1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

คำถามเกี่ยวกับเสถียรภาพของสสารนั้น เป็นที่สนใจของนักฟิสิกส์มาตั้งแต่ Rutherford พบว่าสสารประกอบด้วยอนุภาคที่มีประจุบวกและประจุลบโดยมีอันตรกิริยาระหว่างกันแบบคูลอมบ์ ในปี 1931 Paul Ehrenfest (cf. [1]) ได้ตั้งคำถามเกี่ยวกับเสถียรภาพและขนาดของสสารขึ้นมาว่า ทำไมอิเล็กตรอนซึ่งมีประจุลบไม่ยุบตัวลงสู่นิวเคลียสของอะตอมซึ่งมีประจุบวก ทำไมเมื่อเราเพิ่มจำนวนอิเล็กตรอนเข้าไปในสสารแล้วขนาดของสสารกลับเพิ่มขึ้น แทนที่จะขนาดจะลดลงเนื่องจากพฤติกรรมของแรงคูลอมบ์ระหว่างนิวเคลียสและอิเล็กตรอน โดย Ehrenfest ได้ตอบคำถามนี้ว่า นั่นเป็นเพราะหลักการกีดกันของเพาลี "อิเล็กตรอนสองตัวไม่สามารถอยู่ในสถานะเดียวกันได้" คำตอบนี้ได้รับการพิสูจน์และยืนยันโดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์เป็นครั้งแรกในอีกหลายสิบปีต่อมาโดย Dyson [1] ว่าหลักการกีดกันของเพาลีเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการมีเสถียรภาพของสสาร สสารที่ละทิ้งหลักการกีดกันของเพาลี เช่น ระบบของอิเล็กตรอนที่กำหนดให้สปินเท่ากับ 0 หรือเรียกอีกชื่อว่า "ระบบสสารประเภทโบซอน" จะไม่เสถียร และมีงานวิจัย [2] ได้ตอบคำถามที่ว่า ทำไมขนาดของสสารถึงได้เพิ่มขึ้นเมื่อเราเพิ่มจำนวนของอิเล็กตรอน ซึ่งคำตอบคือ เมื่อเราเพิ่มอนุภาคเข้าไปในระบบให้มากขึ้นเรื่อยๆ โดยให้อนุภาคทั้งหมดอยู่ภายในทรงกลมรัศมี R รัศมี R ของทรงกลมจำเป็นต้องเพิ่มขึ้นในสัดส่วนไม่น้อยกว่า $N^{1/3}$ เมื่อ N มีค่ามากๆ (N เป็นจำนวนของอิเล็กตรอน)

ในกรณีที่เราเปลี่ยนอิเล็กตรอนให้เป็นอนุภาคชนิดโบซอน นั่นคือเราได้ละทิ้งหลักการกีดกันของเพาลี Dyson [1] พบว่าสสารในระบบดังกล่าวจะไม่มีเสถียรภาพต่อไป โดยระบบสสารนั้นจะเกิดการยุบตัว Dyson คำนวณขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบสสารดังกล่าวมีค่าแปรผันตรงกับ $N^{7/5}$ เป็นการยืนยันว่าระบบสสารชนิดโบซอนจะเป็นระบบสสารที่เป็นแบบอเสถียรภาพ Manoukian และ Muthaporn [3] ได้ศึกษาปัญหาอเสถียรภาพของสสารชนิดนี้ ได้ปรับปรุงค่าขอบเขตบนที่ได้ให้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ Muthaporn และ Manoukian [4, 5] พบว่าอเสถียรภาพของสสารชนิดโบซอนไม่ขึ้นกับมิติของอวกาศที่ระบบดังกล่าวอาศัยอยู่ ทำให้เราสรุปได้ว่า ไม่ว่าอนุภาคในระบบโบซอนจะวางเรียงตัวในแนวเส้นตรงหรือเรียงตัวกันเป็นแผ่น หรือถูกบรรจุในปริมาตรใดๆ ระบบนั้นจะเป็นระบบแบบอเสถียรภาพหรือระบบจะเกิดการยุบตัวนั่นเอง แต่ก็ยังไม่มีงานวิจัยชิ้นใดที่ศึกษาพฤติกรรมการลดลงของรัศมี R เมื่อเทียบกับจำนวนอนุภาคโบซอน N ที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในระบบสสารดังกล่าว

ดังนั้นความคาดหวังในตอนเริ่มต้นของโครงการวิจัย ผู้วิจัยมุ่งตอบคำถามสองข้อดังนี้

1. ถ้าเราบรรจุสสารชนิดโบซอนไว้ในปริมาตรอันหนึ่ง และจากนั้นเพิ่มอนุภาคโบซอนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ พฤติกรรมการลดลงของรัศมี R ของระบบดังกล่าวจะขึ้นกับจำนวนของอนุภาคโบซอน N ในระบบอย่างไร

2. งานวิจัยของ Manoukian และ Sirininlakul [2005] นั้นยังไม่ได้ศึกษาในแง่สัมพัทธภาพ ดังนั้นผู้วิจัยจะศึกษาในแง่สัมพัทธภาพของระบบดังกล่าวและระบบสสารประเภทโบซอน และดูพฤติกรรมการเพิ่มและลดของรัศมี R จะยังคงเหมือนเดิมหรือแตกต่างจากเดิมหรือไม่ อย่างไร

การตอบปัญหาดังกล่าวจะทำให้เราทราบและเข้าใจลึกซึ้งเกี่ยวกับเสถียรภาพ และอเสถียรภาพของสสารมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้เราอาจสามารถนำวิธีการทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้คำนวณหาพลังงานสถานะพื้นของระบบไปประยุกต์ใช้กับการหาพลังงานสถานะพื้นของระบบสสารบางอย่างที่มีอยู่จริงในธรรมชาติได้ และองค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยเป็นองค์ความรู้พื้นฐานทางฟิสิกส์ที่จะคงอยู่ต่อไปตราบนานเท่านาน

จากผลการวิจัยเราได้คำตอบของคำถามข้อ 1 ว่าพฤติกรรมของรัศมี R จะต้องลดลงในอัตราไม่เร็วกว่า $N^{-1/3}$ เมื่อ $N \to \infty$ และหาค่าได้ แต่ผู้วิจัยยังไม่สามารถคำนวณพฤติกรรมของระบบในมิติต่างๆ ที่ไม่เท่ากับสาม และยังไม่สามารถคำนวณพฤติกรรมของระบบในกรณีที่มีทฤษฎีสัมพัทธภาพเข้ามาเกี่ยวข้องได้ ดังนั้นวัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยจะมีเฉพาะในส่วนของคำถามข้อที่ 1 ส่วนในกรณีที่มิติไม่เท่ากับสาม และคำถามข้อ 2 นั้น เราหวังว่าในอนาคตถ้าเราศึกษาระบบของสสารในกรณีเฉพาะบางระบบเราน่าจะได้คำตอบที่เราต้องการได้

2. วัตถุประสงค์

ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรัศมี R ของทรงกลมที่บรรจุสสารประเภทโบซอน กับจำนวนอนุภาคโบซอนประจุลบ N ที่ใส่เพิ่มเข้าไปในระบบ โดย N มีค่ามาก