องการ 2 ชั่วโมงของเครื่องจักรในแผนกที่ 1 และ 1 ชั่วโมงบนเครื่องจักรในแผนกที่ 2 ส่วนเครื่องเล่น DVD 1 เครื่องใช้เวลาในการผลิต 1 ชั่วโมงในแผนกที่ 1 และ 3 ชั่วโมงโดยใช้เครื่องจักรในแผนกที่ 2 นอกจากนี้ แต่ละสินค้าต้องมีสินค้าระหว่างผลิต (In–process

inventory) ในราคา 500 บาทต่อชิ้น และ 300 บาทต่อเครื่องสำหรับวิทยุเทปและเครื่องเล่น DVD ตามลำดับ

ด้วยกำลังการผลิตปกติ 120 และ 150 ชั่วโมงต่อสัปดาห์สำหรับเครื่องจักรในแผนกที่ 1 และ 2 การประมาณต้นทุนต่อชั่วโมงของเครื่องจักร 1 และ 2 เท่ากับ 800 บาท และ 200 บาท ประเมินผลต้นทุนต่อหน่วยและยอดขายต่อสัปดาห์สำหรับวิทยุเทปติดรถยนต์ เท่ากับ 50 และ 3ถ 50 บาทต่อเครื่อง และสำหรับเครื่องเล่น DVD เท่ากับ 30 และ 80 เครื่องต่อสัปดาห์ ตามลำดับ

ผู้จัดการบริษัทได้มีการตั้งเป้าหมายของการผลิตต่อสัปดาห์ไว้ โดยเรียงระดับความสำคัญจากสูงไปหาต่ำดังนี้

1. จำกัดมูลค่าของสินค้าระหว่างผลิต (Work in process, WIP) เท่ากับ 46,000 บาทต่อสัปดาห์
2. เป้าหมายยอดขายวิทยุเทปติดรถยนต์เท่ากับ 50 เครื่องต่อสัปดาห์
3. หลีกเลี่ยงการผลิตต่ำกว่าความสามารถในการผลิต โดยคิดค่าถ่วงน้ำหนักตามต้นทุนการทำงาน
4. จำกัดการทำงานล่วงเวลาของเครื่องจักรที่ 1 อยู่ที่ 20 ชั่วโมงต่อสัปดาห์
5. เป้าหมายการผลิตเครื่องเล่น DVD ไว้ที่ 80 เครื่องต่อสัปดาห์
6. จำกัดการทำงานล่วงเวลารวมของเครื่องจักรแผนกที่ 1 และ 2 พร้อมกัน โดยคิดค่าถ่วงน้ำหนักตามต้นทุนการทำงานล่วงเวลาไม่เกิน 20 ชั่วโมง

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทนจำนวนวิทยุเทปติดรถยนต์ที่ผลิตสัปดาห์

x_2 แทนจำนวนเครื่องเล่น DVD ที่ผลิตสัปดาห์

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = P_1d_3^+ + P_2d_4^- + 4P_3d_1^- + P_3d_2^- + P_4d_{11}^+ + P_5d_5^- + 4P_6d_{11}^+ + P_6d_{21}^+$ (25)

(3) ข้อจำกัด

1. ข้อจำกัดชั่วโมงเครื่องจักรในแผนกที่ 1 และ 2

$$2x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 120 \quad (26)$$
$$x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 150$$

2. ข้อจำกัดเกี่ยวกับสินค้าระหว่างผลิต

$$500x_1 + 300x_2 + d_3^- - d_3^+ = 46{,}000 \quad (27)$$

3. ข้อจำกัดเป้าหมายด้านปริมาณการขาย

$$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 50 \qquad (28)$$
$$x_2 + d_5^- - d_5^+ = 80$$

4. ข้อจำกัดการทำงานล่วงเวลาของเครื่องจักรในแผนกที่ 1 และ 2

$$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 20 \qquad (29)$$
$$d_2^+ + d_{21}^- - d_{21}^+ = 20$$

5. ข้อจำกัดไม่ติดลบ

$$x_1, x_2, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_{11}^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+, d_5^+, d_{11}^+ \geq 0$$

โดยที่ $P_1 >> P_2 >> ... >> P_5 >> P_6$

จากตัวแบบข้างต้น เราจะให้น้ำหนักของระดับ P_3 และ P_4 ขึ้นอยู่กับต้นทุนโอกาส (Opportunity cost) ซึ่งคิดจากต้นทุนการดำเนินงานต่อชั่วโมงของเครื่องจักรในแผนกทั้งสอง จากการประมวลผล จะได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 50$ $x_2 = 40$ $d_1^+ = 20$ $d_2^+ = 20$ $d_3^- = 900$ $d_5^- = 40$ $d_1^- = d_2^- = d_3^+ = d_4^- = d_4^+ = d_5^+ = d_{11}^+ = 0$ นั่นคือ บริษัทจะผลิตวิทยุเทปติดรถยนต์จำนวน 50 เครื่อง เครื่องเล่น DVD 40 เครื่อง ภายใต้จำนวนชั่วโมงทำงานล่วงเวลาไม่เกิน 20 ชั่วโมงของแผนกทั้งสอง โดยมีสินค้าระหว่างทำน้อยกว่า 46,000 บาทอยู่ 9,000 บาท บริษัทไม่สามารถผลิตได้ตามยอดขาย 80 เครื่องต่อสัปดาห์ โดยมีผลกำไรรวม 37,000 บาท

ตัวอย่างที่ 9.7 บริษัทแห่งหนึ่ง กำลังประสบปัญหาทางด้านยอดขายที่ไม่คงที่ ทำให้ต้องมีการเปลี่ยนแปลงระดับของแรงงาน ยอมให้มีการทำงานล่วงเวลา หรือมีการเปลี่ยนแปลงระดับสินค้าคงคลัง ดังนั้น บริษัทจึงต้องการจะวางแผนการผลิต วางแผนการจ้างงาน เพื่อทำให้ต้นทุนรวมต่ำสุด โดยเริ่มจากการพยากรณ์ยอดขาย แล้วจึงวางแผนรายเดือน เป็นระยะเวลา 12 เดือน กำหนดให้ S_t แทนค่าพยากรณ์ยอดขายเดือนที่ t, t = 1, 2, …, 12 W_t แทนระดับแรงงานในเดือนที่ t P_t แทนอัตราการผลิตเดือนที่ t และ I_t แทนระดับสินค้าคงคลังเมื่อสิ้นเดือนที่ t ปัจจุบันระดับแรงงานปกติมีพนักงาน 20 คน ดังนั้น การผลิตช่วงเวลาปกติ $W_t = 20P_t$ ถ้ามีการทำงานล่วงเวลาแล้ว $W_t < 20P_t$ ถ้ามีการใช้แรงงานน้อยกว่าความสามารถในการผลิตปกติแล้ว $W_t > 20P_t$ นอกจากนี้ บริษัทได้ประมาณต้นทุนต่าง ๆ ไว้ดังตารางที่ 9.3 โดยถือว่าต้นทุนต่าง ๆ นี้มีระดับความสำคัญเท่ากัน

ตารางที่ 9.3 ต้นทุนต่าง ๆ

ชนิดต้นทุน	เงื่อนไข	จำนวน
ต้นทุนค่าจ้างใหม่ เช่น ต้นทุนการอบรม ต้นทุนการเลิกจ้างพนักงาน เช่น เงินชดเชย	ถ้า $W_t > W_{t-1}$	$4(W_t - W_{t-1})$
เงินค่าปรับโครงสร้างองค์กร เงินปลอบขวัญ เป็นต้น การจ้างงานปกติ เช่น ค่าจ้าง เป็นต้น	ถ้า $W_t < W_{t-1}$	$W_{t-1} - W_t$ $5W_t$
ต้นทุนล่วงเวลา	ถ้า $W_t < 20P_t$	$7(20P_t - W_t)$
ต้นทุนสินค้าคงคลัง เช่น ทุนจม ค่าใช้จ่ายเก็บรักษา เป็นต้น	ถ้า $I_t \geq 0$	$2I_t$
ต้นทุนสินค้าขาดแคลน เช่น ความไม่พึงพอใจของลูกค้า การสูญเสียการขายในอนาคต	ถ้า $I_t < 0$	$3I_t$

(1) พิจารณาการเปลี่ยนแปลงระดับแรงงาน

$$W_t + W_{t-1} + d_t^- - d_t^+ = 0 \tag{30}$$

d_t^+ แทน การจ้างงานใหม่ในเดือนที่ t

d_t^- แทน การเลิกจ้างในเดือนที่ t

W_t แทน การจ้างงานปกติในเดือนที่ t

(2) พิจารณาการทำงานล่วงเวลา

$$W_t - 20P_t + e_t^- - e_t^+ = 0 \tag{31}$$

e_t^- แทน การทำงานล่วงเวลาเดือนที่ t

e_t^+ แทน การทำงานงานน้อยกว่าความสามารถปกติเดือนที่ t

(3) พิจารณาสินค้าคงคลัง

$$I_t + f_t^- - f_t^+ = 0 \tag{32}$$

f_t^- แทน การขาดแคลนสินค้าในเดือนที่ t

f_t^+ แทน การมีสินค้าคงเหลือในคลังสำหรับเดือนที่ t

(4) พิจารณาความสัมพันธ์ของสินค้าคงคลัง ปริมาณการผลิต และค่าพยากรณ์ยอดขาย

$$I_t = I_{t-1} + P_t - S_t \tag{33}$$

ดังนั้น ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย คือ

$$\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z = \sum_{t=1}^{12}\left[4d_t^+ + d_t^- + 5W_t + 7e_t^- + 2f_t^+ + 3f_t^-\right] \tag{34}$$

$$\text{ข้อจำกัด} \qquad W_t - W_{t-1} + d_t^- - d_t^+ = 0$$

$$\begin{aligned} W_t - 20P_t + e_t^- - e_t^+ &= 0 \\ I_t + f_t^- - f_t^+ &= 0 \\ I_t &= I_{t-1} + P_t - S_t \\ W_t, P_t, I_t &\geq 0 \\ d_t^-, d_t^+, e_t^-, e_t^+, f_t^-, f_t^+ &\geq 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, 12 \end{aligned} \tag{35}$$

โดยที่ I_0 และ W_0 เป็นค่าคงที่ที่กำหนดให้

9.3.2 ปัญหาทางการตลาด

การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย เป็นเทคนิคที่มีประสิทธิภาพสำหรับการตัดสินใจทางการตลาดต่าง ๆ เช่น การตัดสินใจเกี่ยวกับสินค้าใหม่ การวิจัยตลาด การเลือกสื่อโฆษณา การกำหนดราคาสินค้า การจัดสรรพนักงานขายให้เข้าถึงลูกค้า เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 9.8 ร้านขายอาหารและเครื่องดื่มสมุนไพรแห่งหนึ่ง มีพนักงานขาย 5 คน คือ เจ้าของกิจการ หัวหน้าพนักงานขาย พนักงานขาย 2 คน และพนักงานทั่วไปไม่เต็มเวลา (Part time) โดยทั่วไป ปัญหาการทำให้ยอดขายของร้านแห่งนี้ จะต้องมีการจ้างพนักงานทั้งเต็มเวลาและพนักงานทั่วไปไม่เต็มเวลา จากการวิเคราะห์ทางธุรกิจของเจ้าของกิจการพบว่า การทำยอดขายและชั่วโมงแรงงานของบุคลากร แสดงดังตารางที่ 9.4 ร้านหนังสือแห่งนี้มีแรงจูงใจสำหรับหัวหน้าพนักงานขายและพนักงานขายเต็มเวลาทั้ง 2 คน โดยให้ค่านายหน้า (Commission) 5.5 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนี้ ยังมีการประกันตัวเลขค่านายหน้าขั้นต่ำของหัวหน้าพนักงาน พนักงานขายคนที่ 1 และ 2 เท่ากับ 1,700 870 และ 520 บาทต่อเดือน ตามลำดับ

สำหรับการทำงานล่วงเวลา (Overtime) ต่อเดือน เพื่อไม่ให้ทุกคนต้องทำงานหนักมากเกินไป ทางร้านได้กำหนดว่า เจ้าของกิจการและหัวหน้าพนักงานขายจะมีชั่วโมงล่วงเวลาไม่เกิน 24 ชั่วโมง สำหรับพนักงานขายคนที่ 1 และคนที่ 2 มีชั่วโมงล่วงเวลาอยู่ที่ 52 และ 32 ชั่วโมง ส่วนพนักงานทั่วไปทำงานไม่เต็มเวลาจะมีชั่วโมงล่วงเวลาไม่เกิน 32 ชั่วโมง

ตารางที่ 9.4 ยอดขายและชั่วโมงแรงงานของบุคลากร

บุคลากร	การทำยอดขายโดยเฉลี่ย (บาทต่อชั่วโมง)	ชั่วโมงแรงงาน (ชั่วโมง/เดือน)
เจ้าของกิจการ	240	200
หัวหน้าพนักงานขาย	160	200
พนักงานขายคนที่ 1	90	172
พนักงานขายคนที่ 2	50	172
พนักงานทั่วไปไม่เต็มเวลา	15	100

เจ้าของกิจการต้องการให้บรรลุเป้าหมายต่าง ๆ ตามลำดับดังนี้

1. ต้องการให้มียอดขาย 145,000 บาทต่อเดือน
2. พนักงานทุกคนที่ทำงานจะต้องเป็นพนักงานทำงานในเวลางานปกติ (Regular working hours) กำหนดให้ค่าถ่วงน้ำหนักเท่ากัน
3. ต้องการให้มั่นใจว่าผู้จัดการจะได้รับค่านายหน้าไม่น้อยกว่า 1,700 บาทต่อเดือน
4. เจ้าของกิจการ ผู้จัดการ และพนักงานขายจะต้องทำงานล่วงเวลาไม่เกินที่กำหนดไว้
5. ชั่วโมงการทำงานล่วงเวลานั้นสูงสุดไม่เกิน the second full–time และเวลาของพนักงานทั่วไปและพนักงานขายคนที่ 2
6. ต้องการมั่นใจว่า พนักงานขายเต็มเวลา 2 คนจะได้ค่านายหน้าไม่น้อยกว่า 8,700 และ 5,200 บาทต่อเดือน ตามลำดับ

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_1 แทนชั่วโมงการทำงานต่อเดือนของเจ้าของกิจการ

x_2 แทนชั่วโมงการทำงานต่อเดือนของหัวหน้าพนักงานขาย

x_3 แทนชั่วโมงการทำงานต่อเดือนของพนักงานขายคนที่ 1

x_4 แทนชั่วโมงการทำงานต่อเดือนของพนักงานขายคนที่ 2

x_5 แทนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายไม่เต็มเวลาต่อเดือน

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด
$$z = P_1 d_1^- + P_2\left(d_2^- + d_3^- + d_4^- + d_5^- + d_6^+\right) + P_3 d_7^- + P_4 d_{21}^+ \quad (36)$$
$$+ P_4 d_{31}^+ + P_4 d_{41}^+ + P_5 d_{51}^+ + P_5 d_{61}^+ + P_6 d_8^- + P_6 d_9^-$$

(3) ข้อจำกัด

1. ยอดขาย 14,500 บาทต่อเดือน

$$240x_1 + 160x_2 + 90x_3 + 50x_4 + 15x_5 + d_1^- - d_1^+ = 145{,}000 \qquad (37)$$

2. เวลาทำงานปกติ

$$\begin{aligned} x_1 + d_2^- - d_2^+ &= 200 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 200 \\ x_3 + d_4^- - d_4^+ &= 172 \\ x_4 + d_5^- - d_5^+ &= 160 \\ x_5 + d_6^- - d_6^+ &= 100 \end{aligned} \qquad (38)$$

3. ค่านายหน้า

$$\begin{aligned} 0.055(160x_2) + d_7^- - d_7^+ &= 1{,}700 \\ 0.055(\ 90x_3) + d_8^- - d_8^+ &= 870 \\ 0.055(\ 50x_4) + d_9^- - d_9^+ &= 520 \end{aligned} \qquad (39)$$

4. การทำงานล่วงเวลา

$$\begin{aligned} d_2^+ + d_{21}^- - d_{21}^+ &= 24 \\ d_3^+ + d_{31}^- - d_{31}^+ &= 24 \\ d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ &= 52 \\ d_5^+ + d_{51}^- - d_{51}^+ &= 32 \\ d_6^+ + d_{61}^- - d_{61}^+ &= 32 \end{aligned} \qquad (40)$$

(4) ข้อจำกัด

$$d_j^-, d_j^+ \geq 0$$

จากการประมวลผลจะได้ ผลเฉลยคือ $x_1 = 224$ $x_2 = 224$ $x_3 = 224$ $x_4 = 665$ และ $x_5 = 132$ โดยมียอดขายรวม 145,000 บาท พนักงานขายคนที่ 2 มีชั่วโมงล่วงเวลาเท่ากับ 550 ชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 9.9 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการเลือกสื่อโฆษณาสำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง โดยสื่อโฆษณามี 2 ชนิดคือ นิตยสาร และโทรทัศน์ สำหรับนิตยสารมีทั้งนิตยสารทั่วไป นิตยสารสำหรับผู้หญิง นิตยสารสำหรับผู้ชาย ที่มีจำนวน 4 สีสรรแตกต่างกัน สำหรับโทรทัศน์ มีทั้งการโฆษณาในช่วงรายการต่างๆ คือ รายการเกมโชว์ช่วงกลางวันในวันธรรมดา รายการละครโทรทัศน์ที่นิยมมาก (Prime) รายการสนทนาและสารคดีภาคดึกโดยค่าใช้จ่ายและการเข้าถึงกลุ่มเป้าหมายแตกต่าง

กันออกไปดังตารางที่ 9.5 เป้าหมายของการวางแผนเรียงลำดับตามความสำคัญมากไปหาน้อย คือ

1. จำนวนเงินงบประมาณที่จัดสรรเพื่อการโฆษณารวมต้องไม่เกิน 25 ล้านบาท
2. การโฆษณาครั้งนี้ต้องเข้าถึงกลุ่มเป้าหมายไม่น้อยกว่า 7 ล้านคน หรือ (700 หมื่นคน)
3. จำนวนการโฆษณาสูงสุดในแต่ละสื่อ ดังตารางที่ 9.6
4. ผลรวมของค่าใช้จ่ายในการโฆษณา หากเกินกว่างบประมาณที่ตั้งไว้ก็ไม่ควรเกินกว่า 5 เปอร์เซนต์ของงบประมาณ
5. เพื่อเป็นการรักษาลูกค้าในแต่ละกลุ่มลูกค้าไว้ จะจำกัดเงินงบประมาณสูงสุดในแต่ละสื่อ ดังตารางที่ 9.7

ตารางที่ 9.5 ค่าใช้จ่ายและจำนวนลูกค้าเป้าหมายของแต่ละสื่อ

ประเภทสื่อโฆษณา และหมายเลขสื่อ	ค่าใช้จ่าย (ล้านบาท)	จำนวนลูกค้าเป้าหมายต่อหน่วยของสื่อ (หมื่นคน)
ก. สื่อประเภทนิตยสารทั่วไป 4 สี 1 หน้า		
สื่อหมายเลข 1	1.00	32
สื่อหมายเลข 2	2.80	46
สื่อหมายเลข 3	1.00	12
ข. สื่อประเภทนิตยสารสำหรับผู้หญิง 4 สี 1 หน้า		
สื่อหมายเลข 4	1.21	48.5
สื่อหมายเลข 5	3.30	58
สื่อหมายเลข 6	1.80	22.6
ค. สื่อประเภทนิตยสารสำหรับผู้ชาย 4 สี 1 หน้า		
สื่อหมายเลข 7	1.00	14.5
สื่อหมายเลข 8	1.80	26
สื่อหมายเลข 9	0.90	10.2
ง. สื่อประเภทโทรทัศน์ เกมโชว์กลางวันวันธรรมดา (30 วินาทีต่อวัน)		
สื่อหมายเลข 10	0.20	8.5
สื่อหมายเลข 11	0.28	8.9
สื่อหมายเลข 12	0.16	11

ตารางที่ 9.5 (ต่อ)

ประเภทสื่อโฆษณา และหมายเลขสื่อ	ค่าใช้จ่าย (ล้านบาท)	จำนวนลูกค้าเป้าหมายต่อหน่วยของสื่อ (หมื่นคน)
จ. สื่อประเภทโทรทัศน์ช่วงละครภาคค่ำ (30 วินาทีต่อวัน)		
สื่อหมายเลข 13	3.60	56.5
สื่อหมายเลข 14	3.10	42
สื่อหมายเลข 15	2.80	36
ฉ. สื่อประเภทโทรทัศน์ช่วงสนทนาและสารคดีภาคดึก (30 วินาทีต่อวัน)		
สื่อหมายเลข 16	2.10	13.5
สื่อหมายเลข 17	1.85	14
สื่อหมายเลข 18	2.40	15.6

ตารางที่ 9.6 จำนวนครั้งสูงสุด

สื่อแต่ละประเภท	จำนวนครั้งสูงสุดโฆษณา
นิตยสารทั่วไป	6 หน้า
นิตยสารสำหรับผู้หญิง	10 หน้า
นิตยสารสำหรับผู้ชาย	5 หน้า
รายการโทรทัศน์เกมโชว์กลางวัน	7 ครั้ง
รายการโทรทัศน์ช่วงละครภาคค่ำ	18 ครั้ง
รายการโทรทัศน์สนทนาและสารคดีภาคดึก	12 ครั้ง

ตารางที่ 9.7 ค่าใช้จ่ายสูงสุด

ประเภทสื่อ	ค่าใช้จ่ายสูงสุด (ล้านบาท)
นิตยสารทั้งหมด	7
รายการโทรทัศน์ทั้งหมด	20

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย สำหรับปัญหานี้ เพื่อให้บริษัทราบว่าควรเลือกโฆษณาหมายเลขใด จำนวนเท่าใด

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

x_j แทน จำนวนหน่วยการลงโฆษณาในสื่อหมายเลขที่ j $j = 1, 2, \ldots, 18$

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด
$$z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3\left(d_3^+ + d_4^+ + d_5^+ + d_6^+ + \ldots + d_{10}^+\right) + P_4 d_{11} + P_5\left(d_{12}^+ + d_{13}^+ + d_{14}^+\right) \quad (41)$$

(3) ข้อจำกัด

1. งบประมาณไม่เกิน 25 ล้านบาท

$$\sum_{j=1}^{18} c_j x_j + d_1^- - d_1^+ = 250 \quad (42)$$

โดย c_j คือ ค่าใช้จ่ายในการโฆษณาในสื่อที่ j $j = 1, 2, \ldots, 18$

2. จำนวนลูกค้าเป้าหมายไม่น้อยกว่า 30 ล้านคน (3,000 หมื่นคน)

$$\sum_{j=1}^{21} a_j x_j + d_2^- - d_2^+ = 3{,}000 \quad (43)$$

โดย a_j แทนจำนวนลูกค้าเป้าหมายที่เข้าถึงเมื่อมีการโฆษณาผ่านสื่อ j จำนวน 1 หน่วย

3. จำนวนการโฆษณาสูงสุดในแต่ละสื่อ

$$\sum_{j=1}^{3} x_j + d_3^- - d_3^+ = 6$$

$$\sum_{j=4}^{6} x_j + d_4^- - d_4^+ = 10$$

$$\sum_{j=7}^{9} x_j + d_5^- - d_5^+ = 5$$

$$\sum_{j=10}^{12} x_j + d_6^- - d_6^+ = 7$$

$$\sum_{j=13}^{15} x_j + d_7^- - d_7^+ = 18$$

$$\sum_{j=16}^{18} x_j + d_8^- - d_8^+ = 12$$

4. ผลรวมค่าใช้จ่ายโฆษณาส่วนที่เกินงบ ไม่เกิน 5 เปอร์เซ็นต์ของงบประมาณ

$$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 0.05(250) = 12.5 \qquad (45)$$

5. งบประมาณสูงสุดในแต่ละสื่อ

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{9} c_j x_j + d_{12}^- - d_{12}^+ &= 70 \\ \sum_{j=10}^{18} c_j x_j + d_{13}^- - d_{13}^+ &= 200 \\ \sum_{j=16}^{24} c_j x_j + d_{14}^- - d_{14}^+ &= 200 \end{aligned} \qquad (46)$$

6. ข้อจำกัด

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 14$$

9.3.4 ปัญหาด้านการวางแผนทางการแพทย์

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า ปัจจุบันทุกคนให้ความสนใจเกี่ยวกับการดูแลสุขภาพ ทำให้มีการแข่งขันในธุรกิจการแพทย์สูงขึ้น มีหน่วยงานและธุรกิจด้านนี้มากขึ้น อย่างไรก็ตามค่าใช้จ่ายในการรักษาพยาบาลและการดูแลสุขภาพสูงขึ้นมาก ทำให้องค์กรประเภทนี้จะต้องพิจารณาต้นทุนการดำเนินงาน และเงื่อนไขต่าง ๆ ขององค์กร เพื่อจะกำหนดอัตราค่ารักษาพยาบาลที่เหมาะสม ที่จะทำให้องค์กรดำเนินธุรกิจได้บรรลุวัตถุประสงค์ และสามารถแข่งขันกับคู่แข่งได้ องค์กรเหล่านี้ได้แก่ โรงพยาบาล คลินิก ศูนย์สุขภาพ ศูนย์ฟื้นฟูสุขภาพ เป็นต้น Blake and Carter (2002) ได้นำการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย เพื่อแก้ปัญหาการจัดสรรคนไข้ให้เพียงพอและเหมาะสมกับความต้องการของแพทย์ ในโรงพยาบาลเมาท์ไซไน (Mount Sinai) ในเมืองโตรอนโต้ (Toronoto) ประเทศแคนาดา ซึ่งตัวแบบมี 2 เป้าหมายที่มีระดับความสำคัญไม่เท่ากัน เป้าหมายระดับที่ 1 เพื่อให้สามารถจัดกลุ่มคนไข้ตามประเภทคนไข้ให้เหมาะสมกับแพทย์ เป้าหมายระดับที่ 2 เพื่อระบุว่าเมื่อกำหนดคนไข้รายหนึ่งให้ แล้วสามารถระบุกลุ่มคนไข้ได้ใกล้เคียงกับความต้องการของแพทย์ งานวิจัยของ Chu et al.(2000) ได้ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย ในการจัดสรรพยาบาลเข้าทำงานในโรงพยาบาล โดยขั้นตอนการศึกษาแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนที่ 1 เป็นใช้ตัวแบบในการแบ่งคาบเวลาการทำงานของพยาบาลให้มีความเหมาะสม ขั้นตอนที่ 2 เป็นการกำหนดจำนวนพยาบาลที่เหมาะสมในแต่ละคาบเวลา ซึ่งข้อจำกัดของตัวแบบทั้งสองขั้นตอนนี้เหมือนกัน คือ ความต้องการพยาบาลที่ให้บริการในแต่ละชั่วโมง จำนวนชั่วโมงที่พยาบาลทำงาน จำนวนพยาบาลอย่างน้อย 1 คนที่เคาน์เตอร์ลงทะเบียนของแต่ละแผนก และ ต้องมีพยาบาลอย่างน้อย 50% ทำงานในแต่ละศูนย์บริการ

ตัวอย่างที่ 9.10 ศูนย์ฟื้นฟูสุขภาพแห่งหนึ่ง มีบุคลากร 17 คน แบ่งเป็น แพทย์ 5 คน พยาบาลประจำทำงานเต็มเวลา 1 คน พยาบาลไม่เต็มเวลา (part–time) 2 คน เจ้าหน้าที่รังสีเทคนิคเต็มเวลา 1 คน และชั่วคราว 1 คน ผู้จัดการ 1 คน ธุรการ 2 คน พนักงานต้อนรับ 2 คน พนักงานซ่อมบำรุง 2 คน

ตารางที่ 9.8 ความต้องการแรงงานและน้ำหนักความสำคัญ

ตำแหน่ง	คน	ชม./สัปดาห์	ชม./สัปดาห์/คน	น้ำหนักความสำคัญ	ค่าจ้างต่อชั่วโมง
แพทย์	5		50	8	3,000
พยาบาลเต็มเวลา	1	40		4	500
พยาบาลไม่เต็มเวลา	2		20	5	400
รังสีเทคนิคเต็มเวลา	1	40		1	500
รังสีเทคนิคไม่เต็มเวลา	1		20	6	450
ผู้จัดการ	1			9	1,200
ธุรการ	2		40	2	400
พนักงานต้อนรับ	2		40	3	300
พนักงานซ่อมบำรุง	2		20	7	300

* ค่าจ้างต่อปี = ค่าจ้างต่อชั่วโมง × จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ × 50 สัปดาห์ × จำนวนคน

ข้อมูลจำนวนผู้ป่วยในปีที่ผ่านมา และค่ารักษาพยาบาลโดยเฉลี่ย แสดงดังตารางที่ 9.9 ในปีนี้คาดว่าจะมีผู้ป่วยเข้ารับบริการเพิ่มขึ้น 5 เปอร์เซ็นต์ ส่วนค่าใช้จ่ายของศูนย์ฟื้นฟูสุขภาพในปีที่ผ่านมาและเงินสำรองในด้านอื่น ๆ แสดงดังตารางที่ 9.11 ศูนย์ฟื้นฟูสุขภาพแห่งนี้ต้องการทราบอัตราเงินค่าจ้างหรือเงินเดือนของบุคลากรและประเภท จำนวนเวลาการทำงานของบุคลากร จำนวนเงินทุนสำรองที่ควรจะต้องจัดเตรียม และค่าใช้จ่ายต่อผู้ป่วย โดยมีเป้าหมายของการวางแผนเรียงระดับความสำคัญจากมากไปหาน้อยดังนี้

1. อัตราค่าจ้างเพิ่มขึ้นจากปีที่ผ่านมา 7 เปอร์เซ็นต์
2. มีการใช้จ่ายและเงินกองทุนใกล้เคียงกับที่จัดสรรไว้ โดยศูนย์ฯ ได้จัดสรรเงินไว้ดังนี้
    1. กองทุนเกษียณอายุ คิดเป็น 15 เปอร์เซ็นต์ของเงินเดือน หรือค่าจ้างต่อปี
    2. กองทุนพัฒนาการศึกษาที่ให้กับแพทย์เพื่อเข้าอบรมหรือซื้อตำรา 100,000 บาท
    3. งบประมาณเปลี่ยนเครื่องเอกซ์เรย์เครื่องใหม่ 600,000 บาท โดยเครื่องเก่ามีมูลค่าซาก 50,000 บาท จึงต้องตั้งงบประมาณ 550,000 บาท
    4. งบประมาณเปลี่ยนเครื่องคอมพิวเตอร์ใหม่ 1 เครื่อง ในราคา 22,000 บาท มูลค่าซากของเครื่องเก่านั้นน้อยมาก จนถือได้ว่าเป็นศูนย์

3. แรงงานแต่ละประเภทสอดคล้องกับความต้องการ โดยความต้องการนี้พิจารณาข้อมูลปีที่ผ่านมา

4. ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยของผู้ป่วย ซึ่งแบ่งเป็น ค่ายาและเวชภัณฑ์ ค่าเอกซ์เรย์ และค่าบริหารจัดการ ต้องใกล้เคียงกับค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยของผู้ป่วยในปีที่ผ่านมา

5. มีความสมดุลของรายได้และค่าใช้จ่ายของศูนย์ฯ

ตารางที่ 9.9 จำนวนผู้ป่วยและค่ารักษาพยาบาล

จำนวนผู้ป่วยปีที่ผ่านมา	22,500 คน
คาดว่าจะมีจำนวนเพิ่มขึ้น 5%	1,125
จำนวนผู้ป่วยที่คาดหมาย	23,625
ค่ารักษาพยาบาลโดยเฉลี่ย	1,600 บาท/คน

ตารางที่ 9.10 ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยของผู้ป่วย

	ค่าใช้จ่ายรวมในปีที่ผ่านมา	ค่าเฉลี่ยต่อผู้ป่วย
ค่ายาและเวชภัณฑ์	5,000,000	222.22
ค่าเอกซ์เรย์	4,000,000	177.78
ค่าบริหารจัดการ	14,850,000	660.00

ตารางที่ 9.11 ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ที่สำรองไว้

	บาทต่อปี
ค่าเปลี่ยนอุปกรณ์เครื่องเอกซ์เรย์	550,000
ค่าเปลี่ยนเครื่องคอมพิวเตอร์	22,000
ค่าสาธารณูปโภค	50,000
ค่าติดต่อสื่อสาร	25,000
กองทุนเกษียณ (15% ของเงินเดือนเต็มเวลารวม)	2,227,500
งบประมาณพัฒนาบุคลากร	100,000

กำหนดตัวแปร

x_1 แทนอัตราค่าจ้างของแพทย์

x_2 แทนอัตราค่าจ้างของพยาบาลเต็มเวลา

x_3 แทนอัตราค่าจ้างของพยาบาลไม่เต็มเวลา

x_4 แทนอัตราค่าจ้างของรังสีเทคนิคเต็มเวลา

x_5 แทนอัตราค่าจ้างของรังสีเทคนิคไม่เต็มเวลา

x_6 แทนอัตราค่าจ้างของผู้จัดการ

x_7 แทนอัตราค่าจ้างของธุรการ
x_8 แทนอัตราค่าจ้างของพนักงานต้อนรับ
x_9 แทนอัตราค่าจ้างของพนักงานซ่อมบำรุง
x_{10} เงินกองทุนเกษียณ
x_{11} เงินทุนพัฒนาบุคลากรทางการแพทย์
x_{12} เงินซื้อค่าเครื่องเอกซ์เรย์
x_{13} เงินซื้อเครื่องคอมพิวเตอร์
y_1 จำนวนชั่วโมงการทำงานของแพทย์
y_2 จำนวนชั่วโมงการทำงานของพยาบาลเต็มเวลา
y_3 จำนวนชั่วโมงการทำงานของพยาบาลไม่เต็มเวลา
y_4 จำนวนชั่วโมงการทำงานของรังสีเทคนิคเต็มเวลา
y_5 จำนวนชั่วโมงการทำงานของรังสีเทคนิคไม่เต็มเวลา
y_6 จำนวนชั่วโมงการทำงานของผู้จัดการ
y_7 จำนวนชั่วโมงการทำงานของธุรการ
y_8 จำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานต้อนรับ
y_9 จำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานซ่อมบำรุง
W_1 ค่าใช้จ่ายต่อผู้ป่วยเกี่ยวกับค่ายาและเวชภัณฑ์
W_2 ค่าใช้จ่ายต่อผู้ป่วยเกี่ยวกับค่าเอกซ์เรย์
W_3 ค่าใช้จ่ายต่อผู้ป่วยเกี่ยวกับค่าบริหารจัดการ
W_4 ค่าบริการที่ศูนย์เรียกเก็บโดยเฉลี่ย

(1) วัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด
$$z = p_1 \sum_{k=1}^{9} \left(d_k^- + d_k^+ \right) + p_2 \sum_{k=10}^{13} \left(d_k^- + d_k^+ \right) + p_3 \sum_{k=14}^{22} \left(d_k^- + d_k^+ \right)$$
$$p_4 \sum_{k=23}^{25} \left(d_k^- + d_k^+ \right) + p_4 \left(d_{26}^- + d_{26}^+ \right)$$

(2) ข้อจำกัด

1. อัตราค่าจ้างเพิ่มขึ้น 7 เปอร์เซ็นต์ของปีที่ผ่านมา

ให้ c_j แทนค่าจ้างต่อชั่วโมงของบุคลากร

$$x_j + d_k^- - d_k^+ = 1.07 c_j \quad j = 1, 2, \ldots, 9 \quad k = 1, 2, \ldots, 9 \tag{48}$$

2. ค่าใช้จ่าย

2.1 กองทุนเกษียณอายุ

$$x_{10} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 2,227,500 \tag{49}$$

2.2 เงินพัฒนาบุคลากรทางการแพทย์

$$x_{11} + d_{11}^{-} - d_{11}^{+} = 100,000 \quad (50)$$

2.3 เงินสำหรับเปลี่ยนเครื่องเอกซ์เรย์ใหม่

$$x_{12} + d_{12}^{-} - d_{12}^{+} = (600,000 - 50,000) \quad (51)$$

2.4 เงินสำหรับเปลี่ยนคอมพิวเตอร์ใหม่

$$x_{13} + d_{13}^{-} - d_{13}^{+} = 22,000 \quad (52)$$

3. แรงงานแต่ละประเภทสอดคล้องกับความต้องการ

D_j แทนปริมาณชั่วโมงแรงงานที่ต้องการ

$$y_j + d_{13+k}^{-} - d_{13+k}^{+} = D_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 9 \quad k = 1, 2, \ldots, 9 \quad (53)$$

4. ค่าใช้จ่ายของผู้ป่วย

$$\begin{aligned} W_1 + d_{23}^{-} - d_{23}^{+} &= 222.22 \\ W_2 + d_{24}^{-} - d_{24}^{+} &= 177.78 \\ W_3 + d_{25}^{-} - d_{25}^{+} &= 660 \end{aligned} \quad (54)$$

5. ข้อจำกัดความสมดุลของรายรับและรายจ่าย

$$23,625W_4 - \left[(7,500,000x_1 + 1,000,000x_2 + \ldots + 300,000x_9)\right. \quad (55)$$
$$\left. + (x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (222.22W_1 + 177.78W_2 + 660W_3)\right] + d_{26}^{-} - d_{26}^{+} = 0$$

6. ข้อจำกัดไม่เป็นลบ

$$x_j, y_j, W_i, d_k \geq 0 \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, 9 \\ i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, \ldots, 26 \end{array}$$

นอกจากปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาการจัดการทางการแพทย์ การตลาด และการผลิตในอุตสาหกรรมแล้ว ยังสามารถช่วยในการจัดการทางการเกษตรและการจัดการน้ำ ดังตัวอย่างงานวิจัยของ Guo and He (1999) นำได้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายมาช่วยในการตัดสินใจจัดสรรทรัพยากรทางการเกษตรมาช่วยแก้ปัญหาในช่วงฤดูเก็บเกี่ยวและหลังฤดูเก็บเกี่ยว โดยเป้าหมายของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ ลดความสูญเสียข้าวและต้นทุนการผลิตในช่วงเวลาทั้งสอง ส่วน Agha (2006) ได้ประยุกต์ใช้การโปรแกรมเชิงเป้าหมายในการระบุตำแหน่งของบ่อน้ำที่จะสร้างขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์ของตัวแบบ คือ ระยะทางรวมระหว่างบ่อน้ำที่ถึงบริเวณถังพักน้ำนั้นสั้นที่สุด และทำให้ความแตกต่างของปริมาณคลอรีนและไนเตรทในน้ำนั้นแตกต่างจากค่ามาตรฐานน้อยที่สุด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. บริษัทแห่งหนึ่งได้พัฒนาสินค้าใหม่ 3 ชนิด ในการวางแผนทางการตลาดสำหรับสินค้าทั้งสามนี้ บริษัทพิจารณาเป้าหมาย 3 ประการคือ กำไรระยะยาว เสถียรภาพของระดับแรงงาน และการเพิ่มขึ้นของ Earning ในปีหน้าบริษัทให้ระดับความสำคัญของเป้าหมายทั้งสามเท่ากับ ด้วยค่าถ่วงน้ำหนักเป้าหมายแสดงในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ

   ค่าสูงสุด $z = 2A - 5B - 3C$

   โดย A แทนผลกำไรระยะยาวตลอดอายุของสินค้าใหม่

   B แทนการเปลี่ยนแปลงระดับแรงงาน

   C แทนการลดลงของ earning ในปีหน้าเทียบกับปีปัจจุบัน

   ผลกระทบของแต่ละสินค้าใหม่ (ต่อหน่วยของอัตราการผลิต) แสดงดังตารางที่ 9.12

ตารางที่ 9.12 ผลกระทบของแต่ละสินค้า

ปัจจัย	สินค้า			เป้าหมาย
	1	2	3	
ผลกำไรระยะยาว (ล้านบาท)	20	15	25	_
ระดับแรงงาน (ร้อยคน)	6	4	5	เท่ากับ 50
earning ในปีหน้า (ล้านคน)	8	7	5	มากกว่าหรือเท่ากับ 75

   จงสร้างตัวแบบสำหรับการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

2. ผู้อำนวยการศูนย์คอมพิวเตอร์ของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ต้องการจัดสรรเจ้าหน้าที่ 6 คนเข้าทำงานตามเวลาต่าง ๆ ชั่วโมงละ 1 คน โดยตารางที่ 9.13 แสดงค่าจ้างและจำนวนชั่วโมงสูงสุดที่เจ้าหน้าที่แต่ละคนทำงานได้ในแต่ละวัน เนื่องจากงบประมาณการจ้างงานค่อนข้างจำกัด ผู้อำนวยการจึงต้องการทำให้ต้นทุนรวมต่ำสุด จึงมีนโยบายจะจ้างงานผู้ที่มีอัตราค่าจ้างสูงสุดให้น้อยที่สุด แต่เจ้าหน้าที่คนที่ 1 ถึง 4 จะต้องทำงานอย่างน้อย 8 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ส่วนเจ้าหน้าที่คนที่ 5 และ 6 ต้องทำงานอย่างน้อย 7 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ในแต่ละวันศูนย์คอมพิวเตอร์จะเปิดตั้งแต่ 8.00 น. ถึง 22.00 น. วันจันทร์ถึงศุกร์ ส่วนวันเสาร์และอาทิตย์จะใช้เจ้าหน้าที่อื่น

   จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม เพื่อระบุจำนวนชั่วโมงที่จัดสรรให้พนักงานแต่ละคน

ตารางที่ 9.13 อัตราค่าจ้างและจำนวนชั่วโมงสูงสุด

เจ้าหน้าที่ คนที่	อัตราค่าจ้าง (บาท/ชั่วโมง)	จำนวนชั่วโมงสูงสุด				
		จันทร์	อังคาร	พุธ	พฤหัสบดี	ศุกร์
1	60	6	0	6	0	6
2	61	0	6	0	6	0
3	59	4	8	4	0	4
4	58	5	5	5	0	5
5	68	3	0	3	8	0
6	73	0	0	0	6	2

3. บริษัทต้องการเช่าคลังสินค้าในช่วงเวลา 5 เดือนข้างหน้า บริษัทสามารถประมาณความต้องการพื้นที่ในแต่ละเดือน อย่างไรก็ตาม ความต้องการพื้นที่นี้อาจแตกต่างกัน บริษัทต้องการเช่าคลังสินค้าที่ประหยัดที่สุดในแต่ละเดือน อย่างไรก็ตาม ค่าเช่าส่วนเพิ่มจากการเช่าพื้นที่ต่อในเดือนถัดไปจะน้อยกว่าค่าเช่าในเดือนแรก ดังนั้น ทางเลือกหนึ่งคือ การเช่าติดต่อกันตลอด 5 เดือน อาจจะถูกกว่าการเช่าเดือนละ 1 แห่ง ทางเลือกอีกทางหนึ่งกำหนดให้มีการเปลี่ยนสถานที่เช่าอย่างน้อย 1 ครั้ง แต่ไม่เปลี่ยนสถานที่เช่าทุกเดือน ความต้องการพื้นที่และค่าเช่าแต่ละเดือนแสดงดังตารางที่ 9.14 และ 9.15

จงสร้างตัวแบบเพื่อระบุว่าจะเช่าพื้นที่อย่างไร เพื่อให้ค่าใช้จ่ายในการเช่าต่ำสุด

ตารางที่ 9.14 พื้นที่ที่ต้องการ

เดือน	พื้นที่ที่ต้องการ (100 ตารางเมตร)
1	30
2	20
3	40
4	10
5	50

ตารางที่ 9.15 ค่าเช่า

ช่วงเวลาเช่า (เดือน)	ค่าเช่าต่อตารางเมตร (บาท)
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

บรรณานุกรม

Agha, S.R. (2006). Use of goal programming and integer programming for water quality management—A case study of Gaza Strip. *European Journal of Operational Research*, 174, 1991-1998.

Balakrishman, N., Render, B., Stair, R.M. (2007). *Managerial Decision Modeling with Spreadsheet*, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Blake, J. T., Carter, M.W. (2002). A goal programming approach to strategic resource allocation in a cute care hospital. *European Journal of Operational Research*, 140, 541-561.

Chu, SCK., Ho, MPP., Lee, KKY., Lo, HP. (2000). Nurses allocation models for maternal and child health service. *Journal of the Operational Research Society*, 51,1193-1204.

Guo, L.S., He, Y.S. (1999). Integrated multi-criteria decision model: a case study for the allocation of facility in Chinese agriculture. *Engineering Research*, 73, 87-94.

Hiller, F.S. (1995). *Introduction to Operations Research*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, USA**.**

Lapin, L.L. (1991). *Quantitative Methods for Business Decisions with Cases*, 5th edition, Harcourt Brace Jovanovich, New York, USA.

Lee, S.M. (1972). *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers, Philadelphia. USA.

Taha, H.A. (1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, New York, USA.

Radin (1998). *Mathematical Programming Optimization*, Prentice Hall, New York. USA.

วิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

10

Goal Programming Method

Goal Programming Method

หลังจากที่ตัวแบบได้สร้างขึ้นแล้ว เราจะนำตัวแบบมาประมวลผลเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ซึ่งในบทนี้จะแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ การประมวลตัวแบบการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ และการประมวลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย ซึ่งการหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายสามารถนำส่วนขยายของวิธีซิมเพล็กซ์มาปรับใช้ นอกจากนี้ ยังแสดงวิธีการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

10.1 การแก้ปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์

จากบทที่ 9 เราแบ่งปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ออกเป็น 2 ประเภทคือ ปัญหาที่ทุกวัตถุประสงค์มีระดับความสำคัญเท่ากัน และปัญหาที่วัตถุประสงค์ต่าง ๆ มีความสำคัญไม่เท่ากัน สำหรับปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ที่แต่ละวัตถุประสงค์มีความสำคัญเท่ากัน แสดงว่าค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่าง ๆ นี้สามารถวัดหรือประมาณอยู่ในรูปหน่วยนับเดียวกันได้ (Commeasurable) ทำให้มีวัตถุประสงค์เพียงวัตถุประสงค์ ตัวแบบลักษณะนี้จึงเหมือนกับตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นหรือการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ทำให้สามารถใช้วิธีการประมวลผลที่กล่าวมาในบทที่ 4 และบทที่ 6 ได้ ดังตัวอย่างที่ 10.1 สำหรับปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ โดยที่แต่ละวัตถุประสงค์มีระดับความสำคัญไม่เท่ากัน ทำให้การประมวลผลต้องหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับวัตถุประสงค์ที่มีระดับความสำคัญสูงสุดก่อน หากผลเฉลยเหมาะสมที่สุดนี้มีมากกว่าหนึ่งผลเฉลย ขั้นตอนต่อไปเราจึงจะพิจารณาจากผลเฉลยเหล่านี้เท่านั้น และเลือกผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับวัตถุประสงค์

ในระดับรองลงมา หากผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในขั้นตอนนี้มีมากกว่าหนึ่ง ผลเฉลยก็จะพิจารณาเลือกผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับวัตถุประสงค์ในระดับรองลงไปเรื่อย ๆ ดังตัวอย่าง 10.2

ตัวอย่างที่ 10.1 จากตัวอย่างที่ 9.2 ความสำคัญของวัตถุประสงค์ทั้งสองอยู่ในระดับเดียวกัน และกำหนดให้ค่าถ่วงน้ำหนักวัตถุประสงค์ระยะทางรวมน้อยที่สุดเท่ากับ 7 ส่วนค่าถ่วงน้ำหนักผลรวมของประชากรตามเส้นทางต่ำสุด เท่ากับ 5 จะได้ตัวแบบคือ

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z &= 7\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} d_{ijk}x_{ijk} + 5\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} P_{ijk}x_{ijk} \\
\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} &= O_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 8 \\
\sum_{j=1}^{3} y_j &= 2 \qquad (1) \\
x_{ijk} &\le s_i y_j \qquad \forall_{i,\,j,\,k} \\
x_{ijk} &\ge 0 \qquad \forall_{i,\,j,\,k} \\
y_i &\in \{0, 1\} \qquad \forall_i
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 10.2 จากตัวอย่างที่ 9.1 ถ้ากำหนดให้วัตถุประสงค์ทั้งสามนี้มีลำดับความสำคัญไม่เท่ากัน โดยวัตถุประสงค์ค่าต่ำสุด อัตราส่วนทรัพย์สินเสี่ยง (Risk–asset ratio) มีความสำคัญลำดับที่ 1 ลำดับรองลงมาคือ ค่าสูงสุดของผลกำไร และลำดับสุดท้ายคือ อัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุน (Captial–adequacy ratio, CA) มีค่าต่ำสุด จงหาผลเฉลยของปัญหานี้

เนื่องจากวัตถุประสงค์ทั้งสามมีลำดับความสำคัญไม่เท่ากัน จึงพิจารณาวัตถุประสงค์ที่มีลำดับความสำคัญสูงสุดก่อนคือ ค่าต่ำสุด อัตราส่วนความเสี่ยงต่อทรัพย์สิน จะได้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าต่ำสุด} \qquad z_1 &= \frac{1}{20}(x_6 + x_7 + x_8) \\
\text{ข้อจำกัด} \qquad x_1 + \ldots + x_8 &= (20 + 150 + 80) \\
x_1 &> 0.14(150) + 0.04(80) \qquad (2) \\
1.00x_1 + 0.995x_2 + 0.960x_3 + 0.900x_4 & \\
+0.850x_5 &> 0.47(150) + 0.36(80)
\end{aligned}
$$

$$x_j > 0.05(20 + 150 + 80) \quad \text{ทุกค่า } j,\ j = 1, \ldots, 8$$

$$x_8 > 0.30(20 + 150 + 80)$$

$$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1^* = 100.0$ $x_2^* = 12.5$ $x_3^* = 12.5$ $x_4^* = 12.5$ $x_5^* = 12.5$ $x_6^* = 12.5$ $x_7^* = 12.5$ $x_8^* = 75.0$ โดยที่อัตราส่วนความเสี่ยงต่อทรัพย์สินเท่ากับ 5.0 กำไรรวม 11.9 ล้านบาท และอัตราส่วนเงินทุนต่อสินทรัพย์เสี่ยง เท่ากับ 0.606

ในทำนองเดียวกัน เมื่อนำวัตถุประสงค์ลำดับที่ 3 มาพิจารณา จะได้ตัวแบบ

ค่าต่ำสุด $$z_2 = \frac{1}{20}(0.005x_2 + 0.040x_3 + 0.050x_4 + 0.075x_5 + 0.100x_6 + 0.100x_7 + 0.100x_8)$$

ข้อจำกัด $$\frac{1}{20}(x_6 + x_7 + x_8) \leq 5.0$$

$$0.040x_2 + 0.045x_3 + 0.055x_4 + 0.070x_5 + 0.105x_6 + 0.085x_7 + 0.092x_8 \geq 17.2$$

$$x_1 + \ldots + x_8 = (20 + 150 + 80)$$

$$x_1 > 0.14(150) + 0.04(80)$$

$$1.00x_{1_} + 0.995x_2 + 0.960x_3 + 0.900x_4 + 0.850x_5 > 0.47(150) + 0.36(80)$$

$$x_j > 0.05(20 + 150 + 80) \text{ for all } j = 1, \ldots, 8$$

$$x_8 > 0.30(20 + 150 + 80)$$

$$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดจะเป็นผลเฉลยเดียวกับผลเฉลยเหมาะสมที่สุดของตัวแบบ (3)

ในการพิจารณาเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด เมื่อนำวัตถุประสงค์ลำดับที่ 2 มาพิจารณาเพื่อให้มั่นใจว่าผลเฉลยเหมาะสมที่สุดนี้ ยังคงให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ลำดับที่ 1 ดีที่สุด จึงต้องเพิ่มข้อจำกัดนี้เข้าไปในตัวแบบ จะได้

ค่าสูงสุด $$z_3 = 0.040x_2 + 0.045x_3 + 0.055x_4 + 0.070x_5 + 0.105x_6 + 0.085x_7 + 0.092x_8$$

ข้อจำกัด $\frac{1}{20}(x_6 + x_7 + x_8) \leq 5.0$

$$x_1 + \ldots + x_8 = (20 + 150 + 80)$$

$$x_1 > 0.14(150) + 0.04(80)$$

$$1.00x_1 + 0.995x_2 + 0.960x_3 + 0.900x_4$$

$$+0.850x_5 > 0.47(150) + 0.36(80)$$

$$x_j > 0.05(20 + 150 + 80) \text{ for all } j = 1, \ldots, 8$$

$$x_8 = 0.30(20 + 150 + 80)$$

$$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$$

ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_3^* = 12.5$ $x_4^* = 12.5$ $x_1^* = 24.2$ $x_2^* = 12.5$ $x_5^* = 88.3$ และ $x_6^* = 12.5$ $x_7^* = 12.5$ $x_8^* = 75.0$ ผลเฉลยนี้มีอัตราส่วนความเสี่ยงต่อทรัพย์สิน เท่ากับ 5.0 ผลกำไรรวม 17.2 ล้านบาท และอัตราส่วนเงินทุนต่อสินทรัพย์เสี่ยง เท่ากับ 0.890

หมายเหตุ หากพิจารณาปัญหาในตัวอย่างที่ 10.2 โดยกำหนดลำดับความสำคัญเท่ากัน แต่ให้ค่าถ่วงน้ำหนักไม่เท่ากัน หรือให้ลำดับความสำคัญไม่เท่ากัน จะส่งผลต่อผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ดังตารางที่ 10.1

ตารางที่ 10.1 ผลเฉลยในกรณีต่าง ๆ (Rardin, 1998)

	ถ่วงน้ำหนักเท่ากัน	ถ่วงน้ำหนักไม่เท่ากัน	Preempt ผลกำไร	Preempt CA
ค่าถ่วงน้ำหนักผลกำไร	1	1	1	0
ค่าถ่วงน้ำหนักอัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุน	1	10	0	1
ค่าถ่วงน้ำหนักอัตราส่วนทรัพย์สินเสี่ยง	1	1	0	0
ข้อจำกัดเพิ่มเติม	-	-	-	$d_1 = 10$
ผลกำไร	18.50	17.53	18.50	18.50
Deficiency, d_1*	0.00	0.97	0.00	0.00
อัตราส่วนความเพียงพอของเงินกองทุน	0.928	0.815	0.943	0.919
Deficiency, d2*	0.128	0.015	0.143	0.119
อัตราส่วนทรัพย์สินเสี่ยง	7.000	7.000	7.097	7.158
Deficiency, d_3*	0.000	0.000	0.097	0.158

ตารางที่ 10.1 (ต่อ)

	ถ่วงน้ำหนักเท่ากัน	ถ่วงน้ำหนักไม่เท่ากัน	Preempt ผลกำไร	Preempt CA
เงินสด (x_1*)	24.20	24.20	24.20	24.20
การลงทุนระยะสั้น (x_2*)	16.03	48.30	12.50	19.73
พันธบัตรระยะ 5 ปี (x_3*)	12.50	12.50	12.50	12.50
พันธบัตรระยะ 10 ปี (x_4*)	12.50	12.50	12.50	12.50
พันธบัตรระยะมากกว่า 10 ปี (x_5*)	44.77	12.50	16.37	37.91
สินเชื่อส่วนบุคคล (x_6*)	52.50	52.50	41.08	55.67
สินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย (x_7*)	12.50	12.50	12.50	12.50
สินเชื่อเพื่อการลงทุนทางธุรกิจ (x_8*)	75.00	75.00	88.36	75.00

10.2 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

เราทราบแล้วว่าการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ จะมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์มากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ ในกรณีที่ทุกวัตถุประสงค์มีระดับความสำคัญเท่ากัน ทำให้เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ที่เป็นผลรวมของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ถ่วงน้ำหนักด้วยความสำคัญของแต่ละวัตถุประสงค์ ทำให้ตัวแบบที่ได้จะมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพียงฟังก์ชันเดียว ทำให้สามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์เหมือนในบทที่ 3 ดังตัวอย่างที่ 10.3 ในกรณีที่ทุกวัตถุประสงค์มีระดับความสำคัญไม่เท่ากัน (Preemptive goal) ทำให้การแก้ปัญหาจะต้องพิจารณาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับเป้าหมายในระดับความสำคัญสูงสุดก่อน ซึ่งผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในขั้นตอนนี้อาจมีมากกว่าหนึ่งผลเฉลย ทำให้เราจะต้องหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดจากผลเฉลยเหล่านั้น โดยพิจารณาจากค่าความเบี่ยงเบนไปจากค่าเป้าหมายที่มีระดับความสำคัญรองลงมา (Lapin, 1991) ดังตัวอย่างที่ 10.4

ตัวอย่างที่ 10.3 บริษัทผลิตสินค้า 2 ซึ่งสินค้าทั้งสองชนิดนี้มีความต้องการแรงงานในการผลิตและกำไรต่อหน่วย แสดงดังตารางที่ 10.2 บริษัทมีเป้าหมายในการดำเนินธุรกิจ ดังนี้

1. หลีกเลี่ยงการทำงานล่วงเวลา
2. หลีกเลี่ยงการใช้พนักงานต่ำว่าความสามารถสูงสุด (Utilization) โดยชั่วโมงแรงงานที่มีเท่ากับ 32 ชั่วโมง
3. ความต้องการทางการตลาดนั้น ต้องการสินค้าชนิดที่ 1 อย่างน้อย 7 กล่อง เป้าหมาย
4. ความต้องการทางการตลาด ต้องการให้มีสินค้าชนิดที่ 2 อย่างน้อย 8 กล่อง

อย่างไรก็ตาม หากบริษัทไม่สามารถบรรลุเป้าหมายจะมีค่าคาดโทษ (Penalty) คิดเป็นมูลค่าเงินคือ 1 1.5 5 5 หน่วยสำหรับเป้าหมาย 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ จากข้อมูลนี้ จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายและหาผลเฉลยของปัญหา เมื่อให้ทุกเป้าหมายมีความสำคัญเท่ากัน

ตารางที่ 10.2 แรงงานและกำไรต่อกล่อง

	สินค้าชนิดที่ 1	สินค้าชนิดที่ 2
แรงงานในการผลิตต่อกล่อง	4 ชั่วโมง	2 ชั่วโมง
กำไรต่อกล่อง (พันบาท)	4	2

(1) ตัวแปรตัดสินใจ

ให้ x_1 และ x_2 แทนปริมาณการผลิตสินค้า c_1 และ c_2

s_i^+ แทนปริมาณที่สูงกว่าค่าเป้าหมายที่ i

s_i^- แทนปริมาณที่ต่ำกว่าค่าเป้าหมายที่ i

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = 1s_1^+ + 1.5s_1^- + 5s_2^- + 5s_3^-$ (4)

(3) ข้อจำกัด

1. แรงงานที่มีอยู่

$$4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32$$

3. ปริมาณความต้องการสินค้า

$$x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (5)$$

$$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 8$$

4. ตัวแปรมีค่าไม่เป็นลบ

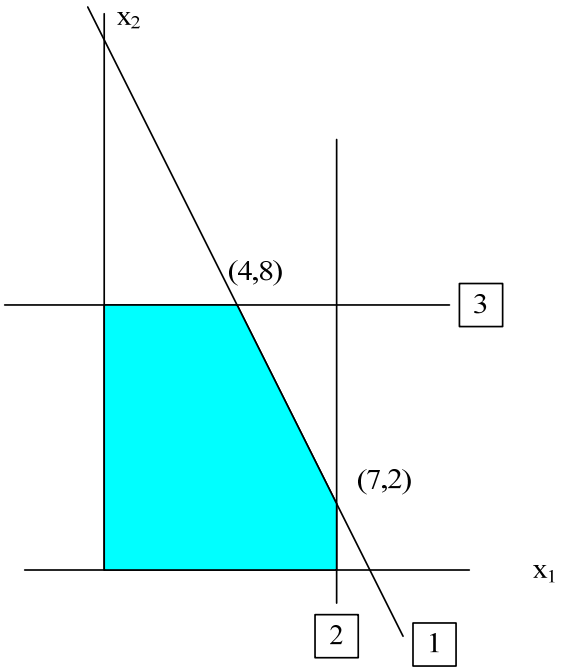
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$s_i^-, s_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

หากพิจารณาพื้นที่ที่เป็นไปได้ของปัญหา สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 10.1 จากกราฟจะเห็นได้ว่า พื้นที่เป็นไปได้คือ พื้นที่ ABC ทำให้เราสามารถใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในบทที่ 3 มาแก้ปัญหา ทำให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 4$ $x_2 = 8$ $s_2^- = 3$ โดย $z = 15$

ในการหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีระดับความสำคัญของเป้าหมาย เริ่มจากการแบ่งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ออกเป็น n ส่วน เมื่อ n แทนจำนวนระดับความสำคัญของเป้าหมาย ในตัวอย่างที่ 10.1 ถ้าแต่ละเป้าหมายมีระดับความสำคัญแตกต่าง เราสามารถแยก

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ออกเป็น 4 ส่วน คือ $z_1 = P_1s_1^-$ $z_2 = P_2s_2^-$ $z_3 = P_3s_3^-$ และ $z_4 = P_4s_1^+$ ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีระดับความสำคัญของเป้าหมาย จะสามารถใช้*วิธีซิมเพล็กซ์สำหรับการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย (Goal programming simplex method)* อาจเขียนย่อ ๆ ว่า *วิธีซิมเพล็กซ์ GP*



รูปที่ 10.1 แสดงพื้นที่เป็นไปได้

ความแตกต่างของวิธีซิมเพล็กซ์ในบทที่ 3 (ขอเรียกว่า ซิมเพล็กซ์ LP) และซิมเพล็กซ์ GP (Lee, 1972; Hiller, 1995; Taha, 1997) ดังนี้

1. ซิมเพล็กซ์ LP มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์อยู่ในแถวที่ 0 เพียงวัตถุประสงค์เดียว ขณะที่ซิมเพล็กซ์ GP มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์อยู่ในแถวที่ 0 โดยที่แต่ละแถวแทนเป้าหมายในแต่ละระดับ ซึ่งจะมีอยู่หลายแถว
2. ในซิมเพล็กซ์ GP การระบุตัวแปรเข้านั้น จะพิจารณาเป้าหมายในระดับสูงสุดก่อน ถ้าเรายังไม่บรรลุเป้าหมายในระดับสูงสุด ($z_i' > 0$) แล้ว จะเลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นบวกสูงสุดให้เป็น*ตัวแปรเข้า (Entering variable)* เมื่อเลือกตัวแปรนี้เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานจะทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (z_i') ลดลง นั่นหมายความว่า ผลเฉลยใหม่จะทำให้เราเข้าใกล้เป้าหมายมากขึ้น ถ้าตัวแปรทุกตัวใน z_i' มีค่าเป็นลบทั้งหมด แล้วแสดงว่าไม่มีตัวแปรใดที่ทำให้ค่า z_i' ต่ำสุด การนำตัวแปรเข้ามาเป็นตัวแปรมูลฐานน่าจะทำให้ z_i' มีค่าลดลง ถ้าตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ใน z_i' เป็นบวกมากที่สุด ไม่สามารถเป็นตัวแปรเข้าได้แล้ว เราจะเลือกตัว

แปรที่มีสัมประสิทธิ์ใน z_i' เป็นบวกรองลงมา ถ้าไม่มีตัวแปรในแถวที่ z_i' สำหรับเป้าหมายที่ i' ที่สามารถเป็นตัวแปรเข้า แล้วแสดงว่าเราไม่สามารถบรรลุเป้าหมายนั้นได้ ในกรณีนี้เราจะพิจารณาแถวของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่แทนเป้าหมายที่มีความสำคัญรองลงมา ให้สัญลักษณ์ $i^1 + 1$

3. เมื่อมีการปรับปรุงค่าต่าง ๆ ในตารางซิมเพล็กซ์ แถวที่ 0 ของแต่ละเป้าหมายจะต้องถูกปรับปรุงด้วย
4. ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ให้ค่าเหมาะสมที่สุด ถ้าเราสามารถบรรลุเป้าหมายทุกเป้าหมาย ($z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$) หรือถ้าแต่ละตัวแปรที่สามารถเป็นตัวแปรเข้า แล้วทำให้ค่าของ z_i' ลดลง แต่อาจจะเพิ่มความเบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมายของเป้าหมายอื่นที่มีระดับความสำคัญต่ำกว่าเป้าหมาย i'

ตัวอย่างที่ 10.4 จากตัวอย่างที่ 10.3 สมมติว่าบริษัทให้ความสำคัญของเป้าหมายต่าง ๆ ในระดับที่แตกต่างกัน ซึ่งสามารถเรียงระดับเป้าหมายจากมากไปหาน้อยได้ดังนี้

เป้าหมายระดับที่ 1 หลีกเลี่ยงการใช้ประโยชน์จากแรงงานน้อยไป (Under utilization)

เป้าหมายระดับที่ 2 ความต้องการสินค้า P_1

เป้าหมายระดับที่ 3 ความต้องการสินค้า P_2

เป้าหมายระดับที่ 4 หลีกเลี่ยงการทำงานล่วงเวลา

จงสร้างตัวแบบปัญหาและหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์

จากตัวอย่างที่ 10.3 ทำให้สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์และข้อจำกัดใหม่ได้ดังนี้

(1) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

ค่าต่ำสุด $z = P_1s_1^- + P_2s_2^- + P_3s_3^- + P_4s_1^+$ (6)

(2) ข้อจำกัด

1. แรงงานที่มีอยู่

$$4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 32$$

2. ปริมาณความต้องการสินค้า

$$x_1 + s_2^- - s_2^+ = 7 \quad (7)$$

$$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 8$$

3. ตัวแปรมีค่าไม่เป็นลบ

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$s_i^-, s_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

โดย $P_1 >> P_2 >> P_3 >> P_4$

พิจารณาแถวที่ 0 ของแต่ละระดับความสำคัญของเป้าหมาย

แถวที่ 0 เป้าหมายระดับที่ 1 $\Rightarrow$ $z_1 - P_1 s_1^- = 0$
แถวที่ 0 เป้าหมายระดับที่ 2 $\Rightarrow$ $z_2 - P_2 s_2^- = 0$
แถวที่ 0 เป้าหมายระดับที่ 3 $\Rightarrow$ $z_3 - P_3 s_3^- = 0$
แถวที่ 0 เป้าหมายระดับที่ 4 $\Rightarrow$ $z_4 - P_4 s_1^+ = 0$

จากตัวแบบข้างต้นนี้ มีตัวแปรพื้นฐานคือ s_1^- s_2^- และ s_3^- ดังนั้น ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะต้องไม่มีตัวแปรพื้นฐานอยู่ จึงต้องปรับปรุงฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่

เป้าหมายระดับที่ 1

$$z_1 - P_1 s_1^- = 0$$
$$z_1 - P_1\left(32 - 4x_1 - 2x_2 + s_1^+\right) = 0$$
$$z_1 + 4P_1 x_1 + 2P_1 x_2 - P_1 s_1^+ = 32P_1 \quad (8)$$

เป้าหมายระดับที่ 2

$$z_2 - P_2 s_2^- = 0$$
$$z_2 - P_2\left(7 - x_1 + s_2^+\right) = 0$$
$$z_2 + P_2 x_1 - P_2 s_2^+ = 7P_2 \quad (9)$$

เป้าหมายระดับที่ 3

$$z_3 + P_3 x_2 - P_3 s_3^+ = 8P_2 \quad (10)$$

เป้าหมายระดับที่ 4

$$z_4 - P_4 s_1^+ = 0 \quad (11)$$

จากเป้าหมายเหล่านี้ สามารถประมวลผลโดยวิธีซิมเพล็กซ์ GP ได้ดังตารางที่ 10.2 ซึ่งตารางนี้จะมีแถวที่ 0 อยู่ 4 แถวคือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 ตามลำดับ จากนั้นจะมีแถวที่ 1 2 และ 3 ที่มีตัวแปรพื้นฐานคือ s_1^- s_2^- และ s_3^- ตามลำดับ เช่นเดียวกับตารางซิมเพล็กซ์เดิม

ตารางที่ 10.2 ตารางซิมเพล็กซ์สำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย

It	ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ												ค่าทางขวามือ
		z_1	z_2	z_3	z_4	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	
It0	z_1	1	0	0	0	$4P_1$	$2P_1$	$-P_1$	0	0	0	0	0	$32P_1$
	z_2	0	1	0	0	P_2	0	0	$-P_2$	0	0	0	0	$7P_2$
	z_3	0	0	1	0	0	P_3	0	0	$-P_3$	0	0	0	$8P_3$
	z_4	0	0	0	1	0	0	$-P_4$	0	0	0	0	0	0
	s_1^-	0	0	0	0	4	2	–1	0	0	1	0	0	32
	s_2^-	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	0	7
	s_3^-	0	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	8
It1	z_1	1	0	0	0	0	$2P_1$	$-P_1$	$4P_1$	0	0	$-4P_1$	0	$4P_1$
	z_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_2$	0	0
	z_3	0	0	1	0	0	P_3	0	0	$-P_3$	0	0	0	$8P_3$
	z_4	0	0	0	1	0	0	$-P_4$	0	0	0	0	0	0
	s_1^-	0	0	0	0	0	2	–1	4	0	1	–4	0	4
	x_1	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	0	7
	s_3^-	0	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	8
It2	z_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_1$	0	0	0
	z_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_2$	0	0
	z_3	0	0	1	0	0	0	$P_3/2$	$-2P_3$	$-P_3$	$-P_3/2$	$2P_3$	0	$6P_3$
	z_4	0	0	0	1	0	0	$-P_4$	0	0	0	0	0	0
	x_2	0	0	0	0	0	1	–1/2	2	0	1/2	–2	0	2
	x_1	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	0	7
	s_3^-	0	0	0	0	0	0	1/2	–2	–1	–1/2	2	1	6
It3	z_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_1$	0	0	0
	z_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_2$	0	0
	z_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-P_3$	0
	z_4	0	0	0	1	0	0	0	$-4P_4$	$-2P_4$	$-P_4$	$4P_4$	$2P_4$	$12P_4$
	x_2	0	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	8
	x_1	0	0	0	0	1	0	0	–1	0	0	1	0	7
	s_1^+	0	0	0	0	0	0	1	–4	–2	–1	4	2	12

พิจารณาการวนซ้ำที่ 0 พิจารณาแถวที่ 0 ของ z_1 พบว่า สัมประสิทธิ์ของ x_1 มีค่าเป็นบวกมากที่สุด x_1 จึงเป็นตัวแปรเข้า พิจารณาตัวแปรออกโดยคำนวณหาอัตราส่วนต่ำสุดของแถวที่ 1 ถึง 3 พบว่า แถวที่ 2 มีอัตราส่วนต่ำสุด ซึ่งเท่ากับ 7 ดังนั้น s_2^- จึงเป็นตัวแปรออก จากนั้นปรับปรุงตารางซิมเพล็กซ์ได้ตารางการวนซ้ำครั้งที่ 1 ผลซ้ำในการวนซ้ำที่ 1 ยังคงพิจารณาในแถวที่ 0 ของ z_1 พบว่า x_2 เป็นตัวแปรเข้า และ s_1^- เป็นตัวแปรออก จึงปรับปรุงค่าได้ในการวนซ้ำครั้งที่ 2 พิจารณาในแถวที่ 0 ของ z_1 อีกครั้ง พบว่า z_1 มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่า เราบรรลุเป้าหมายที่ 1 แล้ว จึงพิจารณาในแถวของ z_2 ต่อไป ซึ่งจะพบว่า z_2 ก็มีค่า

เป็นศูนย์เช่นเดียวกัน จึงพิจารณาในแถวของ z_3 พบว่า s_1^+ และ s_2^- มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นบวก แต่ s_2^- มีค่าสัมประสิทธิ์ในแถวของ z_2 เป็นลบ ดังนั้น การเลือก s_2^- เป็นตัวแปรเข้าจะทำให้เป็น z_2 เพิ่มขึ้น จึงเลือก s_1^+ เป็นตัวแปรเข้า และ s_3^- เป็นตัวแปรแปรออก สำหรับการทำซ้ำครั้งที่ 3 ในแถว z_4 พบว่า s_2^- และ s_3^- มีสัมประสิทธิ์เป็นบวก ถ้าให้ s_2^- หรือ s_3^- เป็นตัวแปรเข้า จะทำให้ค่า z_4 ลดลง อย่างไรก็ตาม s_2^- และ s_3^- มีสัมประสิทธิ์เป็นลบในแถวของ z_2 และ z_3 ดังนั้น การให้ตัวแปร s_2^- หรือ s_3^- เป็นตัวแปรเข้า ทำให้ z_4 มีค่าลดลง แต่จะทำให้ z_2 และ z_3 มีค่าเพิ่มขึ้น จึงไม่ควรเลือก s_2^- หรือ s_3^- เป็นตัวแปรเข้า ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้จากการทำซ้ำที่ 3 เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ที่มี $x_1 = 7$ $x_2 = 8$ และ $s_1^+ = 12$ โดยที่ $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ แต่ $z_4 = 12P_4$ แสดงว่าผลเฉลยนี้ทำให้สามารถบรรลุวัตถุประสงค์ที่ 1 2 และ 3

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 10.4 จะพบว่าเมื่อเราพิจารณาเป้าหมายที่ 1 และ 2 ผลเฉลยในตารางการทำซ้ำที่ 2 และ 3 นั้น จะมีค่า z_1 และ z_2 เท่ากัน กล่าวคือ ผลเฉลย $x_1 = 7$ และ $x_2 = 2$ ใช้แรงงานเท่ากับ $4(7) + 2(2) = 32$ ทำให้ $s_1^- = s_1^+ = 0$ $z_1 = 0$ และปริมาณความต้องการสินค้าชนิดที่ 1 เท่ากับ 7 ทำให้ $s_2^- = s_2^+ = 0$ $z_2 = 0$ ขณะที่ $x_1 = 7$ $x_2 = 8$ ใช้แรงงานเท่ากับ $4(7) + 2(8) = 44$ ทำให้ $s_1^+ = 12$ $s_1^- = 0$ $z_1 = 0$ และปริมาณความต้องการสินค้าชนิดที่ 1 เท่ากับ 7 ทำให้ $s_1^- = s_1^+ = 0$ $z_2 = 0$ เนื่องจากบริษัทมีเป้าหมายไม่ต้องการใช้แรงงานน้อยกว่า 32 ชั่วโมง และปริมาณความต้องการสินค้าชนิดที่ 1 อย่างน้อย 7 กล่องเท่านั้น

ผลเฉลยทั้งสองนี้ จึงเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับเป้าหมายที่ 1 และ 2 อาจกล่าวได้ว่า เมื่อพิจารณาเป้าหมายที่ 1 และ 2 มีผลเฉลยที่เหมาะสมหลายผลเฉลย การพิจารณาเป้าหมายที่ 3 ซึ่งมีระดับความสำคัญน้อยกว่าเป้าหมายที่ 1 และ 2 เราจึงพิจารณาจากผลเฉลยเหมาะสมที่สุดทั้งสองนี้ ว่าผลเฉลยใดสามารถทำให้บรรลุเป้าหมายที่ 3 ได้มากสุด ในที่นี้ผลเฉลย $x_1 = 7$ และ $x_2 = 8$ ถูกเลือกเป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับเป้าหมายที่ 3

10.3 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีลำดับความสำคัญของเป้าหมายเท่ากันทุกเป้าหมาย ทำให้เราสามารถเขียนเป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น หรือการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เพียงฟังก์ชันเดียว ซึ่งการแก้ปัญหาโดยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อประมวลผลตัวแบบนั้น สามารถทำได้ในลักษณะเช่นเดียวกับการโปรแกรมเชิง

เส้น และการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.10 และ 6.7 ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการประมวลผลตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีลำดับความสำคัญของเป้าหมายไม่เท่ากันในทุกเป้าหมาย

10.3.1 การประมวลผลด้วย Excel Solver

การใช้โปรแกรม Excel Solver เพื่อประมวลผลการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีระดับความสำคัญไม่เท่ากันนั้นจะต้องเริ่มพิจารณาจากเป้าหมายที่อยู่ในระดับที่ 1 ทั้งหมดก่อนพร้อมกับข้อจำกัดของปัญหา เมื่อได้ผลเฉลยแล้ว จะพิจารณาเป้าหมายในระดับที่ 2 โดยเพิ่มข้อจำกัดเกี่ยวกับเป้าหมายในระดับที่ 1 เพื่อให้มั่นใจว่าผลเฉลยใหม่นี้ยังคงบรรลุเป้าหมายในระดับที่ 1 ไม่น้อยกว่าเดิม จากนั้นจึงพิจารณาเป้าหมายในระดับถัดไปโดยเพิ่มข้อจำกัดเกี่ยวกับเป้าหมายในระดับก่อนหน้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10.5 จากตัวอย่างที่ 10.3 และ 10.4 มีตัวแปรตัดสินใจคือ x_1 และ x_2 ที่มีเป้าหมาย 4 ระดับดังนี้

เป้าหมายระดับที่ 1

$$z_1 - P_1 s_1^- = 0$$
$$z_1 + 4P_1 x_1 + 2P_1 x_2 - P_1 s_1^+ = 32P_1$$

เป้าหมายระดับที่ 2

$$z_2 - P_2 s_2^- = 0$$
$$z_2 + P_2 x_1 - P_2 s_2^+ = 7P_2$$

เป้าหมายระดับที่ 3

$$z_3 + P_3 x_2 - P_3 s_3^+ = 8P_2$$

เป้าหมายระดับที่ 4

$$z_4 - P_4 s_1^+ = 0$$

พร้อมด้วยข้อจำกัด ดังนี้

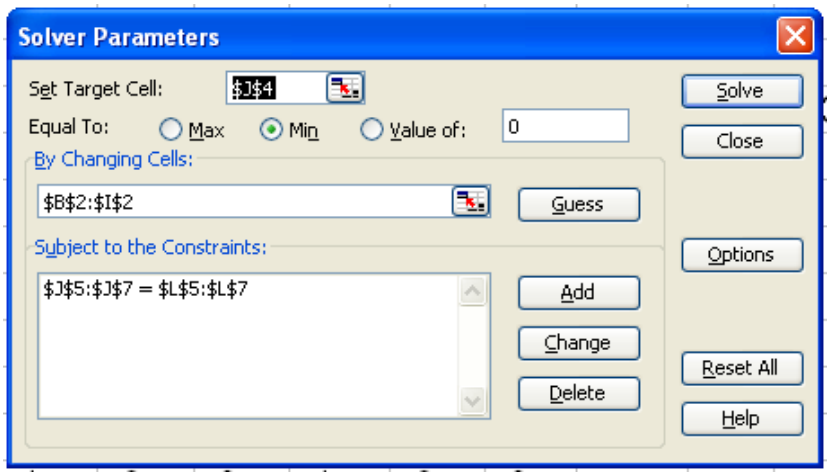
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 32 \\ x_1 + s_2^- - s_2^+ &= 7 \\ x_2 + s_3^- - s_3^+ &= 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ s_i^-, s_i^+ &\geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{12}$$

เมื่อนำเป้าหมายที่ 1 และชุดข้อจำกัด (12) ไปสร้างตัวแบบดังรูปที่ 10.2 10.3 พร้อมทั้งทำการประมวลลัพธ์ได้ดังรูปที่ 10.4 $x_1 = 8$ $s_2^+ = 1$ และ โดยที่ $z_1 = 0$ เมื่อพิจารณาเป้าหมายในระดับที่ 2 และนำเป้าหมายระดับที่ 1 มาเป็นข้อจำกัดตัวแบบแสดงดังรูปที่ 10.5 เมื่อประมวลผลตัวแบบได้ผลเฉลยคือ $x_1 = 7$ $x_2 = 2$ และ $s_3^- = 6$ โดยที่ $z_2 = 0$ ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาเป้าหมายระดับที่ 3 และเพิ่มข้อจำกัดของเป้าหมายระดับที่ 2 ได้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 7$ $x_2 = 8$ และ $s_2^+ = 1$ โดยที่ $z_3 = 0$ เมื่อพิจารณาเป้าหมายที่ 4 พร้อมกับเพิ่มข้อจำกัดของเป้าหมายที่ 3 ผลเฉลยที่ได้เฉลยเดียวกันกับผลเฉลยของเป้าหมายระดับที่ 3 ดังนั้นผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยเหมาะสมที่สุดสำหรับเป้าหมายทั้ง 4 ระดับ

chapter10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	s1+	s2+	s3+	s1-	s2-	s3-			
2												
3												
4	cofficients						1			0		
5	Labor const	4	2	-1			1			0	=	32
6	Demand x1	1			-1			1		0	=	7
7	Demand x2		1			-1			1	0	=	8

รูปที่ 10.2 การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเป้าหมายระดับที่ 1

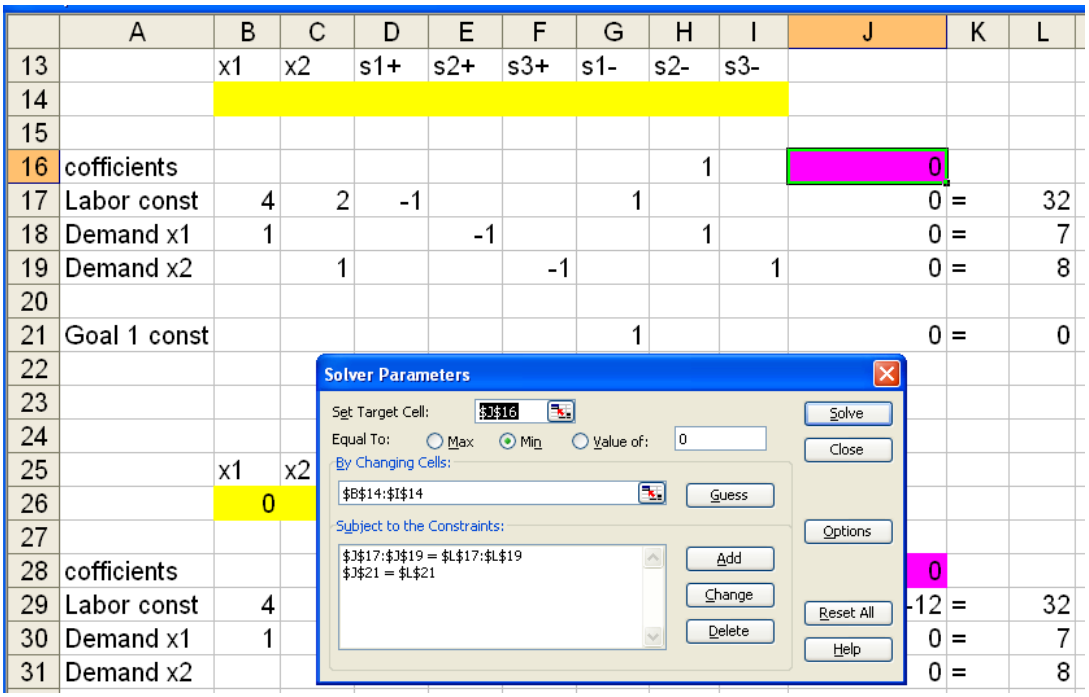


รูปที่ 10.3 การประมวลผลโปรแกรมเชิงเป้าหมายระดับที่ 1

Balakrishman, Render and Stair (2007) ได้แสดงตัวอย่างการใช้ Microsoft excel solver ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมายที่มีหลายระดับของฟังก์ชันเป้าหมาย ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	s1+	s2+	s3+	s1-	s2-	s3-			
2		8	0	0	1	0	0	0	8			
3												
4	cofficients						1			0		
5	Labor const	4	2	-1			1			32	=	32
6	Demand x1	1			-1			1		7	=	7
7	Demand x2		1			-1			1	8	=	8

รูปที่ 10.4 ผลลัพธ์จากการประมวลผลโปรแกรมเชิงเป้าหมายระดับที่ 1



รูปที่ 10.5 การสร้างตัวแบบและประมวลผลโปรแกรมเชิงเป้าหมายระดับที่ 2

10.3.2 การประมวลผลด้วยโปรแกรม SAS

การประมวลผลด้วยโปรแกรม SAS เริ่มจากการสร้างข้อมูลแบบ SAS (SAS data set) ที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์หลายฟังก์ชัน โดยจะระบุค่าทางขวามือ (Right hand side) แทนหมายเลขลำดับความสำคัญของเป้าหมาย ในกรณีที่มีเป้าหมายมากกว่า 1 เป้าหมายที่มีความสำคัญในลำดับเดียวกัน เป้าหมายเหล่านี้จะต้องนำมาเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดียวกัน กล่าวคือ เป้าหมายที่มีลำดับความสำคัญเท่ากันจะถูกนำมาเขียนเป็นฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์เดียวกัน นอกจากนี้การใช้คำสั่ง PROC LP จะเลือกตัวเลือก (Option) คือ goal program ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10.6 จากตัวแบบในตัวอย่างที่ 10. 4 สามารถเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
data production;
  input _row_ $ x1 x2  n1 n2 n3 p1 p2 p3 _type_ $ _rhs_;
  datalines;
   object1  0  0  1  0  0   0   0   0 min   1
   object2  0  0  0  1  0   0   0   0 min   2
   object3  0  0  0  0  1   0   0   0 min   3
   object4  0  0  0  0  0   1   0   0 min   4
   Labor    4  2  1  0  0  -1   0   0 eq   32
   Demand1  1  0  0  1  0   0  -1   0 eq    7
   Demand2  0  1  0  0  1   0   0  -1 eq    8
   ;

proc lp data=production goalprogram;
run;
```

เมื่อประมวลผลตัวแบบด้วยโปรแกรม SAS จะได้ผลลัพธ์ทั้งหมด 4 ชุดที่แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลจากลำดับความสำคัญสูงสุดไปหาต่ำสุด จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 1 ด้วยค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 0 จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 1 ถึง 4 ได้ผลเฉลยดังรูปที่ 10.6 ถึง 10.9 ได้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ 0 0 0 และ 12 ตามลำดับ

Variable Summary

Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	x1	ALTER	NON-NEG	0	0	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	0	16	0
3	n1		NON-NEG	1	0	1
4	n2	BASIC	NON-NEG	0	7	0
5	n3	ALTER	NON-NEG	0	0	0
6	p1	ALTER	NON-NEG	0	0	0
7	p2	ALTER	NON-NEG	0	0	0
8	p3	BASIC	NON-NEG	0	8	0

รูปที่ 10.6 แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 1

Variable Summary						
Col	**Variable Name**	**Status**	**Type**	**Price**	**Activity**	**Reduced Cost**
1	x1	BASIC	NON-NEG	0	7	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	0	2	0
3	n1	ALTER	NON-NEG	0	0	0
4	n2		NON-NEG	1	0	1
5	n3	BASIC	NON-NEG	0	6	0
6	p1	ALTER	NON-NEG	0	0	0
7	p2	ALTER	NON-NEG	0	0	0
8	p3	ALTER	NON-NEG	0	0	0

รูปที่ 10.7 แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 2

Variable Summary						
Col	**Variable Name**	**Status**	**Type**	**Price**	**Activity**	**Reduced Cost**
1	x1	BASIC	NON-NEG	0	7	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	0	8	0
3	n1	ALTER	NON-NEG	0	0	0
4	n2	DEGEN	NON-NEG	0	0	0
5	n3		NON-NEG	1	0	1
6	p1	BASIC	NON-NEG	0	12	0
7	p2	ALTER	NON-NEG	0	0	0
8	p3	ALTER	NON-NEG	0	0	0

รูปที่ 10.8 แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 3

Constraint Summary						
Row	**Constraint Name**	**Type**	**S/S Col**	**Rhs**	**Activity**	**Dual Activity**
1	object1	FIXEDOBJ	.	0	0	.
2	object2	FIXEDOBJ	.	0	0	.
3	object3	OBJECTVE	.	0	0	.
4	object4	FREE_OBJ	.	0	12	.
5	Labor	EQ	.	32	32	0
6	Demand1	EQ	.	7	7	0
7	Demand2	EQ	.	8	8	0

รูปที่ 10.9(ก) แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลข้อจำกัดด้วยเป้าหมายลำดับที่ 4

Variable Summary						
Col	**Variable Name**	**Status**	**Type**	**Price**	**Activity**	**Reduced Cost**
1	x1	BASIC	NON-NEG	0	7	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	0	8	0
3	n1		NON-NEG	0	0	1
4	n2	DEGEN	NON-NEG	0	0	0
5	n3	DEGEN	NON-NEG	0	0	0
6	p1	BASIC	NON-NEG	1	12	0
7	p2		NON-NEG	0	0	4
8	p3		NON-NEG	0	0	2

รูปที่ 10.9(ข) แสดงผลลัพธ์จากการประมวลผลด้วยเป้าหมายลำดับที่ 4

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงแก้ปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์

ค่าสูงสุด $z_1 = 2x_1 + x_2$

ค่าสูงสุด $z_2 = -3x_1 + 2x_2$

ข้อจำกัด $2x_1 + 5x_2 \leq 60$

$x_1 + x_2 \leq 18$

$3x_1 + x_2 \leq 44$

$x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

โดย z_1 มีลำดับความสำคัญสูงกว่า z_2 มาก

2. จงแก้ปัญหาการโปรแกรมหลายวัตถุประสงค์ที่มีลำดับความสำคัญจากมากไปหาน้อยคือ z_1 z_2 และ z_3

ค่าต่ำสุด $z_1 = 133x_1 + 10x_2 + x_3$

ค่าต่ำสุด $z_2 = 20x_1 + x_2 + 0.5x_3$

ค่าต่ำสุด $z_3 = -1.67x_1 - 0.2x_2 - 0.5x_3$

ข้อจำกัด $x_3 / x_2 \leq 20$

$-20x_1 + 3x_2 \geq -160$

$-50x_1 + 20x_2 - x_3 \geq -400$

$8 \leq x_1 \leq 11$

$x_2 \leq 40$

$x_3 = 100$

3. จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย เมื่อกำหนดให้ z_1 และ z_2 มีลำดับความสำคัญเท่ากัน แต่ให้ค่าถ่วงน้ำหนัก z_1 และ z_2 เท่ากับ 3 และ 4

ค่าสูงสุด $z_1 = 3x_1 + 5x_2 + x_3$

ค่าสูงสุด $z_2 = 4x_1 + x_2 + 2x_3$

ข้อจำกัด $3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 100$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 80$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

4. จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเป้าหมายต่อไปนี้ โดยวิธีซิมเพล็กซ์ เมื่อกำหนดให้

$P_1 >>> P_2 >>> P_3$

ค่าต่ำสุด $z = P_1s_1^- + P_2s_2^- + P_3s_3^-$

ข้อจำกัด $5x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 60$

$x_1 + 4x_2 + s_2^- - s_2^+ = 20$

$3x_1 + 2x_2 + s_3^- - s_3^+ = 40$

$x_1, x_2, s_i^-, s_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$

5. จงหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย โดยวิธีซิมเพล็กซ์เมื่อกำหนดให้ $P_1 >>> P_2$

ค่าต่ำสุด $z = P_1s_1^- + P_2s_2^-$

ข้อจำกัด $x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 10$

$7x_1 + 3x_2 + s_2^- - s_2^+ = 40$

$3x_1 + x_2 + s_3^- - s_3^+ = 18$

$x_1, x_2, s_i^-, s_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$

6. จงหาผลเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย โดยวิธีซิมเพล็กซ์ เมื่อกำหนดให้

$P_1 >>> P_2 >>> P_3$

ค่าต่ำสุด $z = P_1s_1^- + P_2s_2^- + P_2s_2^+ + P_3s_3^- + P_3s_3^+$

ข้อจำกัด $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + s_1^- - s_1^+ = 40$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_2^- - s_2^+ = 30$

$x_2 + s_3^- - s_3^+ = 5$

$x_1, x_2, x_3, s_i^-, s_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$

7. จากปัญหาข้อ 4 จงประมวลผลโดยใช้ Excel Solver และโปรแกรม SAS

8. จากปัญหาข้อ 5 จงประมวลผลโดยใช้ Excel Solver และโปรแกรม SAS

9. จากปัญหาข้อ 6 จงประมวลผลโดยใช้ Excel Solver และโปรแกรม SAS

บรรณานุกรม

Balakrishman, N., Render, B., Stair, R.M. (2007). *Managerial Decision Modeling with Spreadsheet, 2nd edition, Prentice Hall*, New Jersey, USA.

Hiller, F.S. (1995). *Introduction to Operations Research*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Lapin, L.L (1991). *Quantitative Methods for Business Decisions with Cases*, 5th edition, Harcourt Brace Jovanovich, New York, USA.

Lee, S.M. (1972). *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers, Philadelphia. USA.

Taha, H.A. (1997). *Operations research: An introduction*, 6th ed, Prentice Hall, New York, USA.

Radin, R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, New York. USA.

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2) = (0, 2)$ โดย $z = -2$

2. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2) = (13, 15)$ โดย $z = 31$

3. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2) = (2, 4)$ โดย $z = 110$

4. (2) ความสัมพันธ์ของผลเฉลยพื้นฐานและจุดมุม คือ

ตัวแปรพื้นฐาน	ผลเฉลย	จุดมุม
x_1, x_2	$x_1=150\ x_2=100\ s_1=s_2=0$	(150,100)
x_1, s_1	$x_1=200,\ s_1=150,\ x_2=s_2=0$	(200,0)
x_1, s_2	$x_1=350,\ s_2=-300,\ x_2=s_1=0$	ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้
x_2, s_1	$x_2=400,\ s_1=-450,\ x_1=s_2=0$	ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้
x_2, s_2	$x_2=175,\ s_2=225,\ x_1=s_1=0$	(0,175)
s_1, s_2	$s_1=350,\ s_2=400,\ x_1=x_2=0$	(0,0)

5. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $s_1 = 10\ x_1 = 15\ x_2 = 5\ s_2 = s_3 = 0$ โดย $z = 25$

6. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $x_1 = 3,\ x_2 = 0\ s_1 = 0\ s_2 = 0$ โดย $z = -9$

7. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 0.5, 0)$ โดย $z = 2.5$

8. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 12.5, 7.5)$ โดย $z = 57.5$

9. ตารางสุดท้ายคือ

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ค่าทางขวามือ
1	0	0	5	–3	7
0	1	0	1	–1	1
0	0	1	2	–1	2

เราไม่สามารถทำให้ตัวแปร s_2 เข้ามาเป็นตัวแปรพื้นฐานได้ ดังนั้นปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

10. ผลเฉลยเหมาะสมมีได้หลายค่า ผลเฉลยเหล่านี้คือ $x_1 = 1/2, x_2 = 0$ หรือ $x_1 = 1/3, x_2 = 2/3$ โดยที่ $z = 2$ และค่ากึ่งกลางระหว่างสองจุดนี้คือ $x_1 = 5/12, x_2 = 1/3$ เราสามารถเขียนสมการแสดงเซตของคำตอบได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-w)\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } 0 \le w \le 1$$

11. หลังจากทำไปซ้ำครั้งที่ 3 จะพบว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต โดยที่ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (116.4+30, 73.64+20, 112.73, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ เมื่อ $\theta \ge 0$ และ $z = 693.6 + 170$

12. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด คือ
    (1) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 2, 0)$
    (2) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 2, 0)$
    (3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 0, 2)$
    (4) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 2)$ โดยที่ $z = 5$

14. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $s_1 = 1, s_2 = 3, x_3 = 1, x_2 = x_1 = e_3 = 0$ โดย $z = 1$

15. ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดคือ $\left(x_1 = 5, x_2 = 5, s_1 = \frac{1}{4}, e_1 = 0\right)$ โดยที่ $z = 25$

16. ผลเฉลยที่ได้ คือ $a_1 = 1, s_2 = 1/2, x_1 = 1$ และ $x_2 = s_3 = 0$ เนื่องจากตัวแปร เทียม มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้

17. ผลเฉลยมีหลายคำตอบ คือ $x_1 = 0.8, x_2 = 1.8, x_3 = 0$ โดยที่ $z = 7$ $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3$ โดยที่ $z = 7$ ดังนั้นสามารถเขียนเซตของผลเฉลยได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.8 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-c)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } 0 \le c \le 1$$

18. $x_3 = 1.349,\ x_4 = 0.209,\ x_1 = x_2 = 0$ และ $z = 7.07$

19. $w_1 = 0.60748,\ w_2 = 1,\ w_3 = 1,\ w_4 = 0,\ w_5 = 1,\ w_6 = 0.13218$ และ $z = 48,438.08$

20. $x_1 = 0,\ x_2 = 600,\ x_3 = 140,\ y_1 = 1,000,\ y_2 = 0,\ y_3 = 560$ และ $z = 15,166$

21. ผลเฉลยมีได้หลายคำตอบ ซึ่งอยู่ระหว่างจุด $(x_1, x_2) = (320, 360)$ และ (500, 0) สามารถเขียนเซตของคำตอบบนส่วนของเส้นตรงระหว่างสองจุดนี้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 320 \\ 360 \end{bmatrix} + (1-c)\begin{bmatrix} 500 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } 0 \le c \le 1$$

23. (2) มีทั้งหมดดังนี้

ตัวแปรมูลฐาน	ผลเฉลย	จุดมุม
x_1, x_2	$x_1 = 150,\ x_2 = 100,\ s_1 = s_2 = 0$	(150, 100)
x_1, s_1	$x_1 = 200,\ s_1 = 150,\ x_2 = s_2 = 0$	(200, 0)
x_1, s_2	$x_1 = 300,\ s_2 = -300,\ x_2 = s_1 = 0$	Infeasible
x_2, s_1	$x_2 = 400,\ s_1 = -450,\ x_1 = s_2 = 0$	Infeasible
x_2, s_2	$x_2 = 175,\ s_1 = 225,\ x_1 = s_1 = 0$	(0, 175)
s_1, s_2	$s_1 = 350,\ s_2 = 400,\ x_1 = x_2 = 0$	(0, 0)

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ โดย $z = 7$

2. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ โดย $z = 6$

3. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$ โดย $z = 19$

4. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9, 0, 2, 0)$ โดย $z = 28$

5. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 3, 0)$ โดย $z = 6$

7. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 1, 1, 0, 0)$ โดย $z = 8$ ระนาบตัดคือ $3x_1 + 4x_2 \leq 11$

10. $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (5, 5, 6, 6, 10, 4)$ โดย $z = 169$

11. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7, 11, 0, 0)$ โดย $z = 194$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. $x_1 = 1.33$ $x_2 = 6$ $z = 19.33$

2. $x_1 = 2$ $x_2 = 8.5$ $z = 19$

3. $x_1 = 24$ $x_2 = 0$ $z = 48.83$

4. $x_1 = 0$ $x_2 = 13$ $x_3 = 1.33$ $z = 44.33$

5. $x_1 = 0$ $x_2 = 5.5$ $x_3 = 2$ $z = 32.75$

6. $x_1 = 6.33$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $z = 31.33$

7. $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = x_4 = 0$ โดย $z = -4$

8. $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0.5$ $z = -5.5$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 10

1. $x_1 = 13,\ x_2 = 5,\ s_1 = 9,\ s_4 = 5,\ z_1 = 31,\ z_2 = -29$

2. $x_1 = 8\ \ x_2 = 5\ \ x_3 = 100\ \ z_1 = 1214\ \ z_2 = 215$ และ $z_3 = -64.41$

3. $x_1 = 24\ \ x_2 = 28\ \ x_3 = 0\ \ z = 3z_1 + 4z_2 = 1132$

4. $x_1 = 12\ \ x_2 = 2\ \ s_1^- = s_2^- = s_3^- = s_2^+ = s_3^+ = 0\ \ s_1^+ = 6$ โดย $z_1 = P_1 s_1^- = 0$ $z_2 = P_2 s_2^- = 0\ z_3 = P_3 s_3^- = 0$

5. $x_1 = 5.2\quad x_2 = 2.4\quad s_1^- = s_2^- = s_3^- = s_1^+ = s_3^+ = 0\quad s_2^+ = 3.6$ โดยที่ $z_1 = P_1 s_1^- = 0\ \ z_2 = P_2 s_2^- = 0$

6. $x_1 = 0\quad x_2 = 4\quad x_3 = 7\quad s_3^- = s_3^+ = 1$ โดยที่ $z_1 = P_1 s_1^- = 0$ $z_2 = P_2 s_2^- + P_2 s_2^+ = 0$ และ $z_3 = P_3 s_3^- + P_3 s_3^+ = 1$

ดัชนี

กรีดี้อัลกอริทึม 276
กฎของแบลนด์ 143
กฎเลกซิโคกราฟิก 141
การแจงนับ 280
การดำเนินการตามแถว 111, 131
การตัดแบบแดนท์ซิก 312
การตัดแบบโกโมรี 310
การแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต 296
การถ่วง 284
การทดสอบอัตราส่วน 95, 111
การวนซ้ำ 141
การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล 66, 70
การวิเคราะห์ความไว 149
การโปรแกรมเชิงเส้น 13
การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม 249
การผ่อนคลายปัญหา 319
การแผ่สั้นที่สุด 277
ขอบเขตบน 286, 369
ขอบเขตล่าง 286, 339, 369
ข้อจำกัดของทรัพยากรที่มีอยู่ 13
ข้อจำกัดผูกพัน 164
ค่าที่เหมาะสมที่สุด 84
คาร์มาร์คาร 195
จุดประชิด 91
จุดมุม 84
ชุดข้อมูลแบบ SAS 151
ตัวแปรเข้า 94, 111, 142, 399
ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น 18
ตัวแปรจร 89, 110, 111
ตัวแบบพีมีเดียน 256

ตัวแปรพื้นฐาน 89, 110
ตัวแปรส่วนเกิน 87, 110, 130, 164
ตัวแปรส่วนขาด 163, 189
ตัวแปรออก 95, 111, 142
ตารางซิมเพล็กซ์ 109
แถวตัวหลัก 111
เทคนิคตัวแปรเทียม 129, 164
ประสิทธิภาพ 16, 39, 66, 175, 205, 244
ปัญหาการครอบคลุมเซต 252
ปัญหาควบคู่ 175, 181, 190
ปัญหาถุงเป้ 251
ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต 124, 139, 351
ปัญหาผ่อนคลาย 284, 307
ปัญหาผ่อนคลายแบบ LP 308, 344
การโปรแกรมเชิงเป้าหมาย 368
แปรส่วนขาด 86
ผลเฉลยที่เป็นไปได้ 139
ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ 90, 122
ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด 84
ผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ 118, 119
ผลเฉลยพื้นฐาน 88, 89, 92
ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้ 89
ผลเฉลยไม่มีขอบเขต 124
พื้นที่ที่เป็นไปได้ 83
ราคาเงา 164, 191
ระนาบตัด 306, 310, 347
ระนาบตัดแบบผสม 343
ลากรานเจียน 318
รูปแบบเดนส์ 151
รูปแบบบัญญัติ 94, 131
รูปแบบมาตรฐาน 85
รูปแบบสปาร์ส 151

วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์.....192
วิธี ทู–เฟส.....130
วิธี บิก–เอ็ม.....130
วิธีเกาส์–จอร์แดน.....113
วิธีซิมเพล็กซ์.....100, 399
วิธีพีชคณิต.....92
วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต.....283
วิธีการแบ่งแยก.....354
สดมภ์ตัวหลัก.....111
สภาพซ้อนสถานะ.....129, 139
สภาวะคู่กันแบบเข้ม.....184
สภาวะคู่กันแบบอ่อน.....182
เส้นต้นทุนเท่ากัน.....124
เส้นผลกำไรเท่ากัน.....124
อัตราส่วนต่ำสุด.....108, 112, 142
อินคัมเบนท์.....285, 286, 295
DEA.....175, 205, 207, 208, 245

คำศัพท์ที่สำคัญ

กรีดี้อัลกอริทึม	Greedy Algorithm
การตัดแบบโกโมรี	Gomory Cut
การตัดแบบโกโมรี	Gomory Cutting
การตัดแบบแดนท์ซิก	Dantzig Cut
การตัดแบบผสม	Mixed Integer Cuts
การถ่วง	Fathoming
การทดสอบอัตราส่วน	Ratio Test
การโปรแกรม	Programming
การโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์	Mathematical Programming
การโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม	Integer Programming
การโปรแกรมเชิงเส้น	Linear Programming
การโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบทวิภาค	Binary Integer Programming, BIP
การผ่อนคลายปัญหาแบบการโปรแกรมเชิงเส้น	LP Relaxation
การเพิ่มขึ้นที่ยอมให้ได้	Allowable Increase
การลดลงที่ยอมให้ได้	Allowable Decrease
การวางแผน	Planning
ข้อจำกัด k จาก n ทางเลือก	K out of n choice constraint
ข้อจำกัดของทรัพยากรที่มีอยู่	Resource Constraint
ข้อจำกัดขอบเขตล่าง	Lower bound constraint
ข้อจำกัดที่เลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง	Mutually Exclusive Constraint
ข้อจำกัดเป้าหมายย่อย	Subgoal Constraint
ข้อจำกัดผูกพัน	Binding Constraint
ขอบเขตบน	Upper Bound
ขอบเขตล่าง	Lower Bound
คณิตศาสตร์	Mathematical
ความเป็นไปได้ของผลเฉลย	Feasibility
ค่าใช้จ่ายส่วนลด	Reduced Cost
ค่าต่ำสุด	Minimization

ค่าที่เหมาะสมที่สุด	Optimal Value
ค่าสูงสุด	Maximization
จำนวนเต็มแบบทวิภาค	Binary Integer
จุดประชิด	Adjacent Point
จุดมุม	Corner Point
ช่วงยอมให้ได้	Allowable Range
ต้นทุนเพิ่ม	Incremental Cost
ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร	Resource Allocation Model
ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น	Linear Programming Model
ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นแบบผสม	Mixed Integer Linear Programming Model
ตัวแบบคณิตศาสตร์	Mathematical Model
ตัวแบบความน่าจะเป็น	Stochastic Models
ตัวแบบเชิงกำหนด	Deterministic Model
ตัวแบบเชิงจำนวนเต็ม	Integer Model
ตัวแบบเชิงพลวัต	Dynamic Model
ตัวแบบเชิงสถิต	Static Model
ตัวแบบเชิงเส้น	Linear Model
ตัวแบบพีมีเดียน	P-Median Model
ตัวแบบไม่เป็นจำนวนเต็ม	Noninteger Programming
ตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น	Nonlinear Model
ตัวแปรเข้า	Entering Variable
ตัวแปรจร	Nonbasic Variable
ตัวแปรตัดสินใจ	Decision Variable
ตัวแปรเทียม	Artificial Variable
ตัวแปรพื้นฐาน	Basic Variable
ตัวแปรส่วนเกิน	Surplus Variable, Excess Variable
ตัวแปรส่วนขาด	Slack Variable
ตัวแปรส่วนขาดของผลผลิต	Output Slack
ตัวแปรออก	Leaving Variable
ตารางซิมเพล็กซ์	Simplex Tabuleau
แตกกิ่งเชิงกำหนด	Arbitrary Branching

แตกกิ่งทางซ้ายก่อน	Left-First Branching
แถวตัวหลัก	Pivot Row
แถวตัวหลัก	Pivot Row
ทฤษฎีตัวแปรส่วนขาดเพิ่มเติม	Complementary Slackness
เทคนิคตัวแปรเทียม	Artificial Variable Technique
ปัญหาการครอบคลุมเซต	Set-Covering Problem
ปัญหาการจัดสรรงาน	Assignment Problem
ปัญหาการเดินทางของพนักงานขาย	Traveling Saleman Problem, TSP
ปัญหาการแบ่งเซต	Set-Partitioning Problem
ปัญหาการผสม	Blending or Ingredient Problem
ปัญหาการแผ่สั้นที่สุด	Minimum Spanning Tree Problem, MST
ปัญหาควบคู่	Dual Problem
ปัญหาค่าต่ำสุดปกติ	Normal Min Problem
ปัญหาค่าสูงสุดปกติ	Normal Max Problem
ปัญหาเดิม	Primal Problem
ปัญหาถุงเป้	Knapsack Problem
ปัญหาที่มีค่าใช้จ่ายคงที่มาเกี่ยวข้อง	Fixed-Charge Problem
ปัญหาที่ไม่มีขอบเขต	Unbounded Problem
ปัญหาที่ไม่สมมาตร	Asymmetric Problem
ผลเฉลยที่น่าจะได้รับคัดเลือก	Candidate Solution
ผลเฉลยที่เป็นไปได้	Feasible Solutions
ผลเฉลยที่เป็นไปได้	Infeasible Solution
ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้	Infeasible Solution
ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด	Optimal Solution
ผลเฉลยที่เหมาะสมหลายคำตอบ	Alternative Solution
ผลเฉลยพื้นฐาน	Basic Solution
ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้	Basic Feasible Solution
ผลเฉลยพื้นฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้น	Initial Basic Feasible Solution
ผลเฉลยไม่มีขอบเขต	Unbounded Solution
พื้นที่ที่เป็นไปได้	Feasible Region
ฟังก์ชันวัตถุประสงค์	Objective Function
รอบระยะเวลาการผลิต	Cycle Time

ระดับแนวหน้า	Frontier
ระนาบตัด	Cutting Plane
ราคาเงา	Shadow Price
ราคาเงาของทรัพยากร	Resource Shadow Price
ราคาเหมาะสม	Fair Price
รูปแบบการตัด	Cutting Pattern
รูปแบบตาราง	Tabular Form
รูปแบบบัญญัติ	Canonical Form
รูปแบบมาตรฐาน	Standard Form
เลขตัวหลัก	Pivot Number
วัฏจักร	Cyclic
วิธีการแจงนับ	Enumerative Method
วิธีการสร้างจำนวนเต็ม	Method of Integer Forms
วิธีเกาส์-จอร์แดน	Gauss-Jordan Method
วิธีซิมเพล็กซ์	Simplex Method
วิธีซิมเพล็กซ์สำหรับการโปรแกรมเชิงเป้าหมาย	Goal Programming Simplex Method
วิธีดูอัลซิมเพล็กซ์	Dual Simplex Method
วิธีแตกกิ่งและจำกัดขอบเขต	Branch and Bound Method
วิธีทู-เฟส	Two-Phase Method
วิธีบิก-เอ็ม	Big-M Method
วิธีพีชคณิต	Algebraic Method
เวลาติดตั้ง	Setup Time
เวลาในการผลิต	Processing Time
สดมภ์ตัวหลัก	Pivot Column
สภาพซ้อนสถานะ	Degeneracy
สภาวะคู่กันแบบเข้ม	Strong Duality
สภาวะคู่กันแบบอ่อน	Weak Duality
สภาวะเหมาะสมที่สุด	Optimality
เส้นต้นทุนเท่ากัน	Isocost Line
เส้นทางปิด	Closed Path
เส้นทางย่อย	Subtour
เส้นผลกำไรเท่ากัน	Isoprofit Line

เส้นผลกำไรเท่ากัน	Isoprofit Line
หนึ่งรอบการคำนวณ	One Iteration
อัตราส่วนสัมบูรณ์	Absolute Ratio
อินคัมเบนท์	Incumbent