



ใบรับรองวิทยานิพนธ์  
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

ปริญญา

วิศวกรรมเครื่องกล	วิศวกรรมเครื่องกล
สาขา	ภาควิชา
เรื่อง การศึกษาการควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลอง โดยใช้ตัวควบคุม $H_\infty$ ความไวผสม	
Study of Vibration Control of A Two-Floored Building Model Based on $H_\infty$ Mixed Sensitivity Controller	
นามผู้วิจัย นายศักย บุญชูวิทย์	
ได้พิจารณาเห็นชอบโดย	
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	( ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิทิต นัตร์รัตนกุลชัย, Ph.D. )
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	( ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิชัย ศิวะ โกศิษฐ, Ph.D. )
หัวหน้าภาควิชา	( รองศาสตราจารย์ชวลิต กิตติชัยการ, Ph.D. )

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

( รองศาสตราจารย์กัญญา วีระกุล, D.Agr. )

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

สิงสิงจิ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาการควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลอง

โดยใช้ตัวควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม

Study of Vibration Control of A Two-Floored Building Model Based  
on  $H_\infty$  Mixed Sensitivity Controller

โดย

นายศักย บุญชูวิทย์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

พ.ศ. 2555

ศัทย บัญชิวทิษ 2555: การศึกษการควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลอง โดยใช้ตัวควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม ปริญญววิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: อาจารย์วิทิต ฉัตรรัตนกุลชัย, Ph.D. 102 หน้า

เนื่องจากว่าในปัจจุบันมีการปลูกสร้างที่อยู่อาศัยกันตามความต้องการของประชากรที่เพิ่มมากขึ้น แต่ขนาดพื้นที่มีอยู่อย่างจำกัดทำให้เกิดอาคารที่มีโครงสร้างลักษณะสูงอยู่เป็นจำนวนมาก การรบกวนเนื่องจากปัจจัยต่างๆ เช่น ลม หรือการสั่นเนื่องจากแผ่นดินไหวอาจทำให้โครงสร้างสูญเสียเสถียรภาพได้โดยง่าย ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้จึงมุ่งเน้นการออกแบบตัวควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม ( $H_\infty$  mixed sensitivity) เพื่อควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลอง โดยใช้มวลขับเคลื่อน (Active Mass Driver) เพื่อลดการสั่นของโครงสร้าง และทำให้โครงสร้างหยุดสั่นได้เร็วที่สุด

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้มุ่งเน้นการควบคุมการสั่น ของโครงสร้างสองชั้นจำลอง โดยหลักการที่ว่าเมื่อโครงสร้างมีการสั่น จะทำให้โครงสร้างเกิดการเอียงตัวไปจากแนวปกติซึ่งสามารถวัดมุมเอียงได้จากเซ็นเซอร์วัดมุมเอียง จากนั้นจะส่งสัญญาณที่เซ็นเซอร์วัดได้ให้แก่ตัวควบคุมที่ได้ออกแบบไว้ และตัวควบคุมจะส่งสัญญาณควบคุมให้แก่มวลขับเคลื่อนเพื่อสร้างแรงผลักรวมในทิศตรงข้ามกับมุมเอียง ซึ่งจะทำให้ โครงสร้างมีการเอียงที่น้อยลง หรือ กลับมาตั้งตรงได้เร็วขึ้นนั่นเอง

จากการทดสอบตัวควบคุม โดยให้การรบกวนเป็นสัญญาณไซน์รูซอชด์ ที่ความถี่ 0.1-1 Hz. พบว่าสามารถควบคุมขนาดของการสั่นลดลงได้มากกว่า 50% ในช่วงความถี่ที่ต่ำกว่า 0.5 Hz. และประสิทธิภาพของตัวควบคุมในการกำจัดสัญญาณรบกวนจะลดลง เมื่อความถี่ของการรบกวนมีค่าสูงขึ้น

ลายมือชื่อนิสิติ

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Sakaya Bunchoowit 2012: Study of Vibration Control of A Two-Floored Building Model Based on  $H_\infty$  Mixed Sensitivity Controller. Master of Engineering (Mechanical Engineering), Major Field: Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering.  
Thesis Advisor: Mr. Withit Chatlatanagulchai, Ph.D. 102 pages.

At present, house building has been expanding due to increasing demands of growing population. However, with the limitation of space, there emerges the trend of constructing tall buildings in many places. Disturbance deriving from many factors, such as wind or vibration resulting from earthquake may easily cause loss in stability of the structure. Therefore, this research emphasized the design of  $H_\infty$  mixed sensitivity controller which mastering the vibration of a two-floored structure model based on  $H_\infty$  mixed sensitivity methodologies. The design employed an active mass driver to reduce the vibration of the structure and to make the structure stop vibrating most quickly.

This study aimed to investigate the vibration control of the two-floored structure model. Based on the principle that when the structure vibrates, it will tilt away from the normal position, in which the angle of tilt can be measured by tilt measuring sensor, and then the signal from the sensor will be sent to the designed controller. After that, the controller will pass controlled signal to an active mass driver in order to construct a momentum in the opposite direction of the declining angle. With this, the structure will become less incline or faster erect.

To test the control of disturbance, 0.1-1 Hz. sinusoidal frequency was employed. The study showed that the controller was capable of decreasing vibration size to more than 50% in the frequency range below 0.5 Hz. and the effectiveness of the controller to eliminate the interference declined when the frequency of the noise increased.

---

Student's signature

---

Thesis Advisor's signature

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร. วิทิต นัตถรัตน์กุลชัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก สำหรับเงินทุน อุปกรณ์ สถานที่ในการวิจัย และคำปรึกษาที่เป็นประโยชน์ยิ่ง และขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร. วิชัย ศิวโกศิษฐ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วมสำหรับข้อคิด และแนวทางในการดำเนินการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ สำหรับวิชาความรู้ที่ท่านได้ประสิทธิ์ประสาทแก่ผู้วิจัย และขอขอบคุณ เจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือต่างๆ

ด้วยความดีหรือประโยชน์อันใดเนื่องจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอมอบแต่คุณบิดา มารดา พี่สาว ที่ได้อบรมสั่งสอน และสนับสนุนผู้วิจัยตลอดมา ปวีณา สำหรับกำลังใจในทุกเรื่อง

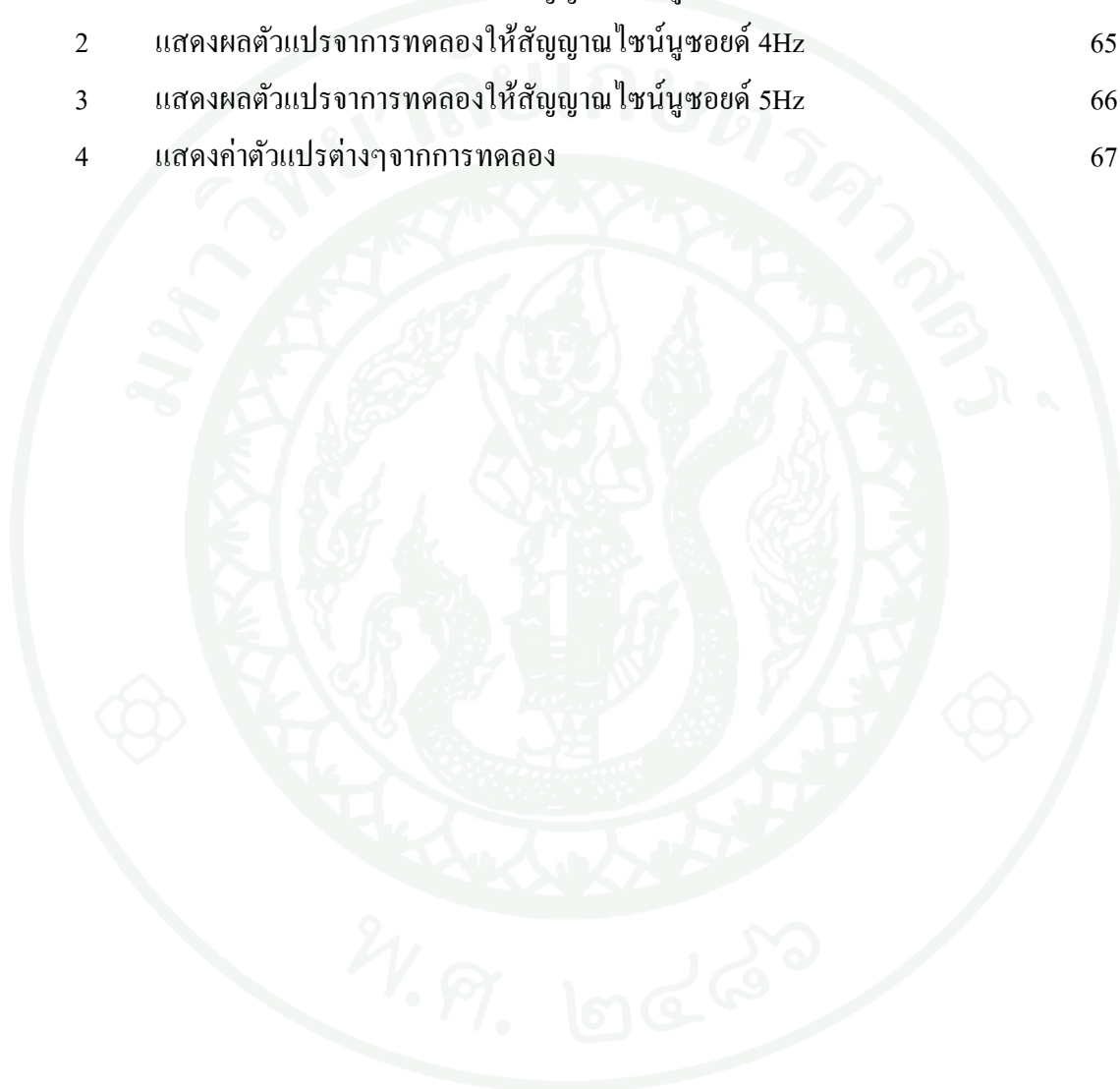
ศักย บุญชูวิทย์  
สิงหาคม 2555

## สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(5)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	4
อุปกรณ์และวิธีการ	37
อุปกรณ์	37
วิธีการ	45
ผลและวิจารณ์	65
ผล	65
วิจารณ์	78
สรุปและข้อเสนอแนะ	79
สรุป	79
ข้อเสนอแนะ	80
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	81
ภาคผนวก	83
ภาคผนวก ก แบบประกอบ (assembly drawing) ของโครงสร้างสองชั้นจำลอง	84
ภาคผนวก ข โปรแกรม Matlab สำหรับการหาเอกลักษณ์ระบบ (system identification) ของมวลขับเคลื่อน	87
ภาคผนวก ค โปรแกรม Matlab สำหรับการทดสอบความแม่นยำ ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	89
ภาคผนวก ง โปรแกรม MATLAB สำหรับวิเคราะห์ระบบ และออกแบบตัวควบคุม	94
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	102

## สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณไซน์รูชอยด์ 3Hz	65
2	แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณไซน์รูชอยด์ 4Hz	65
3	แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณไซน์รูชอยด์ 5Hz	66
4	แสดงค่าตัวแปรต่างๆจากการทดลอง	67



## สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	บล็อกไดอะแกรม ระบบที่ได้จากการปรับอัตราส่วนตัวแปรแล้ว	10
2	ระบบ $G$ อินพุตคือ $w$ และเอาต์พุตคือ $z$	11
3	ลักษณะของแผนภาพเอกฐาน	20
4	แผนภาพโบดี ของขอบเขตบน $1/w(s)$	22
5	การควบคุมแบบแนวทแยง	27
6	กรอบการออกแบบระบบควบคุมสมัยใหม่	30
7	ปัญหาความไวผสม S/KS สำหรับการคุมค่า	33
8	ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ (potentiometer)	37
9	เอนโคเดอร์ของบริษัท Omron รุ่น E6B2 CWZ6C	38
10	เซ็นเซอร์วัดความเร่ง ของบริษัท Analog Devise รุ่น ADXL 335	39
11	ขนาดของโครงสร้างสองชั้นจำลอง	39
12	การยึดโครงสร้างโดยใช้บานพับ	40
13	มวลขับ	41
14	การติดตั้งตัวตรวจรู้ความเอียง	42
15	ตัวจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง	43
16	ชุดขับมอเตอร์กระแสตรง	43
17	การ์ดรับส่งข้อมูล (Data Acquisition) NI PCI 6221 (CB68)	44
18	การติดตั้งอุปกรณ์ในการทดลอง	45
19	แผนภาพอิสระของระบบ โครงสร้างสองชั้นจำลอง	46
20	การชั่งหามวลของชิ้นส่วน	53
21	การทดสอบหาค่าคงที่สปริง	54
22	ระบบมวลขับ	55
23	ตำแหน่งอุปกรณ์ตรวจรู้บนมวลขับ	56
24	แผนภาพค่าเอกฐาน ของระบบที่ปรับอัตราส่วนแล้ว	58
25	แสดงค่า RGA Element	59
26	RGA นัมเบอร์ของระบบ	60

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
27	แสดงระบบวงปิดกับฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอน $W_I$ และฟังก์ชันน้ำหนักสมรรถนะ $W_P$	62
28	แสดงผลตอบสนองของระบบความไม่แน่นอน และฟังก์ชันน้ำหนักของความไม่แน่นอน	63
29	แสดงการปรับรูปฟังก์ชัน S และ T	64
30	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับโครงสร้างจริง	69
31	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง	70
32	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง	70
33	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง	71
34	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง	71
35	เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง	72
36	ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนไซน์นูนชอยด์ 0.1Hz แอมพลิจูด 1	75
37	สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์นูนชอยด์ 0.1Hz แอมพลิจูด 1	76
38	ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนไซน์นูนชอยด์ 0.5 Hz แอมพลิจูด 1	76
39	สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์นูนชอยด์ 0.5 Hz แอมพลิจูด 1	77
40	ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนไซน์นูนชอยด์ 1 Hz แอมพลิจูด 1	77
41	สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์นูนชอยด์ 1 Hz แอมพลิจูด 1	78

## คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

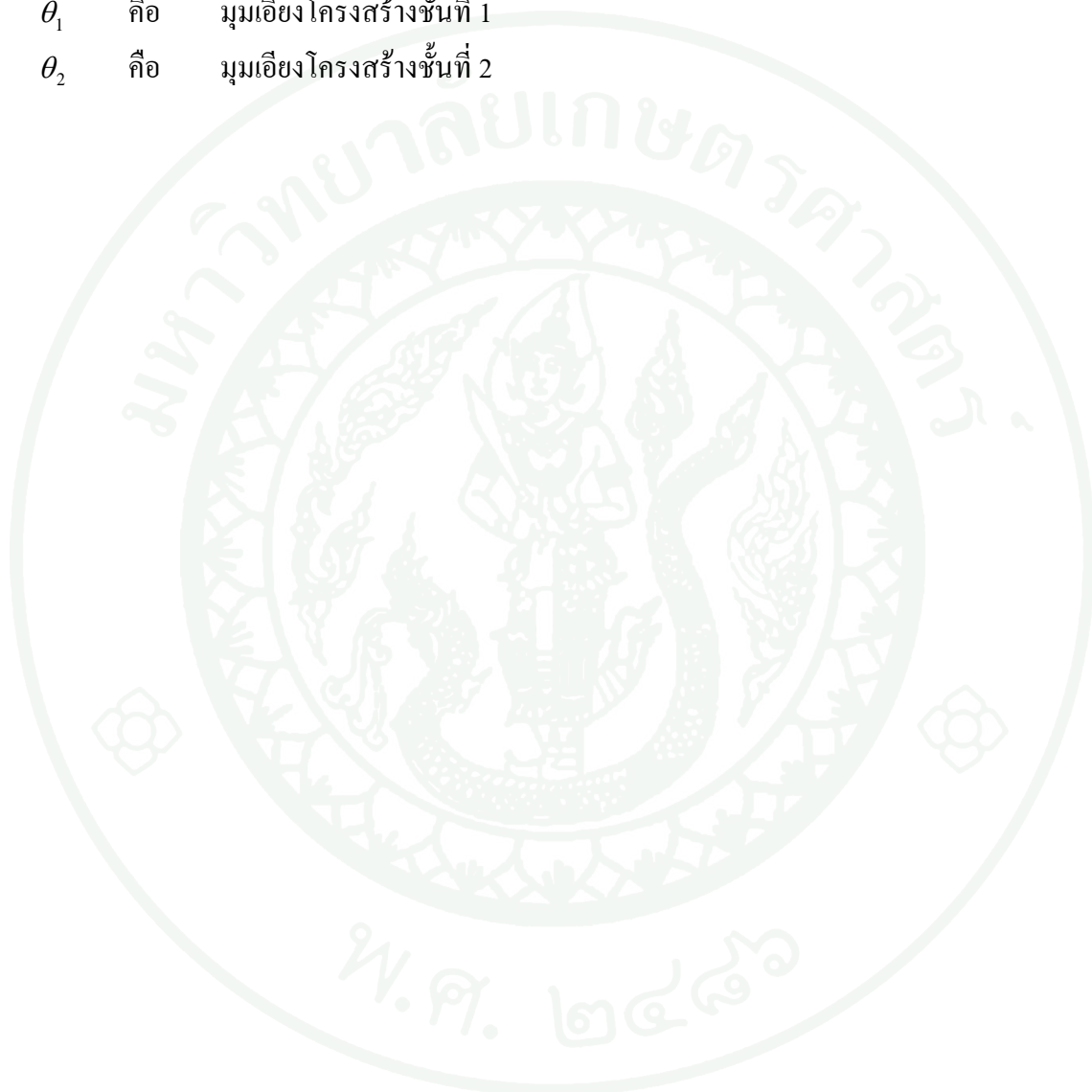
$A$	คือ	เมทริกซ์ระบบ
$\bar{a}$	คือ	ความเร่ง
$B$	คือ	เมทริกซ์อินพุต
$C$	คือ	เมทริกซ์เอาต์พุต
$c_1$	คือ	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานที่ข้อต่อชั้นที่ 1
$c_2$	คือ	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานที่ข้อต่อชั้นที่ 2
$c_{11}$	คือ	ค่าคงที่มอเตอร์ตัวที่ 1 (motor constant)
$c_{12}$	คือ	ค่าคงที่มอเตอร์ตัวที่ 2 (motor constant)
$c_{21}$	คือ	แรงดันย้อนกลับมอเตอร์ตัวที่ 1 (back emf.)
$c_{22}$	คือ	แรงดันย้อนกลับมอเตอร์ตัวที่ 2 (back emf.)
$D$	คือ	เมทริกซ์ถ่ายเทโดยตรง
$F_1$	คือ	แรงภายนอกตัวที่ 1
$F_2$	คือ	แรงภายนอกตัวที่ 2
$F_{net}$	คือ	แรงลัพธ์
$G$	คือ	แพลนัท
$g(q_i)$	คือ	สมการข้อจำกัด
$H_2$	คือ	นอร์ม-2
$H_\infty$	คือ	นอร์ม-อินฟินิตี
$h_1$	คือ	ความสูงโครงสร้างชั้นที่ 1
$h_2$	คือ	ความสูงโครงสร้างชั้นที่ 2
$I$	คือ	เมทริกซ์เอกลักษณ์
$K$	คือ	พลังงานจลน์
$k_{s1}$	คือ	ค่าคงที่สปริงตัวที่ 1
$k_{s2}$	คือ	ค่าคงที่สปริงตัวที่ 2
$L$	คือ	ผลต่างพลังงานจลน์ กับพลังงานศักย์
$M$	คือ	ขนาดอัตราขยายที่ความถี่สูง
$m_{b1}$	คือ	มวลที่ฐานชั้นที่ 1
$m_{b2}$	คือ	มวลที่ฐานชั้นที่ 2

## คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

$m_{c1}$	คือ	มวลห่วงชั้นที่ 1
$m_{c2}$	คือ	มวลห่วงชั้นที่ 2
$m_{r1}$	คือ	มวลที่แขนชั้นที่ 1
$m_{r2}$	คือ	มวลที่แขนชั้นที่ 2
$Q$	คือ	ข้อจำกัดแรงวางนัยทั่วไป
$q_i$	คือ	เซตของพิกัดวางนัยทั่วไป
RGAs	คือ	อัตราขยายสัมพัทธ์ (relative gain array)
$r_1$	คือ	รัศมีเฟืองจับตัวที่ 1
$S$	คือ	ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดจากการรบกวนไปเอาต์พุตของระบบ
SVD	คือ	ค่าแยกเอกฐาน (singular value decomposition)
$T$	คือ	$I - S$
$U$	คือ	พลังงานศักย์
$v_1$	คือ	แรงดันอินพุตตัวที่ 1
$v_2$	คือ	แรงดันอินพุตตัวที่ 2
$W$	คือ	พลังงานภายนอก
$x_1$	คือ	ระยะการเคลื่อนตัวของมวลจับตัวที่ 1
$x_2$	คือ	ระยะการเคลื่อนตัวของมวลจับตัวที่ 2
$y$	คือ	เอาต์พุตระบบ
$\gamma(G)$	คือ	เลขเงื่อนไขระบบ
$\mu_1$	คือ	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ตัวที่ 1
$\mu_2$	คือ	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ตัวที่ 2
$\omega_1$	คือ	ความเร็วเชิงมุมมอเตอร์ตัวที่ 1
$\omega_2$	คือ	ความเร็วเชิงมุมมอเตอร์ตัวที่ 2
$\omega_B^*$	คือ	แบนด์วิธสำหรับกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักร
$\lambda$	คือ	ตัวคูณลากรางจ์
$\Sigma$	คือ	เมทริกซ์เอกฐาน
$\bar{\sigma}$	คือ	ค่าเอกฐานสูงสุด
$\underline{\sigma}$	คือ	ค่าเอกฐานต่ำสุด

## คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

$\tau_1$	คือ	แรงบิดของมอเตอร์ตัวที่ 1
$\tau_2$	คือ	แรงบิดของมอเตอร์ตัวที่ 2
$\theta_1$	คือ	มุมเอียงโครงสร้างชั้นที่ 1
$\theta_2$	คือ	มุมเอียงโครงสร้างชั้นที่ 2



การศึกษาการควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลอง  
โดยใช้ตัวควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม

Study of Vibration Control of A Two-Floored Building Model Based  
on  $H_\infty$  Mixed Sensitivity Controller

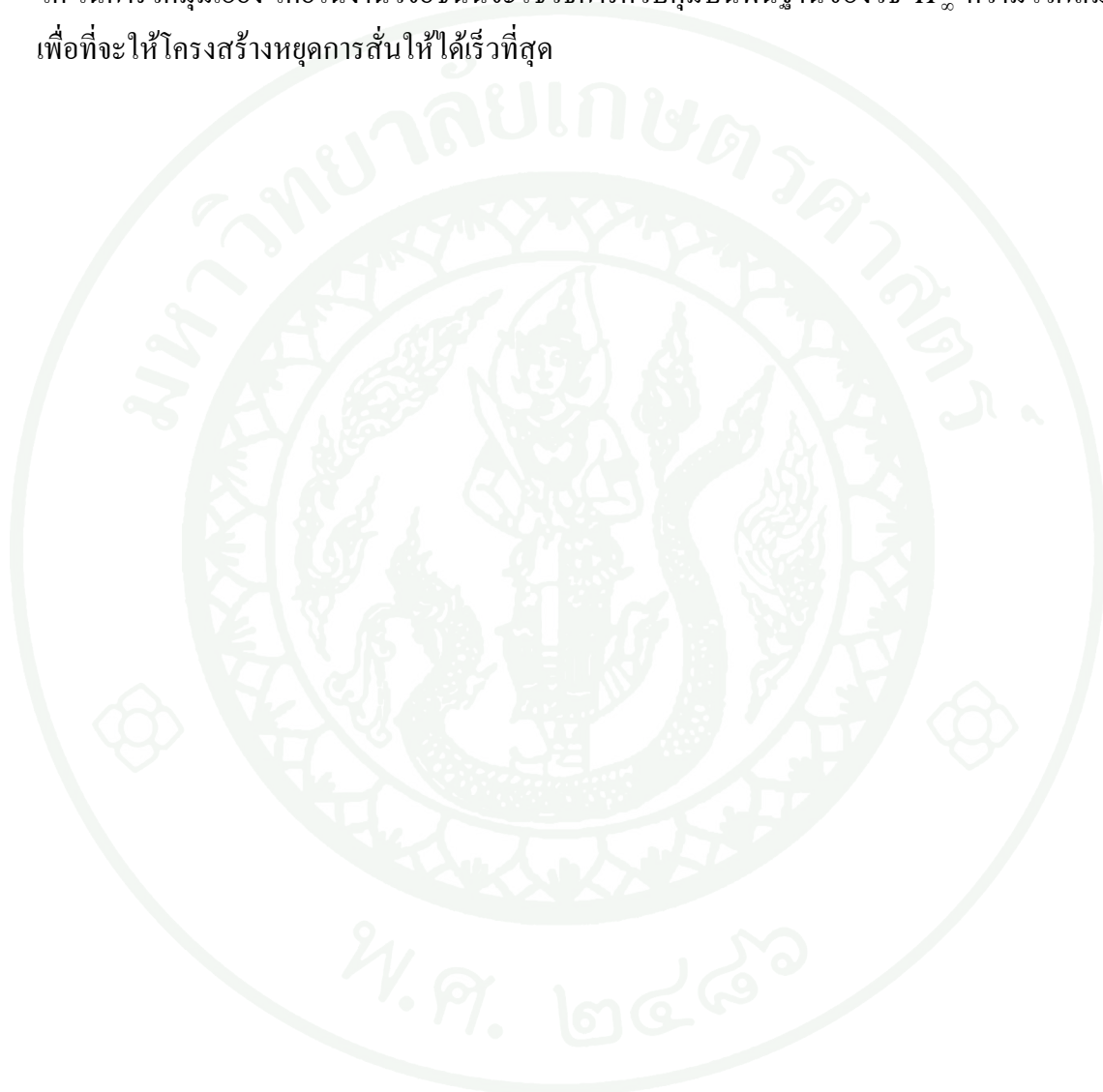
คำนำ

หากจะพิจารณาในสิ่งรอบตัวเรานั้น ปัจจุบันจะพบว่า ระบบควบคุมได้แฝงตัวอยู่ในชีวิตประจำวันของเรา ทุกหนแห่ง ไม่ว่าจะเป็นการเดินทางไปตามสถานที่ต่างๆ ด้วยยานพาหนะ สัญญาณไฟจราจร เครื่องใช้ไม้สอยต่างๆตามบ้านเรือน ตามสำนักงาน หรือแม้แต่ร่างกายมนุษย์ ก็ยังถือได้ว่าเป็นระบบควบคุมแบบอัตโนมัติ เช่น ในการยืนด้วยสองขาของมนุษย์นั้น ขณะที่เรากำลังยืนอยู่นั้นสมองจะทำการสั่งการให้เรายืนทรงตัวอยู่ได้โดยที่ร่างกายไม่ล้มไปข้างหน้า หรือ หายหลัง โดยขณะที่เรากำลังจะล้มไปข้างหน้านั้นจะทำให้กล้ามเนื้อบริเวณหน้ารู้สึกได้ถึงแรงกดที่เพิ่มขึ้น และส่งสัญญาณไปที่สมอง จากนั้นสมองจะทำการตัดสินใจว่าจะส่งสัญญาณเพื่อสั่งให้กล้ามเนื้อออกแรงต้านการกดนั้นมากน้อยเพียงไร หากส่งสัญญาณสั่งกล้ามเนื้อให้ออกแรงน้อยไปก็ไม่สามารถที่จะต้านทานแรงกดนั้นได้ หากมากไปก็อาจทำให้เราล้มไปข้างหลังได้ ซึ่งเป็นเช่นนี้อยู่ตลอดเวลา

ในอดีตนั้นเคยมีความคิดที่ว่า หากเราจะทำการควบคุมระบบใดๆระบบหนึ่งนั้นเราต้องเข้าใจถึงระบบนั้นได้อย่างถ่องแท้ หรือสามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบนั้นได้อย่างแม่นยำ แต่ในความจริงแล้วยังมีอีกสิ่งหนึ่งที่เราเรียกว่า ความไม่แน่นอน ซึ่งไม่สามารถที่จะหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับสิ่งที่เรียกว่าความไม่แน่นอนได้ แต่หากเราสามารถที่จะจำกัดขอบเขตของ ความไม่แน่นอน สำหรับกรณีที่ร้ายแรงที่สุดได้ ก็สามารถที่จะประกันได้ว่าระบบสามารถทำงานได้ภายใต้ สภาวะการทำงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นจริง

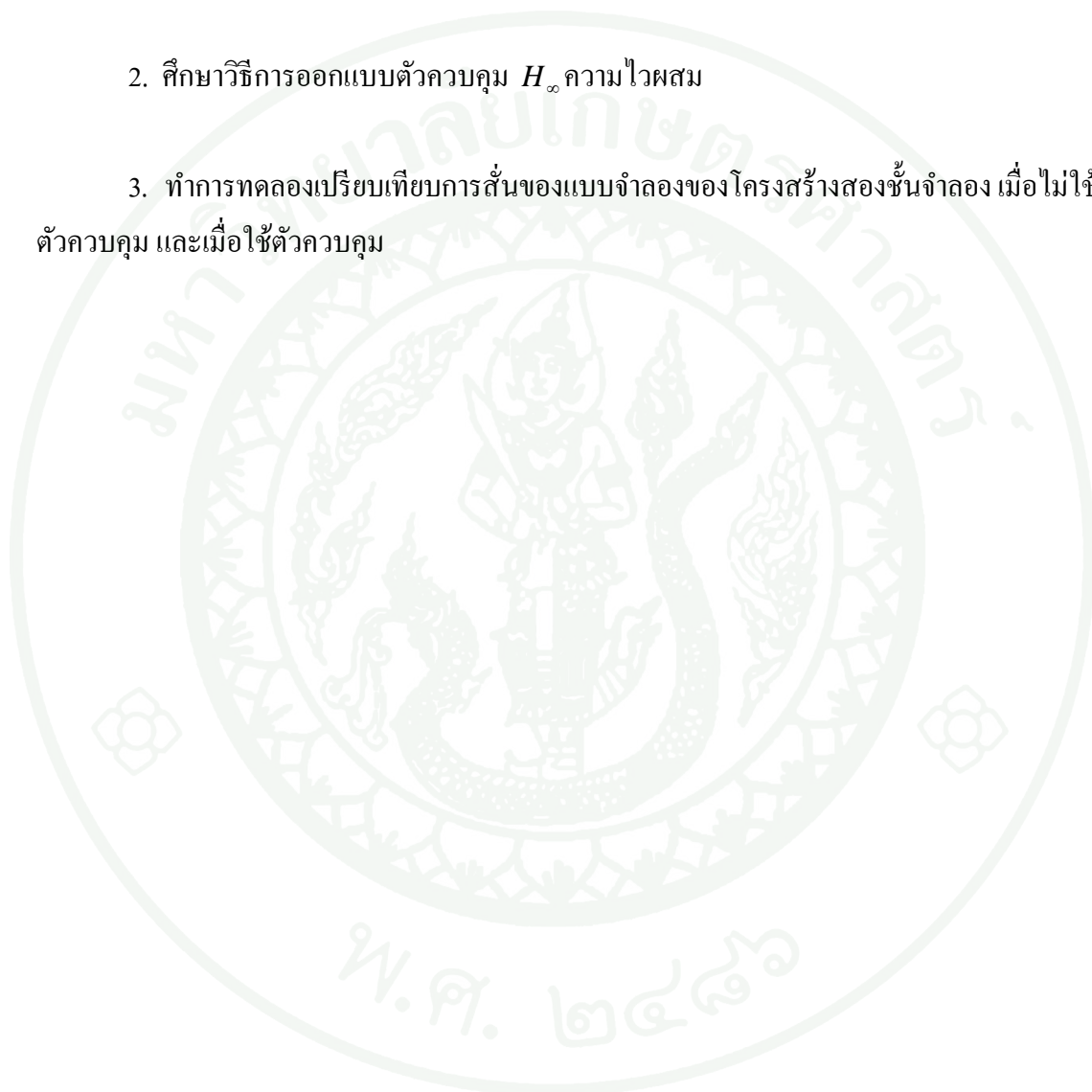
การทดลองหาวิธีควบคุม การสั่นของ โครงสร้างนั้นมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ก่อนที่จะลงมือในการสร้างตึกขนาดใหญ่ แต่อย่างไรก็ตามยังมีนักวิจัยไม่มาก ที่มีเครื่องมือที่มีความสามารถและแม่นยำในการทดลองทำการควบคุมการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง ซึ่งแบบจำลองขนาดเล็กสามารถช่วยให้สามารถที่จะศึกษาวิธีการการควบคุมโครงสร้างขนาดจริงได้ โดยประกอบไปด้วย

โครงสร้างจำลอง มวลขับ (active mass driver) และ ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ (potentiometer) เป็นต้น โดยโครงสร้างที่ใช้จะเป็นโครงสร้างที่มีการเอียงตัวได้เมื่อเกิดแรงกระทำ ซึ่งโครงสร้างทำจากอลูมิเนียม แต่ละชั้นยึดต่อกันด้วยบานพับ และใช้สปริงดึงให้โครงสร้างสามารถตั้งอยู่ได้ แต่ละชั้นประกอบด้วยมวลขับ สำหรับหน่วยงานเอียงตัวของโครงสร้าง และใช้ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ ในการวัดมุมเอียง โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้วิธีการควบคุมบนพื้นฐานของวิธี  $H_\infty$  ความไวผสม เพื่อที่จะให้โครงสร้างหยุดการสั่นให้ได้เร็วที่สุด



## วัตถุประสงค์

1. หาสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับการเคลื่อนตัวของโครงสร้างสองชั้นจำลอง เพื่อใช้ในการออกแบบตัวควบคุม
2. ศึกษาวิธีการออกแบบตัวควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม
3. ทำการทดลองเปรียบเทียบการสั่นของแบบจำลองของโครงสร้างสองชั้นจำลอง เมื่อไม่ใช้ตัวควบคุม และเมื่อใช้ตัวควบคุม



## การตรวจเอกสาร

การตรวจสอบด้วยการทดลอง มีความจำเป็นที่จะนำมาซึ่งความเข้าใจของปรากฏการณ์ต่างๆ แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อโครงสร้างของระบบถูกลดขนาดให้เล็กลงเพื่อใช้สำหรับการศึกษาในห้องทดลอง พฤติกรรมเด่นบางอย่างของระบบอาจหายไป ซึ่งเป็นจริงอย่างยิ่งสำหรับโครงสร้างขนาดใหญ่ทางวิศวกรรม ในส่วนของการควบคุมโครงสร้างทางวิศวกรรมนั้น สามารถกล่าวได้ว่าการวางแผนการทดลองในการควบคุมมีความจำเป็นในการวิจัย ที่จะทำให้เกิดไปในทิศทางที่ถูกต้อง แต่มีนักวิจัยน้อยคนนัก ที่มีเครื่องมือที่ดีที่ใช้ในการทดลอง ดังนั้นจึงใช้การวิเคราะห์แบบยึดลักษณะทางธรรมชาติ ซึ่งจะทำให้คุณลักษณะมากมายทางกายภาพขาดหายไป หนึ่งในลักษณะทางกายภาพที่ถูกตัดทิ้งไปในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมาคือ การควบคุมปฏิสัมพันธ์ของโครงสร้างตึก (control-structure interaction, CSI) Dyke *et al.* (1995) กล่าวว่า การเข้าใจปฏิสัมพันธ์ของโครงสร้างเป็นกุญแจในการพัฒนา การควบคุมความเร่งป้อนกลับ และสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าการควบคุมปฏิสัมพันธ์ระหว่างตึกนั้น จะนำไปสู่ตัวควบคุมที่มีประสิทธิภาพสูง

มีเทคนิคหลากหลายที่ได้นำมาใช้ในการลดการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง เพื่อที่จะให้บรรลุถึงการเคลื่อนที่โดยความเร็วสูงและมีความแม่นยำในการเคลื่อนที่ (Singer and Seering, 1989) การพัฒนาทางด้านไมโครอิเล็กทรอนิกส์ และเทคนิคของโครงสร้างแบบอัจฉริยะ จะนำมาซึ่งผลลัพธ์ใหม่ในการควบคุมการสั่นสะเทือน (Clark *et al.*, 1998) “โครงสร้างแบบอัจฉริยะ” จะใช้การประมวลผลทางอิเล็กทรอนิกส์ และอุปกรณ์ตรวจรู้ ในการตรวจสอบการเคลื่อนที่ต่อเวลาของการสั่น การใช้โครงสร้างแบบอัจฉริยะจะทำให้ได้มาซึ่งน้ำหนักของโครงสร้างที่เบาลง และประสิทธิภาพที่สูงขึ้น

ในการออกแบบโครงสร้างและระบบควบคุมดังที่กล่าวมาแล้วนั้นจะเห็นว่าจำเป็นที่จะต้องนำความรู้ในหลายด้านมารวมกันเช่น การออกแบบโครงสร้าง การหาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้เป็นตัวแทนของระบบ การออกแบบวงจรรีเลย์ทรอนิกส์ การออกแบบตัวควบคุม และการเขียนโปรแกรมควบคุม ซึ่งล้วนแล้วแต่ต้องเข้าใจถึงหลักการทางฟิสิกส์ และคณิตศาสตร์ที่ดีจึงจะสามารถนำมาเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์และออกแบบระบบได้อย่างสมบูรณ์ ซึ่งองค์ความรู้ต่างๆที่จำเป็นสำหรับงานวิจัยนี้ได้รวบรวมไว้ดังนี้

## 1. กลศาสตร์ ลากรานจ์

ในการออกแบบตัวควบคุมไม่ว่าจะเป็นการควบคุมแบบ SISO (Single Input Single Output) หรือ MIMO (Multi Input Multi Output) ก็ตาม สิ่งสำคัญอย่างแรกสุดที่จะต้องทำการศึกษาเพื่อให้ได้ซึ่งตัวควบคุมนั่นก็คือ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Math model) ที่เป็นตัวแทนของระบบที่จะศึกษาโดยเป็นตัวบ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต และเอาต์พุต หากมองในแง่กลศาสตร์แล้ว สมการที่เป็นตัวแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต และเอาต์พุต ก็มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรของการกระจัด แรง ความเร็ว หรือ ความเร่ง เป็นต้น

ที่ผ่านมาเราได้ศึกษาการเคลื่อนที่โดยใช้กฎของนิวตัน ซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่การคำนวณแรงลัพธ์  $\vec{F}_{net}$  ที่กระทำกับวัตถุ จากนั้นอาศัยกฎข้อที่ 2 นั่นก็คือ

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \quad (1)$$

เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์หาความเร็ว  $\vec{v}(t)$  และตำแหน่ง  $\vec{r}(t)$  ของวัตถุ ณ เวลาใดๆ ในเนื้อหาของวิชาฟิสิกส์ที่แตกแขนงออกไปจำนวนมาก อาทิเช่น สถิติศาสตร์, พลศาสตร์ของไหล หรือ พลศาสตร์โมเลกุล และในแต่ละแขนงนั้น ประกอบด้วย สมการจำนวนมาก ขึ้นอยู่กับรายละเอียดที่เรากำลังศึกษา อย่างไรก็ตามก็ดีสมการทั้งหลายนี้ เปรียบเสมือนเส้นเลือดฝอยซึ่งมีรากฐานมาจากหัวใจของวิชาฟิสิกส์อยู่เพียงไม่กี่สมการ หนึ่งในนั้นก็คือ สมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน ดังที่ได้เห็นในสมการที่ (1)

สมการที่ถือได้ว่าเป็นความยิ่งใหญ่ไม่แพ้กลศาสตร์นิวตัน เราเรียกกลไกอันนี้ว่า “สมการการเคลื่อนที่ลากรานจ์” (Lagrange Equation of motion) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการคือ

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2)$$

และในขั้นต่อไป เพื่อที่จะให้นำสมการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้งานในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ เราจะเริ่มทำความเข้าใจกับสัญลักษณ์ที่ปรากฏในสมการที่ (2)

ในของ Lagrange Mechanics เราจะใช้สัญลักษณ์  $q$  แทนพิกัดที่ใช้บอกตำแหน่งของวัตถุ โดยไม่เป็นการเฉพาะเจาะจงว่าเป็นระบบพิกัดแบบใด และเป็นอิสระของผู้ทำการวิเคราะห์ที่จะเลือกใช้กลไกเช่นใดก็ได้ กล่าวคือไม่ว่าเราจะใช้ระบบพิกัดเช่นใดในการบ่งบอกตำแหน่งของวัตถุ สมการการเคลื่อนที่ลากรานจ์ จะมีรูปแบบที่เหมือนกันเสมอไม่ว่าเราจะใช้พิกัด  $(x, y)$  ในระบบพิกัด Cartesian จะใช้มุม  $\theta$  ของเชือกที่กระทำในแนวตั้ง จะใช้ความยาวเชือกจากลูกกรอก  $(l_1, l_2)$  รูปแบบของสมการ (2) ยังคงเหมือนเดิม นับเป็นความงดงามที่ลงตัวอย่างหนึ่งในวิชาฟิสิกส์

กลศาสตร์ลากรานจ์ เป็นกลไกในวิชาฟิสิกส์ที่มองระบบทางฟิสิกส์โดยอาศัยพลังงานเป็นหลัก ซึ่งแตกต่างจาก กลศาสตร์นิวตัน ที่อาศัยแรงเป็นหลัก ในทางฟิสิกส์นั้นพลังงานแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆคือ พลังงานจลน์ หรือ kinetic energy ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $K$  และ พลังงานศักย์ หรือ Potential energy ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $U$  พลังงานทั้งสองประเภท จะอยู่ในรูปของ พิกัดวางนัยทั่วไป (generalized coordinate)  $\{q_i\}$  และจะนำไปสู่การสร้าง ลากรานจ์ฟังก์ชัน ที่มีคำนิยามว่า

$$L = K - U \quad (3)$$

เมื่อเรากล่าวถึงอนุพันธ์เทียบกับเวลากตัวอย่างเช่น  $\frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t)$ , หรือ  $\frac{d}{dt} q(t)$  เราจะเขียนด้วยสัญลักษณ์อย่างย่อว่า

$$\dot{q} \equiv \frac{d}{dt} q(t) \quad (4)$$

นั่นก็คือ ใช้จุดหนึ่งจุด เพื่อแสดงถึงอนุพันธ์เทียบกับเวลานั่นเอง สมการที่ (4) มิได้มีนัยยะสำคัญทางฟิสิกส์แต่อย่างใด หากเป็นแต่เพียงการใช้สัญลักษณ์เพื่อย่นระยะเวลาในการเขียนเท่านั้นเอง

ถ้ากำหนดให้เซตของพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  เราจะต้องเขียน ลากรานจ์ฟังก์ชัน  $L$  ให้อยู่ในรูป

$$L = K - U = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (5)$$

กล่าวคือ เขียน  $L$  ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของพิกัดวางนัยทั่วไป  $q_i, \dot{q}_i$  และเวลา  $t$  นั่นเอง

### 1.1 การเคลื่อนที่ภายใต้ข้อจำกัด (Motion with constraints)

กระบวนการของกลศาสตร์ลากรางจ์ เริ่มต้นด้วยการกำหนด พิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  ที่ใช้ในการอธิบายตำแหน่งของวัตถุ จากนั้นเขียนพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ให้อยู่ในรูปของ  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  เพื่อสร้าง ลากรางจ์ฟังก์ชัน  $L = K - U$  และนำไปสู่ สมการการเคลื่อนที่ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (6)$$

โดยสมการที่ (6) สามารถใช้ได้ในกรณีที่พิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  เป็นอิสระต่อกัน โดยทั่วไปแล้วเราเรียกสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  ว่า “สมการข้อจำกัด” (constraint equation) ซึ่งมักเขียนให้อยู่ในรูป

$$g(q_1, q_2, \dots) = 0 \quad (7)$$

ผู้วิเคราะห์สามารถที่จะเลือกใช้พิกัดวางนัยทั่วไป ตามที่เห็นสมควร และสามารถที่จะเขียน ลากรางจ์ ฟังก์ชัน  $L = L(q_i, \dot{q}_i)$  ขึ้นมาโดยไม่คิดกติกาแต่อย่างใด เพียงแต่ถ้าเซตของพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  เหล่านั้นมิได้เป็นอิสระต่อกัน หากแต่สัมพันธ์กันอยู่ด้วยสมการข้อจำกัด  $g(q_1, q_2, \dots) = 0$  เสียแล้ว การวิเคราะห์ดังกล่าวไม่สามารถใช้สมการลากรางจ์  $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$  ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบได้นั่นเอง เมื่อไม่สามารถ สร้างสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นตัวควบคุมพฤติกรรมเคลื่อนที่ของระบบได้ย่อมมีผลเสียอย่างยิ่ง เพราะทำให้เราไม่สามารถแก้สมการหาผลเฉลย ว่าตำแหน่งของอนุภาคเปลี่ยนแปลงกับเวลาเช่นใด คู่มือจึงคล้ายกับว่า กลศาสตร์ลากรางจ์ จะมีประโยชน์แต่เฉพาะในกรณีที่เซตของพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  นั้นเป็นอิสระต่อกันเท่านั้น

ในความเป็นจริงแล้ว เราสามารถสร้าง สมการการเคลื่อนที่ลากรางจ์ ได้ ถึงแม้เซตของ  $\{q_i\}$  จะโดนจำกัดอยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมการข้อจำกัด  $g(q_1, q_2, \dots) = 0$  เพียงแต่สมการดังกล่าว จะมีความซับซ้อนมากขึ้น เราเรียกสมการดังกล่าวว่า “สมการข้อจำกัดลากรางจ์” (lagrange equation with constraints) ถ้าเซตของพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  อยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมการข้อจำกัด  $g(q_1, q_2, \dots) = 0$  แล้ว สมการข้อจำกัดการเคลื่อนที่ลากรางจ์ คือ

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda(t) \frac{\partial}{\partial q_i} g(q_1, q_2, \dots) = 0 \quad (8)$$

เมื่อ  $\lambda$  คือตัวแปรที่มีชื่อว่า ตัวคูณลากรางจ์ (lagrange multiplier)

$\lambda$  มีความหมายที่เหมือนสะพานที่เชื่อมระหว่าง กลศาสตร์ลากรางจ์ และ กลศาสตร์นิวตัน เข้าด้วยกัน กล่าวคือ ในกลศาสตร์ลากรางจ์เราวิเคราะห์ระบบโดยอาศัยพลังงานเป็นหลัก โดยไม่จำเป็นต้องพิจารณาแรงที่กระทำกับวัตถุ ในทางตรงกันข้ามกับกลศาสตร์นิวตันซึ่งอาศัยแรงเป็นหัวใจสำคัญของการวิเคราะห์ แต่เมื่อระบบของกลศาสตร์ลากรางจ์มี สมการข้อจำกัดเข้ามาเกี่ยวข้อง เราสามารถที่จะตั้งคำถามว่า ปัจจัยอะไรที่เป็นตัวบังคับ ให้มวลเหล่านี้ อยู่ภายใต้เงื่อนไขของ สมการข้อจำกัด ในภาษาของกลศาสตร์เราเรียกแรงที่ทำให้เซตของพิกัดวางนัยทั่วไป  $\{q_i\}$  อยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมการข้อจำกัดว่า “ข้อจำกัดของแรงวางนัยทั่วไป” (generalize force of constraint)  $Q_i$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$Q_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (9)$$

จากสมการที่ (8) และ(9) สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + Q_i = 0 \quad (10)$$

และจากสมการที่ (3) และ(10)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q \quad (11)$$

## 2. การปรับอัตราส่วน (scaling)

การปรับอัตราส่วนสัญญาณ ในระบบ MIMO นั้นมีความจำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ และ ออกแบบตัวควบคุมระบบ

ในเทอมของตัวแปรที่ปรับอัตราส่วนแล้ว จะได้ว่า  $|d(t)| \leq 1$  และ  $|r(t)| \leq 1$  , เราต้องการที่จะออกแบบตัวควบคุมที่จะทำให้สัญญาณควบคุม  $u$  เป็น  $|u(t)| \leq 1$  ดังนั้น  $|e(t)| = |y(t) - r(t)| \leq 1$  โดย  $d$  คือ สัญญาณรบกวนที่ปรับอัตราส่วนแล้ว,  $r$  คือสัญญาณอ้างอิงที่ปรับอัตราส่วนแล้ว  $u$  คือ สัญญาณควบคุมที่ทำการปรับอัตราส่วนแล้ว,  $e$  ค่าผิดพลาดที่ปรับอัตราส่วนแล้ว, และ  $y$  คือเอาต์พุตที่ปรับอัตราส่วนแล้ว พิจารณาแบบจำลองที่ยังไม่ได้ทำการปรับอัตราส่วน ซึ่งจะได้อะไรที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{G}u + \hat{G}_d d, \\ \hat{e} &= \hat{y} - \hat{r} \end{aligned} \quad (12)$$

กำหนดให้ เมทริกซ์แยงมุมปรับอัตราส่วน (diagonal scaling matrix) ดังนี้

$$\begin{aligned} D_e &= \text{diag} \{ \hat{e}_{1,\max}, \dots, \hat{e}_{m,\max} \}, \\ D_u &= \text{diag} \{ \hat{u}_{1,\max}, \dots, \hat{u}_{m,\max} \}, \\ D_d &= \text{diag} \{ \hat{d}_{1,\max}, \dots, \hat{d}_{m,\max} \}, \\ D_r &= \text{diag} \{ \hat{r}_{1,\max}, \dots, \hat{r}_{m,\max} \}, \end{aligned} \quad (13)$$

เมื่อ  $m$  คือ มิติของระบบ MIMO,  $\hat{e}_{1,\max}$  คือค่าผิดพลาดควบคุมคาดการณ์สูงสุด,  $\hat{u}_{1,\max}$  คือค่าการเปลี่ยนแปลงอินพุตยอมให้สูงสุด,  $\hat{d}_{1,\max}$  คือค่าเปลี่ยนแปลงการรบกวนคาดการณ์สูงสุด และ  $\hat{r}_{1,\max}$  คือค่าการเปลี่ยนแปลงอ้างอิงคาดการณ์สูงสุด จากสมการที่ (12) แบบจำลองของระบบที่อยู่ในเทอมของตัวแปรที่ทำการสเกลแล้วจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} D_e y &= \hat{G} D_u u + \hat{G}_d D_d d \\ D_e e &= D_e y - D_r r \end{aligned} \quad (14)$$

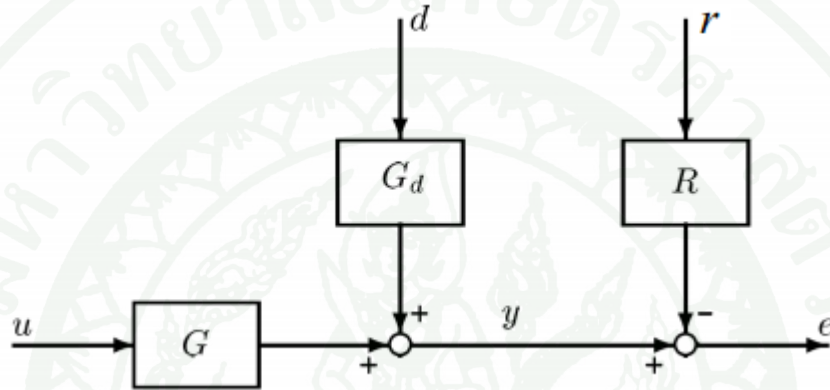
ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} y &= D_e^{-1} \hat{G} D_u u + D_e^{-1} \hat{G}_d D_d d \\ e &= y - D_e^{-1} D_r r \end{aligned} \quad (15)$$

หรือ

$$\begin{aligned} y &= Gu + G_d d \\ e &= y - Rr \end{aligned} \quad (16)$$

เมื่อกำหนดให้  $G = D_e^{-1} \hat{G} D_u$ ,  $G_d = D_e^{-1} \hat{G}_d D_d$  และ  $R = D_e^{-1} D_r$

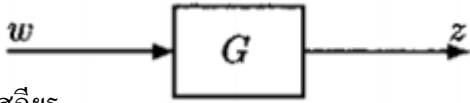


ภาพที่ 1 บล็อกไดอะแกรม ระบบที่ได้จากการปรับอัตราส่วนตัวแปรแล้ว

หากค่าตัวแปรคาดการณ์ หรือยอมให้ รอบๆค่าปรกติไม่สมมาตรแล้ว เราจะใช้ค่าตัวแปรสูงสุด สำหรับ  $\hat{d}_{i,\max}$  และ  $\hat{r}_{i,\max}$  และตัวแปรเล็กที่สุดสำหรับ  $\hat{u}_{i,\max}$  และ  $\hat{e}_{i,\max}$  ยกตัวอย่างเช่น ให้  $\tilde{d}_i, \tilde{r}_i, \tilde{u}_i$  และ  $\tilde{e}_i$  เป็นค่าตัวแปรเดิมของระบบ และให้  $\tilde{d}_i^*, \tilde{r}_i^*, \tilde{u}_i^*$  และ  $\tilde{e}_i^*$  คือค่าปรกติ จะได้ตั้งสมการที่ (17)

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= \max \left\{ \tilde{d}_{i,\max} - \tilde{d}_i^*, |\tilde{d}_{i,\min} - \tilde{d}_i^*| \right\} \\ \hat{r}_i &= \max \left\{ \tilde{r}_{i,\max} - \tilde{r}_i^*, |\tilde{r}_{i,\min} - \tilde{r}_i^*| \right\} \\ \hat{u}_i &= \max \left\{ \tilde{u}_{i,\max} - \tilde{u}_i^*, |\tilde{u}_{i,\min} - \tilde{u}_i^*| \right\} \\ \hat{e}_i &= \max \left\{ \tilde{e}_{i,\max} - \tilde{e}_i^*, |\tilde{e}_{i,\min} - \tilde{e}_i^*| \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. นอร์มระบบ

พิจารณาระบบ  $G(s)$   ในภาพที่ 2 ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่เสถียร

ภาพที่ 2 ระบบ  $G$  อินพุตคือ  $w$  และเอาต์พุตคือ  $z$

นอร์มระบบเป็นคำตอบคำถามที่ว่า เมื่อให้อินพุต  $w(t)$  เข้าไปด้วยค่าค่าหนึ่งแล้ว ขนาดของเอาต์พุต  $z(t)$  จะมีขนาดเป็นอย่างไร เราจะลองพิจารณา 2 ทางเลือกสำหรับ อินพุต  $w(t)$

$w(t)$  คืออนุกรมของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย นอร์มระบบที่เกี่ยวข้องคือ  $H_2$  นอร์ม  
 $w(t)$  คือสัญญาณใดๆ

$$\|w(t)\|_2 = \sqrt{\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} |w_i(\tau)|^2 d\tau} = 1 \quad (18)$$

ซึ่งนอร์มของระบบที่เกี่ยวข้องก็คือ  $H_\infty$  นอร์ม

#### 3.1 $H_2$ นอร์ม

เมื่อพิจารณาระบบเสถียรเชิงเส้นแบบเหมาะสมอย่างยิ่งของระบบ  $G(s)$  ในรูปของปริภูมิสถานะ (state space) ที่มีเมทริกซ์  $D=0$  โดยการใช้ ฟรอปินิอุส นอร์ม และอินทิเกรต ตลอดช่วงความถี่ สามารถแสดง  $H_2$  นอร์ม ได้ดังนี้

$$\|G(s)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{tr}(G(j\omega)^H G(j\omega))}_{\|G(j\omega)\|_F^2 = \sum_{ij} |G_{ij}(j\omega)|^2} d\omega} \quad (19)$$

เมื่อมองว่า  $G(s)$  เป็นระบบแบบเหมาะสมอย่างยิ่ง และหาค่า  $H_2$  นอร์มได้ โดยทฤษฎีของพาเซวาล  $H_2$  นอร์ม สามารถเขียนในรูปโดเมนเวลาได้เป็น

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\int_0^\infty \underbrace{\text{tr}(g^T(\tau)g(\tau))}_{\|g(\tau)\|_F^2 = \sum_{ij} |g_{ij}(\tau)|^2} d\tau} \quad (20)$$

เมื่อแปลงอันดับของการอินทิเกรต และผลรวม จะได้

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} \int_0^\infty |g_{ij}(\tau)|^2 d\tau} \quad (21)$$

เมื่อ  $g_{ij}(t)$  คือ  $ij^{\text{th}}$  เอลิเมนต์ของเมทริกซ์อิมพัลส์  $g(t)$  และ  $H_2$  นอร์มในสมการที่ (21) จะมีค่าเทียบเท่าได้กับ

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|z_i(t)\|_2^2} \quad (22)$$

เมื่อ  $z_i(t)$  คือ อิมพัลส์เอาต์พุตเวกเตอร์ จากการให้สัญญาณอินพัลส์ ที่  $i^{\text{th}}$  อินพุต  $H_2$  นอร์ม สามารถแปลผลของเอาต์พุตจากการให้สัญญาณอิมพัลส์ ในแต่ละอินพุต โดยเอาต์พุตเริ่มต้นมีค่าเป็น 0 ก่อนที่จะมีการให้สัญญาณ อินพุต และ  $H_2$  สำหรับระบบ SISO สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\|f(s)\|_2 \triangleq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (23)$$

$H_2$  คือ ฮาร์ดีสเปซ หรือ เซตของฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยขอบเขตของ  $H_2$  นอร์ม เพื่อที่จะเทียบกับ  $H_\infty$  นอร์ม สามารถเขียน ฟรอนนิอุส นอร์ม ในเทอมของ ค่าเอกฐานดังนี้

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega} \quad (24)$$

จะเห็นได้ว่าการทำให้ค่า  $H_2$  นอร์มมีค่าต่ำๆนั้นทำได้โดยการทำให้ค่าผลบวกกำลัง 2 ของค่าเอกฐานทุกตัวตลอดย่านความถี่มีค่าน้อย ดังนั้นปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดคือการพยายามลดค่า  $H_2$  ให้มีค่าต่ำๆ โดยกคค่าเอกฐานให้ต่ำตลอดย่านความถี่

### 3.2 $H_2$ นอร์ม

พิจารณาระบบเสถียรเชิงเส้นแบบเหมาะสม  $G(s)$  ในรูปสมการสถานะ (state equation) ที่ค่า  $D \neq 0$  โดยการเหนี่ยวนำของนอร์ม 2 และเลือกค่าสูงสุดตลอดย่านความถี่ สามารถกำหนดค่า  $H_\infty$  นอร์ม ได้เป็น

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (25)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า  $H_\infty$  คือขนาดสูงสุดของฟังก์ชันถ่ายโอน จากข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{\|w(\omega)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2} \quad (26)$$

ดังนั้น  $H_\infty$  นอร์มจึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \max_{\|w(\omega)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2} = \max_{\|w(\omega)\|_2=1} \|z(\omega)\|_2 \quad (27)$$

เราสามารถเขียน  $H_\infty$  นอร์มให้อยู่ในรูปของโดเมนเวลาได้เป็น

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega(t) \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2} = \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(\omega)\|_2 \quad (28)$$

สำหรับระบบ SISO  $H_\infty$  นอร์มของฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \|f(s)\|_\infty &\triangleq \max_{\omega} |f(j\omega)| \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^p d\omega \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (29)$$

$H_\infty$  คือ ฮาร์ดีสเปซ หรือ เซตของฟังก์ชันถ่ายโอนภายในขอบเขตของ  $H_\infty$  นอร์ม ซึ่งเป็นเซตของฟังก์ชันถ่ายโอนที่เสถียรแบบเหมาะสม

ปัญหาการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดในรูปของ  $H_\infty$  นอร์มจะเป็นการกคค่าเอกฐานสูงสุดให้มีค่าต่ำลง

ในการควบคุมแบบทนทานนั้น  $H_\infty$  นอร์ม จะเป็นที่นิยมมากกว่า  $H_2$  เนื่องจากว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เนื่องจากความไม่แน่นอนนั้นจะแสดงได้ง่ายกว่าหากใช้  $H_\infty$  นอร์ม และ  $H_\infty$  นอร์มเป็น นอร์มเหนียวที่มีคุณสมบัติของการคูณ

$$\|A(s)B(s)\|_\infty \leq \|A(s)\|_\infty \cdot \|B(s)\|_\infty \quad (30)$$

#### 4. การแยกค่าเอกฐาน (Singular Value Decomposition)

การแยกค่าเอกฐาน (Singular Value Decomposition) โดยต่อไปนี้จะเรียกตัวย่อว่า SVD จัดได้ว่าเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ผลตอบสนองความถี่ และออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสำหรับระบบ MIMO ซึ่งต่อไปนี้จะแสดงถึงคณิตศาสตร์ที่จะใช้แยกค่าเอกฐาน

นิยาม: (SVD) เมทริกซ์เชิงซ้อน  $A$  ขนาด  $l \times m$  สามารถแยกตัวประกอบที่เรียกว่า การแยกค่าเอกฐาน (Singular value decomposition) หรือเรียกว่า SVD

$$A = U\Sigma V^H \quad (31)$$

โดยที่เมทริกซ์  $U$  ขนาด  $l \times l$  เมทริกซ์  $V$  ขนาด  $m \times m$  เป็นแบบยูนิแทรี และเมทริกซ์  $\Sigma$  ประกอบด้วยเมทริกซ์ทแยงมุม  $\Sigma_1$  ที่มีค่าเอกฐานจำนวนจริงไม่เป็นลบ  $\sigma_i$  เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad l \geq m \quad (32)$$

หรือ

$$\Sigma = [\Sigma_1 \quad 0]; \quad l \geq m \quad (33)$$

โดยที่

$$\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}; \quad k = \min(l, m) \quad (34)$$

และ

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \equiv \underline{\sigma} \quad (35)$$

$U$  ประกอบด้วยคอลัมน์เวกเตอร์  $u_i, i=1, \dots, p$  มีขนาดเท่ากับ  $p$  เรียกว่า เวกเตอร์เอกฐานซ้าย (left singular vector) หรือ เวกเตอร์เอกฐานเอาต์พุต (output singular vector) ของ  $G$  ส่วน  $V$  ประกอบด้วยสดมภ์  $v_i, i=1, \dots, m$  มีขนาดเท่ากับ  $m$  เรียกว่า เวกเตอร์เอกฐานขวา (right singular vector) หรือ เวกเตอร์เอกฐานอินพุต (input singular vector) ของ  $G$

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_p] \quad V = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m] \quad (36)$$

ตามคุณสมบัติของเมทริกซ์ยูนิแทรี จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_i^H u_k &= \delta_{ik}, & i, k &= 1, \dots, p \\ v_i^H v_k &= \delta_{ik}, & i, k &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (37)$$

โดยที่  $\delta_{ik}$  คือ Kronecker delta ( $\delta_{ik}$  มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ  $i=k$  และมีค่าเป็นศูนย์สำหรับกรณีอื่นๆ) ค่าเอกฐานคือค่ารากที่สองบวกของค่าเจาะจงสูงสุด  $k = \min(l, m)$  ของ  $AA^H$  และ  $A^H A$

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} \quad (38)$$

นอกจากนั้น สดมภ์ของ  $U$  และ  $V$  เป็นเวกเตอร์เจาะจงหนึ่งหน่วยของ  $AA^H$  และ  $A^H A$  ตามลำดับ

สมมติว่า  $G$  ขนาด  $p \times m$  ที่อาจมีสมาชิกเป็นค่าจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ และสมมติให้ค่าลำดับชั้นของ  $G$  เท่ากับ  $k$  จะสามารถหาค่าคงที่บวกจำนวน  $k$  ค่า เขียนแทนด้วย

$\sigma(G)$  (หรือเขียนเพียง  $\sigma$ )  $i=1, \dots, k$  ที่เรียกว่า ค่าเอกฐานของ  $G$  โดยสามารถคำนวณค่าเอกฐานได้จากรากที่สองบวกของค่าเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์ของ  $GG^H$

หรือ  $GG^H$  โดย  $G^H$  คือการสลับเปลี่ยนสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate transpose) ของ  $G$

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} = \sqrt{\lambda_i(GG^H)} > 0, \quad i=1, \dots, k \quad (39)$$

โดย  $\lambda_i(\cdot)$  คือสัญลักษณ์แทนความหมายของค่าเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์ตัวที่  $i$  ค่าเอกฐานที่ได้ทั้งหมดจะถูกจัดอันดับเรียงจากมากไปขยายน้อยดังนี้

$$\sigma_1(G) \geq \sigma_2(G) \geq \dots \geq \sigma_k(G) > 0 \quad (40)$$

ดังนั้นจะได้ว่าค่าเอกฐานสูงสุด  $\bar{\sigma}(G) = \sigma_1(G)$  และค่าเอกฐานต่ำสุด  $\underline{\sigma}(G) = \sigma_k(G)$

ในการนิยาม SVD เริ่มต้นด้วยการสร้างเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $k \times k$  โดยมีค่าเอกฐานที่เรียงตามลำดับในสมการ (40) อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม ส่วนสมาชิกอื่นเป็นศูนย์ หลังจากนั้นเพิ่มแถวและคอลัมน์ที่เป็นศูนย์ทั้งหมดจนกระทั่งเมทริกซ์ที่ได้มีขนาด  $p \times m$  เรียกเมทริกซ์นี้ว่า  $\Sigma$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k & \\ \hline & 0_{(p-k) \times k} & & & 0_{(p-k) \times (m-k)} \end{array} \right] \quad (41)$$

โดย  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$

สำหรับเมทริกซ์  $G$  ขนาด  $p \times m$  ที่มีลำดับชั้นของ  $G$  เท่ากับ  $k$  และหาค่าเอกฐานได้ดังสมการ (40) และสร้างเมทริกซ์  $\Sigma$  ตามสมการ (41) จะสามารถหาเมทริกซ์ยูนิแทรี ขนาด  $p \times p$  และ เมทริกซ์ยูนิแทรี  $V$  ขนาด  $m \times m$  ที่ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$G = U\Sigma V^H \quad (42)$$

และ

$$\Sigma = U^H G V \quad (43)$$

$U$  ประกอบด้วยคอลัมน์เวกเตอร์  $u_i$ ,  $i=1, \dots, p$  มีขนาดเท่ากับ  $p$  เรียกเวกเตอร์เอกฐานซ้าย หรือเวกเตอร์เอกฐานเอาท์พุท ของ  $G$  ส่วน  $V$  ประกอบด้วยคอลัมน์เวกเตอร์  $v_i$ ,  $i=1, \dots, m$  มีขนาดเท่ากับ  $m$  เรียกว่าเวกเตอร์เอกฐานขวา หรือเวกเตอร์เอกฐานเอาท์พุทของ  $G$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p] \quad V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m] \quad (44)$$

ตามคุณสมบัติของเมทริกซ์ยูนิแทรี จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_i^H u_k &= \delta_{ik}, & i, k &= 1, \dots, p \\ v_i^H v_k &= \delta_{ik}, & i, k &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (45)$$

โดยที่  $\delta_{ik}$  คือ Kronecker delta ( $\delta_{ik}$  มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ  $i=k$  และมีค่าเป็นศูนย์สำหรับกรณีอื่นๆ)

ในการที่จะเข้าใจถึงผลของ SVD ในเชิงเรขาคณิต พิจารณาการแปลเชิงเส้น

$$y = Gd, \quad d \in C^m, y \in C^p \quad (46)$$

ผลจากการทำ SVD กับ  $G$  จะได้ว่า

$$y = Gd = U \Sigma V^H d \quad (47)$$

สมมติว่าเลือก  $d$  เท่ากับเวกเตอร์เอกฐานเอาท์พุทตัวหนึ่งของ  $G$  เช่น  $v_i$  และให้  $y_i$  เป็นเอาท์พุทเวกเตอร์ที่เกิดจากอินพุตนี้ ดังนั้น

$$y = Gv_i = U \Sigma V^H v_i \quad (48)$$

เนื่องจากเวกเตอร์เอกฐานอินพุตเป็นเวกเตอร์แบบตั้งฉากปกติ (orthonormal)

$$V^H v_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T \quad (49)$$

โดยมีเพียงสมาชิกตัวที่  $i$  เท่านั้นที่มีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นเมื่อคูณเวกเตอร์นี้ทางด้านหลังเมทริกซ์ค่าเอกฐาน  $\Sigma$  จะได้เป็น

$$\Sigma V^H v_i = [0, \dots, 0, \sigma_i, 0, \dots, 0]^T \quad (50)$$

โดยมีสมาชิกตัวที่  $i$  เท่านั้นที่มีค่าไม่เป็น 0 ดังนั้นจะได้เอาท์พุตเป็น

$$y = U \Sigma V^H v_i = \sigma_i u_i \quad (51)$$

สมการ (51) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเอกฐานกับเวกเตอร์เอกฐาน คือเมื่ออินพุต  $d$  มีค่าเท่ากับเวกเตอร์เอกฐานอินพุต  $v_i$  ทิศทางของเอาท์พุตจะถูกกำหนดโดยเวกเตอร์เอกฐานเอาท์พุต  $u_i$  และเนื่องจาก ทั้ง  $u_i$  และ  $v_i$  มีขนาด (นอร์ม-2) เป็นหนึ่งหน่วย อัตราขยาย (หรือการลดทอน) ของอินพุตจะมีค่าตามค่าเอกฐาน  $\sigma_i$  แต่หากเลือกอินพุต  $d = v_i$  เมื่อ  $i > k$  เอาท์พุตเวกเตอร์ที่ได้จะเท่ากับศูนย์เพราะค่าเอกฐานจะมีค่าไม่เป็นศูนย์ถึงลำดับที่  $k$  เท่านั้น

เนื่องจากสมการ (51) เป็นจริงสำหรับ  $i = 1, \dots, k$  ดังนั้นจึงเป็นจริงสำหรับค่าเอกฐานสูงสุด  $\bar{\sigma}(G)$  และค่าเอกฐานต่ำสุด  $\underline{\sigma}(G)$  ด้วย หากนิยาม  $u_1 = \bar{u}$ ,  $v_1 = \bar{v}$ ,  $u_k = \underline{u}$  และ  $v_k = \underline{v}$  จะได้ว่า

$$G \bar{v} = \bar{\sigma} \bar{u}, \quad G \underline{v} = \underline{\sigma} \underline{u} \quad (52)$$

และสำหรับอินพุตเวกเตอร์  $d$  ใดๆ

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \leq \bar{\sigma}(G) \quad (53)$$

#### 4.1 การวิเคราะห์ผลตอบสนองความถี่ของระบบ MIMO โดย SVD

เมื่อพิจารณาสมการที่ (54) แสดงให้เห็นถึงผลตอบสนองความถี่ของระบบ MIMO ต่อ อินพุตรูปคลื่นไซน์ ที่จะมีคุณสมบัติคล้ายกับระบบ SISO แต่ อัตราขยายของระบบขึ้นอยู่กับทิศทางของอินพุต

$$y(\omega) = G(j\omega)d(\omega) \quad (54)$$

ดังนั้นในการวิเคราะห์ผลตอบสนองความถี่จึงต้องอาศัย SVD เป็นเครื่องมือช่วยสังเกต ในสมการ (54)  $G(j\omega)$  เป็นเมทริกซ์ตัวแปรเชิงซ้อนที่แปรตามความถี่  $\omega$  ดังนั้น ณ. ความถี่หนึ่ง คงที่สามารถจะคำนวณหา SVD ของ  $G(j\omega)$  ได้

$$G(j\omega) = U(j\omega)\Sigma(j\omega)V^H(j\omega) \quad (55)$$

สังเกตว่าทั้งสามตัวประกอบในสมการ (55) จะเป็นฟังก์ชันของความถี่  $\omega$  ตามคุณสมบัติของ SVD ที่ได้อธิบายในข้างต้นจะได้ว่า

4.1.1 เมทริกซ์  $\Sigma(\omega)$  มีขนาด  $p \times m$  โดยที่สมาชิกในแนวทแยงมุมประกอบด้วยค่าเอกฐานของ  $G(j\omega)$  ได้แก่  $\bar{\sigma}(\omega) = \sigma_1(\omega), \sigma_2(\omega), \dots, \sigma_{k_\omega}(\omega) = \underline{\sigma}(\omega)$  โดยที่  $k_\omega$  คือค่าลำดับชั้นของ  $G(j\omega)$

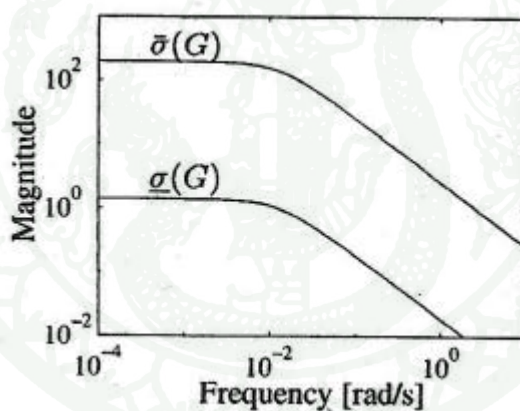
4.1.2 เมทริกซ์ยูนิแทรี  $U(j\omega)$  เป็นเมทริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อนขนาด  $m \times m$  ประกอบด้วย คอลัมน์เวกเตอร์  $u_1(j\omega)$  เป็นเวกเตอร์เอกฐานเอาต์พุตของ  $G(j\omega)$

4.1.3 เมทริกซ์ยูนิแทรี  $V(j\omega)$  เป็นเมทริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อนขนาด  $p \times p$  ประกอบด้วยคอลัมน์เวกเตอร์  $v_1(j\omega)$  ที่เป็นเวกเตอร์เอกฐานอินพุตของ  $G(j\omega)$

## 4.2 แผนภาพค่าเอกฐาน

เมื่อทำการคำนวณค่าเอกฐานสูงสุด และต่ำสุดของ  $G(j\omega)$  ในย่านความถี่  $\omega$  ช่วงหนึ่ง สามารถที่จะพลอตค่าทั้งสองลงบนแผนภาพ โปติดังตัวอย่างในภาพที่ 3

แผนภาพค่าเอกฐาน หรือต่อไปนี้จะเรียกว่า แผนภาพ SV สามารถที่จะให้ข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับคุณสมบัติของ MIMO เมื่อเข้าใจหลักการและความหมายของมัน โดยจะเป็นตัวบอกค่าของ ช่วงอัตราขยายของระบบที่เปลี่ยนไปตามความถี่ อาจมองได้เป็นเสมือนการขยายผลของข้อมูลที่ ทราบดีจากเส้นกราฟอัตราขยายในแผนภาพ โปติของระบบ SISO ข้อแตกต่างหลักคือ สำหรับระบบ MIMO ช่วงอัตราขยายจะถูกบรรยายโดยกราฟสองเส้น ข้อมูลที่ได้จากกราฟ SV ณ.ความถี่หนึ่งจะ บอกให้ทราบว่าเมื่อ  $\|d\|_2 = 1$



ภาพที่ 3 ลักษณะของแผนภาพเอกฐาน

4.2.1 ขนาดของเอาต์พุตที่สูงที่สุดคือ  $\|y\|_{2,\max} = \bar{\sigma}(G(j\omega))$

4.2.2 ขนาดของเอาต์พุตที่ต่ำที่สุดคือ  $\|y\|_{2,\min} = \underline{\sigma}(G(j\omega))$

หรือกล่าวได้ว่าสามารถที่จะบรรยายขนาดอัตราขยายของแพลนต์เป็นฟังก์ชันของความถี่

4.2.3 แพลนต์มีอัตราขยายสูง ณ.ความถี่  $\omega$  เมื่อ  $\bar{\sigma}(G(j\omega)) \gg 1$

4.2.4 แพลนต์มีอัตราขยายต่ำ ณ.ความถี่  $\omega$  เมื่อ  $\underline{\sigma}(G(j\omega)) \ll 1$

## 5. การควบคุมหลายตัวแปร (Multivariable Control)

เมื่อเราสนใจที่จะออกแบบระบบควบคุมแบบ หลายอินพุตหลายเอาต์พุต (MIMO) แพล้นท์ ที่มี  $m$  อินพุตและ  $l$  เอาต์พุต สามารถเขียนได้เป็น

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (56)$$

โดย  $y(s)$  คือ เอาต์พุตเวกเตอร์ขนาด  $l \times 1$ ,  $u(s)$  อินพุตเวกเตอร์ขนาด  $m \times 1$  และ  $G(s)$  คือ แพล้นท์ ขนาด  $m \times l$

การควบคุมระบบหลายอินพุต หลายเอาต์พุต (MIMO) นั้นจะมีความยากกว่าระบบ หนึ่งอินพุต หนึ่งเอาต์พุต (SISO) เนื่องจากว่าสัญญาณอินพุตและเอาต์พุตของระบบ MIMO นั้นจะมีปฏิสัมพันธ์กัน ซึ่งระบบ SISO ไม่มี สำหรับระบบ MIMO นั้นการเปลี่ยนแปลงของแต่ละอินพุต  $u_i$  จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในแต่ละเอาต์พุต  $y_j$  ดังนั้นจะเห็นได้ว่าทิศทางของอินพุตนั้นมีผลต่อระบบเมื่อระบบอยู่ในรูปของ เมทริกซ์ หรือเวกเตอร์ ซึ่งปริมาณดังกล่าวนี้มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการศึกษาก่อนที่จะทำการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบ MIMO

ในระบบ SISO นั้นในหลายๆปัญหาเราสามารถที่มองให้อยู่ในรูปของระบบ MIMO ได้ แต่บางอย่างก็ไม่สามารถทำได้ ยกตัวอย่างเช่น ค่าเอกฐาน เป็นค่าที่บ่งบอกอัตราการขยายที่ดีในระบบ MIMO แต่ไม่สามารถนำมาปรับใช้กับระบบ SISO ได้ หรือแม้แต่เสถียรภาพของ โปดีในระบบ SISO ก็ไม่สามารถนำมาปรับใช้กับระบบ MIMO ได้ ยังมีอีกมากมายที่สองระบบนี้ไม่สามารถพิจารณาเป็นแบบเดียวกันได้เช่นคุณสมบัติการคูณ สำหรับระบบ SISO นั้นมีสมบัติการสลับที่ได้ แต่ในระบบ MIMO ซึ่งตัวแปรส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของเมทริกซ์ หรือเวกเตอร์ ซึ่งไม่สามารถใช้คุณสมบัติการสลับที่ได้ เช่น  $GK \neq KG$

## 5.1 ขอบเขตบนของฟังก์ชันถ่ายโอน (upper bound of transfer function)

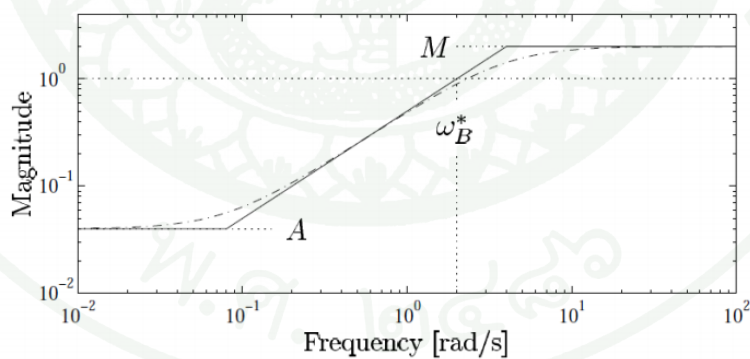
ค่าขอบเขตสูงสุด  $1/w(s)$  ของฟังก์ชันถ่ายโอนแบบปิด โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่  
ในรูป

$$\frac{1}{w(s)} = \frac{M(s + \omega_B^* A)}{(s + \omega_B^* M)} \quad (57)$$

หรือ

$$w(s) = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} \quad (58)$$

โดยที่  $M$  คือตัวเลขที่มีค่ามากกว่า 1 เล็กน้อย ,  $A$  คือ ตัวเลขบวกที่มีค่าเกือบจะเป็น 0 และ  $\omega_B^*$  คือ ค่าแบนด์วิธที่ทำการออกแบบของระบบปิด สามารถเขียนแผนภาพโบดี แสดงขอบเขตบนดังภาพที่ 4 ซึ่งจะเห็นได้ว่า  $M$  คือขนาดของอัตราขยายที่ความถี่สูง ,  $A$  คืออัตราขยายที่ความถี่ต่ำ และ  $\omega_B^*$  คือความถี่ที่อัตราขยายมีค่าเข้าใกล้ 1



ภาพที่ 4 แผนภาพโบดี ของขอบเขตบน  $1/w(s)$

## 5.2 การวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงความถี่

สำหรับระบบ SISO นั้นเราจะศึกษา อัตราขยาย และเฟส โดยที่ แพล้นท์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ความถี่  $\omega$  ค่าหนึ่ง ส่วนในระบบ MIMO นั้นเราจะมอง แพล้นท์เป็นเมทริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อน ในความถี่  $\omega$  ค่าหนึ่ง พิจารณาแพล้นท์ในระบบ MIMO ดังนี้

$$y(s) = G(s)d(s) \quad (59)$$

เมื่อ  $d(s)$  คือ อินพุตเวกเตอร์,  $y(s)$  คือ เอาท์พุตเวกเตอร์ และ  $G(s)$  คือเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน  $g_{ij}(s)$  คือฟังก์ชันถ่ายโอนภายในแพล้นท์เมทริกซ์แถวที่  $i^{\text{th}}$  หลักที่  $j^{\text{th}}$  ดังนั้น  $g_{ij}(j\omega)$  จึงแสดงถึง ผลตอบสนองต่อฟังก์ชันไซน์ชอยด์จากอินพุตที่  $j^{\text{th}}$  ไปเอาท์พุตที่  $i^{\text{th}}$

เมื่อป้อนสัญญาณอินพุตแบบ สเกลาร์ไซน์ชอยด์ จำนวน  $j^{\text{th}}$  อินพุตสามารถเขียนแทนโดย

$$d_j(t) = d_{j0} \sin(\omega t + \alpha_j) \quad (60)$$

เนื่องจากว่าระบบเป็นแบบเชิงเส้นดังนั้นเอาท์พุตที่  $i^{\text{th}}$  ก็จะเป็นแบบไซน์ชอยด์ และที่ความถี่เดียวกันสามารถเขียนเอาท์พุตได้เป็น

$$y_i(t) = d_{i0} \sin(\omega t + \beta_i) \quad (61)$$

อัตราขยาย และการเลื่อนเฟสคือ

$$\begin{aligned} |g_{ij}(j\omega)| &= \frac{y_{i0}}{d_{j0}} \\ \angle g_{ij}(j\omega) &= \beta_i - \alpha_j \end{aligned} \quad (62)$$

เอาท์พุตทั้งหมด  $i^{\text{th}}$  ตัวจาก ทุกอินพุตคือ

$$\begin{aligned}
 y_i(\omega) &= g_{i1}(j\omega)d_1(\omega) + g_{i2}(j\omega)d_2(\omega) + \dots \\
 &= \sum_j g_{ij}(j\omega)d_j(\omega)
 \end{aligned} \tag{63}$$

เมื่อ  $\omega$  เปรียบเสมือนกับตัวที่จะบอกมุมใน  $y_i(\omega)$  และ  $d_j(\omega)$  เพื่อที่จะแสดงถึงการเป็นจำนวนเชิงซ้อน ในการที่จะแสดงค่าขนาด และเฟสในแต่ละความถี่  $\omega$  สำหรับสัญญาณไขว้ชอยด์ในสมการที่ (60) และ(61) ในรูปเมทริกซ์  $m$  input และ  $l$  output จะได้

$$y(\omega) = G(j\omega)d(\omega) \tag{64}$$

เมื่อ

$$d(\omega) = \begin{bmatrix} d_1(\omega) \\ d_2(\omega) \\ \vdots \\ d_m(\omega) \end{bmatrix}, \quad y(\omega) = \begin{bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \\ \vdots \\ y_l(\omega) \end{bmatrix}, \quad G(j\omega) = \begin{bmatrix} g_{11}(j\omega) & g_{12}(j\omega) & \dots & g_{1l}(j\omega) \\ g_{21}(j\omega) & g_{22}(j\omega) & \dots & g_{2l}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(j\omega) & g_{m2}(j\omega) & \dots & g_{ml}(j\omega) \end{bmatrix} \tag{65}$$

สำหรับระบบ SISO เราสามารถหาขนาดของอัตราขยายของระบบ  $G(s)$  ในโดเมนความถี่ได้เป็น

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = |G(j\omega)| \tag{66}$$

ในระบบ MIMO นั้น อัตราการขยายจะขึ้นอยู่กับทิศทางของอินพุต  $d(\omega)$  ซึ่งอยู่ในรูปเวกเตอร์ หากเลือกนอร์ม 2 ในการหาอัตราการขยายของระบบ  $G(s)$  จะสามารถหาได้จาก

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots}} \tag{67}$$

อัตราการขยายสูงสุดซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางของอินพุต หาได้จาก

$$\max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \max_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \bar{\sigma}(G) \quad (68)$$

ซึ่งก็คือ ค่าเอกฐานสูงสุดของ  $G$  สำหรับความถี่  $\omega$  และขนาดของอัตราขยายต่ำสุดที่ขึ้นอยู่กับทิศทางของอินพุตคือ

$$\min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \min_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \underline{\sigma}(G) \quad (69)$$

ซึ่งก็คือ ค่าเอกฐานต่ำสุดของ  $G$  สำหรับความถี่  $\omega$

### 5.3 การวัดทิศทาง

เนื่องจากว่าขนาดของอัตราขยายขึ้นอยู่กับทิศทางของอินพุต ดังนั้นเราจะกล่าวถึงเครื่องมือ 2 สิ่งที่ใช้ในการวัดทิศทางและระดับในสองทิศทางที่ปฏิสัมพันธ์กัน

#### 5.3.1 เลขเงื่อนไข (Condition Number)

เลขเงื่อนไข สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\gamma(G) \triangleq \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (70)$$

สำหรับเมทริกซ์ที่มี เลขเงื่อนไขมากจะเรียกได้ว่าเป็น เงื่อนไขที่ไม่ดี (ill condition)

เลขเงื่อนไขจะขึ้นอยู่กับ การปรับอัตราส่วน ของอินพุตและเอาต์พุต นั่นคือ  $\gamma(G)$  และ  $\gamma(D_1GD_2)$  เมื่อ  $D_1$  และ  $D_2$  คือเมทริกซ์ทแยงมุม ที่ทำการปรับอัตราส่วนแล้ว

โดยทั่วไปแล้วการปรับอัตราส่วนนั้นจะดำเนินการไปแล้วในช่วงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการหาค่าอินพุตและเอาต์พุตที่ได้ด้วยค่าที่คาดว่าจะมีค่าสูงสุดสำหรับค่า

อินพุต และเอาต์พุตตามลำดับ อย่างไรก็ตามเพื่อที่จะทำการลดเลขเงื่อนไขในทุกๆการปรับอัตราส่วนที่เป็นไปได้ อย่างหนึ่งที่จะเป็นไปได้ก็คือ หาค่าต่ำสุด หรือ เลขเงื่อนไขที่ดีที่สุด ซึ่งสามารถหาจาก

$$\gamma^*(G) = \min_{D_1, D_2} \lambda(D_1 G D_2) \quad (71)$$

### 5.3.2 อัตราขยายสัมพัทธ์ (Relative Gain Array, RGA)

ค่า RGA ของเมทริกซ์จัตุรัสเชิงซ้อนไม่เอกฐาน  $G$  คือเมทริกซ์เชิงซ้อนจัตุรัสเขียนได้เป็น

$$RGA(G) = \Lambda(G) \Delta G \times (G^{-1})^T \quad (72)$$

เมื่อสัญลักษณ์  $\times$  คือการคูณแบบเอเลเมนต์ต่อ เอเลเมนต์

ค่า RGA ของเมทริกซ์ถ่ายโอนจะทำการคำนวณภายใต้ฟังก์ชันของความถี่ สำหรับเมทริกซ์  $G$  ขนาด  $2 \times 2$  ด้วยเอเลเมนต์  $g_{ij}$  ค่า RGA คือ

$$\begin{aligned} \Lambda(G) &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix} \\ \lambda_{11} &= \frac{1}{1 - g_{12}g_{21}} \\ &\quad g_{11}g_{22} \end{aligned} \quad (73)$$

RGA สามารถเป็นตัววัดปฏิสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตได้ เช่นถ้าเราต้องการให้  $u_j$  ไปควบคุม  $y_i$  เราสามารถแบ่งการพิจารณาออกได้เป็น 2 กรณี อันแรกเมื่อวงอื่นๆเปิด นั่นคือ  $u_k = 0, \forall k \neq i$  เราจะได้

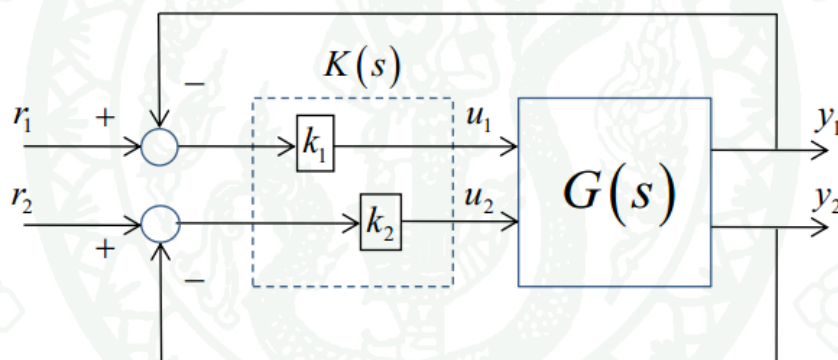
$$y = Gu \Rightarrow \left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, \forall k \neq j} = [G^{-1}]_{ij} \quad (74)$$

อันที่สองเมื่อดูปอื่นปิด นั่นคือ  $y_k = 0, \forall k \neq i$  เราจะได้

$$y = \frac{1}{G^{-1}} u \Rightarrow \left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_k=0, \forall k \neq j} = 1/[G^{-1}]_{ij} \quad (75)$$

และจากสองสมการข้างต้น

$$\frac{\left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, \forall k \neq j}}{\left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_k=0, \forall k \neq i}} = [G]_{ij} [G^{-1}]_{ji} = \lambda_{ij} \quad (76)$$



ภาพที่ 5 การควบคุมแบบแนวทแยง

ในภาพที่ 5 แสดงถึงการควบคุมแบบ แนวทแยง ซึ่งเมทริกซ์ของตัวควบคุมจะเป็นแบบแนวทแยง

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_1(s) & 0 \\ 0 & k_2(s) \end{bmatrix} \quad (77)$$

นั่นก็หมายถึง  $u_1$  จะควบคุม  $y_1$  และ  $u_2$  จะควบคุม  $y_2$

สำหรับการควบคุมแบบแนวทแยงเรามักจะทำการจับคู่ระหว่าง  $u_j$  กับ  $y_i$  ซึ่ง  $\lambda_{ij}$  มีค่าเข้าใกล้ 1 ในทุกความถี่ซึ่งก็หมายถึงว่า อัตราขยายจาก  $u_j$  ไป  $y_i$  ไม่มีผลจากวงปิดอื่นๆ

ในสภาวะอยู่ตัว ซึ่ง  $s = 0$ ,  $[G(0)]_{ij}$  และ  $1/[G^{-1}(0)]_{ij}$  ควรจะมีลักษณะเหมือนกัน เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการเสียดิสรภาพ ดังนั้น เราควรหลีกเลี่ยงการจับคู่เอเลเมนต์ของค่า RGA ที่ เป็นลบในสภาวะอยู่ตัว

ข้อเสียอีกอย่างของการใช้ขนาดเอเลเมนต์ของ RGA ก็คือการเกิดการผิดพลาดของการจับคู่เอเลเมนต์ของ RGA ของ -1 เพื่อที่จะก่อให้เกิดประโยชน์ดังนั้นเราสามารถคำนวณค่า RGA ได้จาก

สำหรับการจับคู่แนวทแยง เลข RGA หาได้จาก

$$RGANumber_{\Delta} \triangleq \|\Lambda(G) - I\|_{sum} \quad (78)$$

และการจับคู่แบบนอกแนวทแยงหาได้จาก

$$RGANumber_{\Delta} \triangleq \left\| \Lambda(G) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\|_{sum} \quad (79)$$

$$\text{ซึ่ง } \|A\|_{sum} = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

## 6. การสังเคราะห์ตัวควบคุม $H_{\infty}$ ( $H_{\infty}$ synthesis)

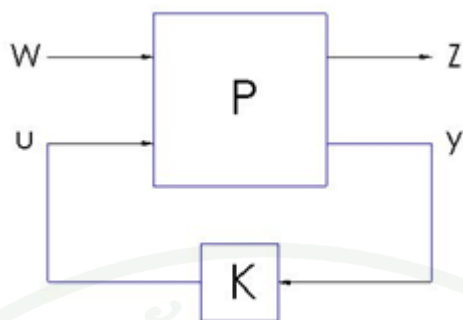
สำหรับความไม่แน่นอนรูปแบบต่างๆที่เกิดขึ้นในระบบจริง ผลสรุปคือการควบคุม LQG ได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยคำนึงถึงสมรรถนะเป็นหลัก ได้แสดงให้เห็นแล้วว่าถึงแม้องค์ประกอบย่อยทั้งสองของ LQG คือตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ LQR และคาร์ลมานฟิลเตอร์จะมีการรับประกันเสียดิสรภาพที่ดี แต่เมื่อมีการนำมาใช้ร่วมกันเป็นตัวควบคุม LQG สามารถที่จะสูญเสียการรับประกันดังกล่าว ทำให้ระบบป้อนกลับ LQG อาจมีความทนทานด้านเสียดิสรภาพที่แย่มาก โดยแรงจูงใจเพื่อแก้ไขข้อเสียของการควบคุม LQG นี้เอง ทำให้เกิดการพัฒนาระบบควบคุมทนทานโดยอาศัยการหา

ค่าที่เหมาะสมที่สุด  $H_\infty$  โดยต้นกำเนิดจากผลงานของ Prof. George Zames ในทศวรรษ 1980 โดย Zames ได้ให้เหตุผลว่า การที่ระบบป้อนกลับ LQG มีคุณสมบัติความทนทานที่ไม่ดีเนื่องจากใช้ นอร์ม  $H_2$  เป็นเงื่อนไขในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด นอกจากนั้นยังได้วิจารณ์ถึงการแทนความไม่แน่นอนโดยสัญญาณรบกวนขาวว่าไม่เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริง

อย่างไรก็ตามหลังจากที่ได้มีการพัฒนาทฤษฎีการควบคุม  $H_\infty$  ขึ้นแล้ว ความจริงได้ถูกค้นพบว่าแนวทางการควบคุมทั้งสองแบบ คือ  $H_2$  ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของ LQG และ  $H_\infty$  มีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีวิธีในการหาคำตอบ

### 6.1 การจัดรูปทั่วไปสำหรับปัญหาการควบคุม

เนื่องจากมีหลากหลายวิธีในการที่จะจัดรูปปัญหาการควบคุมป้อนกลับ ให้เป็นปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด และ  $H_\infty$  ดังนั้นจึงเป็นประโยชน์หากสามารถสร้างกรอบการออกแบบที่เป็นทั่วไปสำหรับการแก้ปัญหาใดๆ ดังภาพที่ 6 แสดงบล็อกไดอะแกรมของกรอบการออกแบบระบบควบคุมดังที่นิยมเรียกว่า “กรอบการออกแบบสมัยใหม่” โดย  $P$  คือพลานต์วางนัยทั่วไป (generalize plant) และ  $P$  เป็นตัวควบคุมที่ต้องการออกแบบ ในส่วนอินพุตของ  $P$  จะประกอบด้วย ตัวแปรควบคุม (control variables)  $u$  ที่กำเนิดโดย ตัวควบคุม และอินพุตภายนอก (exogenous inputs)  $w$  ที่รวมสัญญาณคำสั่ง และสัญญาณรบกวนที่จุดต่างๆ ของระบบ ส่วนทางด้านเอาต์พุตประกอบด้วย  $z$  เรียกว่า เอาต์พุตสมรรถนะ (performance outputs) หรือเอาต์พุตค่าต่าง (error outputs) ซึ่งอาจไม่ได้มีการติดตั้งตัวตรวจจับเพื่อวัดค่าจริงในทางปฏิบัติ ส่วนเอาต์พุตจากการวัด (measurement outputs)  $y$  คือเอาต์พุตที่มีการวัดจริง และเป็นค่าที่ป้อนให้กับตัวควบคุม จำนวนนของอินพุต และเอาต์พุตดังกล่าวจะมีเท่าใดก็ได้ขึ้นอยู่กับระบบที่ออกแบบ และข้อกำหนดคุณสมบัติที่ต้องการ โดยเมทริกซ์  $P$  และ  $K$  ก็จะมีขนาดที่สัมพันธ์กับขนาดของเวกเตอร์ตัวแปรที่เป็นอินพุต และเอาต์พุต เมื่อเขียนเมทริกซ์ถ่ายโอนของพลานต์



ภาพที่ 6 กรอบการออกแบบระบบควบคุมสมัยใหม่

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad (80)$$

หรือหากแทนในรูปของสมการสถานะ สามารถเขียนแทนได้เป็น

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (81)$$

และเมื่อมีตัวควบคุมจะได้ว่า

$$u = Ky \quad (82)$$

เรียกฟังก์ชันถ่ายโอนจาก  $w$  ไปยัง  $z$  คือ  $T_{wz}$  ว่าเป็นระบบวงปิด ซึ่งสามารถหาได้จากการแปลงเศษส่วนเชิงเส้น (linear fractional transformation) เขียนแทนด้วย  $F_1(P, K)$  เป็นการไม่ยากที่จะแสดงว่าสมการของระบบวงปิดเป็นดังนี้

$$T_{wz} = F_1(P, K) = P_{zw} + P_{zu}(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \quad (83)$$

สิ่งสำคัญที่ต้องเข้าใจสำหรับกรอบการออกแบบนี้ก็คือ  $T_{wz}$  จะต้องประกอบด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดทุกตัวที่สนใจคุณสมบัติของผลตอบสนองเอาต์พุตต่ออินพุต ยกตัวอย่างเช่น

หากต้องการขจัดสัญญาณรบกวน  $d$  ไม่ให้มีผลกับเอาต์พุต  $y$  ของระบบ  $T_{zw}$  ก็ต้องมีฟังก์ชันถ่ายโอนจาก  $d$  ไปยัง  $y$  เป็นสมาชิก อาจกล่าวได้โดยรวมว่าการออกแบบวิธีสมัยใหม่นี้เป็นปัญหาการลดค่าของ  $T_{zw}$  คือต้องการควบคุม  $K$  ที่ทำให้ตัวแทนของขนาด หรือ นอร์ม ของ  $T_{zw}$  มีค่าน้อยที่สุด การหาค่าตัวควบคุม  $K$  ที่เหมาะที่สุดนี้จะถูกกระทำโดยอัลกอริทึมการสังเคราะห์ หลังจากที่ย้อนข้อมูลเข้าสู่กรอบการออกแบบแล้ว ซึ่งในบางกรณีจะมีการกระทำซ้ำโดยอัตโนมัติจนได้ตัวควบคุม  $K$  หน้าทีหลักของผู้ควบคุมคือ ใส่ข้อกำหนดคุณสมบัติระบบป้อนกลับที่ต้องการลงในพลาเนตว่างนัยทั่วไป  $P$  อย่างถูกต้องและเหมาะสม

## 6.2 การควบคุมเหมาะที่สุด $H_\infty$

เมื่ออ้างอิงถึงกรอบการออกแบบทั่วไปดังรูปที่ 6 ปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุด  $H_\infty$  มาตรฐานคือการหาตัวควบคุมสร้างเสถียรภาพ  $K$  ที่จะให้ค่าต่ำสุดของ

$$\|T_{wz}\|_\infty = \|F_l(P, K)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)) \quad (84)$$

ได้กล่าวแล้วว่า นอร์ม  $H_\infty$  เป็นตัวแทนที่ดีของเสถียรภาพ และสมรรถนะ โดยเป็นค่ายอดของค่าเอกฐาน สูงสุดของ  $F_l(P(j\omega), K(j\omega))$  และสามารถแปลความหมายในโดเมนเวลาเป็น นอร์ม-2 ที่ถูกเหนี่ยวนำ (induced 2-norm) (กรณีเลวร้ายที่สุด) กำหนดให้  $z = F_l(P, K)w$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$F_l(P, K) = \max \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_\infty} \quad (85)$$

โดยที่  $\|z(t)\| = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |z_i(t)|^2 dt}$  เป็นนอร์ม 2 ของเวกเตอร์ เอาต์พุต

ในทางปฏิบัติไม่มีความจำเป็นที่จะต้องได้ตัวควบคุมเหมาะที่สุด สำหรับปัญหา  $H_\infty$  เพราะจะง่ายกว่าทั้งด้านการคำนวณและทฤษฎี ที่จะหาตัวควบคุมเหมาะที่สุดย่อย (suboptimal) คือควบคุมที่ใกล้กับตัวที่เหมาะสมที่สุดในเชิงนอร์ม  $H_\infty$  ให้  $\gamma_{\min}$  เป็นค่าต่ำสุดของ  $\|F_l(P, K)\|_\infty$  สำหรับทุกตัวควบคุมสร้างเสถียรภาพ  $K$  ดังนั้นปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุดย่อย  $H_\infty$  คือ สำหรับ  $\gamma > \gamma_{\min}$  ที่กำหนด หาตัวควบคุมสร้างเสถียรภาพ  $K$  ที่จะทำให้

$$\|F_1(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (86)$$

ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยอาศัยอัลกอริทึมของ Doyle *et al.* (1989) โดยการลดค่า  $\gamma$  ในการวนรอบแต่ละครั้งคำตอบจะเข้าหาค่าที่เหมาะสมที่สุด จะสรุปสำหรับอัลกอริทึมนี้ภายใต้สมมติฐานทั้งหมดที่กล่าวมาที่ทำให้ปัญหาง่ายขึ้น

### 6.3 การควบคุม $H_\infty$ แบบความไวผสม

ปัญหาการควบคุม  $H_\infty$  ความไวผสม ( $H_\infty$  mixed-sensitivity) เป็นชื่อที่ตั้งให้กับปัญหาการจัดสรรงานวงรอบฟังก์ชันถ่ายโอน โดยที่ฟังก์ชันความไว  $S = (I + GK)^{-1}$  จะถูกจัดรูปร่วมกับฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดตัวอื่น เช่น  $KS$  หรือ ฟังก์ชันเติมเต็มความไว  $T = I - S$

สมมติว่ามีปัญหาการควบคุม จะทำการจัดรูปฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด  $S$  และ  $KS$  ในลักษณะหนึ่งอันดับความอิสระ โดย  $S$  เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนจาก  $d$  ไปยังเอาต์พุต และ  $KS$  เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนจาก  $d$  ไปยังเอาต์พุตของตัวควบคุม

โดยปกติแล้วการรบกวน  $d$  จะเป็นสัญญาณในย่านความถี่ต่ำจึงสามารถถูกจำกัดได้ หากทำให้ค่าเอกฐานสูงสุดของ  $s$  มีค่าน้อยในย่านความถี่ต่ำ วิธีการจัดรูปดังกล่าวกระทำโดยเลือกตัวกรองความถี่ต่ำผ่าน  $w_1(s)$  ที่มีแบนด์วิธเท่ากับของสัญญาณรบกวน  $d$  และหาตัวควบคุมสร้างเสถียรภาพที่จะลดค่าของ  $\|w_1 s\|_\infty$  แต่การจัดรูปเพียงเท่านั้นจะไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เพราะได้คำนึงถึงแต่ฟังก์ชันถ่ายโอนเพียงหนึ่งตัวเท่านั้นสำหรับ พลาเน็ตที่เป็นแบบเฟสต่ำสุดจะได้ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดที่มีอัตราขยายตลอดย่านความถี่จนถึงอนันต์ คือไม่มีการจำกัดแบนด์วิธนั่นเอง หาก พลาเน็ตเป็นแบบเฟสไม่ต่ำสุด ความต้องการด้านเสถียรภาพจะเป็นตัวจำกัดแบนด์วิธของระบบโดยทางอ้อม อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติจะเหมาะสมกว่าที่จะหาค่าต่ำสุดของ

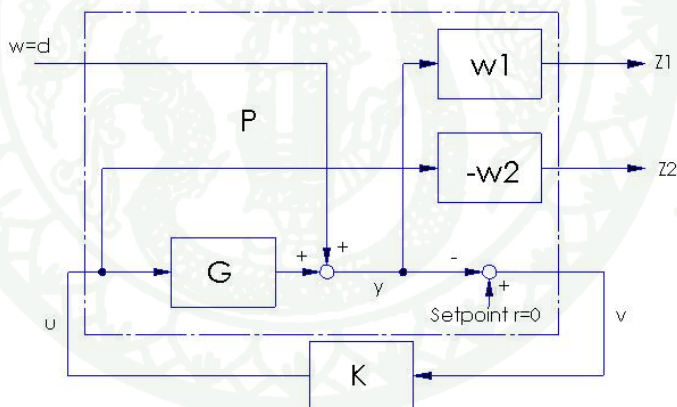
$$\left\| \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (87)$$

โดยที่  $w_2$  เป็นตัวกรองความถี่สูงผ่านที่มีความถี่ตัดข้ามประมาณเท่ากับแบนด์วิธของระบบปิดที่ต้องการ

สำหรับในกรณีทั่วไป ฟังก์ชันน้ำหนักอาจอยู่ในรูปของเมทริกซ์  $w_1(s)$  และ  $w_2(s)$  ซึ่งจะมีประโยชน์กรณีระบบมีหลายแกนเนลที่มีแบนด์วิธต่างกัน สามารถเลือกน้ำหนักในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์

ในการที่จะแสดงวิธีการจัดปัญหาความไวผสมให้อยู่ในกรอบการออกแบบทั่วไป จะคิดว่าการรบกวน  $d$  เป็นสัญญาณรบกวนภายนอกตัวเดียวของระบบ นิยามเอาท์พุทความแตกต่าง  $Z = [Z_1^T \ Z_2^T]^T$  โดย  $Z_1 = w_1 y$  และ  $Z_2 = -w_2 u$  ดังแสดงในภาพที่ 7 ซึ่งจากรูปแสดงให้เห็นได้โดยง่ายว่า  $Z_1 = w_1 S w$  และ  $Z_2 = w_2 K S w$  ตามที่ต้องการ และสมาชิกของพลาเน็ตว่างนัยทั่วไป  $P$  จะถูกกำหนดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P_{11} &= \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} & P_{12} &= \begin{bmatrix} w_1 G \\ -w_2 \end{bmatrix} \\ P_{21} &= I & P_{22} &= -G \end{aligned} \tag{88}$$



ภาพที่ 7 ปัญหาความไวผสม S/KS สำหรับการคุมค่า

### 7. การลดอันดับโมเดล

การลดอันดับโมเดล (model reduction) ใช้ในการลดอันดับตัวควบคุมโดยวิธี  $H_\infty$  และ  $\mu$  จะให้ตัวที่มีอันดับสูงที่อาจสร้างปัญหาในการอิมพลีเมนต์

สมมติว่า  $(A, B, C)$  ไม่ใช่ตัวแทนที่เล็กที่สุด (minimal realization) ของ  $P(s)$  ทรานส์กันดี แล้วว่าสถานะที่ไม่สามารถควบคุมได้ และ/หรือ ไม่สามารถสังเกตได้ สามารถถูกกำจัดได้โดยไม่มีผลกระทบต่อฟังก์ชันถ่ายโอนแต่อย่างใด อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปแล้ว  $(A, B, C)$  จะเป็นแบบเล็กที่สุด คือเมทริกซ์ความควบคุมได้ และความสังเกตได้จะมีค่าลำดับชั้นเต็ม จะดูสมเหตุสมผลถ้าจะกำจัดสถานะที่เกือบจะไม่สามารถควบคุมได้ และ/หรือ เกือบจะไม่สามารถสังเกตได้ออก ก็ไม่น่าจะมีผลกระทบกับฟังก์ชันถ่ายโอนมากนัก

### 7.1 การลดอันดับโมเดลโดยการตัดปลายอย่างสมดุล

สมมติว่าค่าเอกฐานแวงเคลสอดคล้องกับ

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \gg \sigma_{m+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (89)$$

จะกล่าวได้ว่าสถานะจำนวน  $m$  ตัวแรกของรีไลเซชันสมดุล จะมีความควบคุมได้และสังเกตได้มากกว่าสเตต  $n - m$  ตัวหลังค่อนข้างมาก สมมติว่าตัดสถานะ  $n - m$  ตัวสุดท้ายของรีไลเซชันสมดุลออก เพื่อที่จะได้ระบบใหม่  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  ที่มีขนาด  $m$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ * \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [\hat{C} \quad *] \quad (90)$$

กรรมวิธีนี้จะถูกเรียกว่า การตัดปลายอย่างสมดุล (balance truncation)

จะเห็นว่าการลบสถานะของรีไลเซชันสมดุล จะสัมพันธ์กับค่าเอกฐานแวงเคลที่มีค่าน้อยๆ จะไม่มีผลกระทบกับฟังก์ชันถ่ายโอนมากนัก แต่แน่นอนว่าจำเป็นต้องตรวจสอบแผนภาพโพลีว่าค่าประมาณค่านี้เป็นที่ยอมรับได้สำหรับย่านความถี่ตามที่สนใจ เช่น อัตราขยาย DC หรือความถี่ตัดข้าม เป็นต้น

### 7.2 การประยุกต์ใช้กับการลดอันดับตัวควบคุม

สมมติว่าต้องการประยุกต์ใช้กรรมวิธีตัดปลายอย่างสมดุลเพื่อที่จะลดอันดับของตัวควบคุม ริงจะไม่เป็นปัญหา หากตัวควบคุมเสถียร แต่หากตัวควบคุมไม่เสถียรจะไม่สามารถใช้วิธีนี้

ได้ ความจริงนี้สร้างปัญหาในกรณีที่ต้องการใช้ตัวอินทิกรัลในการควบคุม ต่อไปจะแสดงวิธีการหนึ่งในการประยุกต์ใช้การตัดปลายอย่างสมดุลกับตัวควบคุมที่ประกอบด้วยส่วนอินทิกรัล แต่งเติม

สำหรับพลาเน็ตที่มีสมการดังเช่น (90) เมื่อแต่งเติมอินทิกรัลให้กับเอาต์พุตของพลาเน็ต จะได้สมการสเตต

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (91)$$

ภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสม จะสามารถสร้างเสถียรภาพระบบแต่งเติม โดยตัวป้อนกลับสถานะ

$$u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \quad (92)$$

ต่อมาสมมติว่ามีตัวสังเกตสำหรับสถานะของพลาเน็ต

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ &= (A - BK_1 - LC)\hat{x} - BK_2q + Ly \end{aligned} \quad (93)$$

ดังนั้นจะสามารถหิมพลิเมนต์ตัวควบคุม

$$u = -K \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \quad (94)$$

ตัวควบคุมทั้งหมดที่รวมตัวอินทิกรัลและการสังเกตจะมีสมการสถานะเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK_1 - LC & -BK_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ q \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} L & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{B_c} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$u = \underbrace{-K}_{C_c} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ q \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ชัดว่าตัวควบคุมนี้ไม่เสถียรเนื่องจากตั้งควบคุมอินทิกรัล ในการที่จะใช้วิธีการตัดปลายอย่างสมดุล จะต้องทำการแยกตัวอินทิกรัลออกจากส่วนที่เหลือของตัวควบคุม ถ้าหากส่วนที่เหลือเสถียรก็จะสามารถใช้การตัดปลายอย่างสมดุลได้ สังเกตว่าจะสามารถแยกตัวควบคุมออกดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \underbrace{[0]}_{A_i} q + \underbrace{\begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}}_{B_i} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_q \\ y \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -K_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C_i} q + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{D_i} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{x}} &= \underbrace{(A - BK_1 - LC)}_{A_s} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix}}_{B_s} \begin{bmatrix} u_q \\ y \end{bmatrix} \\ u &= \underbrace{-K_1}_{C_s} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}}_{D_s} \begin{bmatrix} u_q \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (96)$$

ถ้าหาก  $A - BK_1 - LC$  เสถียร สามารถใช้กรรมวิธีการตัดปลายอย่างสมดุลกับ  $(A_s, B_s, C_s)$

## อุปกรณ์และวิธีการ

เนื้อหาในส่วนนี้จะแบ่งเป็นสองส่วนหลักคือ ส่วนแรกจะอธิบายถึงอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง วิธีการสร้างอุปกรณ์การทดลอง และการประยุกต์ใช้อุปกรณ์ทางไฟฟ้าบางชนิดทำหน้าที่เป็นตัวตรวจรู้ ในส่วนสุดท้ายจะอธิบายถึงการสร้างสมการการเคลื่อนที่ และวิธีเก็บข้อมูลในการนำเสนอผลการทดลอง

### อุปกรณ์

#### 1. อุปกรณ์สำหรับติดตั้งบนโครงสร้างสองชั้นจำลอง

##### 1.1 ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ (potentiometer)

ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้สำหรับในการทดลองนี้มีหน้าที่หลักสำคัญคือ เป็นตัวตรวจรู้มุมโดยอาศัยหลักการว่าเมื่อป้อนแรงดันไฟฟ้าให้แก่ตัวต้านทาน หากมีการเปลี่ยนค่าความต้านทาน จะทำให้ค่าแรงดันที่วัดได้มีค่าเปลี่ยนแปลงไปด้วย ซึ่งการเปลี่ยนแปลงค่าความต้านทานของตัวต้านทานที่นำมาใช้นี้ จะเกิดขึ้นเมื่อมีการบิด หรือหมุนแกนนั่นเอง สำหรับการทดลองนี้เราจะจ่ายแรงดันอินพุตแก่ตัวต้านทานปรับค่าได้โดยใช้แรงดัน 5 โวลต์



ภาพที่ 8 ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ (potentiometer)

## 1.2 เอนโคเดอร์ (encoder)

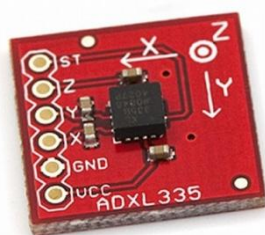
คือ อุปกรณ์วัดตำแหน่ง ที่ทำงานโดยอาศัยการยิงลำแสงผ่านแถบมีด-สว่างและส่งออก เป็นสัญญาณดิจิทัล การอ่านค่าการเปลี่ยนแปลงของระดับสัญญาณถูกนำมาคำนวณเป็นอัตราเร็วของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง โดยงานวิจัยนี้ใช้ตัวตรวจรู้ของบริษัท Omron รุ่น E6B2 CWZ6C มีความละเอียดเท่ากับ 2000 ครั้งต่อรอบ (CPR) Supply Voltage 5-24 VDC โดยงานวิจัยนี้ได้ติดกับ มวลขับเพื่อวัดตำแหน่งการเคลื่อนที่ของมวลขับ



ภาพที่ 9 เอนโคเดอร์ของบริษัท Omron รุ่น E6B2 CWZ6C

## 1.3 เซ็นเซอร์วัดความเร่ง (Accelerometer)

เซ็นเซอร์วัดความเร่งของบริษัท Analog Device รุ่น ADXL 335 ขนาด 4x4x1.45 มม. สามารถวัดความเร่งได้สามแกน มีย่านการทำงานในช่วง  $\pm 3g$  Supply Voltage 1.8-3.6 VDC โดยนำมาติดตั้งกับมวลขับเพื่อวัดความเร่งของมวลขับ ในการหาเอกลักษณ์ของระบบมวลขับ

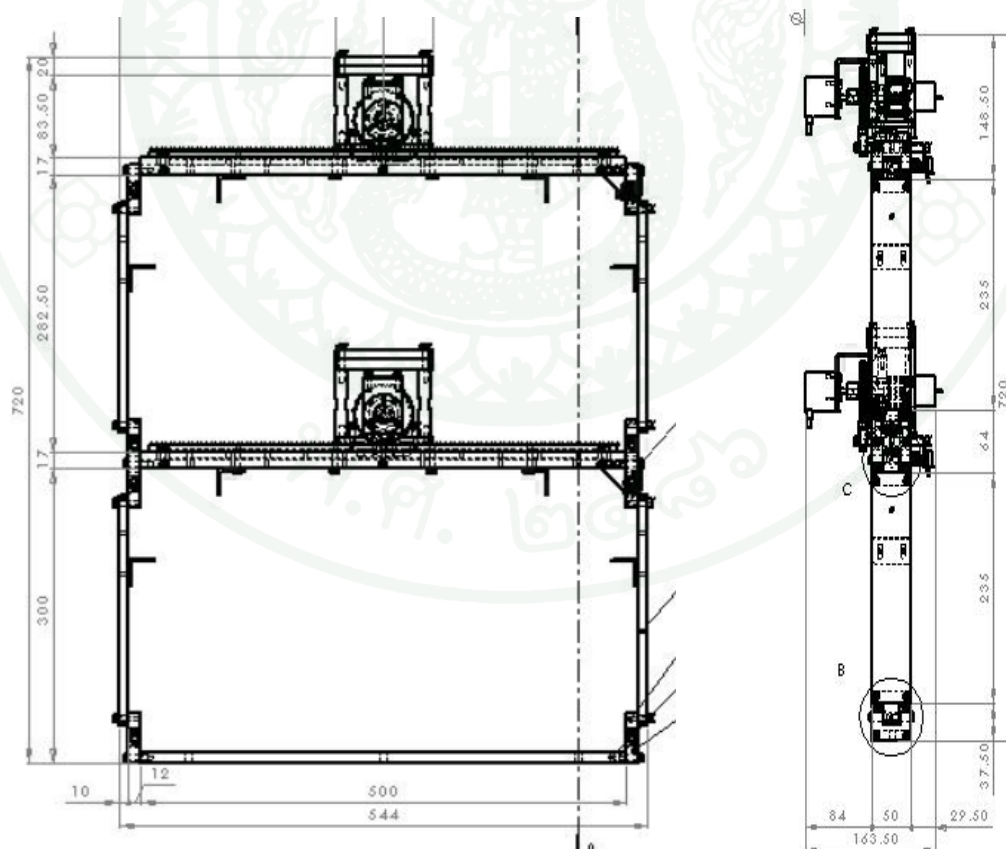


ภาพที่ 10 เซ็นเซอร์วัดความเร่ง ของบริษัท Analog Devise รุ่น ADXL 335

#### 1.4 โครงสร้างสองชั้นจำลอง

##### 1.4.1 ขนาดโดยรวมของโครงสร้าง

โครงสร้างสองชั้นตัวโครงสร้างหลักทำจากอลูมิเนียมมีแต่ละชั้นมีความกว้างที่ฐาน ยาว 524 มิลลิเมตร กว้าง 50 มิลลิเมตร สูง 300 มิลลิเมตร



ภาพที่ 11 ขนาดของโครงสร้างสองชั้นจำลอง

#### 1.4.2 การยึดตัวของโครงสร้าง

ในแต่ละชั้นยึดกับบานพับทำให้โครงสร้างมีจุดหมุนสี่จุด ทำให้การเคลื่อนตัวของโครงสร้างจะเป็นลักษณะ Four Bar Linkage คือเมื่อชั้นที่หนึ่งขยับตัวจะทำให้แขนทั้งสองเคลื่อนตัวขนานกันไป และเนื่องจากแขนทั้งสองที่เปรียบเสมือนเสาของ โครงสร้างที่ยาวเท่ากันแล้ว จะทำให้ฐานของชั้นที่สองขนานกับพื้นตลอดเวลา



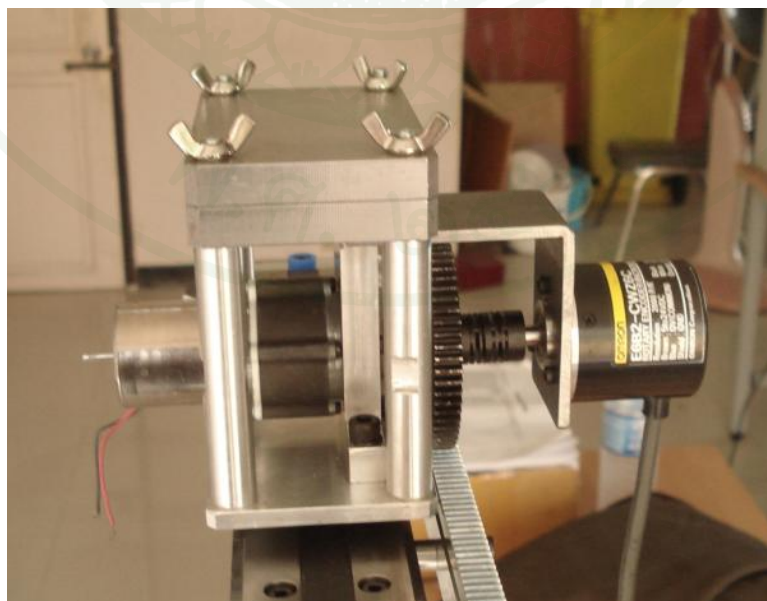
ภาพที่ 12 การยึดโครงสร้างโดยใช้บานพับ

โครงสร้างทั้งหมดจะถูกยึดแน่นกับโต๊ะ ในแต่ละชั้นจะมีการใช้สปริงรับบริเวณ ส่วนบนของชั้นที่ 1 และ 2 ดังรูปที่ 12 เพื่อให้โครงสร้างสามารถตั้งตรงได้และมีความยืดหยุ่นเมื่อ บริเวณพื้นมีการเคลื่อนตัวเนื่องจากการสั่นของโต๊ะ

### 1.4.3 มวลขับ (Active Mass Driver)

มวลขับจะทำหน้าที่ในการต้านการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง ด้วยการเคลื่อนตัว ด้วยความเร่งทำให้เกิดแรงต้านในทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ ซึ่งประกอบด้วย มวลหมุน ,เฟือง ตรง (Rack) ยึดติดกับโครงสร้าง, เฟือง (Pinion) ,มอเตอร์กระแสตรง (DC motor) และเอนโคเดอร์ (En-Coder) โดยจะทำการยึดติดเฟืองตรงไว้กับโครงสร้างในชั้นที่ 1 และ 2 และชุดมวลขับหมุนจะถูกวางบน ตัวนำการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (Linear Motion Guide) ทำให้ชุดมวลขับหมุนสามารถเคลื่อนที่บนโครงสร้างได้อย่างอิสระ

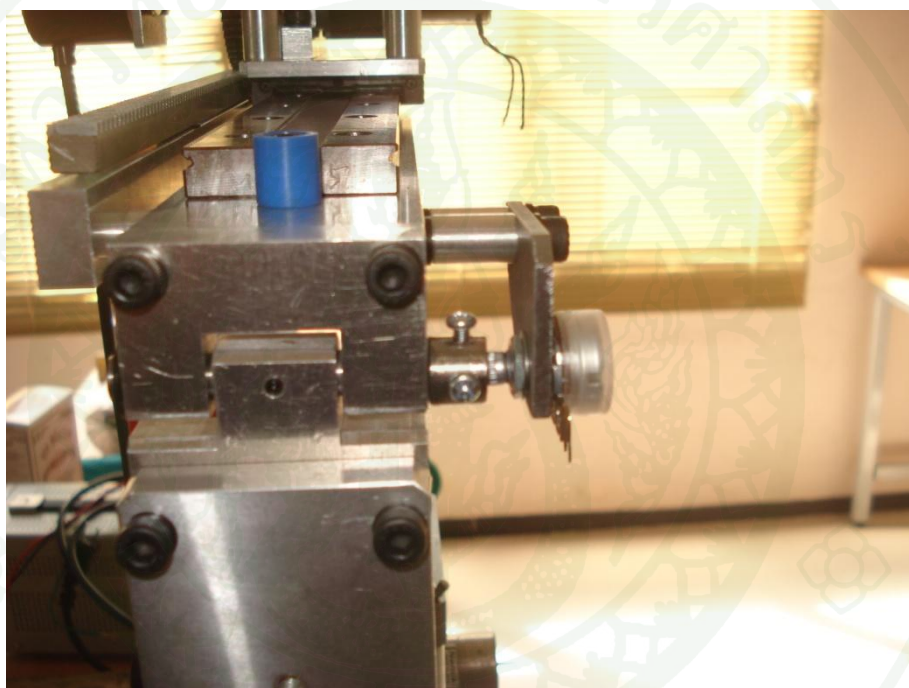
ขณะที่มอเตอร์ได้รับสัญญาณคำสั่งจากตัวควบคุมให้เคลื่อนที่จะทำให้ เฟืองซึ่ง ติดกับมอเตอร์หมุนและดันตัวมวลให้เคลื่อนที่ ทำให้เกิดแรงผลักระหว่างเฟืองตรงซึ่งยึดติดกับ โครงสร้าง ดังนั้นโครงสร้างจึงถูกผลักด้วยแรงขนาดเท่ากับ มวล  $\times$  ความเร่ง  $\sum F = ma$  ตามกฎ ข้อที่สองของนิวตัน โดยมวลที่ใช้หมุนนั้นสามารถที่จะปรับเพิ่มหรือลดน้ำหนักได้ และทำการ ติดตั้งเอนโคเดอร์ สำหรับวัดตำแหน่งและความเร็วของมวลขับหมุน



ภาพที่ 13 มวลขับ

#### 1.4.4 การวัดความเอียงของโครงสร้าง

การวัดความเอียงของโครงสร้างนั้นอุปกรณ์หลักที่ทำหน้าที่เป็นตัวตรวจรู้ความเอียง คือ ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ โดยในการทดลองนี้เลือกใช้ตัวต้านทานขนาด  $10K\Omega$  แบบเชิงเส้น โดยจะทำการติดตั้งเข้ากับ เพลลาซึ่งยึดแน่นกับแขนบริเวณบานพับในแต่ละชั้น ดังนั้นเมื่อมีการเอียงของโครงสร้างก็จะทำให้เพลลาบิดไปตามองศาการเอียงของโครงสร้างและขณะเดียวกันนั้น เพลลาก็จะทำให้ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้หมุนตามไปด้วยเช่นกัน



ภาพที่ 14 การติดตั้งตัวตรวจรู้ความเอียง

## 2. อุปกรณ์สำหรับกำเนิดสัญญาณควบคุม

### 2.1 ตัวจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง

เป็นอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่จ่ายแรงดันไฟฟ้าขนาดสูง เพื่อป้อนให้แก่อุปกรณ์ทำงาน ซึ่งในที่นี้คือ มอเตอร์กระแสตรง โดยสัญญาณที่จ่ายให้แก่มอเตอร์สำหรับมวลขับหน่วงนั้น จะถูกควบคุมกระแสไฟฟ้าด้วยตัวขับมอเตอร์กระแสตรง

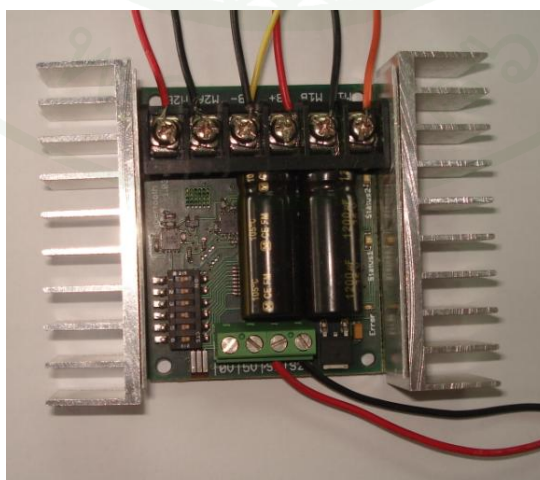


ภาพที่ 15 ตัวจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง

## 2.2 ชุดขับมอเตอร์กระแสตรง (Motor Driver)

ใช้ของยี่ห้อ Dimension Engineering รุ่น Sabertooth V1.03 ดังแสดงในรูปที่ 16 ใช้สัญญาณอินพุต 0-5 V. ในการควบคุมการจ่ายกระแสไฟแก่มอเตอร์ โดยในการทดลองนี้จะให้ตัวขับมอเตอร์จะจ่ายสัญญาณเอาต์พุตขนาดสูงสุด 10 VDC.

ตัวขับมอเตอร์สามารถที่จะรับสัญญาณอินพุตได้สูงสุดสองสัญญาณ และแยกการจ่ายสัญญาณเอาต์พุตแก่มอเตอร์ ได้สองสัญญาณ โดยทำการกำหนดค่าไบแอส (Bias) ของสัญญาณอินพุตที่ 2.5 V.



ภาพที่ 16 ชุดขับมอเตอร์กระแสตรง

### 2.3 คอมพิวเตอร์หลัก (Host computer)

คอมพิวเตอร์หลักจะทำหน้าที่เปรียบเสมือนบ้านหลังใหญ่ที่ใช้เก็บข้อมูลและ ซอฟต์แวร์ต่างๆ ที่ใช้ในการประมวลผล และการประมวลผลที่ได้จาก คอมพิวเตอร์เป้าหมาย (Target computer) จะถูกนำมาแสดงผลที่ คอมพิวเตอร์หลัก

### 2.4 คอมพิวเตอร์เป้าหมาย (Target computer)

คือ คอมพิวเตอร์ที่ใช้เป็นตัวควบคุมของระบบ ในคอมพิวเตอร์นี้ถูกติดตั้งการ์ดรับส่งข้อมูล (data acquisition) NI PCI 6221 ทำหน้าที่รับสัญญาณ มีความเร็ว 25 kS ต่อวินาทีและความละเอียด 16 บิตสำหรับอนาลอก ความละเอียด 8 บิตสำหรับดิจิตอล และความละเอียด 32 บิต 80 เมกกะเฮิร์ต สำหรับช่องต่อเคาท์เตอร์ ต่ออยู่กับการ์ดเชื่อมต่อ (CB68) และในคอมพิวเตอร์ตัวนี้ได้ติดตั้งโปรแกรม LabVIEW Real-Time 8.2.0



ภาพที่ 17 การ์ดรับส่งข้อมูล (data acquisition) NI PCI 6221 (CB68)

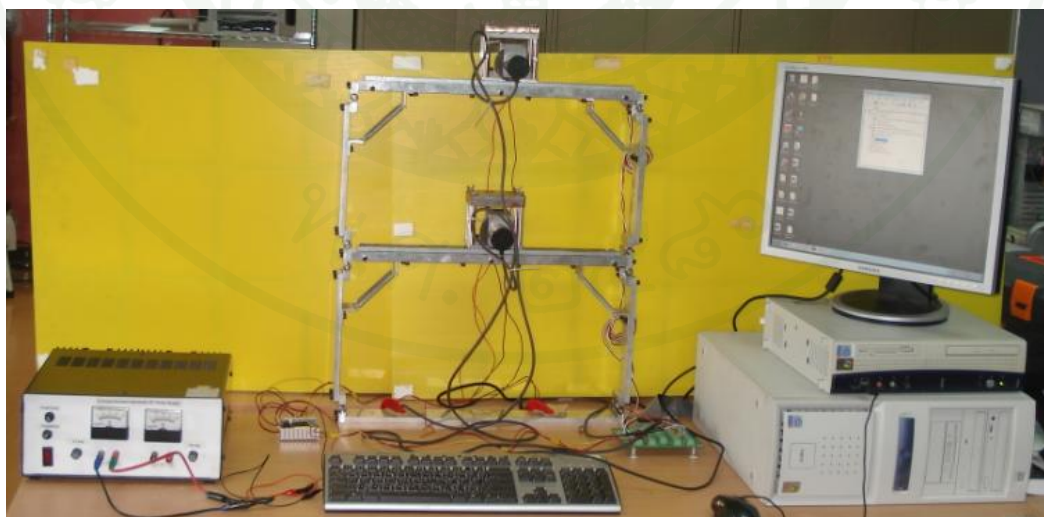
## วิธีการ

### 1. วิธีการในการเชื่อมต่อข้อมูล

เมื่อโครงสร้างสองชั้นเกิดการเอียงตัวเนื่องจากการลื่นไถลจากแนวสมดุลจะทำให้แรงดันไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้มีค่าเปลี่ยนไป โดยเมื่อโครงสร้างเอียงไปทางมุมที่เป็นบวกจะทำให้ค่าความต้านทานลดลงดังนั้น กระแสไฟฟ้าจึงไหลผ่านได้มากขึ้น และหากโครงสร้างเอียงตัวไปทางมุมที่เป็นลบ จะทำให้ค่าความต้านทานสูงขึ้น กระแสไฟฟ้าจึงไหลผ่านได้น้อยลง

จากการเปลี่ยนแปลงของกระแสไฟฟ้างี้ดังกล่าวจะมีการส่งข้อมูลผ่าน DAQ การ์ด เพื่อส่งไปประมวลผลที่ คอมพิวเตอร์เป้าหมายซึ่งจะแปลข้อมูลแรงดันไฟฟ้าดังกล่าวโดยใช้โปรแกรม LabVIEW 2011 ให้กลายเป็นค่ามุมเอียงในหน่วย เรเดียน

ข้อมูลมุมเอียงดังกล่าว จะถูกนำไปประมวลผลในโปรแกรมเพื่อกำหนดสัญญาณควบคุมแก้มอเตอร์ซึ่งสัญญาณที่ส่งออกมา จะอยู่ในรูปของแรงดันไฟฟ้าเพื่อขับมอเตอร์ให้เกิดการวิ่งออกแรง ผลักให้โครงสร้างกลับมาอยู่ในตำแหน่งปกติ ให้ไวที่สุด

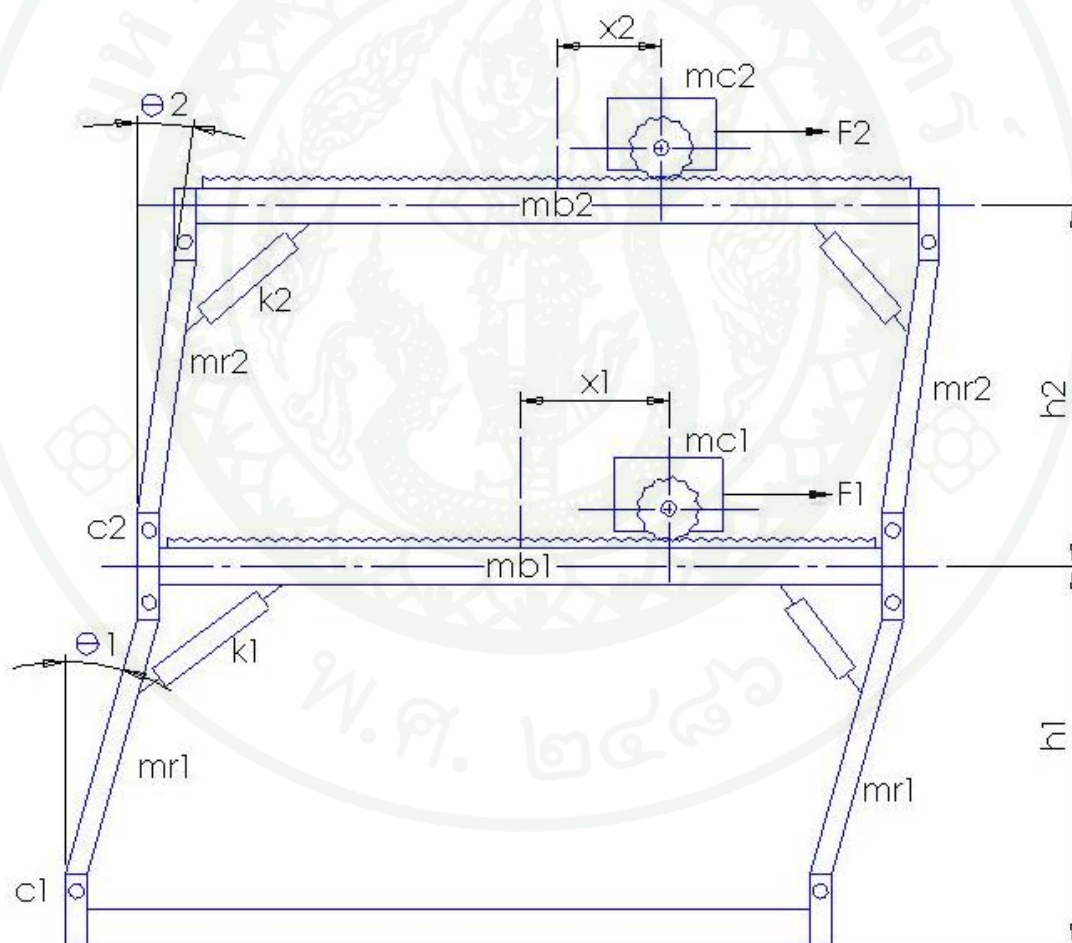


ภาพที่ 18 การติดตั้งอุปกรณ์ในการทดลอง

## 2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ

การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างสองชั้น เป็นความจำเป็นอันดับแรกเนื่องจากหากปราศจาก แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วก็ไม่สามารถที่จะใช้คณิตศาสตร์เข้ามาวิเคราะห์ระบบได้

ไม่ว่าจะใช้วิธีการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์แบบใดก็ตามแต่ สิ่งเริ่มต้นก็คือแผนภาพอิสระของวัตถุหรือระบบที่จะวิเคราะห์ สำหรับในงานวิจัยชิ้นนี้สามารถเขียนแผนภาพดังกล่าวได้ดังนี้



ภาพที่ 19 แผนภาพอิสระของระบบโครงสร้างสองชั้นจำลอง

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าการสร้างสมการการเคลื่อนที่สามารถพิจารณาโดยใช้หลักการทางฟิสิกส์ได้จากสองหลักการใหญ่คือ หลักการของนิวตัน และหลักการของลากรางจ์ ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้จะพิจารณาโดยใช้หลักกลศาสตร์ของลากรางจ์เนื่องจากระบบมีความซับซ้อน ดังนั้นพิจารณาสมการที่ (11) โดย  $U$ ,  $K$  และ  $Q$  คือพลังงานศักย์, พลังงานจลน์ และแรงภายนอก ตามลำดับ สำหรับในงานวิจัยครั้งนี้จะถือว่าการเปลี่ยนแปลงความสูงของโครงสร้างมีค่าน้อยมาก เมื่อโครงสร้างมีการเอียงตัว ดังนั้นจึงทำการพิจารณาเฉพาะพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ยืดหยุ่น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (97)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (98)$$

โดย  $m$  คือมวลของวัตถุ  
 $v$  คือความเร็ววัตถุ  
 $k$  คือค่าคงที่สปริง  
 $x$  คือระยะยืดสปริง

เนื่องจากว่าสมการที่เราใช้เป็นสปริงแบบยืด (tension spring) ที่ใช้งานกับระบบเชิงเส้น แต่นำมาใช้ในลักษณะของสปริงแบบบิด (torsion spring) ที่ใช้กับระบบเชิงมุมดังนั้นจึงทำการพิจารณาให้เป็นสปริงแบบบิด จากสมการที่ (97) สามารถหาพลังงานศักย์รวมของระบบได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} k_{s1} \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_{s2} \theta_2^2 \quad (99)$$

พิจารณาพลังงานจลน์รวมของระบบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_{b1} (h_1 \dot{\theta}_1)^2 + m_{r1} \left( \frac{h_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_{c1} (h_1 \dot{\theta}_1 + \dot{x}_1)^2 \\ & + \frac{1}{2} m_{b2} (h_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \dot{\theta}_2)^2 + m_{r2} \left( h_1 \dot{\theta}_1 + \frac{h_2}{2} \dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} m_{c2} (h_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \dot{\theta}_2 + \dot{x}_2)^2 \end{aligned} \quad (100)$$

สำหรับการหาแรงภายนอกนั้นเริ่มต้นเราจะทำการพิจารณาพลังงานภายนอกของระบบเสียก่อนแล้วทำการหารด้วยระยะกระจัด ในแต่ละตัวแปรที่ทำการพิจารณาจึงจะได้ค่าแรงภายนอกซึ่งสามารถหาพลังงานภายนอกของระบบได้จาก

$$dW = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 - c_1 \dot{\theta}_1 d\theta_1 - c_2 \dot{\theta}_2 d\theta_2 \quad (101)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11) และรูปที่ 19 กำหนดให้

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = \theta_1, \quad q_3 = x_2, \quad q_4 = \theta_2$$

และจากสมการที่ (11) และ (99) ถึง(101) สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (102)$$

จากสมการที่ (102) เพื่อความสะดวก จะทำการหาค่าในแต่ละพจน์เสียก่อน

เมื่อ  $i = 1$  ( $q_1 = x_1$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= m_{c1} \dot{x}_1 + m_{c1} h_1 \dot{\theta}_1 \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 \\ Q_1 &= F_1 \end{aligned} \quad (103)$$

เมื่อ  $i = 2$  ( $q_2 = \theta_1$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_{b1} h_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{m_{r1} h_1^2 \dot{\theta}_1}{2} + m_{c1} (h_1 \dot{\theta}_1 + \dot{x}_1) h_1 + m_{b2} (h_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \dot{\theta}_2) h_1 \\ &\quad + m_{c2} (h_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \dot{\theta}_2 + \dot{x}_2) h_1 + m_{r2} (2h_1 \dot{\theta}_1 + h_2 \dot{\theta}_2) h_1 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= k_{s1} \theta_1 \\ Q_2 &= -c_1 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (104)$$

เมื่อ  $i = 3$  ( $q_3 = x_2$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= m_{c2}(h_1\dot{\theta}_1 + h_2\dot{\theta}_2 + \dot{x}_2) \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0 \\ Q_3 &= F_2\end{aligned}\quad (105)$$

เมื่อ  $i = 4$  ( $q_4 = \theta_2$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_{b2}(h_1\dot{\theta}_1 + h_2\dot{\theta}_2)h_2 + m_{c2}(h_1\dot{\theta}_1 + h_2\dot{\theta}_2 + \dot{x}_2)h_2 + \frac{m_{r2}(2h_1\dot{\theta}_1 + h_2\dot{\theta}_2)h_2}{2} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= k_{s2}\theta_2\end{aligned}\quad (106)$$

จากนั้น แทนสมการ (103) ถึง (106) ลงในสมการ(102) จะทำให้ได้สมการลากรางจ์ 4 สมการดังนี้คือ

$$\begin{aligned}m_{c1}\ddot{x}_1 + m_{c1}h_1\ddot{\theta}_1 &= F_1 \\ m_{c1}h_1\ddot{x}_1 + \left(m_{b1}h_1^2 + \frac{m_{r1}h_1^2}{2} + m_{c1}h_1^2 + m_{b2}h_1^2 + 2m_{r2}h_1^2 + m_{c2}h_1^2\right)\ddot{\theta}_1 \\ + m_{c2}h_1\ddot{x}_2 + (m_{b2}h_1h_2 + m_{r2}h_1h_2 + m_{c2}h_1h_2)\ddot{\theta}_2 + k_{s1}\theta_1 &= -c_1\dot{\theta}_1\end{aligned}\quad (107)$$

$$m_{c2}h_1\ddot{\theta}_1 + m_{c2}\ddot{x}_2 + m_{c2}h_2\ddot{\theta}_2 = F_2$$

$$\begin{aligned}(m_{b2}h_1h_2 + m_{r2}h_1h_2 + m_{c2}h_1h_2)\ddot{\theta}_1 + m_{c2}h_2\ddot{x}_2 + \\ \left(m_{b2}h_2^2 + \frac{m_{r2}h_2^2}{2} + m_{c2}h_2^2\right)\ddot{\theta}_2 + k_{s2}\theta_2 = -c_2\dot{\theta}_2\end{aligned}$$

ในสมการที่ (107) จะเห็นว่าปรากฏแรง  $F_1$  และ  $F_2$  ซึ่งเป็นแรงภายนอก ที่ระบบต้องการ เพื่อที่จะออกแรงต้านการเคลื่อนที่นั่นเอง แต่หากมองให้ดีแล้วจะเห็นว่าแรงดังกล่าวขึ้นอยู่กับความเร่งในการเคลื่อนที่ของมวลขับซึ่งขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรง และสัญญาณควบคุมที่

แท้จริงก็คือค่าแรงดันไฟฟ้าที่ป้อนให้แก่มอเตอร์นั่นเอง ดังนั้นต้องพยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้า กับแรงที่มอเตอร์ส่งออกมา

พิจารณาสมการของมอเตอร์

$$\tau = c_1 v + c_2 \omega = F_i \cdot r_i \quad (108)$$

โดย  $\tau$  คือแรงบิด (Torque) มีค่าเท่ากับ แรง  $\times$  รัศมีของเฟือง (Pinion)

$v$  คือ แรงดันไฟฟ้า (Voltage)

$\omega$  คือ ความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์

$c_1$  คือ ค่าคงที่ของมอเตอร์ (Motor Constant)

$c_2$  คือ แรงดันไฟฟ้าต้านกลับ (Back emf.)

จากสมการที่ (108) จะเห็นได้ว่าเมื่อเรารู้ค่า แรงบิดแล้วเราก็สามารถที่จะแปลงความสัมพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของแรงได้โดยการหารค่าแรงบิดด้วย รัศมีของเฟืองขับที่ติดกับมอเตอร์ แต่เมื่อพิจารณาสมการที่ (108) จะเห็นว่ายังมีตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า คือค่า  $c_1$  และ  $c_2$  ซึ่งจะต้องทำการทดลองหาค่าดังกล่าวต่อไป

เมื่อพิจารณาสมการที่ (108) เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงทางกล และแรงเคลื่อน ไฟฟ้าได้จากสมการที่ (109) และ(110)

$$F_i = \frac{c_1 v_i - c_2 \omega_i}{r_i} = k_{1i} v_i - k_{2i} \omega_i \quad (109)$$

$$F_i = k_{1i} v_i - k_{2i} \frac{\dot{x}_i}{r_i} \quad (110)$$

จากนั้น แทนค่า  $F_i$  ในสมการที่ (109) ลงในสมการที่ (110) จะได้ระบบสมการ 4สมการคือ



- โดย  $A$  คือเมทริกซ์ระบบ  
 $B$  คือเมทริกซ์อินพุต  
 $C$  คือเมทริกซ์เอาต์พุต  
 $D$  คือเมทริกซ์ถ่ายทอดโดยตรง  
 $u$  คือ อินพุต  
 $x$  คือ ตัวแปรสถานะ

และกำหนดตัวแปรสถานะดังนี้

$$X_1 = x_1, X_2 = \theta_1, X_3 = x_2, X_4 = \theta_2, X_5 = \dot{x}_1, X_6 = \dot{\theta}_1, X_7 = \dot{x}_2, X_8 = \dot{\theta}_2$$

หรือเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น  $X = [X_1, X_2, \dots, X_8]^T$

กำหนดให้เวกเตอร์อินพุตมีค่าเป็น  $U = [k_1 u_1, k_2 u_2]^T$  และเวกเตอร์เอาต์พุตมีค่าเป็น  $y = [\theta_1, \theta_2]^T$

หากนำสมการที่ (112) มาเขียนให้ง่ายขึ้นจะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (114)$$

จากสมการ(114) จะเห็นได้ว่า เมทริกซ์  $M, C$  และ  $K$  เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ ซึ่งสามารถพิจารณารายละเอียดได้จากสมการที่ (112) จะเห็นว่ายังมีตัวแปรอีกหลายตัวที่ยังไม่ทราบค่า ซึ่งต้องทำการทดสอบหาค่าของตัวแปรเหล่านั้นทุกตัวเสียก่อนจึงจะสามารถทำให้สมการที่ (114) หาค่าได้

## 2.1 การหาค่ามวล

การหาค่ามวลสามารถหาได้จากการชั่งน้ำหนักของชิ้นส่วนที่ต้องการจะวัด

## 2.2 การหาค่าระยะ และความสูง

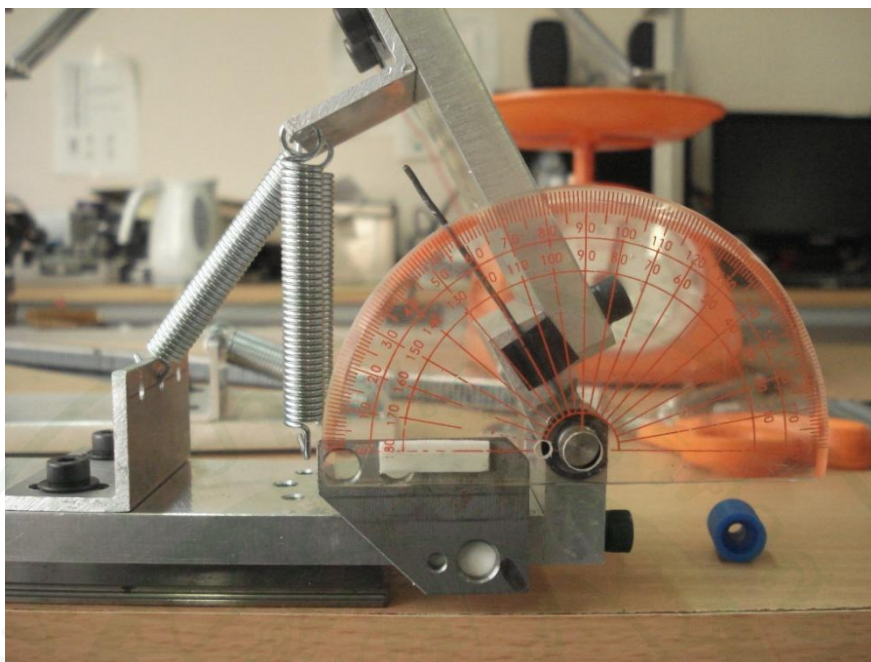
การหาค่าระยะและความสูงสามารถหาได้จาก แบบที่ได้ทำการเขียนไว้ตั้งแต่เริ่ม ออกแบบ และการวัดด้วยเครื่องมือวัด

## 2.3 ค่าคงที่ของสปริง

ทำโดยการสร้างอุปกรณ์ทดสอบให้โครงสร้างลักษณะการเคลื่อนตัวแบบเชิงมุม และ วัดค่าแรงที่ได้เทียบกับมุมที่เบี่ยงเบนไป



ภาพที่ 20 การชั่งหามวลของชิ้นส่วน



ภาพที่ 21 การทดสอบหาค่าคงที่สปริง

#### 2.4 การหาค่าคงที่ของมอเตอร์

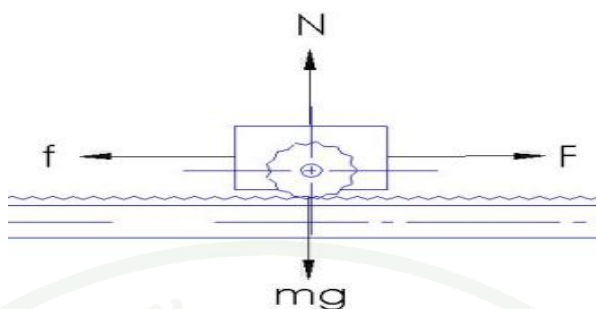
หากเราจะหา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดมวลขับเคลื่อนโดยการพิจารณาคุณสมบัติทางฟิสิกส์ในลักษณะเดียวกันกับวิธีที่ผ่านมาแล้วข้างต้นนั้น อาจจะทำให้เกิดความยุ่งยากขึ้นได้เนื่องจากการยากที่จะทำความเข้าใจกับลักษณะทางฟิสิกส์ของมอเตอร์ ดังนั้นเราจะทำการหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้จากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างค่า อินพุต และเอาต์พุตของมอเตอร์ ซึ่งเราเรียกวิธีดังกล่าวว่า การหาเอกลักษณ์ของระบบ (System Identification)

พิจารณาระบบมวลขับเคลื่อนในภาพที่ 22 และจากกฎข้อที่ 1 ของนิวตันสามารถเขียนสมการของแรงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F - f &= ma \\ F &= \mu mg + ma \end{aligned} \quad (115)$$

จากสมการที่ (108) และ (115) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$(\mu mg + ma)r = c_1 u - c_2 \dot{\theta} \quad (116)$$



ภาพที่ 22 ระบบมวลขับ

และสามารถเขียนสมการ (116) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} mgr & -u & \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -mar \quad (117)$$

ในการทดลองหาค่าตัวแปร  $\mu, c_1$  และ  $c_2$  นั้นทำได้โดยการให้ค่า  $u$  เปลี่ยนแปลงไปมาในลักษณะของสัญญาณไซน์ซอซด์ โดยการเปลี่ยนแปลงความถี่ และแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซด์ ซึ่งความถี่ สามารถวัดโดย ตัวตรวจรู้ความเร่ง รุ่น ADXL335 ซึ่งติดตั้งบนมวลหน่วง ความเร็วเชิงมุม สามารถวัดโดย en-coder รุ่น E6B2-CWZ6C ซึ่งติดตั้งอยู่กับแกนมอเตอร์ด้านหน้า ดังรูปที่ 23

จากนั้นทำการเขียนโปรแกรม LABVIEW 2010 เพื่อทำการสื่อสารกับอุปกรณ์การทดลองที่ได้เตรียมไว้ โดยการกำหนดสัญญาณอินพุตในโปรแกรมแล้วป้อนออกมาเป็นสัญญาณอินพุตแก่ตัวขับมอเตอร์ จากนั้นตัวตรวจรู้ คือ เอนโคเดอร์ และตัววัดความเร่ง จะส่งสัญญาณอินพุตให้แก่โปรแกรมผ่านทาง การ์ดเชื่อมต่อ NI PCI 6221 (CB68) แล้วทำการเก็บข้อมูล ด้วยอัตรา 1 ข้อมูลต่อ 0.001 วินาที หรือ 1ms. นั่นคือหากการทดลอง 1 รอบใช้เวลาในการเก็บข้อมูล 10 วินาที จะทำให้มีข้อมูลทั้งสิ้น 10,000 ข้อมูล ซึ่งทำการเก็บของมูลที่ได้ให้อยู่ในรูปแบบของไฟล์ตัวหนังสือ (Text file) จากนั้นนำข้อมูลที่ได้ทั้งหมดมาหาค่าของเมทริกซ์ตัวแปร ด้วยเทคนิค Least square ก็จะทำให้ได้ค่าตัวแปร  $\mu, c_1$  และ  $c_2$  ของแต่ละรอบการทดลอง นำค่าแต่ละรอบที่หาได้นั้นมาหาค่าเฉลี่ย



ภาพที่ 23 ตำแหน่งอุปกรณ์ตรวจรับมวลขับ

### 3. การวิเคราะห์ และออกแบบตัวควบคุม

ในการออกแบบตัวควบคุมในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้ตัวควบคุม แบบ  $H_\infty$  ความไวผสม โดยจะใช้วิธีคำนวณวงปิดของฟังก์ชันถ่ายโอน โดยการพยายามที่จะกดให้ค่าเกฐานสูงสุดต่ำกว่าขอบเขตบนที่กำหนดในทุกย่านความถี่นั่นเอง

ก่อนที่จะพิจารณาค่าแผนภาพเอกฐานนั้น จะต้องทำการปรับอัตราส่วน (Scaling) ตัวแปร เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ระบบ และออกแบบตัวควบคุม

#### 3.1 การปรับอัตราส่วน (scaling)

เนื่องจากในส่วนที่ผ่านมานั้นเราได้ทำการหาตัวแทนระบบอยู่ในรูปสมการปริภูมิสถานะซึ่งในการปรับอัตราส่วนของตัวแปรระบบนั้นเราต้องทำการแปลงสมการให้อยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอนเสียก่อน โดยสามารถแปลง เมทริกซ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนระบบที่ยังไม่ได้ทำการปรับอัตราส่วน  $\hat{G}$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\hat{G} = \left[ \begin{array}{c} \frac{-1.1258 s (s + 0.1036) (s^2 + 0.07342s + 363.6)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{1.22 (s + 0.1713) (s + 1.624 \times 10^{-5}) (s^2 - 1.624 \times 10^{-5} s + 2.636 \times 10^{-10})}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{0.094161 s (s - 65.94) (s + 65.94) (s + 0.1036)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{-1.3142 s (s + 0.1036) (s^2 + 0.0629s + 311.5)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \end{array} \right]$$

การเปลี่ยนแปลงรบกวนมีค่าสูงสุดแทนด้วย  $D_d = \hat{d}_{\max} = 0.1 \text{ rad}$

อินพุตยอมให้สูงสุดแทนด้วย  $D_u = \hat{u}_{\max} = k_{11} \cdot 2.5 \text{ V}$ .

ค่าคาดหมายการผิดพลาดสูงสุดแทนด้วย  $D_e = \hat{e}_{\max} = 0.1 \text{ rad}$

และจากความสัมพันธ์  $G = D_e^{-1} \hat{G} D_u$  สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนที่ปรับอัตราส่วนแล้วได้เป็น

$$G = \left[ \begin{array}{c} \frac{-156.8664 s (s + 0.1036) (s^2 + 0.07342s + 363.6)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{169.9862 (s + 0.1713) (s + 1.624e - 005) (s^2 - 1.624e - 005s + 2.636 \times 10^{10})}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{13.1197 s (s - 65.94) (s + 65.94) (s + 0.1036)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \\ \frac{-183.1059 s (s + 0.1036) (s^2 + 0.0629s + 311.5)}{(s + 0.1036) (s + 0.1036) (s^2 + 0.06677s + 126.4) (s^2 + 0.07533s + 971.6)} \end{array} \right]$$

และจากความสัมพันธ์  $G_d = D_e^{-1} \hat{G}_d D_d$  แพล้นท์ของการรบกวนมีค่าเป็น

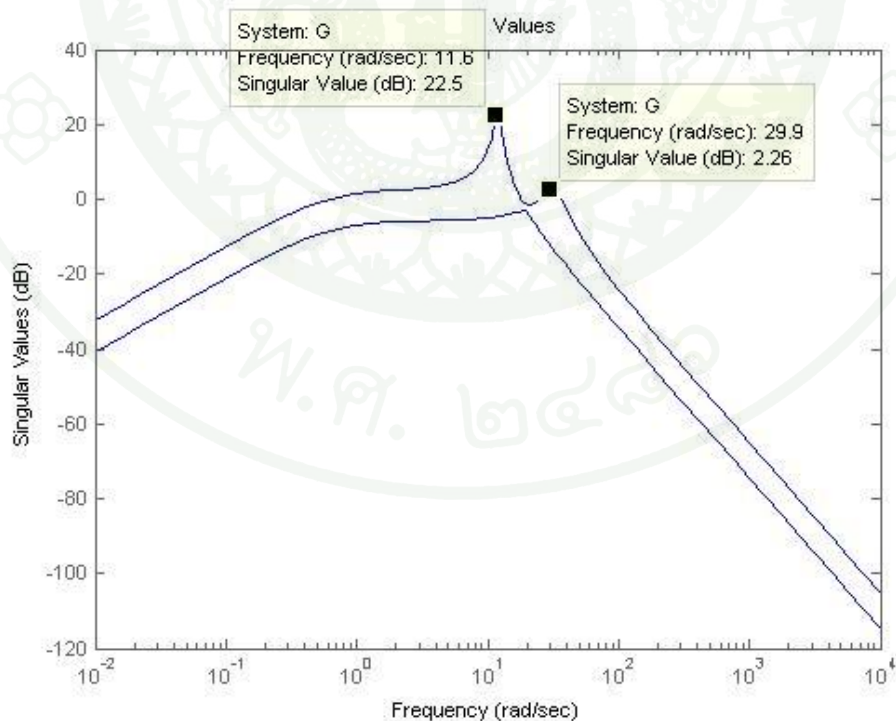
$$G_d = \begin{bmatrix} 1.1111 & 0 \\ 0 & 1.1111 \end{bmatrix}$$

### 3.2 แผนภาพค่าเอกฐาน

ในการพิจารณาค่าแผนภาพเอกฐานนั้นจะเห็นได้ว่าประกอบด้วเส้นกราฟ 2 เส้น เส้นที่อยู่ด้านบนนั้นจะแสดงถึงอัตราขยายสูงสุดที่ความถี่นั้น และเส้นที่อยู่ด้านล่างจะแสดงถึงอัตราขยายต่ำสุดที่ความถี่นั้น ซึ่งหากค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในความถี่เดียวกันนั้น มีค่าที่แตกต่างกันมาก จะบ่งบอกถึงการกระตุ้นระบบเพียงเล็กน้อย จะส่งผลให้อัตราขยายในอินพุตหนึ่งมีค่ามากกว่าอินพุตหนึ่ง ทำให้ความสามารถในการควบคุมอินพุตที่มีอัตราขยายน้อยนั้นทำได้ยาก ซึ่งเป็นลักษณะที่ไม่พึงประสงค์ โดยสามารถพิจารณาได้จากสมการที่ (70)

$$\gamma(G) \triangleq \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)}$$

จะเห็นได้ว่าเลขคอนดิชันนั้นจะเป็นตัวแสดงขนาดของทิศทาง โดยหาได้จากอัตราส่วนระหว่างค่าเอกฐานสูงสุดต่อค่าเอกฐานต่ำสุดในความถี่เดียวกัน

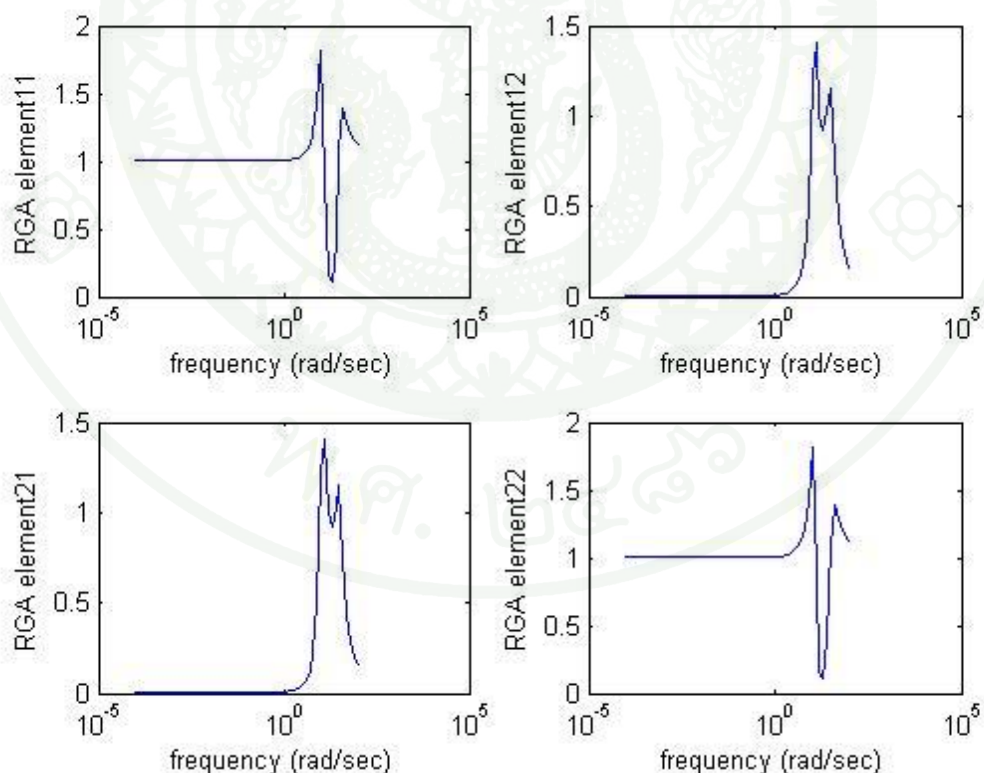


ภาพที่ 24 แผนภาพค่าเอกฐาน ของระบบที่ปรับอัตราส่วนแล้ว

เมื่อพิจารณารูปที่ 28 ความถี่ ประมาณ  $10 \text{ rad/sec}$  และ  $30 \text{ rad/sec}$  จะทำให้ค่าเอกฐานสูงสุด และค่าเอกฐานต่ำสุด มีค่าต่างกันมากกว่าบริเวณค่า ดังนั้นจะทำให้เลขคอนดิชันมีค่ามากซึ่งเป็นสิ่งไม่พึงประสงค์ ดังนั้น ที่ความถี่ดังกล่าวจึงเป็นค่าความถี่ที่เราควรหลีกเลี่ยงในการออกแบบตัวควบคุม

### 3.3 อัตราขยายสัมพัทธ์ (Relative Gain Array)

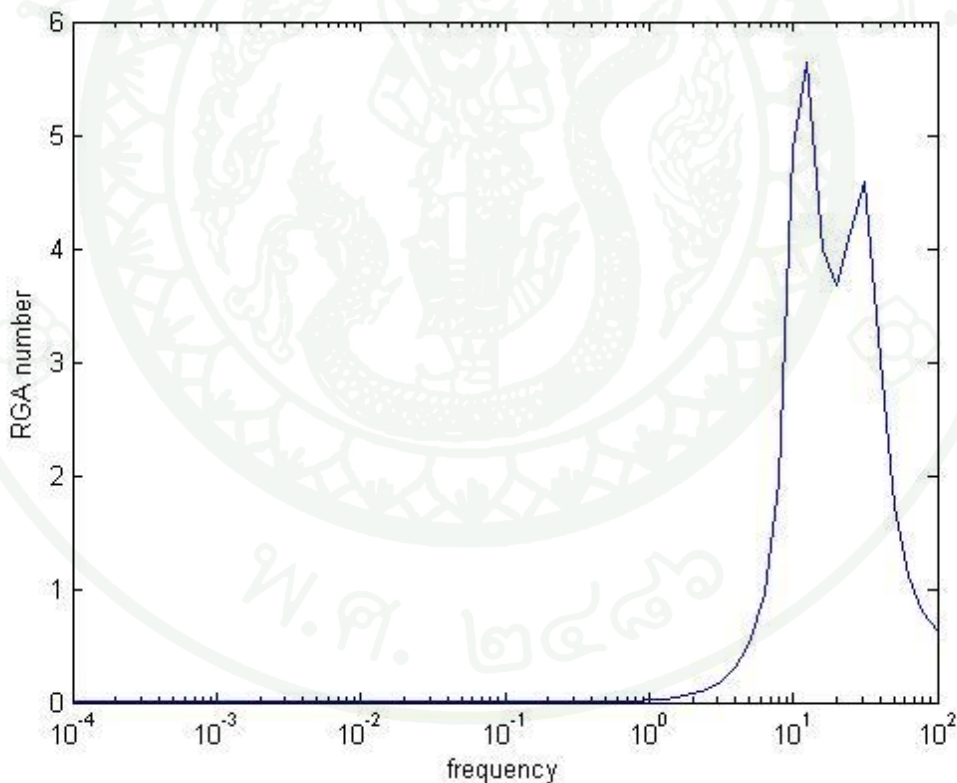
ค่า อัตราขยายสัมพัทธ์นั้น แสดงให้เห็นถึงการมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่าง อินพุต และ เอาท์พุต ดังแสดงในภาพที่ 25 ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าสำหรับค่า RGA element ที่ 1 1 และ RGA element ที่ 2 2 นั้นจะแสดงถึงปฏิสัมพันธ์ระหว่างค่าอินพุตที่ 1 ( $v_1$ ) ที่มีต่อเอาท์พุตที่ 1 ( $\theta_1$ ) และ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างค่าอินพุตที่ 2 ( $v_2$ ) ที่มีต่อเอาท์พุตที่ 2 ( $\theta_2$ ) ตามลำดับ ค่าที่ได้จากกราฟมีค่าเท่ากับ 1 จนถึงความถี่ประมาณ  $1 \text{ rad/sec}$  ซึ่งถือได้ว่าอินพุตสามารถควบคุมเอาท์พุตได้ดี จนถึงช่วงความถี่ดังกล่าว



ภาพที่ 25 แสดงค่า RGA Element

สำหรับค่า RGA เอลเมนต์ที่ 1 2 และเอลเมนต์ที่ 2 1 นั้นจะแสดงถึงปฏิสัมพันธ์ระหว่างค่าอินพุตที่ 2 ( $v_2$ ) ที่มีต่อเอาต์พุตที่ 1 ( $\theta_1$ ) และปฏิสัมพันธ์ระหว่างค่าอินพุตที่ 1 ( $v_1$ ) ที่มีต่อเอาต์พุตที่ 2 ( $\theta_2$ ) ตามลำดับ ค่าที่ได้จากกราฟมีค่าเท่ากับ 0 จนถึงความถี่ประมาณ  $1 \text{ rad/sec}$  ซึ่งถือได้ว่าเอาต์พุตจะไม่มีผลกระทบเนื่องจากการกระตุ้นจากอินพุต จนถึงช่วงความถี่ดังกล่าว

จากรูปที่ 26 RGA นัมเบอร์เป็นการแสดงผลรวมของ RGA เอลเมนต์ทุกตัว ซึ่งแสดงให้เห็นถึงว่าในช่วงความถี่ไม่เกิน  $1 \text{ rad/sec}$  นั้น ผลของอินพุตตัวที่ 1 จะไม่ส่งผลต่อเอาต์พุตตัวที่ 2 และอินพุตตัวที่ 2 จะไม่ส่งผลต่อเอาต์พุตตัวที่ 1 ซึ่งจะมีความสอดคล้องกับ ค่า RGA เอลเมนต์ในรูปที่ 29 แต่เนื่องจากว่าที่ความถี่  $1 \text{ rad/sec}$  หรือประมาณ  $0.16 \text{ Hz}$  นั้นมีค่าน้อยเกินไป ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้จึงได้ทำการกำหนด แบนวิธที่  $30 \text{ rad/sec}$  หรือ  $5 \text{ Hz}$  ซึ่งจะทำให้การควบคุมระบบทำได้ไม่ยากนัก



ภาพที่ 26 RGA นัมเบอร์ของระบบ

### 3.4 การตรวจสอบค่าความควบคุมได้ (controllability) และความสังเกตได้ (observability)

ในกรณีทั่วไปสำหรับเมทริกซ์ถ่ายโอนใดๆ สามารถมีจำนวนปริภูมิสถานะได้ไม่จำกัด และอาจเป็นไปได้ว่าจำนวนของสเตต  $x(t)$  ในตัวแทนปริภูมิสถานะอาจมีจำนวนมากกว่าระบบพลวัตในเมทริกซ์ถ่ายโอนที่เป็นการส่งจากอินพุตไปยังเอาต์พุต ดังนั้นสิ่งที่เกิดขึ้นคือ สเตตบางตัวไม่สามารถควบคุมได้โดยอินพุต หรือไม่สามารถสังเกตได้จากเอาต์พุต คุณสมบัติของระบบพลวัตที่มีความสำคัญต่อการออกแบบระบบควบคุมคือ ความควบคุมได้ (controllability) และความสังเกตได้ (observability) ซึ่งสามารถตรวจสอบความควบคุมได้ของสเตตดังต่อไปนี้

3.4.1 ระบบ  $(A, B)$  จะสามารถควบคุมสเตตได้ถ้า และเพียงแต่ถ้า เมทริกซ์ความควบคุมได้  $r_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$  มีลำดับชั้น (rank) เท่ากับ  $n$  โดยที่  $n$  คือจำนวนสเตต

ในการวิเคราะห์หาลำดับชั้นของเมทริกซ์สามารถหาลำดับชั้นได้เท่ากับ 8 ซึ่งเท่ากับจำนวนสเตตของระบบ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าระบบสามารถควบคุมได้

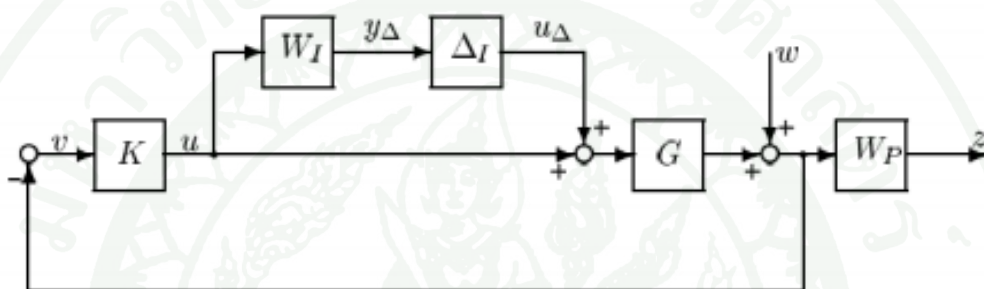
3.4.2 ระบบ  $(A, C)$  สามารถสังเกตได้ถ้า และเพียงแต่ถ้า เมทริกซ์ความสังเกตได้ มีค่าลำดับ (rank) เท่ากับ  $n$  โดยที่  $n$  คือจำนวนสเตต

$$r_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ในการวิเคราะห์หาลำดับชั้นของเมทริกซ์สามารถหาลำดับชั้นได้เท่ากับ 6 ซึ่งไม่เท่ากับจำนวนสเตตของระบบ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าระบบไม่สามารถสังเกตได้

### 3.5 การกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักของความไม่แน่นอน (uncertainty weight)

การควบคุมแบบทนทาน (Robust control) คือ ระบบจะมีสมรรถนะ และเสถียรภาพที่ทนทานต่อความไม่แน่นอนได้ โดยในการวิเคราะห์ความทนทานนั้นเราจะกำหนดความไม่แน่นอนให้แก่เมทริกซ์ระบบหลายตัวอย่าง แล้วสังเกตผลที่ได้ ดังนั้นจะทำให้เราสามารถกำหนดขอบเขตของความไม่แน่นอนของระบบโดยการสร้างฟังก์ชันน้ำหนัก เพื่อนำไปคูณกับ อินพุต  $u$  ได้ ดังแสดงในรูปที่ 27



ภาพที่ 27 แสดงระบบวงปิดกับฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอน  $W_I$  และฟังก์ชันน้ำหนักสมรรถนะ  $W_P$

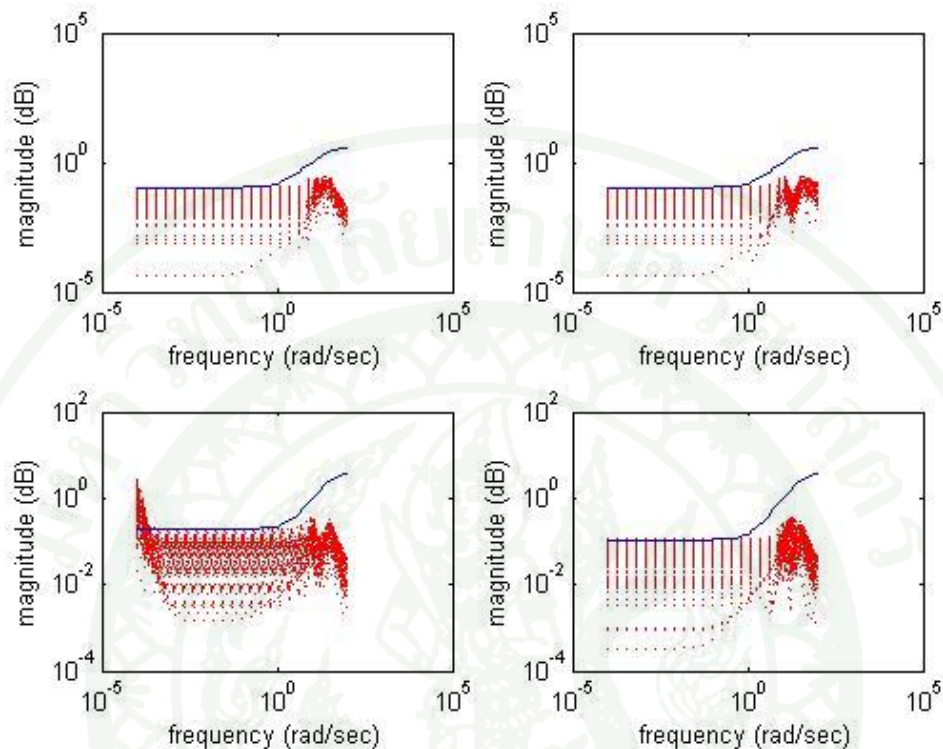
ในงานวิจัยนี้จะทำการกำหนดตัวอย่างความไม่แน่นอน 100 ตัวอย่างแบบสุ่มเพื่อทดสอบหาผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ จากนั้นจะทำการร่าง ฟังก์ชันถ่ายโอนของฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอน โดยฟังก์ชันที่สร้างขึ้นจะครอบคลุมถึงกรณีที่เลวร้ายที่สุด เพื่อให้มั่นใจได้ว่าระบบจะไม่เกิดการสูญเสียเสถียรภาพ

เมื่อสังเกตผลตอบสนองเชิงความถี่ จะทำให้เรารู้ขอบเขตของผลตอบสนองได้ และสามารถกำหนดฟังก์ชันถ่ายโอนของแต่ละเอเลเมนต์ของฟังก์ชันน้ำหนักดังนี้

$$W_{I_{11}} = \frac{s+1.1}{0.25s+10}, \quad W_{I_{12}} = \frac{s+1.1}{0.25s+10}, \quad W_{I_{21}} = \frac{s+2}{0.25s+10}, \quad W_{I_{22}} = \frac{s+1.1}{0.25s+10}$$

โดยที่  $W_{I_{11}}, W_{I_{12}}, W_{I_{21}}, W_{I_{22}}$  คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนเอเลเมนต์ที่ 11, 12, 21 และ 22 ตามลำดับ

เมื่อนำฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้สร้างขึ้น มาพลอตกราฟเทียบกับผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบของความไม่แน่นอนโดยการสุ่ม จะให้ผลดังภาพที่ 28



ภาพที่ 28 แสดงผลตอบสนองของระบบความไม่แน่นอน และฟังก์ชันน้ำหนักของความไม่แน่นอน

จากรูปที่ 28 จะเห็นผลตอบสนองความถี่ของฟังก์ชันความไม่แน่นอนจำนวนมาก ซึ่งแสดงโดยใช้เส้นประ และฟังก์ชันน้ำหนักของความไม่แน่นอนที่ทำการออกแบบจะใช้เส้นเต็ม โดยจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันน้ำหนักที่ทำการออกแบบนั้นสามารถครอบคลุมกรณีเลวร้ายที่สุดได้ทำให้เราสามารถมั่นใจว่าจะไม่เกิดเหตุการณ์ที่ระบบจะเกิดการเสถียรภาพได้

### 3.6 การออกแบบตัวควบคุม แบบ $H_\infty$ แบบความไวผสม

การควบคุมแบบความไวผสมนั้นเป็นชื่อของปัญหาในการจัดตั้งฐานของฟังก์ชันความไว  $S = (I + GK)^{-1}$ ,  $KS$  หรือ  $T = I - S$  ซึ่ง  $S$  คือฟังก์ชันถ่ายโอนระหว่าง การรบกวน  $d$  และเอาต์พุต และ  $KS$  คือฟังก์ชันถ่ายโอน ระหว่างการรบกวน  $d$  และสัญญาณควบคุม โดยทั่วไปแล้วค่าการรบกวนจะเกิดขึ้นที่ความถี่ต่ำๆ ดังนั้นการจะกำจัดการรบกวน จึงทำได้โดยการพยายามทำให้ค่า  $S$  มีค่าน้อยๆที่ความถี่ต่ำๆ โดยการเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก  $W_1$  เพื่อนำไปคูณกับ  $S$  และค่าฟังก์ชันน้ำหนัก  $W_2$  เพื่อคูณกับ  $KS$  โดยปกติแล้วจะกำหนดให้  $W_2 = I$  และ  $W_1$  หาได้จากสมการ

$$W_1 = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} \quad (118)$$

โดย  $M$  มีค่าประมาณ 1 หรือมากกว่า 1 เล็กน้อย

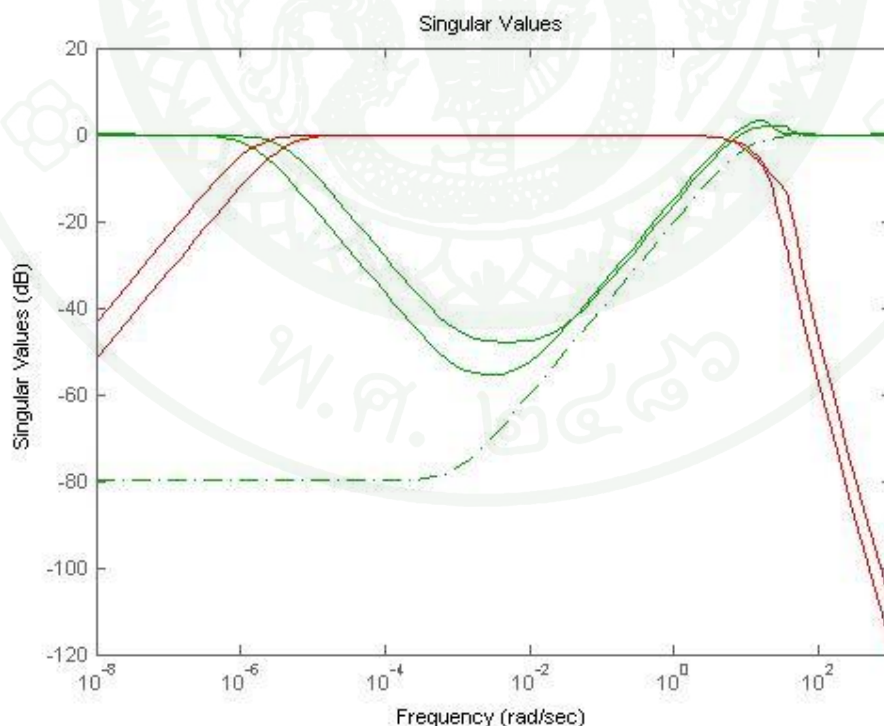
$\omega_B^*$  คือ แบนด์วิธ

$A$  มีค่าน้อยมาก เกือบจะเป็น 0

จากนั้นจะทำการแทนค่าต่างๆลงในสมการแล้วปรับค่าฟังก์ชันน้ำหนักจนอยู่ในเงื่อนไขที่กำหนดซึ่งจะได้ค่าฟังก์ชันน้ำหนักดังนี้

$$W_1 = \frac{s + 10}{s + 0.001} \quad W_2 = \frac{0.8s + 0.001}{s + 50}$$

ในการหาตัวควบคุมจะทำการสังเคราะห์โดยโปรแกรม MATLAB R2009a โดยการป้อนค่า แพล้นท์ และฟังก์ชันน้ำหนัก  $W_1$  และ  $W_2$  ทั้งลงในคำสั่ง และจะได้ค่า  $K$  ในรูปของเมทริกซ์ปริภูมิสถานะ ซึ่งเมื่อทำการถ่วงน้ำหนักแล้วจะสามารถปรับฟังก์ชัน  $S$  และ  $T$  ดังในภาพที่ 29



ภาพที่ 29 แสดงการปรับรูปฟังก์ชัน  $S$  และ  $T$

## ผลและวิจารณ์

### ผล

#### 1. ผลการหาเอกลักษณ์ของระบบมวลขับ

ในการทดลองเพื่อหาเอกลักษณ์ของระบบมีจุดประสงค์หลักเพื่อหาความสัมพันธ์จากแรงดันอินพุตที่ให้แก่มอเตอร์ และ ค่าแรงเอาต์พุตเพื่อห้วงการสั้นซึ่งให้ผลการทดลองดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณอินพุตเป็นแบบไซน์รูซอชด์ ที่ความถี่ 3 Hz

ตัวแปร	แอมพลิจูด					
	1	1	2	2	3	3
$\mu$	0.0094	0.0104	0.0093	0.012	0.0066	0.0084
$c_1$	0.1241	0.1241	0.1873	0.197	0.1553	0.13
$c_2$	0.0118	0.0118	0.018	0.0194	0.0157	0.0123

ตารางที่ 2 แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณอินพุตเป็นแบบไซน์รูซอชด์ ที่ความถี่ 4 Hz

ตัวแปร	แอมพลิจูด					
	1	1	2	2	3	3
$\mu$	0.0081	0.0084	0.007	0.008	0.0068	0.0052
$c_1$	0.1896	0.181	0.2147	0.1858	0.1936	0.2028
$c_2$	0.0161	0.015	0.0177	0.14	0.0171	0.0185

ตารางที่ 3 แสดงผลตัวแปรจากการทดลองให้สัญญาณอินพุตเป็นไซน์ชอยด์ ที่ความถี่ 5 Hz

ตัวแปร	แอมพลิจูด					
	1	1	2	2	3	3
$\mu$	0.0075	0.0077	0.0072	0.0072	-	-
$c_1$	0.0714	0.1742	0.192	0.1919	-	-
$c_2$	0.0095	0.0095	0.0106	0.106	-	-

เมื่อสามารถเก็บข้อมูลในแต่ละช่วงได้แล้วจึงนำข้อมูลของตัวแปรแต่ละตัวในแต่ละช่วงมาหาค่าเฉลี่ย ซึ่งสามารถสรุปค่าต่างๆ ได้ดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน  $\mu = 0.0078$

ค่าคงที่ของมอเตอร์  $c_1 = 0.1565$

ค่าแรงดันไฟฟ้าป้อนกลับ  $c_2 = 0.0078$

จากการทดลองหาค่าตัวแปรทั้งหมดสามารถสรุปค่าต่างๆ ได้ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 แสดงค่าตัวแปรต่างๆจากการทดลอง

ตัวแปร	ความหมาย	ค่า	หน่วย
$m_{c1}$	มวลจับห่วงชั้นที่ 1	1.95	kg.
$m_{c2}$	มวลจับห่วงชั้นที่ 2	1.95	kg.
$m_{b1}$	มวลฐานชั้นที่ 1	2.52	kg.
$m_{b2}$	มวลฐานชั้นที่ 2	2.52	kg.
$m_{r1}$	มวลแขนชั้นที่ 1	0.46	kg.
$m_{r2}$	มวลแขนชั้นที่ 2	0.46	kg.
$h_1$	ความสูงของชั้นที่ 1	0.3	m.
$h_2$	ความสูงของชั้นที่ 2	0.3	m.
$r_1$	รัศมีเพื่องจับชั้นที่ 1	0.0312	m.
$r_2$	รัศมีเพื่องจับชั้นที่ 2	0.0312	m.
$k_{s1}$	ค่าคงที่สปริงชั้นที่ 1	100	N/rad
$k_{s2}$	ค่าคงที่สปริงชั้นที่ 2	100	N/rad
$\mu_1$	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ชั้นที่ 1	0.0078	-
$\mu_2$	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ชั้นที่ 2	0.0078	-
$c_1$	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานข้อต่อชั้นที่ 1	0.15	N · sec/rad
$c_2$	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานข้อต่อชั้นที่ 2	1.5	N · sec/rad
$c_{11}$	ค่าคงที่มอเตอร์ชั้นที่ 1	0.1565	Nm/V
$c_{12}$	ค่าคงที่มอเตอร์ชั้นที่ 2	0.1565	Nm/V
$c_{21}$	ค่าแรงดันไฟฟ้าต้านกลับมอเตอร์ชั้นที่ 1	0.0113	kg · m <sup>2</sup> / rad
$c_{22}$	ค่าแรงดันไฟฟ้าต้านกลับมอเตอร์ชั้นที่ 2	0.0113	kg · m <sup>2</sup> / rad
$k_{11}$	c11/r1	5.016	N/V
$k_{12}$	c12/r2	5.016	N/V
$k_{21}$	c21/r1	0.3622	kg · m / rad · sec
$k_{22}$	c22/r2	0.3622	kg · m / rad · sec

## 2. ผลการหาค่าตัวแปรต่างได้ตามความต้องการแล้วจากนั้นจะเป็นการหาตัวแทนระบบ

เมื่อสามารถหาค่าตัวแปรต่างได้ตามความต้องการแล้วจากนั้นจะเป็นการหาตัวแทนระบบ ในรูปสมการปริภูมิสถานะโดย เมื่อแทนค่าต่างๆลงในสมการที่ (120) จะสามารถเขียนความสัมพันธ์อย่างง่ายได้คือ

$$\ddot{X} = M^{-1}F - M^{-1}CX\dot{X} - M^{-1}KX \quad (119)$$

ดังนั้นจะสามารถหาค่า เมทริกซ์ระบบขนาด  $8 \times 8$  ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 112.5836 & 0 & -121.9996 & -9.8737 & 0.1689 & 0.3279 & -1.8300 \\ 0 & -375.2786 & 0 & 406.6655 & 13.0691 & -0.5629 & -1.0930 & 6.1000 \\ 0 & -9.4161 & 0 & 131.4157 & 0.3279 & -0.0141 & -10.2016 & 1.9712 \\ 0 & 406.6655 & 0 & -844.7179 & -14.1621 & 0.6100 & 15.2552 & -12.6708 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์อินพุตขนาด  $8 \times 2$  ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.8506 & -0.0282 \\ -1.1258 & 0.0942 \\ -0.0282 & 0.8788 \\ 1.2200 & -1.3142 \end{bmatrix}$$

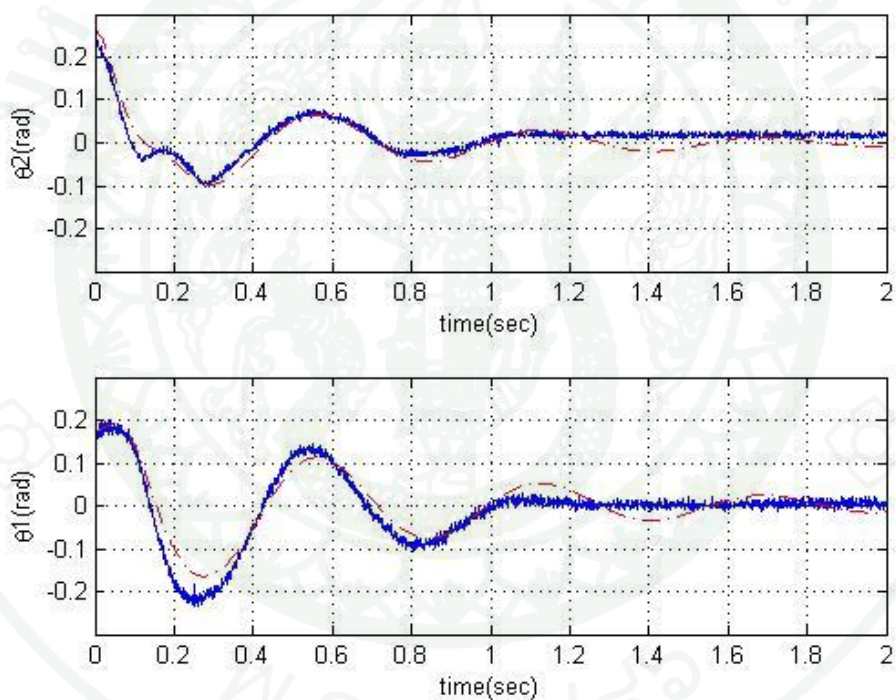
และเมทริกซ์เอาต์พุตขนาด  $2 \times 8$  ดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับระบบนี้ค่า เมทริกซ์ถ่ายทอดโดยตรง  $D$  มีค่าเป็น 0

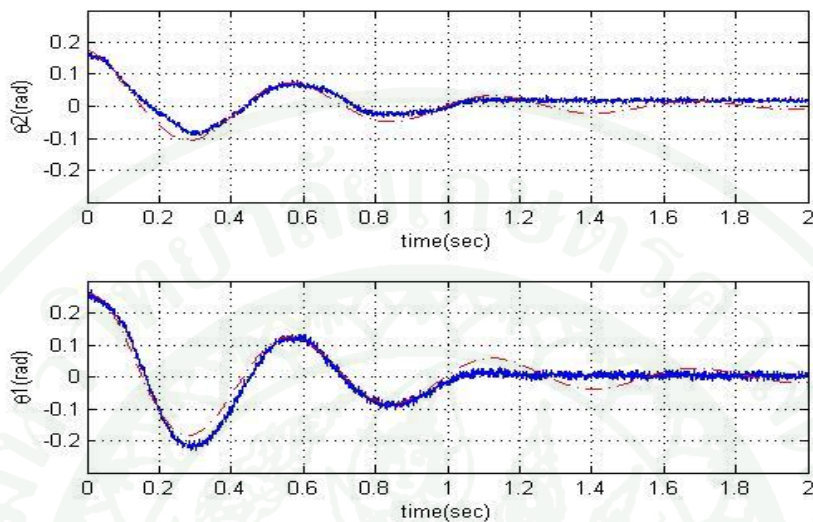
จากระบบดังกล่าวสามารถหาผลตอบสนองต่อสัญญาณไซน์ชอยด์ ที่ได้จากการจำลองโดยโปรแกรม MATLAB 2009a เทียบกับ ผลการทดลองเก็บข้อมูลด้วย โปรแกรม LAB VIEW 2011 ในรูปข้อมูลแบบตัวหนังสือ (text file) แล้วนำมาพลอตเปรียบเทียบกันดังนี้

2.1 เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นโดยให้ ชั้นที่ 1 เอียงทำมุม  $10^\circ(0.1745 \text{ rad})$  และ ชั้นที่ 2 ทำมุม  $15^\circ(0.2618 \text{ rad})$  กับแนวระดับ โดยเส้นประ แสดงผลที่ได้จากผลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเส้นทึบแสดงผลที่วัดได้จากโครงสร้างจริง ดังภาพที่ 29



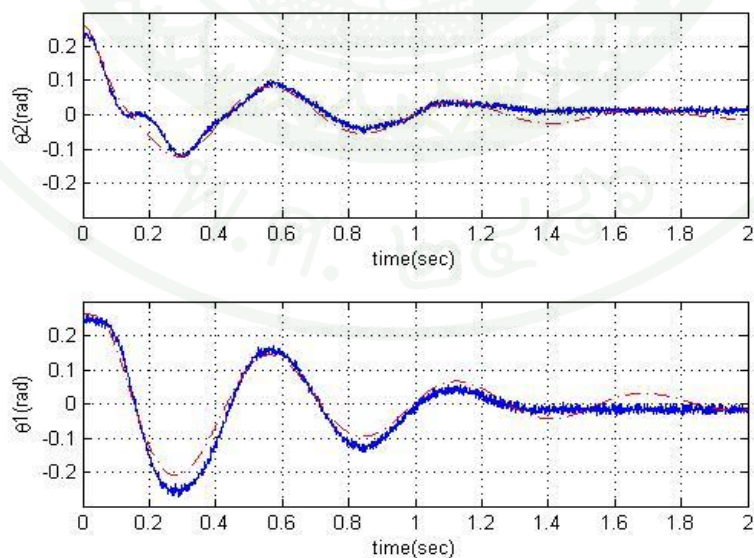
ภาพที่ 30 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

2.2 เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นโดยให้ ชั้นที่ 1 เอียงทำมุม  $15^\circ(0.2618 \text{ rad})$  และ ชั้นที่ 2 ทำมุม  $10^\circ(0.1745 \text{ rad})$  กับแนวระดับ ดังภาพที่ 30



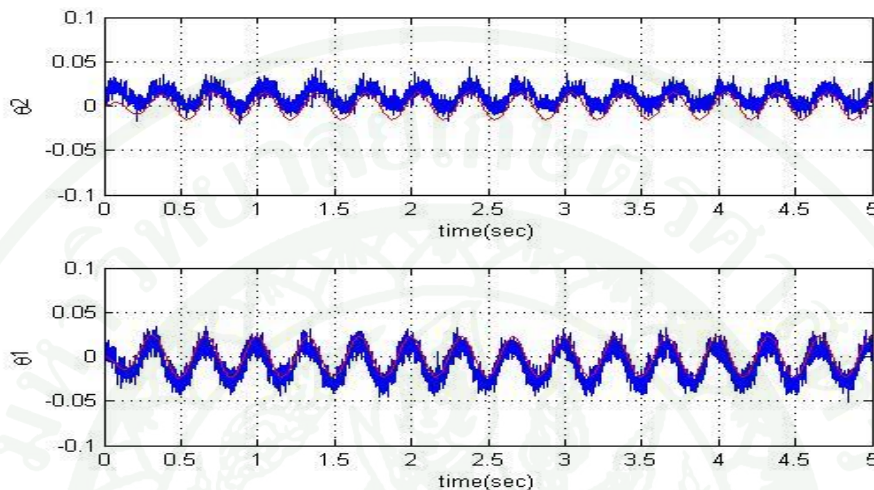
ภาพที่ 31 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

2.3 เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นโดยให้ ชั้นที่ 1 เอียงทำมุม  $15^\circ(0.2618 \text{ rad})$  และ ชั้นที่ 2 ทำมุม  $15^\circ(0.2618 \text{ rad})$  กับแนวระดับ ดังภาพที่ 31



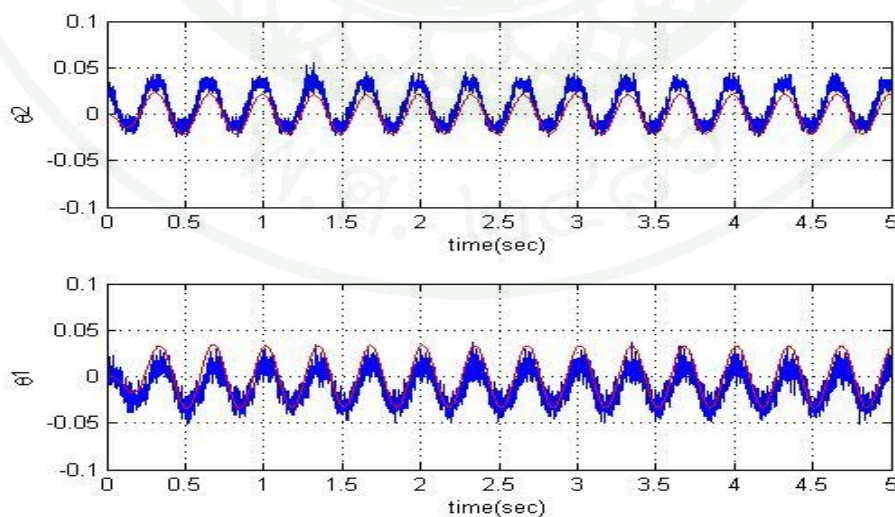
ภาพที่ 32 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

2.4 กำหนดให้ อินพุตแบบไซน์ชอยด์ ที่มีวลซับซ้อนชั้นที่ 1 แอมพลิจูด 3 ความถี่ 3 Hz โดยเส้นหนาคือผลการเคลื่อนตัวของโครงสร้างจริง และเส้นบางคือผลการเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังภาพที่ 32



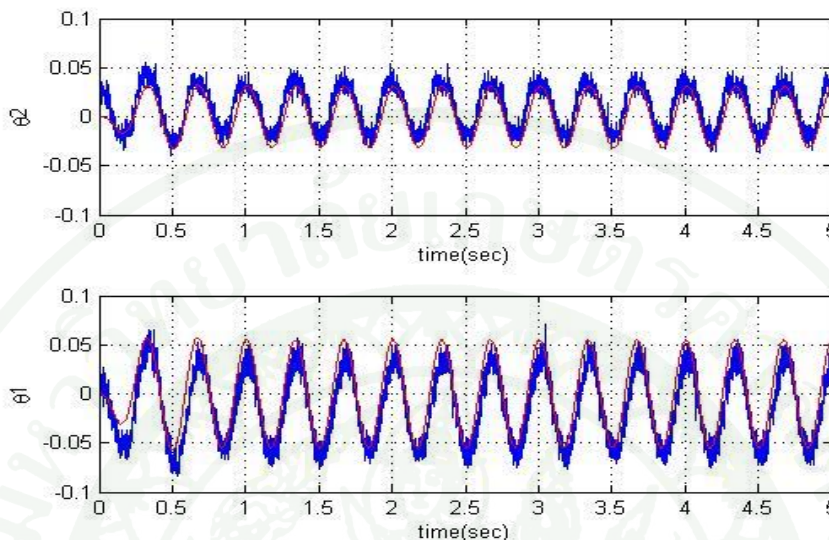
ภาพที่ 32 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

2.5 กำหนดให้ อินพุตแบบไซน์ชอยด์ ที่มีวลซับซ้อนชั้นที่ 2 แอมพลิจูด 3 ความถี่ 3 Hz ดังภาพที่ 33



ภาพที่ 33 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

2.6. กำหนดให้ อินพุตแบบไซน์ซอซด์ ที่มีวลจับหน่วงชั้นที่ 1 และชั้นที่ 2 แอมพลิจูด 3 ความถี่ 3 Hz ดังภาพที่ 34



ภาพที่ 35 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับ โครงสร้างจริง

จากกราฟที่แสดงการเปรียบเทียบผลการจำลองการเคลื่อนตัวของโครงสร้างด้วยโปรแกรม MATLAB R20098a กับผลที่ได้จากการเก็บข้อมูลการตัวของโครงสร้างจริงจะเห็นได้ว่า มีการแบ่งเปรียบเทียบเป็น 2 แบบ คือ แบบแรกจะเป็นการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง และแบบที่สองเป็นการให้ค่าสัญญาณอินพุตแบบไซน์ซอซด์ ซึ่งผลการเปรียบเทียบทั้งสองแบบนี้ใกล้เคียงกันมาก ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎี “กลศาสตร์ของ ลากรานจ์”

## 2. ผลการออกแบบตัวควบคุม

เมื่อป้อนค่าฟังก์ชันน้ำหนักให้แก่โปรแกรมแล้วโปรแกรมจะทำการคำนวณค่าตัวควบคุม โดยจะคำนวณ วนซ้ำโดยอัตโนมัติเพื่อให้ได้ตัวควบคุมที่ทำให้ฟังก์ชัน  $S$  มีค่าน้อยที่สุด โดยตัวควบคุมจะอยู่ในรูปปริภูมิสถานะ ซึ่งจำนวนตัวแปรสแตตที่เกิดขึ้นอาจจะไม่มีความหมายในทางกายภาพเลยก็ได้ ซึ่งมีค่าดังนี้

$$a = \begin{bmatrix} -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21.48 & 9.86 & -18.92 & -2.616 & 0.02351 & 0.4398 \\ -10.86 & -21.46 & -2.943 & -20.66 & -0.01468 & 0.2624 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.107 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.971 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.685 & 1.232 & 3.885 & -0.3269 & 0.0029 & 0.0549 \\ 4.462 \times 10^{-73} & 3.099 \times 10^{-24} & 0 & 0 & -7.779 \times 10^{-17} & -2.797 \times 10^{-15} \\ -1.116 \times 10^{-37} & -1.165 \times 10^{-24} & 0 & 0 & 3.208 \times 10^{-18} & 6.608 \times 10^{-16} \\ 0 & -3.328 \times 10^{-25} & 0 & 0 & 9.825 \times 10^{-18} & 1.451 \times 10^{-15} \\ 0 & 6.174 \times 10^{-27} & 0 & 0 & 3.329 \times 10^{-18} & 3.979 \times 10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.358 & -2.683 & -0.3679 & 3.667 & -0.0018 & 0.0328 \\ \\ 0 & -1.735 \times 10^{-18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1857 & -0.5455 & -3.381 & -56.24 & -0.0138 & 0.2521 \\ -0.223 & -2.185 & -2.79 & -9.505 & 0.0086 & 0.7624 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.769 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.679 & -1.769 & 128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.346 & 128 & 0 & 0 \\ -0.0232 & -0.0682 & -8.025 & -15.38 & -0.0017 & 0.0315 \\ 4.524 \times 10^{-15} & -4.037 \times 10^{-19} & 7.219 \times 10^{-14} & 0 & -6.107 & 8 \\ -1.277 \times 10^{-15} & -4.758 \times 10^{-16} & -7.553 \times 10^{-15} & 0 & -1.89 \times 10^{-18} & -6.971 \\ -2.766 \times 10^{-15} & -9.572 \times 10^{-16} & -1.832 \times 10^{-14} & 0 & -5.787 \times 10^{-18} & 2.275 \times 10^{-15} \\ -3.832 \times 10^{-17} & 6.973 \times 10^{-17} & -2.419 \times 10^{-15} & 0 & -1.961 \times 10^{-18} & -2.822 \times 10^{-18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0279 & -0.2731 & -0.3487 & -1.188 & 0.001 & 0.0953 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4.441 \times 10^{-16} & 0 \\
 -0.1506 & -2.545 & -2.094 & -12.13 \\
 0.6479 & -2.138 & -2.826 & -61.37 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.0188 & -0.3181 & -0.2618 & -1.516 \\
 6.887 \times 10^{-15} & 3.918 \times 10^{-15} & -8.796 \times 10^{-16} & 0 \\
 16 & -4.04 \times 10^{-16} & -4.645 \times 10^{-15} & 0 \\
 -1.769 & 32 & -9.308 \times 10^{-15} & 0 \\
 -3.679 & -1.769 & 64 & 0 \\
 0 & 0 & -8.346 & 256 \\
 -0.081 & -0.2672 & -4.161 & -16.02
 \end{bmatrix}$$

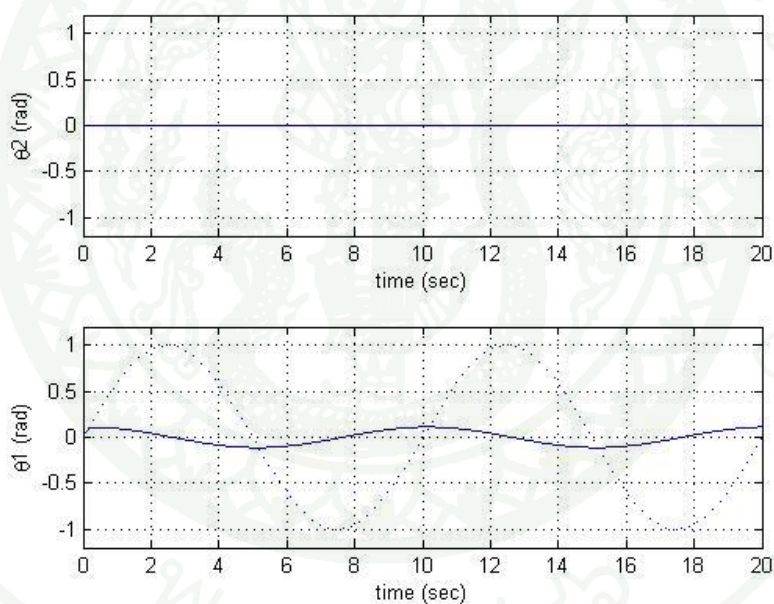
$$b = \begin{bmatrix}
 2.828 & -1.71 \times 10^{-21} \\
 -2.949 \times 10^{-21} & 2.828 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 -4.141 \times 10^{-14} & -2.293 \times 10^{-15} \\
 1.012 \times 10^{-14} & 5.318 \times 10^{-15} \\
 2.227 \times 10^{-14} & 1.08 \times 10^{-14} \\
 6.73 \times 10^{-16} & -6.672 \times 10^{-16} \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -3.798 & 1.743 & 5.494 & -0.4624 & 0.0042 & 0.0777 & -0.0328 & -0.0964 & -0.58 \\ -1.921 & -3.794 & -0.5203 & 5.186 & -0.0026 & 0.0464 & -0.0394 & -0.3862 & -0.4932 \\ -9.941 & -0.0024 & 0.0046 & -0.0266 & -0.4499 & -0.3702 & -2.144 \\ -1.68 & 0.0015 & 0.3148 & -0.91145 & -0.3779 & -0.4995 & -10.85 \end{bmatrix}$$

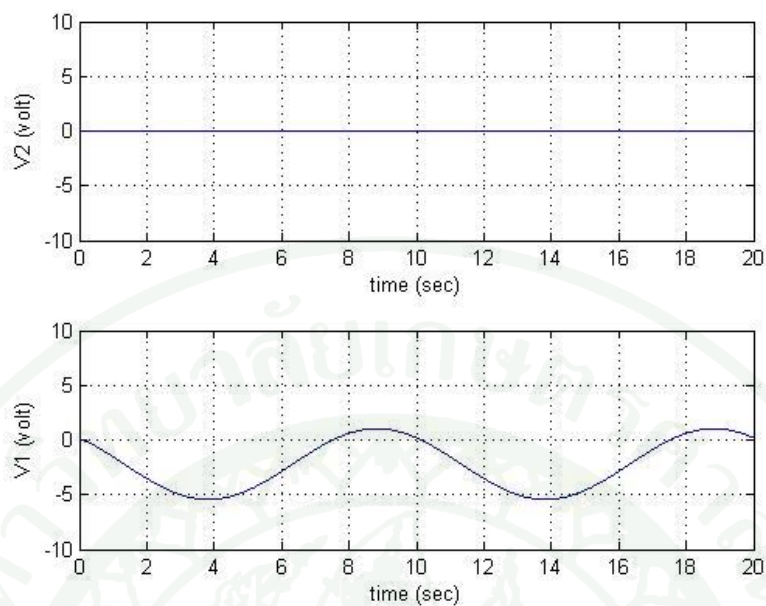
$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3. ผลการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง เมื่อมีตัวควบคุม

#### 3.1 เมื่อกำหนดให้สัญญาณรบกวนรูปไซน์ชอยด์ ที่ความถี่ 0.1 Hz แอมพลิจูด 1

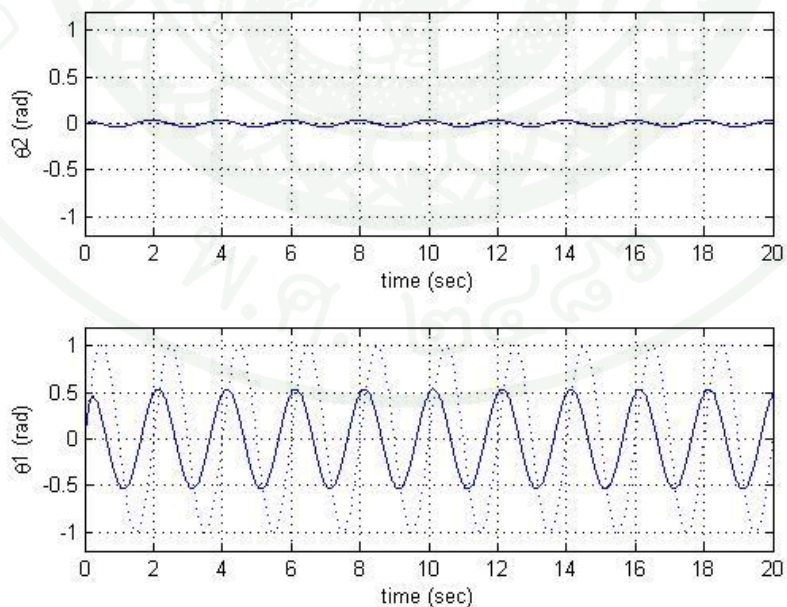


ภาพที่ 36 ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนรูปไซน์ชอยด์ 0.1Hz แอมพลิจูด 1

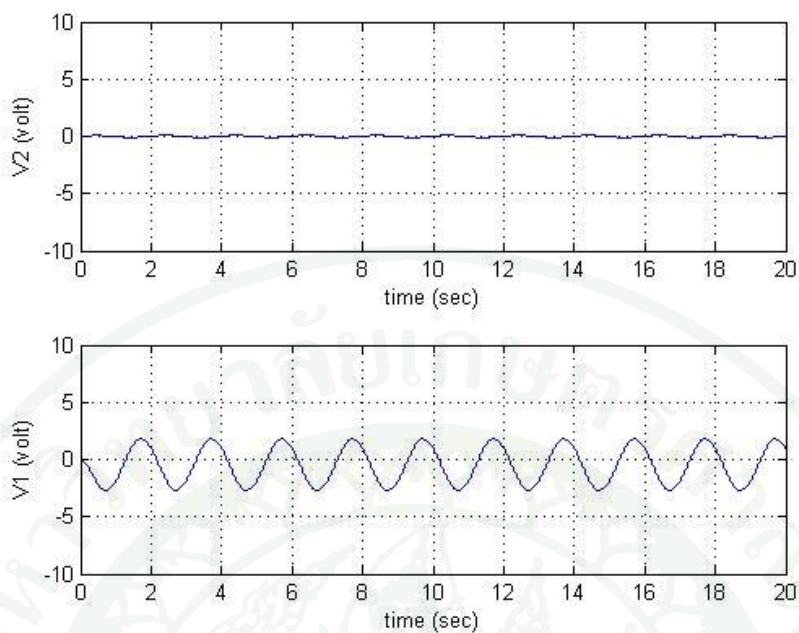


ภาพที่ 37 สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์ชอยด์ 0.1Hz แอมพลิจูด 1

3.2 เมื่อกำหนดให้สัญญาณรบกวนรูปไซน์ชอยด์ ที่ความถี่ 0.5 Hz แอมพลิจูด 1

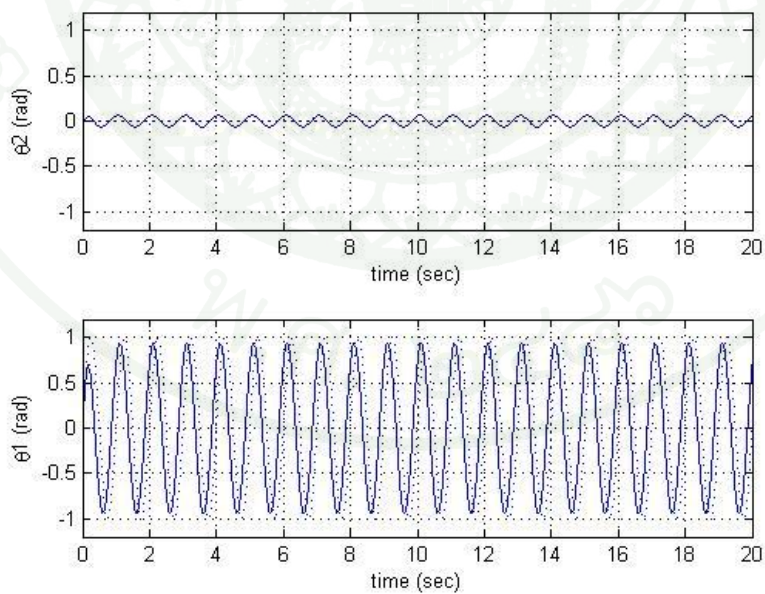


ภาพที่ 38 ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนไซน์ชอยด์ 0.5 Hz แอมพลิจูด 1

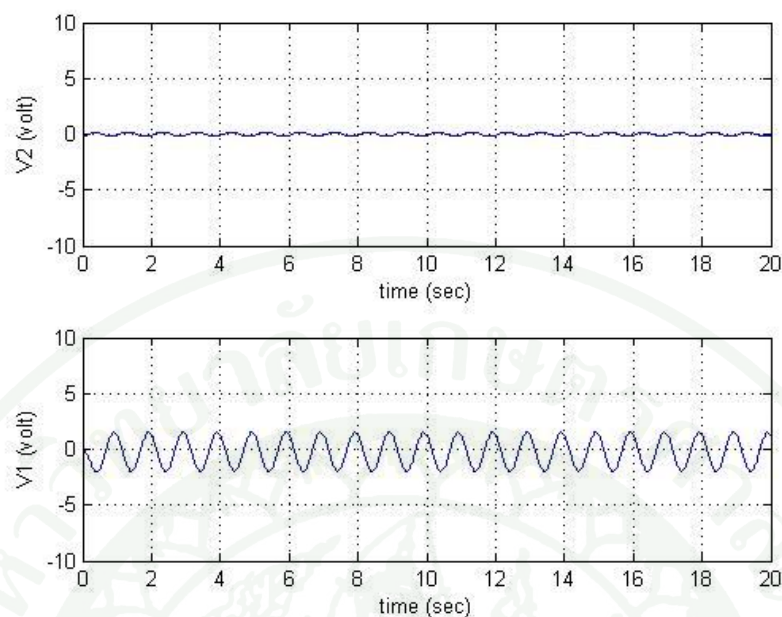


ภาพที่ 39 สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์ชอยด์ 0.5 Hz แอมพลิจูด 1

3.3 เมื่อกำหนดให้สัญญาณรบกวนรูปไซน์ชอยด์ ที่ความถี่ 1 Hz แอมพลิจูด 1



ภาพที่ 40 ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนรูปไซน์ชอยด์ 1 Hz แอมพลิจูด 1



ภาพที่ 41 สัญญาณควบคุมสำหรับการรบกวนแบบไซน์ชอยด์ 1 Hz แอมพลิจูด 1

### วิจารณ์

จากกราฟที่แสดงข้างต้นสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การควบคุมการสั่นของโครงสร้างจะมีประสิทธิภาพที่ดีเมื่อโครงสร้างมีการสั่นที่ความถี่ต่ำๆ และจะให้ผลที่ลดลงเมื่อมีการสั่นที่ความถี่สูงเนื่องจากว่าหากพิจารณารูปที่ 29 แล้วจะเห็นว่าฟังก์ชัน  $S$  มีค่ามากกว่า 0 ที่ค่าความถี่ที่สูงขึ้นนั่นเอง
2. ที่ความถี่ต่ำๆ การสั่นของโครงสร้างในชั้นล่าง จะส่งผลต่อการสั่นของโครงสร้างที่อยู่ชั้นบน น้อยกว่าเมื่อเทียบกับการสั่นด้วยความถี่สูง
3. เมื่อโครงสร้างมีการสั่นด้วยแอมพลิจูดที่มาก ก็จะทำให้สัญญาณควบคุมที่ให้แก่ระบบมีค่าสูงขึ้น

## สรุปและข้อเสนอแนะ

### สรุป

การศึกษาการควบคุมการสั่นของโครงสร้างสองชั้นจำลองโดยวิธี  $H_\infty$  ความไวผสมในงานวิจัยนี้แบ่งการทำงานเป็นสามส่วนใหญ่คือ

#### 1. โครงสร้าง

การสร้างโครงสร้างสองชั้นจำลอง โดยโครงสร้างหลักทำจากอลูมิเนียมเพื่อไม่ต้องการให้โครงสร้างมีน้ำหนักมากจนเกินไป สำหรับในส่วนที่ต้องการความแข็งแรง หรือต้องการให้น้ำหนักมาก จะทำจาก สแตนเลส

บนตัวโครงสร้างประกอบด้วย มวลจับหน่วง (Active Mass Damper) ทำหน้าที่ออกแรงต้านการสั่นของโครงสร้าง และตัวต้านทานแบบปรับค่าได้ (Potentiometer) ในการวัดมุมเอียงของโครงสร้าง

#### 2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หลังจากการสร้าง โครงสร้างแล้วเพื่อให้สามารถกำหนดคสัญลักษณ์ควบคุมที่เหมาะสมได้นั้น จำเป็นจะต้องออกแบบตัวควบคุม ซึ่งสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นจึงต้องสามารถที่จะแทนระบบโครงสร้างจริงได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสมการดังกล่าวนี้เราเรียกว่า “แบบจำลองทางคณิตศาสตร์” (Math Model)

ในการวิจัยครั้งนี้เลือกที่จะใช้หลักการ กลศาสตร์ของลากรางจ์ในการแทนระบบจริงด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ แต่อุปสรรค คือ ไม่สามารถหาค่าของตัวแปรบางตัวได้เช่น ลักษณะทางกายภาพของมอเตอร์สปริง และ ตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้ โดยเฉพาะมอเตอร์ ซึ่งใช้วิธีการที่เรียกว่า การหาเอกลักษณ์ของระบบ (System Identification) ในการหาค่าคงที่ของมอเตอร์ และแรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ

### 3. ตัวควบคุม

ในการออกแบบตัวควบคุมนั้น มีวิธีการออกแบบด้วยกันหลายวิธี ซึ่งวิธี ที่ในงานวิจัยนี้เลือกใช้คือ  $H_{\infty}$  ความไวผสม โดยหลักการของวิธีนี้คือพยายามลดค่าฟังก์ชัน S ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง การรบกวนที่ให้แก่ระบบ (Disturbance) กับเอาต์พุตในที่นี้คือมุมที่เบี่ยงเบนไปของโครงสร้าง คือหากขนาดของการรบกวนมีค่าน้อย คือมีอัตราขยายต่ำๆ การรบกวนก็จะมีผลกระทบต่อโครงสร้างนั่นเอง ซึ่งจะเห็นได้จากกราฟที่ได้กราฟที่ได้นำเสนอในหัวข้อผลการทดลอง จะเห็นได้ว่าผลกระทบจากการรบกวนจะมีค่าลดลงเมื่อระบบประกอบด้วยตัวควบคุมที่ได้ทำการออกแบบไว้

#### ข้อเสนอแนะ

จากการทดลองในครั้งนี้ สามารถที่จะออกแบบตัวควบคุมได้ออกมาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า สมการปริภูมิสถานะ แต่เนื่องจากอุปกรณ์การทดลองในส่วนของมอเตอร์ที่ทำหน้าที่ขับเคลื่อนมีความสามารถในการทำงานจำกัด จึงไม่สามารถจะทำการเก็บข้อมูลจริงจากโครงสร้างได้ ดังนั้นผลการทดลองจึงเป็นการจำลองผลโดยโปรแกรม MATLAB 2009a

ดังนั้นหากต้องการเก็บข้อมูลจากโครงสร้างจริง ควรมีการปรับโครงสร้างให้มีขนาดเบาขึ้น และเปลี่ยนมอเตอร์ที่มีกำลังขับสูงและมีความทนทานมากขึ้น

## เอกสารและสิ่งอ้างอิง

เกียรติศักดิ์ จันทร์แดง. 2549. การออกแบบและเขียนแบบทางวิศวกรรม. วิตต์กรู๊ป,  
กรุงเทพฯ.

เดวิด บรรณเจตพงศ์ชัย. 2551. ระบบควบคุมพลวัต การวิเคราะห์ การออกแบบ และการประยุกต์.  
สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

วโรดม ตู้อินดา. 2550. การวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมทางวิศวกรรม.  
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. 2548. การควบคุมระบบพลศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2.  
สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

สุมาลี อุณหวนิชย์. 2545. ระบบควบคุม. ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน), กรุงเทพฯ.

Dennis, S.B. n.d. **A Student's Guide to Classical Control.** University of Michigan, U.S.A.

Clayton, R., D.B. Douglas, B.S. Rodrigo and L.J. Vicente. **Active Vibration Control of  
A Two-Floors Building Model Base on  $H_2$  and  $H_\infty$  Methodologies Using Linear  
Matrix.** Mechanical Engineering Department, Brasil

Katsuhiko, O. n.d. **Modern Control Engineering.** 5<sup>th</sup> ed. Pearson, Singapore.

Sigurd, S. and P. Ian. 2007. **Multivariable Feedback Control.** 2<sup>nd</sup> ed.  
Johnson Wiley & Sons, Ltd. Chaichester, England.

Withit, C. 2009. **Available Control Techniques**. Department of Mechanical Engineering, Kasetsart University, Bangkok.

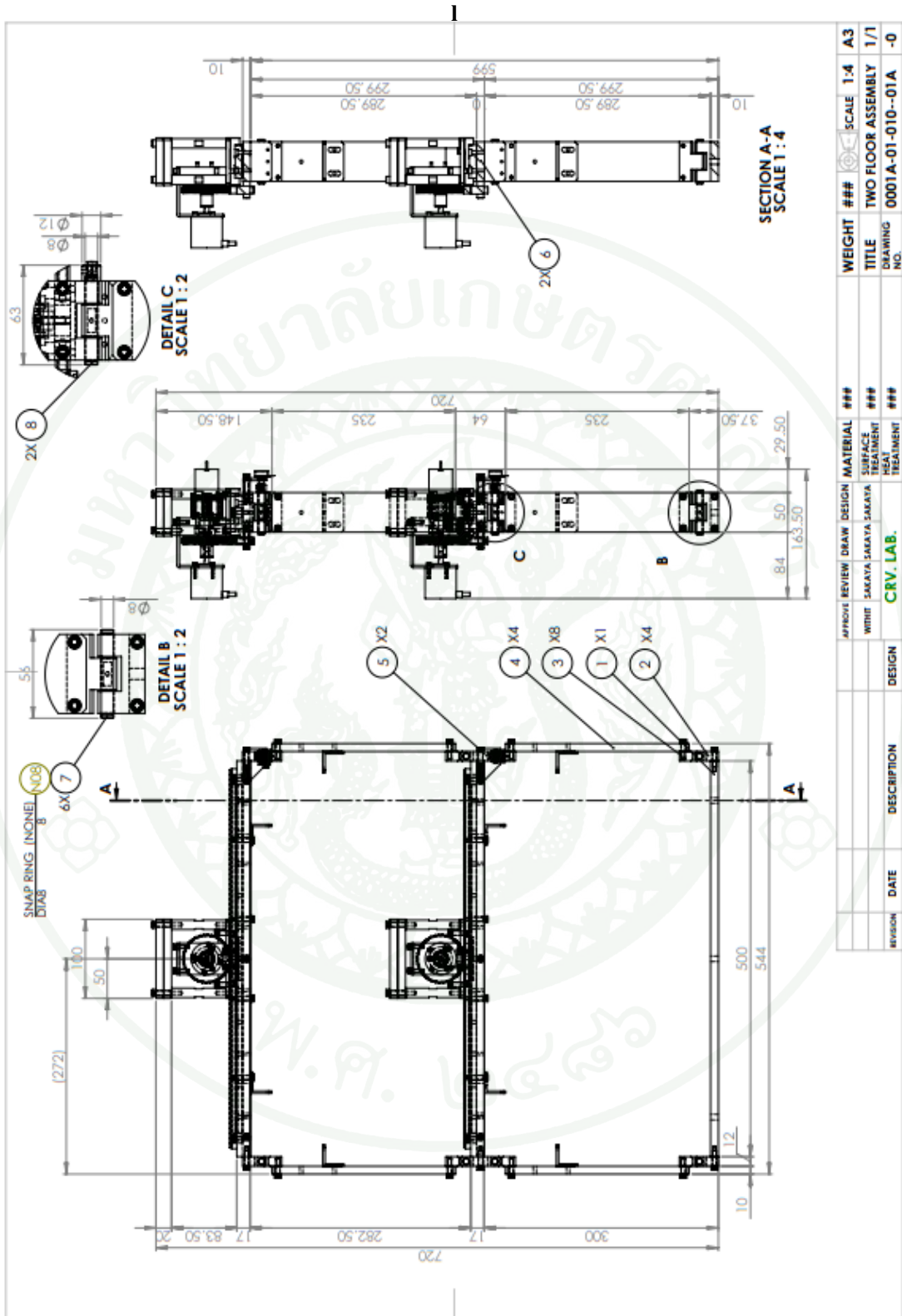
Withit, C. 2011. **System Modeling and Control**. n.p., Bangkok.

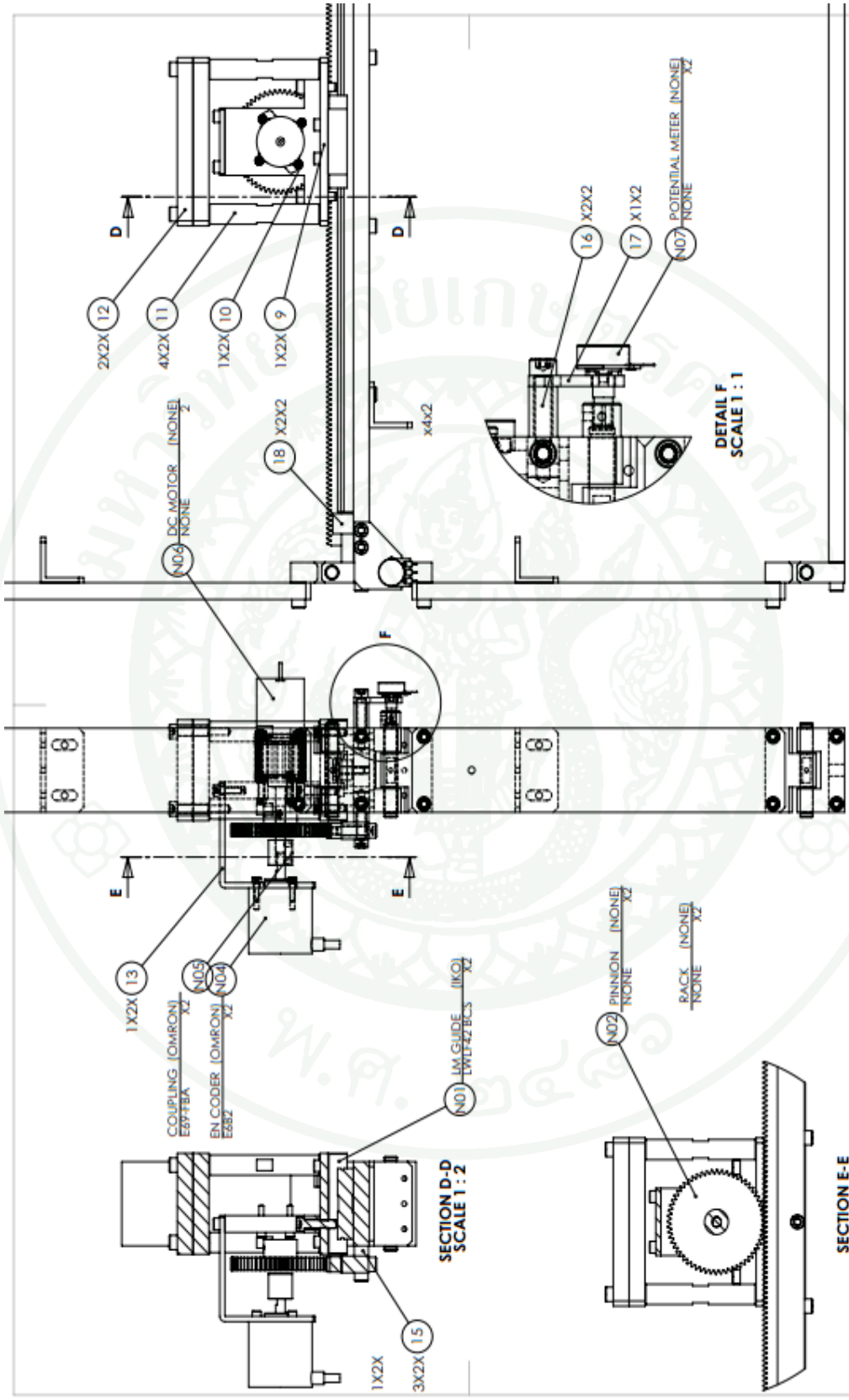






**ภาคผนวก ก**  
**แบบประกอบ (Assembly Drawing) ของ โครงสร้างสองชั้นจำลอง**





REVISION	DATE	DESCRIPTION	DESIGN	APPROVE	REVIEW	DRAW	DESIGN	MATERIAL	###	WEIGHT	###	SCALE	1:2	A3
								SURFACE	###	TWO FLOOR ASSEMBLY	1/1			
								HEAT TREATMENT	###	DRAWING NO.				
								TREATMENT	###	0001A-01-010--02A				-0



ภาคผนวก ข

โปรแกรม Matlab สำหรับการหาเอกลักษณ์ระบบ ( System Identification) ของมวลขับเคลื่อน

## โปรแกรม Matlab สำหรับการหาเอกลักษณ์ระบบ ( System Identification) ของมวลขับเคลื่อน

```
clear
close all
clc

%Load data
acc= load('C:\Users\CRV\Desktop\data\new data\1Hz\1A\acc_1Hz_1A_1.txt');
tetadot= load('C:\Users\CRV\Desktop\data\new data\1Hz\1A\tetadot_1Hz_1A_1.txt');
u= load('C:\Users\CRV\Desktop\data\new data\1Hz\1A\u_1Hz_1A_1.txt');

%Matrix data
y=ones(10662,1);
M=1.95*9.807*0.0312*y;
C=[M,-u,tetadot];
d=-1.95*0.0312*acc;

%Solve constrained linear least-squares problems
x=lsqlin(C,d,[],[],[],[0 0 0],[1 1 1],[0.0107 0.1323 0.0129]);
```



ภาคผนวก ค

โปรแกรม Matlab สำหรับการทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

## โปรแกรม Matlab สำหรับการทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

**% Two floor simulation**

clear

close all

clc

**%time**

ts = 0.001;           **%sampling time**

tend = 20;           **%end time**

t = 0:ts:tend;

**%plant parameter**

mc1=1.95;mc2=1.95;       **%mass(kg)**

mb1=2.52;mb2=2.52;       **%mass(kg)**

mr1=0.46;mr2=0.46;       **%mass(kg)**

r1=0.0312;r2=0.0312;     **%pinnion radius(m)**

h1=0.3;h2=0.3;           **%height(m)**

ks1=100;ks2=100;         **%spring constant(N/m)**

**%mu1=0.0078;mu2=0.0078;   %flic coeff**

c11=0.1565;c12=0.1565;   **%motor constants**

c21=0.0011;c22=0.0011;   **%back emf constants**

k11=c11/r1;

k12=c12/r2;

k21=c21/r1;

k22=c22/r2;

c1=0.15;c2=1.5;           **%viscous**

g=9.807;                 **%gravity**

```

M=[mc1,mc1*h1,0,0;...
mc1*h1,mb1*h1^2+(mr1*h1^2)/2+mc1*h1^2+mb2*h1^2+2*mr2*h1^2+mc2*h1^2,...
mc2*h1,mb2*h1*h2+mr2*h1*h2+mc2*h1*h2;...
0,mc2*h1,mc2,mc2*h2;...
0,mb2*h1*h2+mr2*h1*h2+mc2*h1*h2,mc2*h2,mb2*h2^2+(mr2*h2^2)/2+mc2*h2^2];
Minv=inv(M);
C=[k21/r1,0,0,0; 0,c1,0,0; 0,0,k22/r2,0; 0,0,0,c2];
K=[0,0,0,0; 0,ks1,0,0; 0,0,0,0; 0,0,0,ks2];
MC=-Minv*C; %minusMinvC
MK=-Minv*K; %minusMinvK

%plant matrice Xdot=A*X+B*u, y=C*X+D*u
%X[x1;theta1;x2;theta2;x1d;thata1d;x2d;theta2d]
%u=[k11*v1-mu1*mc1*g;k12*v2-mu2*mc2*g],
%y=[theta1;theta2]

A=[0,0,0,0,1,0,0,0;...
0,0,0,0,0,1,0,0;...
0,0,0,0,0,0,1,0;...
0,0,0,0,0,0,0,1;...
MK(1,1),MK(1,2),MK(1,3),MK(1,4),MC(1,1),MC(1,2),MC(1,3),MC(1,4);...
MK(2,1),MK(2,2),MK(2,3),MK(2,4),MC(2,1),MC(2,2),MC(2,3),MC(2,4);...
MK(3,1),MK(3,2),MK(3,3),MK(3,4),MC(3,1),MC(3,2),MC(3,3),MC(3,4);...
MK(4,1),MK(4,2),MK(4,3),MK(4,4),MC(4,1),MC(4,2),MC(4,3),MC(4,4)];

B=[0,0;0,0;0,0;0,0;...
Minv(1,1),Minv(1,3);...
Minv(2,1),Minv(2,3);...
Minv(3,1),Minv(3,3);...
Minv(4,1),Minv(4,3)];

```

```
C=[0,1,0,0,0,0,0,0; 0,0,0,1,0,0,0,0]
```

```
D=[];
```

```
% initial values(5deg=0.0873 rad ,10deg=0.1745 rad ,15deg=0.2618 rad)
```

```
X1(1)=0; X2(1)=0.2618; X3(1)=0; X4(1)=0.2618;
```

```
X5(1)=0; X6(1)=0; X7(1)=0; X8(1)=0;
```

```
%Main program
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
for i=1:length(t)
```

```
    % no controller
```

```
    v1(i)=0;%4*sin(3*2*pi*t(i));
```

```
    v2(i)=0;%3*sin(3*2*pi*t(i));
```

```
    Xdot=A*[X1(i);X2(i);X3(i);X4(i);X5(i);X6(i);X7(i);X8(i)]+...
```

```
        B*[k11*v1(i);k12*v2(i)];
```

```
    y(:,i)=C*[X1(i);X2(i);X3(i);X4(i);X5(i);X6(i);X7(i);X8(i)];
```

```
    X1(i+1)=X1(i)+ts*Xdot(1);
```

```
    X2(i+1)=X2(i)+ts*Xdot(2);
```

```
    X3(i+1)=X3(i)+ts*Xdot(3);
```

```
    X4(i+1)=X4(i)+ts*Xdot(4);
```

```
    X5(i+1)=X5(i)+ts*Xdot(5);
```

```
    X6(i+1)=X6(i)+ts*Xdot(6);
```

```
    X7(i+1)=X7(i)+ts*Xdot(7);
```

```
    X8(i+1)=X8(i)+ts*Xdot(8);
```

```
end
```

```
teta1 = load('D:\Subject\Thesis MIMO\teta(u0)\15,15_1.txt');
teta2 = load('D:\Subject\Thesis MIMO\teta(u0)\15,15_2.txt');
steta1 = teta1(2250:length(teta1));
steta2 = teta2(2250:length(teta2));

figure(1),
subplot(2,1,1),plot(t(1:length(steta2)),steta2(1:length(steta2))),hold on,
plot(t,X4(1:length(t)),'r'),hold off
xlabel('time(sec)'),ylabel('\theta2')
axis([0 2 -0.3 0.3])
grid on

subplot(2,1,2),plot(t(1:length(steta1)),steta1(1:length(steta1))),hold on,
plot(t,X2(1:length(t)),'r'),hold off
axis([0 2 -0.3 0.3])
xlabel('time(sec)'),ylabel('\theta1')
grid on
```



ภาคผนวก ง

โปรแกรม MATLAB สำหรับวิเคราะห์ระบบ และออกแบบตัวควบคุม

## โปรแกรม MATLAB สำหรับวิเคราะห์ระบบ และออกแบบตัวควบคุม

```

%Hinf mixed-sensitivity
%control design

clear
close all
clc

%time
ts = 0.001; %sampling time
tend = 20; %end time
t = 0:ts:tend;

%plant parameters
mc1=1.95;mc2=1.95;      %mass(kg)
mb1=2.52;mb2=2.52;    %mass(kg)
mr1=0.46;mr2=0.46;    %mass(kg)
r1=0.0312;r2=0.0312;  %pinnion radius(m)
h1=0.3;h2=0.3;        %height(m)
ks1=100;ks2=100;

%mu1=0.0078;mu2=0.0078; %flic coeff
c11=0.1565;c12=0.1565; %motor constants
c21=0.0011;c22=0.0011; %back emf constants
k11=c11/r1
k12=c12/r2;
k21=c21/r1
k22=c22/r2;

g=9.807;                %gravity
ks1 = ureal('k1',100,'Range',[90 110]); %spring const
ks2 = ureal('k2',100,'Range',[90 110]);

```

```

c1 = ureal('c1',0.15,'Range',[0.1 0.2]); %viscous damping
c2 = ureal('c2',1.5,'Range',[1 2]);

M=[mc1,mc1*h1,0,0;...
mc1*h1,mb1*h1^2+(mr1*h1^2)/2+mc1*h1^2+mb2*h1^2+2*mr2*h1^2+mc2*h1^2,...
mc2*h1,mb2*h1*h2+mr2*h1*h2+mc2*h1*h2;...
0,mc2*h1,mc2,mc2*h2;...
0,mb2*h1*h2+mr2*h1*h2+mc2*h1*h2,mc2*h2,mb2*h2^2+(mr2*h2^2)/2+mc2*h2^2];
Minv=inv(M);
C=[k21/r1,0,0,0; 0,c1,0,0; 0,0,k22/r2,0; 0,0,0,c2];
K=[0,0,0,0; 0,ks1,0,0; 0,0,0,0; 0,0,0,ks2];
MC=-Minv*C; %minusMinvC
MK=-Minv*K; %minusMinvK

%plant matrixe Xdot=A*X+B*u, y=C*X+D*u
%X[x1;theta1;x2;theta2;x1d;thata1d;x2d;theta2d]
%u=[k11*v1;k12*v2],
%y=[theta1;theta2]
A=[0,0,0,0,1,0,0,0;...
0,0,0,0,0,1,0,0;...
0,0,0,0,0,0,1,0;...
0,0,0,0,0,0,0,1;...
MK(1,1),MK(1,2),MK(1,3),MK(1,4),MC(1,1),MC(1,2),MC(1,3),MC(1,4);...
MK(2,1),MK(2,2),MK(2,3),MK(2,4),MC(2,1),MC(2,2),MC(2,3),MC(2,4);...
MK(3,1),MK(3,2),MK(3,3),MK(3,4),MC(3,1),MC(3,2),MC(3,3),MC(3,4);...
MK(4,1),MK(4,2),MK(4,3),MK(4,4),MC(4,1),MC(4,2),MC(4,3),MC(4,4)];

B=[0,0;0,0;0,0;0,0;...
Minv(1,1),Minv(1,3);...
Minv(2,1),Minv(2,3);...
Minv(3,1),Minv(3,3);...

```

```

Minv(4,1),Minv(4,3)];
C=[0,1,0,0,0,0,0,0; 0,0,0,1,0,0,0,0];
D=[];

```

**%nominal transfer function model and scaling (page 5 of the MFC book)**

```

Ghat = zpks(ss(A.NominalValue,B,C,D));
Gdhat = eye(2,2);

```

```

dmaxhat = 0.1;
umaxhat = k11*2.5;
emaxhat = 0.09;

```

```

De = emaxhat;
Du = umaxhat;
Dd = dmaxhat;

```

```

G = inv(De)*Ghat*Du;
Gd = inv(De)*Gdhat*Dd;

```

**%condition number (max and min singular values)**

```

figure(1), sigma(G)

```

**%RGA elements and RGA number**

```

omega = logspace(-4,2,61);

```

```

for i = 1:length(omega)

```

```

    Gf = freqresp(G,omega(i));

```

**%G(jw)**

```

    RGAw(:,i) = Gf.*inv(Gf).';

```

**%RGA at frequency omega**

```

    RGAw11(i) = abs(RGAw(1,1,i));

```

```

    RGAw12(i) = abs(RGAw(1,2,i));

```

```

    RGAw21(i) = abs(RGAw(2,1,i));

```

```

    RGAw22(i) = abs(RGAw(2,2,i));

```

```

    RGAno(i) = sum(sum(abs(RGAw(:,i) - eye(2))));    %RGA number
end
figure(2),
subplot(221),semilogx(omega,RGAw11)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('RGA element11')
subplot(222),semilogx(omega,RGAw12)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('RGA element12')
subplot(223),semilogx(omega,RGAw21)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('RGA element21')
subplot(224),semilogx(omega,RGAw22)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('RGA element22')

figure(3),
semilogx(omega,RGAno)
xlabel('frequency'),ylabel('RGA number')

%Controllability and observability
rank(ctrb(A.NominalValue,B)); %rank = 8, plant is state controllable
rank(observ(A.NominalValue,C)); %rank = 6, plant is not state observable

%Zeros and poles
[Q,Pi] = eig(A.NominalValue');
UP = B'*Q; %input pole vectors
[T,Po] = eig(A.NominalValue);
YP = C*T; %output pole vectors

%Find uncertain weight wI (input multiplicative)
Ghatp = zpk(ss(usample(A,100),B,C,D));
Gp = inv(De)*Ghatp*Du; %scaled perturbed plant

omega = logspace(-4,2,61);

```

```

Gf = frd(G,omega);
Gpf = frd(Gp,omega);
wI11f = frd(tf([1 10*0.11],[1/4 10]),omega);
wI12f = frd(tf([1 10*0.11],[1/4 10]),omega);
wI21f = frd(tf([1 10*0.2],[1/4 10]),omega);
wI22f = frd(tf([1 10*0.11],[1/4 10]),omega);

figure(4),
subplot(221),uplot('liv,lm',(Gpf(1,1, :,1)-Gf(1,1))/Gf(1,1),'r',wI11f)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('magnitude (dB)')
subplot(222),uplot('liv,lm',(Gpf(1,2, :,1)-Gf(1,2))/Gf(1,2),'r',wI12f)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('magnitude (dB)')
subplot(223),uplot('liv,lm',(Gpf(2,1, :,1)-Gf(2,1))/Gf(2,1),'r',wI21f)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('magnitude (dB)')
subplot(224),uplot('liv,lm',(Gpf(2,2, :,1)-Gf(2,2))/Gf(2,2),'r',wI22f)
xlabel('frequency (rad/sec)'),ylabel('magnitude (dB)')

%Hinf mixed-sensitivity control design (page 360 of MFC textbook)
W1 = tf([1 10],[1 0.001]); %spec for S
W2 = tf([0.8 0.001],[1 50]); %spec for KS

%W1 = 0.5*tf([1 20],[1 0.012]); %spec for S
%W2 = 0.5*tf([1 0.0001],[1 10]); %spec for KS

figure(5),
subplot(211),sigmaplot(inv(W1));
subplot(212),sigmaplot(inv(W2));

%control synthesis
[khinf1,hinf1,gopt1] = mixsyn(G,W1,-W2,[]);

```

**%frequency domain result**

```
khinf1;
L1 = G*khinf1;
S1 = inv(eye(2)+G*khinf1)
T1 = eye(2)-S1
figure(6),
sigma(S1,'g',T1,'r',1/W1,'g-',1*G/ss(-W2),'r-')
```

**%time domain result**

**%d1 = 1\*sin(2\*pi\*0.01\*t); %plant-output disturbance rejection**

```
d1 = 1*sin(1*2*pi*t);
d2 = 0*sin(0.1*2*pi*t);
%d1 = 1*ones(1,length(t));
%d1 = square(2*pi*0.1*t);
y = lsim(S1,[d1;d2],t);
figure(7),
subplot(211),plot(t,y(:,2)),hold on,plot(t,d2,':'),hold off
xlabel('time (sec)'),ylabel('\theta2 (rad)')
axis([0 20 -1.2 1.2])
grid on
subplot(212),plot(t,y(:,1)),hold on,plot(t,d1,':'),hold off
xlabel('time (sec)'),ylabel('\theta1 (rad)')
axis([0 20 -1.2 1.2])
grid on
```

**u = lsim(khinf1\*S1,[d1;d2],t); %control input**

```
figure(8),
subplot(211),plot(t,u(:,2))
xlabel('time (sec)'),ylabel('V2 (volt)')
axis([0 20 -10 10])
```

```

grid on
subplot(212),plot(t,u(:,1))
xlabel('time (sec)'),ylabel('V1 (volt)')
axis([0 20 -10 10])
grid on

%Robust Stability (MM = N11 page 298 MFC textbook)
MM = -[wI11f wI12f; wI21f wI22f]*T1;
figure(9),
sigmaplot(MM)

%k reduce
%perform controller reduction using mu analysis/synthesis toolbox

[khinf1,g] = balreal(khinf1);%Compute balance realization
elim = (g<1e-8); %Small entire of g are negligible
rsys = modred(khinf1,elim,'Truncate');

S2 = inv(eye(2)+G*khinf1);
y1 = lsim(S2,[d1;d1],t);
figure(10),
subplot(221),plot(t,y1(:,1)),hold on,plot(t,d1,':'),hold off
subplot(222),plot(t,y1(:,2)),hold on,plot(t,d1,':'),hold off

```

## ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ	นายศักย บุญชูวิทย์
เกิดวันที่	19 พฤศจิกายน พศ. 2523
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น
ประวัติการศึกษา	วศ.บ. (เครื่องจักรกลเกษตร) มหาวิทยาลัยขอนแก่น

