บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 กลไกการได้ยินและอันตรายของเสียงดังต่อมนุษย์

คนเราสามารถได้ยินเนื่องจากคลื่นเสียงเคลื่อนที่จากหูชั้นนอก เข้าสู่หูชั้นกลาง แล้วเข้าสู่หูชั้นใน การทำงานของหูในช่วงตั้งแต่ใบหู รูหู กระดูกหูชั้นกลาง จัดเป็นการนำเสียงผ่านโมเลกุลของอากาศ ซึ่งจะส่งต่อไปยังหูชั้นกลางในหูชั้นกลางจะมีกระดูกหู3 ชิ้นส่งคลื่นเสียงเข้าไปสู่หูชั้นใน ที่กระดูกนี้จะมีกล้ามเนื้ออยู่ซึ่งเมื่อมีเสียงดังมากเกินไปผ่านเข้ามา ร่างกายจะมีกลไกป้องกันโดยให้กล้ามเนื้อนี้จะหดตัวอัตโนมัติช่วยจะลดระดับเสียงที่จะผ่านเข้าไปสู่หูชั้นในได้ประมาณ 30 –40 dB ที่หูชั้นใน จะมีอวัยวะรูปก้นหอยเรียกคอคเคลีย(Cochlea) ภายในกลวงบรรจุของเหลวไว้ พื้นของคอคเคลียจะบุด้วยเซลล์ขน(Hair cell) ซึงทำหน้าที่รับความรู้สึกสั่นสะเทือนแปลงเป็นคลื่นประสาทส่งไปสมองเพื่อแปลความหมายของเสียงที่ได้ยิน การนำคลื่นเสียงจากอากาศมาสู่หูชั้นกลางเรียกว่า Conductive Function และการนำคลื่นเสียงจากการสั่นสะเทือนแล้วแปลเป็นกระแสประสาทเพื่อส่งไปรับรู้ที่สมองจะเรียกว่า Sensorineural Function ตัวเซลล์ขนนี้จะมีความยาวไม่เท่ากันและมีความจำเพาะเจาะจงต่อความถี่ใดความถี่หนึ่งถ้าเสียงดังมาก เกินกว่าการป้องกันโดยธรรมชาติของร่างกายคือถ้ามีระดับความเข้มของเสียงสูงกว่า 85 dB เมื่อคลื่นเสียงเดินทางมาถึงเซลล์ขนจะทำให้มีการสั่นสะเทือนอย่างต่อเนื่องเป็นเวลานานติดต่อกัน เซลล์ขนจะไม่สามารถปรับสภาพคืนสู่ปกติ และหลุดร่วงไป ก็จะเกิดการขาดช่วงการเดินทางของเสียงที่ไปยังสมอง เกิดการสูญเสียการได้ยินขึ้น และก็จะเป็นเฉพาะความถี่ของเสียงดังนั้นๆ การที่เซลล์ขนถูกทำลาย ทำให้เกิดหูตึงได้ 2 ลักษณะ คือ

2.1.1 Acoustic trauma คือ การสูญเสียการได้ยินอย่างฉับพลันเมื่อได้ยินเสียงดังมาก เช่น เสียงระเบิด เสียงปืน ฯลฯ

2.1.2 Noise induced hearing loss คือ การสูญเสียการได้ยินแบบค่อยเป็นค่อยไป เกิดขึ้นในผู้ที่ทำงานอยู่ในที่ที่มีเสียงดังเป็นเวลานานๆ เช่น อุตสาหกรรมสิ่งทอ, อุตสาหกรรมเครื่องเรือน, อุตสาหกรรมถลุงเหล็ก, อุตสาหกรรมเครื่องแก้ว, อุตสาหกรรมเครื่องเหล็ก, โรงเลื่อย, ขับเรือหางยาว, ขับรถสามล้อเครื่อง รายการดนตรี จากการศึกษาวิจัยพบว่า ในกลุ่มคนงานที่ทำงานสัมผัสกับเสียงที่ดังกว่า 85 dBA นาน 8 ชั่วโมง/วัน ติดต่อกันนาน 5 ปี มีโอกาสที่จะทำให้สมรรถภาพการได้ยินเสียไป

2.2 ประเภทของความสูญเสียการได้ยิน

ประเภทของความสูญเสียการได้ยิน แบ่งได้ 5 ประเภท ดังนี้

2.2.1 การนำเสียงบกพร่อง (Conductive hearing loss) ความผิดปกติเกิดขึ้นในหูชั้นนอกและชั้นกลาง แต่ ประสาทหูยังดีอยู่ อาการคือมีของเหลวออกจากช่องหูอาจจะเป็นเลือดหรือหนอง มีประวัติการอักเสบของช่องหูมาก่อนการพูดคุยมักพูดเสียงเบาทุ้มนุ่มนวล การได้ยินจะดีชัดเจนเมื่ออยู่ในที่

จอแจแต่ไม่ค่อยดีในที่เงียบๆ มักมีปัญหาในการฟังเสียงขณะเคี้ยวอาหาร บางรายมีเสียงรบกวนในหู (tinnitus) เป็นเสียงต่ำๆ การพูดจาชัดเจนออกเสียงได้ตามปกติ ตรวจการได้ยินพบการสูญเสียในช่วงความถี่ต่ำๆ และมักไม่มากกว่า 60 dBHL สาเหตุเกิดจาก โรคหรือความผิดปกติที่หูชั้นนอก หูพิการตั้งแต่กำเนิด สิ่งแปลกปลอมทำให้เกิดการอุดตันในช่องหู ขี้หูอุดตัน(ผนังช่องหูอักเสบบวม จนช่องหูตีบตัน โรคเนื้องอกในช่องหูชั้นนอก ช่องหูพับลง-โรคหรือความผิดปกติที่แก้วหู : มีรูทะลุที่เยื่อแก้วหู แก้วหูอักเสบ เยื่อแก้วหูหนา-โรคหรือความผิดปกติในหูชั้นกลาง มีเลือดออกในหูชั้นกลาง, โรคหูน้ำหนวก (ทั้งชนิดมีน้ำไหลและแห้ง) ,โรคหูชั้นกลางมีหินปูนจับแข็ง, ภาวะแทรกซ้อนจากการติดเชื้อไวรัส, กระดูก 3 ชิ้นแตกหรือหัก

2.2.2 ประสาทรับฟังเสียงบกพร่อง (Sensorinural hearing loss) ความผิดปกติที่เกิดขึ้นในหูชั้นใน (cochlea) หรือที่ประสาทรับฟังเสียง (acoustic nerve) อาการคือ ถ้ามีการสูญเสียของประสาทหูมากทั้ง 2 ข้างและเป็นเวลานาน เสียงพูดจะดังมากกว่าปกติ เพราะไม่ได้ยินเสียงตัวเอง มีเสียงรบกวนในหูเป็นเสียงสูงๆ จะฟังเสียงพูดได้ดีเมื่ออยู่ในที่สงบและจะไม่ค่อยเข้าใจคำพูดเมื่ออยู่ในที่จอแจ มักไม่ค่อยเข้าใจคำพูดแม้ว่าเสียงพูดนั้นดังถึงระดับการได้ยินปกติแล้วก็ตาม มักมีอาการเวียนศีรษะแบบบ้านหมุนร่วมด้วย ถ้าประสาทหูเสียมากทั้ง 2 ข้าง หรือเป็นมาแต่กำเนิดมักจะพูดไม่ชัดหรือพูดไม่ได้ ไม่มีประวัติ ของการปวดหู หรือมีของเหลวไหลออกจากหู ตรวจการได้ยินพบการสูญเสียในช่วงความถี่สูงๆสาเหตุเกิดจาก

2.2.2.1 ประสาทรับฟังเสียงบกพร่องแต่กำเนิดเช่น ขาดออกซิเจนขณะอยู่ในครรภ์หรือระหว่างคลอด, ติดเชื้อแต่กำเนิดหรือหลังคลอด เช่น ซิฟิลิส หัด หัดเยอรมัน คางทูม สุกใส ไข้หวัดใหญ่ ปอดอักเสบ, การอักเสบของเยื่อหุ้มสมองหรือหูชั้นใน

2.2.2.2 ประสาทรับฟังเสียงบกพร่องจากยาโดย ผู้ป่วยจะมีการสูญเสียการได้ยินของหูทั้ง 2 ข้างพร้อมๆ กัน ยาบางชนิดทำให้มีอาการชั่วคราว เมื่อหยุดยาการได้ยินอาจกลับคืนมาได้ แต่ยาบางชนิดทำให้มีอาการถาวรรักษาไม่หาย เช่น kanamycin, streptomycin

2.2.2.3 ประสาทรับฟังเสียงบกพร่องจากเสียงดัง (noise induced hearing loss)

2.2.2.4 โรคที่เกิดจากความผิดปกติเกี่ยวกับปริมาณของของเหลวในหูชั้นใน (Meniere's disease) ทำให้มีอาการหูอื้อเวียนศีรษะ บ้านหมุน คลื่นไส้อาเจียน และมีเสียงรบกวนในหู อาจเป็นหูเดียวหรือสองหูก็ได้ อาการของโรคจะเป็นซ้ำๆ กัน มีอาการเป็นๆ หายๆ

2.2.2.5 ประสาทหูพิการจากการจับแข็งของกระดูกในหูชั้นใน

2.2.2.6 ประสาทหูบกพร่องในวัยชรา (Presbycusis hearing loss) ความผิดปกติเกิดขึ้นจากเซลล์ขนที่อยู่บริเวณฐานของก้นหอยในหูชั้นในมีการเสื่อมไปตามอายุ ทำให้การรับฟังเสียงสูงๆ ได้ไม่ดี มักมีเสียงดังในหูเป็นเสียงสูงๆ ตรวจช่องหูไม่พบสิ่งผิดปกติ มีความผิดปกติของการได้ยินของหูทั้งสองข้าง มักพบในคนที่อายุ 40 ปีขึ้นไป

2.2.2.7 ศีรษะทูกกระทบกระเทือน ทำให้ประสาทรับฟังเสียงบกพร่องเล็กน้อยไปจนถึงระดับรุนแรง

2.2.3 การรับฟังเสียงบกพร่องแบบผสม (Mixed hearing loss) เป็นภาวะที่เกิดจากความผิดปกติในระบบการนำเสียงร่วมกับประสาทรับฟังเสียงบกพร่อง พบในโรคที่มีความพิการที่หูชั้นนอก ชั้น

กลาง และชั้นในร่วมกัน เช่นโรคหูน้ำหนวกเรื้อรังซึ่งอาการลุกลามเข้าไปในหูชั้นใน โรคหินปูนจับแข็งที่กระดูกโกลน

2.2.4 ความผิดปกติทางจิต (Functional or Psychological hearing loss)

2.2.5 ความบกพร่องที่สมองส่วนกลาง (Central Hearing Impairment) สมองไม่สามารถรับและแปลความหมายได้ จึงไม่สามารถเข้าใจความหมายของเสียงที่ได้ยิน เช่น โรคเส้นเลือดในสมองแตก ทำให้ศูนย์การรับฟังไม่สามารถใช้การได้

2.3 การสูญเสียการได้ยินเนื่องจากเสียงดัง (Noise Induced Hearing Loss)

2.3.1 ประสาทหูผิดปกติเนื่องจากเสียงดังรบกวน

2.3.1.1 การสูญเสียความสามารถในการได้ยินชั่วคราว (Temporary threshols shift : TTS) เซลล์ประสาทรับการได้ยินมีอาการล้าจากการสัมผัสเสียงดังต่อเนื่องเป็นเวลานานๆ ไม่สามารถแปลสัญญาณการสั่นสะเทือนเป็นคลื่นประสาทได้ เกิดอาการหูตึงชั่วคราว (Audiotory fatigue) อาการหูตึงนี้มักร่วมกับมีเสียงดังในหู (tinnitus) ในกรณีสงสัยว่าจะสูญเสียความสามารถในการได้ยินชั่วคราว ควรให้พนักงานพักจากการฟังเสียงที่ต่ำกว่า70 dBAอย่างน้อย 48 ชั่วโมง

2.3.1.2 การสูญเสียความสามารถในการได้ยินถาวร (Permanent threshold shift : PTH) เมื่อผู้ป่วยมีอาการล้าของเซลรับเสียงจนไม่สามารถได้ยินเสียงในระดับปกติ หากยังสัมผัสกับเสียงดังต่อเนื่องอีกก็จะทำให้เซลรับเสียงถูกทำลายอย่างถาวร (Degenerative change of hair cell) ซึ่งมีลำดับดังนี้

1) ในระยะแรกการสูญเสียการได้ยินจะเริ่มเสียที่ช่วงความถี่ของเสียง 3,000 – 6,000 Hz. และจะพบเสมอว่าจะเสียที่ความที่ของการได้ยินที่ 4,000 Hz. ก่อนความถี่อื่นๆ

2) เริ่มมีเสียงดังรบกวนในหู ความไวของหูในการรับเสียงลดลง แต่พอเลิกงานไม่ได้อยู่ในที่ที่มีเสียงดังจะรู้สึกว่าการได้ยินดีขึ้น อาจมีอาการปวดหูหรือเวียนศีรษะร่วมด้วย

3) เมื่อทำงานในที่มีเสียงดังเป็นระยะเวลานานๆจะมีการสูญเสียการได้ยินไปทีละน้อย โดยไม่รู้สึก ตัว จนลุกลามไปถึงช่วงความถี่ของการพูดคุย (500 – 2,000 Hz.) ทำให้การรับฟังเสียงคำพูดไม่เข้าใจ ถ้าผิดปกติมากจะไม่ทราบทิศทางของเสียงที่ได้ยิน

4) ตรวจภายในช่องหูไม่พบสิ่งผิดปกติ ตรวจวัดการได้ยินด้วยเครื่องตรวจวัดการได้ยิน จะได้กราฟลักษณะเส้นประสาทหูผิดปกติ

2.3.2 ประสาทหูผิดปกติเนื่องจากมีเสียงดังมาก ๆ

2.3.2.1 หูอื้อทันทีหลังจากได้รับเสียงดัง

2.3.2.2 มีเสียงดังในหูตลอดเวลา

2.3.2.3 มักฟังคำพูดเข้าใจดี เนื่องจากการได้ยินไม่เสียที่บริเวณความถี่ของการพูดคุย

2.3.2.4 เมื่อตรวจวัดการได้ยินพบว่ามีลักษณะความผิดปกติ

2.3.2.5 ตรวจภายในช่องหูพบว่า ช่องหูชั้นนอกปกติ แต่อาจมีแก้วหูทะลุร่วมด้วย

2.4 การตรวจเพื่อระบุการสูญเสียการได้ยิน

ซึ่งการตรวจการสูญเสียการได้ยินนั้นสามารถทำออกมาเป็น ภาพบันทึกการได้ยินเพื่อนำไปวิเคราะห์ว่าหูของผู้ตรวจนั้นมีปัญหาที่ระดับเสียงไหน หรือความถี่ใด โดยจะผลการตรวจจะมี 2 ส่วน คือ

2.4.1 ระดับการได้ยิน

มีความผิดปกติในช่วงคลื่นเสียงความถี่สูงหรือต่ำร่วมด้วยหรือไม่ โดยผลการตรวจจะแบ่งเป็นระดับดังนี้

2.4.1.1 ผู้ที่มีหูตึง

ในกรณีที่เป็นเล็กน้อยถึงปานกลาง อาจทำให้เสียบุคลิกบ้าง ควรใส่เครื่องป้องกันทุกครั้งที่เข้าสู่ที่บริเวณที่มีเสียงดัง หลีกเลี่ยงการใช้ยาที่มีพิษต่อระบบประสาทหู สำหรับผู้ที่มีหูตึงในระดับมากหรือรุนแรง ควรปรึกษาแพทย์ทางหู-คอ-จมูก เพื่อพิจารณาว่ามีความจำเป็นต้องใช้เครื่องช่วยการได้ยินหรือไม่ สำหรับระดับความสูญเสียของการได้ยิน(หูตึง) แบ่งเป็นดังนี้

1) ระดับการได้ยินปกติ 0-19dB

2) หูตึงระดับ 1 หูตึงน้อย (mild hearing loss) ระดับการสูญเสียการได้ยิน: 20-39 dB

3) หูตึงระดับ 2 หูตึงปานกลาง (moderate hearing loss) สูญเสียการได้ยิน: 41-59 dB

4) หูตึงระดับ 3 หูตึงมาก (severe hearing loss) สูญเสียการได้ยิน: 60-89 dB

5) หูตึงระดับ 4 หูตึงรุนแรง (profound hearing loss) สูญเสียการได้ยิน: 90+ dB

2.4.1.2 ผู้ที่มีระดับการได้ยินปกติแต่มีความผิดปกติของการได้ยินที่ความถี่สูง (หรือความถี่ต่ำ) ร่วมด้วย

หมายความว่าการได้ยินของท่านเป็นปกติดี ท่านสามารถพูดคุย สื่อสารในชีวิตประจำวันได้อย่างปกติ แต่ระดับการได้ยินนั้นเริ่มมีการสูญเสียที่ความถี่สูง (หรือต่ำ) ซึ่งไม่ใช่เสียงที่คนเราพูดคุยกัน มักเป็นเสียงเครื่องจักร, โลหะ, เสียงนาฬิกา เป็นต้น ส่วนใหญ่มักเกิดจากได้รับเสียงดังๆ เป็นเวลานาน

2.5 การตรวจหูและประเมินการได้ยิน

การตรวจการได้ยินสามารถจำแนกได้เป็น 3 ประเภท

2.5.1 การตรวจการได้ยินด้วยส้อมเสียง (tuning fork test) เสียงที่ใช้ในการตรวจอยู่ที่ 512 เฮริตซ์ มี 2 วิธี

2.5.1.1 Weber test วิธีตรวจ คือผู้ตรวจวางส้อมเสียงที่เคาะแล้วไว้ในแนวกลางศีรษะ เช่น กลางหน้า ผาก กลางกระหม่อม คาง ฟันหน้า แล้วถามผู้ป่วยว่าได้ยินเสียงดังไปหูด้านไหนมากกว่ากัน

2.5.1.2 Rinne test วิธีตรวจ คือ ผู้ตรวจวางส้อมเสียงที่ถูกเคาะแล้วหน้าช่องหู แต่อย่าแตะใบหูของผู้ป่วย และวางก้านของส้อมเสียงไว้ที่บริเวณกระดูกมาสตอยด์ ให้ผู้ป่วยฟังเปรียบเทียบว่าได้ยินหน้าช่องหูกระดูกดังกว่าหรือตรงกระดูกมาสตอยด์ดังกว่า

2.5.2 การตรวจการได้ยินโดยใช้เสียงบริสุทธิ์ (Pure tone audiometry) ใช้เครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์แบ่งออกเป็น 2 ชนิด

2.5.2.1 การตรวจการได้ยินทางอากาศ (air conduction test – AC) โดยใช้ที่ครอบหู (earphones) ครอบหูทั้ง 2 ข้างเสียงจะเดินทางผ่านจากที่ครอบหูไปยังหูชั้นนอก ชั้นกลาง และหูชั้นในช่วงความถี่ที่ตรวจ คือ 250 500 1,000 2,000 4,000 และ 8,000 เฮริตซ์ในช่วงความถี่ที่ 500 – 4,000 เฮริตซ์ ใช้ระดับความดัง –10 dBHL – 120 dBHL ความถี่ที่ 250 และ 8,000 ระดับความดังต่ำกว่า

2.5.2.2 การตรวจการได้ยินทางกระดูก (bone conduction test – BC) วาง bone vibrator ไว้ที่บริเวณกระดูกมาสตอยด์ของหูข้างที่ตรวจ เสียงจะเดินทางผ่านจากกระดูกมาสตอยด์ไปยังหูชั้นใน ช่วงความถี่ที่ใช้ตรวจ คือ 500 – 4,000 เฮริตซ์ ระดับความดังที่ใช้เริ่มตั้งแต่ 10 dBHL – 70 dBHL

2.5.3 การตรวจการได้ยินโดยใช้คำพูด (Speech audiometry) เครื่องมือที่ใช้ตรวจเรียก Speech audiometer เสียงพูดที่ผ่านเข้าไปในเครื่องสามารถผ่านทางไมโครโฟน ระดับความดังเริ่มตั้งแต่ 10 เดซิเบล – 110 เดซิเบล จะไม่มีความถี่เฉพาะปรากฏให้เห็นเพราะเสียงพูดนั้นเป็นคลื่นเสียงที่มีความถี่หลายๆความถี่รวมกัน แบ่งเป็น 3 ประเภท

2.5.3.1 Speech – detection threshold (SDT) คือ ระดับเสียงพูดที่ต่ำที่สุดที่ผู้ถูกทดสอบสามารถรับฟังได้ว่าเป็นเสียง วิธีตรวจ SDT คือ ผู้ตรวจเพิ่มความดังโดยใช้เสียงพูด หรือทำเสียงต่างๆเพื่อให้เกิดความสนใจ หรือตอบสนองเสียงที่ได้ยิน

2.5.3.2 Speech – reception threshold (SRT) คือ ระดับเสียงพูดที่ต่ำที่สุดที่ผู้ถูกตรวจสามารถเข้าใจว่าเป็นคำพูด อย่างน้อยร้อยละ 50 ของคำที่ใช้ทดสอบในระดับเดียวกันแต่ละพยางค์ต้องมีความดังใกล้เคียงกัน เช่น ไฟฟ้า ดอกไม้ รองเท้า เสื้อผ้า พ่อ แม่

2.5.3.3 Word – discrimination testing หรือ Speech discrimination testing (SD) หรือ Word recognition testing (WR) เป็นการตรวจความสามารถของผู้ถูกทดสอบในการแยกแยะเสียงพูด เมื่อเสียงพูดอยู่ในระดับความดังที่พอเหมาะ

2.6 ผลการตรวจ audiogram

2.6.1 การได้ยินปกติ (normal hearing) เป็นกลุ่มที่มีการได้ยินอยู่ในเกณฑ์ปกติทั้งการตรวจทาง AC และ BC มีลักษณะ audiogram สรุปได้ดังนี้

2.6.1.1 ค่าเฉลี่ยทาง AC ที่500-2000 เฮิรตซ์ ไม่เกิน 250dBHL

2.6.1.2 ระดับการได้ยินในแต่ละความถี่ตั้งแต่ 250-8000 เฮิรตซ์ ไม่เกิน 25 dBHL

2.6.1.3 ระดับการได้ยินทาง AC และ BC ในแต่ละความถี่ต้องใกล้เคียงกัน หรือถ้ามีระดับการได้ยินทาง BC ดีกว่า AC คือมี air bone gap (AB gap) ต้องไม่เกิน 10 dBHL

2.6.2 การนำเสียงบกพร่อง (conductive hearing loss) ผู้ป่วยมีพยาธิสภาพที่บริเวณหูชั้นนอก หรือหูชั้นกลาง ทำให้เสียงไม่สามารถผ่านเข้าไปสู่ cochler ได้สะดวก ผู้ป่วยมีปัญหาในการรับฟังเสียงทาง AC แต่การรับฟังเสียงทาง BC เป็นปกติ สรุปลักษณะ audiogram ได้ดังนี้ (Audiogram มีการสูญเสียการได้ยินเนื่องจากการนำเสียงบกพร่องในหูข้างขวา) ค่าเฉลี่ยทาง AC ที่ 500-2000 เฮิรตซ์ มากกว่า 25 dBHL แต่ไม่เกิน 60 dBHL

2.6.2.1 ค่าเฉลี่ยทาง BC ที่ 500-2000 เฮิรตซ์ น้อยกว่า 25 dBHL

2.6.2.2 มี AB gap อย่างน้อย 15 dBHL 2 ความถี่ขึ้นไป

2.6.3 ประสาทรับฟังเสียงบกพร่อง (sensorineural hearing loss) ผู้ป่วยมีพยาธิสภาพที่ cochler หรือเส้นประสาทหู ทำให้มีปัญหาในการรับฟังเสียงทั้งทาง AC และ BC สรุปลักษณะ audiogram ได้ดังนี้ (Audiogramมีการสูญเสียการได้ยินเนื่องจากประสาทรับฟังเสียงบกพร่องในหูข้างขวา)

2.6.3.1 ค่าเฉลี่ยทาง AC ที่ 500-2000 เฮิรตซ์ มากกว่า 25 dBHL

2.6.3.2 ค่าเฉลี่ยทาง BC ที่ 500-2000 เฮิรตซ์ มากกว่า 25 dBHL

2.6.3.3 ระดับการได้ยินทาง AC และ BC ในแต่ละความถี่ต้องใกล้เคียงกัน หรือถ้ามี AB gap ต้องไม่เกิน 10 dBHL

2.7 เครื่องช่วยฟัง (Hearing Aids**)**

เครื่องช่วยฟัง คือ เครื่องขยายเสียงขนาดเล็กที่สามารถใส่ติดไว้ที่หู เพื่อทำหน้าที่ขยายเสียง จากภายนอกทำให้ผู้ฟังรับรู้เสียงได้ดีขึ้น เครื่องช่วยฟังถือเป็นอุปกรณ์ช่วยการได้ยิน (Hearing devices) ชนิดหนึ่งสำหรับผู้ที่มีความบกพร่องทางการได้ยิน ซึ่งมีอยู่หลายแบบ

2.7.1 เครื่องช่วยฟัง (Hearing aids) แบ่งเป็น 2 ประเภท

2.7.1.1 เครื่องช่วยฟังชนิดฟังเสียงทางอากาศ (Air conduction hearing aid) เป็นเครื่องที่ใส่ ไว้ที่หู โดยให้เสียงผ่านเข้าทางช่องหู

2.7.1.2 เครื่องช่วยฟังชนิดฟังเสียงทางกระดูก (Bone conduction hearing aid) เป็นเครื่องที่ใส่ไว้ที่หู โดยให้เสียงผ่านเข้าที่บริเวณหลังใบหู (mastoid) กรณีที่ผู้ป่วยไม่สามารถใส่เครื่องทางช่องหู เช่น รูหูตีบ ไม่มีรูหู ผู้ป่วยที่มีหนองไหลจากหูตลอดเวลา เป็นต้น เครื่องประเภทนี้ มีทั้งชนิดที่วางอยู่ภายนอก และชนิดที่แพทย์ต้องทำการ ผ่าตัดเพื่อฝังไว้ที่กะโหลกศีรษะโดยมีตัวรับเสียงอยู่ภายนอก (Bone-Anchor Hearing Aid)

2.7.2 ข้อบ่งชี้ในการใช้เครื่องช่วยฟัง

การใช้เครื่องช่วยฟังให้เกิดผลดีสำหรับผู้ป่วยแต่ละราย ควรอยู่ในความดูแลของโสตแพทย์และนักโสตสัมผัสวิทยา เนื่องจากสาเหตุของการสูญเสียการได้ยินในผู้ป่วยแตกต่างกันไป บางรายสามารถรักษาหรือแก้ไขได้ด้วยการให้ยาหรือการผ่าตัด อาจไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องช่วยฟัง นอกจากนั้น คุณสมบัติและรายละเอียดของเครื่องช่วยฟังที่มีอยู่ในปัจจุบันมีมากมายหลายอย่าง ซึ่งผู้ป่วยควรทราบเพื่อ

ประกอบการตัดสินใจ มิฉะนั้น ผู้ป่วยอาจไม่ได้รับประโยชน์จากการใช้เครื่องช่วยฟังเท่าที่ควรหรืออาจเป็นอันตรายทำให้สูญเสียการได้ยินมากขึ้น ผู้ป่วยที่จะได้รับประโยชน์จากเครื่องช่วยฟังควรมีคุณสมบัติดังนี้

2.7.2.1 ผู้ป่วยที่สูญเสียการได้ยินซึ่งไม่สามารถรักษาให้หายได้ด้วยการให้ยาหรือการผ่าตัด

2.7.2.2 การสูญเสียการได้ยินนั้นมีผลกระทบต่อการสื่อความหมาย เช่นได้ยินเสียงแต่ไม่เข้าใจความหมาย

2.7.2.3 การสูญเสียการได้ยินที่มีผลกระทบต่อพัฒนาการทางภาษาและการพูดในเด็ก

2.7.2.4 ผู้ป่วยสูญเสียการได้ยินจากโรคหูที่อาจได้รับประโยชน์จากการผ่าตัด แต่มีข้อห้ามในการผ่าตัด เช่น เป็นโรคหัวใจ เหลือการได้ยินเพียงข้างเดียว อีกข้างหนึ่งหูหนวก เป็นต้น

2.7.3 ประโยชน์ที่จะได้รับจากการใช้เครื่องช่วยฟัง

2.7.3.1 การรับฟังเสียงดีขึ้น สามารถโต้ตอบสื่อความหมายด้วยการฟังและการพูดดำเนินกิจกรรมในชีวิตประจำวันได้เช่นเดียวกับคนทั่วไปในสังคม

2.7.3.2 ผู้ป่วยที่สูญเสียการได้ยินและมีเสียงดังรบกวนในหู เมื่อใส่เครื่องช่วยฟังแล้วนอกจากการฟังจะดีขึ้น เสียงรบกวนในหูมักจะลดลงหรือหายไป

2.7.3.3 การใส่เครื่องช่วยฟังจะช่วยรักษาหน้าที่ของหูให้คงไว้ สำหรับผู้ที่สูญเสียการได้ยินเป็นเวลานานๆ หากไม่ได้รับการฟื้นฟู ความสามารถในการเข้าใจคำพูดจะลดลงทีละน้อย จนฟังไม่รู้เรื่อง ซึ่งจะเป็นอุปสรรคที่สำคัญในการใช้เครื่องช่วยฟัง เพราะผู้ป่วยจะได้ยินแต่เสียงที่ถูกขยายให้ดังขึ้น แต่ไม่สามารถจำแนกรายละเอียดของเสียงนั้นๆได้ ดังนั้นผู้ป่วยที่สูญเสียการได้ยินที่แพทย์ไม่สามารถรักษาได้อีกแล้ว ควรใส่เครื่องช่วยฟังที่เหมาะสม เพื่อคงสภาพการฟัง

2.7.4 ลักษณะของเครื่องช่วยฟัง

2.7.4.1 เครื่องช่วยฟังแบบพกกระเป๋า (Pocket aid) เครื่องชนิดนี้มีขนาดใหญ่ ผู้ใช้มักเหน็บตัวเครื่องไว้ที่กระเป๋า มีสายต่อจากตัวเครื่องเข้าสู่หูฟัง

1) ข้อดี

- เครื่องมีขนาดใหญ่ จับเหมาะมือ ปรับง่าย เหมาะสำหรับผู้สูงอายุ
- ราคาถูก หากการสูญเสียการได้ยิน2 ข้างเท่ากันสามารถใช้เครื่องเดียว โดยต่อสายแยกเข้าสองหู
- มีกำลังขยายมาก เหมาะสำหรับผู้ที่สูญเสียการได้ยินอย่างรุนแรง
- แบตเตอรี่หาซื้อง่าย

2) ข้อเสีย

- ต้องมีสาย รุงรัง จำกัดการเคลื่อนไหว
- การฟังเสียงไม่เป็นธรรมชาติ เนื่องจาก ไมโครโฟนรับเสียงอยู่ที่บริเวณหน้าอก ไม่
- สามารถแยกทิศทางของเสียงได้ บางครั้งมีเสียงเครื่องเสียดสีกับเสื้อผ้าอีกด้วย
- ทำให้เห็นความพิการได้ชัดเจน

2.7.4.2 เครื่องช่วยฟังแบบทัดหลังใบหู (Behind the ear hearing aid) เครื่องชนิดนี้มีขนาดเล็กตัวเครื่องเรียวโค้งเกาะอยู่ที่บริเวณหลังหู

1) ข้อดี

- การฟังเสียงเป็นธรรมชาติ เพราะไมโครโฟนอยู่ที่บริเวณหู
- ไม่เกะกะรุงรัง เพราะไม่ต้องมีสาย
- สามารถใช้กับผู้ที่สูญเสียการได้ยินน้อยจนถึงสูญเสียการได้ยินรุนแรง

2) ข้อเสีย

- ผู้ป่วยต้องคลำหาปุ่มซึ่งมีขนาดเล็ก หากต้องการปรับระดับเสียง
- ค่าใช้จ่ายสูงกว่า หากหูเสียทั้ง 2 ข้าง ต้องใส่ 2 เครื่อง
- ต้องใช้แบตเตอรี่เฉพาะของเครื่องช่วยฟัง (ขนาด 1.4 โวลต์)

2.7.4.3 เครื่องช่วยฟังชนิดสั่งทำขนาดเล็กใส่ในหู (Custom made hearing aid)

1) ข้อดี

- การฟังเสียงยิ่งเป็นธรรมชาติ เพราะไมโครโฟนอยู่ในหู
- เห็นความพิการน้อยลง โดยเฉพาะ CIC แทบจะไม่เห็นเลย

2) ข้อเสีย

- เครื่องมีขนาดเล็ก ปรับยาก
- ต้องสั่งทำเฉพาะบุคคล ราคาสูง
- ใช้ได้เฉพาะผู้ที่มีการสูญเสียการได้ยินไม่มาก (< 70 dB)
- ต้องใช้แบตเตอรี่เฉพาะของเครื่องช่วยฟัง (ขนาด 1.4 โวลต์)

2.7.4.4 เครื่องช่วยฟังชนิดแว่นตา (Eyeglasses hearing aid) ในปัจจุบันไม่มีการใช้เนื่องจาก ราคาแพง การประกอบเครื่องยุ่งยากต้องประสานงานกับร้านแว่น หากเครื่องชำรุดต้องส่งซ่อมทั้งชุด

2.7.4.5 เครื่องช่วยฟังแบบรับเสียงข้ามหู (CROS hearing aid) สำหรับผู้ที่หูหนวกข้างหนึ่งอีกข้างหนึ่งปกติ ซึ่งจะมีปัญหาในการแยกทิศทางของเสียง การใส่เครื่องช่วยฟังในข้างหูหนวกจะไม่เกิดประโยชน์เพราะเครื่องช่วยฟังมีกำลังขยายที่จำกัด ดังนั้น การใส่ไมโครโฟนติดไว้ที่หูข้างหนวก เพื่อดักเสียงจากหูข้างนั้น แล้วส่งต่อไปที่หูข้างปกติ ทำให้รับรู้ที่มาของเสียงนั้นได้ ลักษณะของเสียงจากหูข้างเสียจะเป็นเสียงที่ผ่านไมโครโฟนในขณะที่หูข้างปกติจะได้ยินเสียงที่เป็นธรรมชาติ

2.8 หลักการออกแบบ IIR Digital Filter ด้วยวิธี Bilinear Pascal matrix

หลักการที่ใช้ในการแปลงด้วยวิธี Bilinear ก็คือการแปลงจาก analog filter ใน s-domain เป็น digital filter ใน z-domain จากการแปลงด้วยวิธี Bilinear นี้สามารถสรุปได้เป็นดังสมการที่ (2.1)

$$H_a(s) \rightarrow H_d(s) \rightarrow H(z) \tag{2.1}$$

โดย

$H_a(s)$ เป็น normalized analog transfer function

$H_d(s)$ เป็น denormalized analog transfer function

$H(z)$ เป็น digital transfer function

โดยสมมุติให้วงจรกรองสัญญาณอนาลอกความถี่ต่ำต้นแบบ มีฟังก์ชันการถ่ายโอน คือ

$$H_a(s) = \frac{\sum_{j=0}^{N} A_j s^j}{\sum_{j=0}^{N} B_j s^j} \tag{2.2}$$

จากสมการที่ (2.1) ขั้นแรกต้องทำการแปลงจาก $H_a(s) \rightarrow H_d(s)$ โดยทำการแทนค่า s เพื่อทำการแปลงให้เป็น denormalized analog filter ที่มีความถี่ cut-off ตามที่ต้องการซึ่งขั้นตอนนี้เรียกได้ว่าเป็นการทำ Frequency Transformation โดยสรุปเป็นสมการผลการทำ frequency scaling ได้ดังนี้

$s \rightarrow \frac{s}{\Omega_L}$ สำหรับการแปลง lowpass เป็น lowpass

$s \rightarrow \frac{\Omega_H}{s}$ สำหรับการแปลง lowpass เป็น highpass

$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_1\Omega_2}{s(\Omega_2 - \Omega_1)}$ สำหรับการแปลง lowpass เป็น bandpass

$s \to \frac{s(\Omega_2 - \Omega_1)}{s^2 + \Omega_1\Omega_2}$ สำหรับการแปลง lowpass เป็น bandstop (2.3)

โดย Ω_L และ Ω_H คือค่าขอบความถี่สำหรับ lowpass และ highpass ตามลำดับ และ Ω_1 และ Ω_2 คือความถี่ขอบต่ำสุดและสูงสุดสำหรับ passpand และ bandstop $(\Omega_2 > \Omega_1)$ หลังจากแปลงความถี่อนาลอก ดังสมการที่ (3.3) จะได้ฟังก์ชันการถ่ายโอนอนาลอกที่ต้องการ คือ

$$H_d(s) = \frac{\sum_{j=0}^{M} \hat{A}_j s^j}{\sum_{j=0}^{M} \hat{B}_j s^j} \tag{2.4}$$

จะเห็นว่า $M = N$ สำหรับกรณี lowpass และ highpass คือ หลังการแปลงอันดับของวงจรกรองไม่เปลี่ยน และ $M = 2N$ สำหรับกรณี bandpass และ bandstop อันดับของวงจรกรองจะเป็นสองเท่าหลังจากทำการแปลงในสมการที่ (3.3) ซึ่ง $H_d(s)$ จะได้รับการแปลงเชิงเส้นคู่บนสมการที่ (3.4) นั้นคือ การแทน

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{2.5}$$

ลงในสมการ (2.4) ซึ่ง T หมายถึงคาบเวลาของการสุ่มตัวอย่าง สามารถหาได้จากสมการ (2.5) และความสัมพันธ์ระหว่างความถี่อนาลอก Ω และความถี่ดิจิตอล ω คือ

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\pi f}{F_s}\right) \tag{2.6}$$

โดย F_s คือ ความถี่สุ่ม (sampling frequency) ซึ่ง $F_s = \frac{1}{T}$ เนื่องจากขอบของความถี่ $\Omega_L, \Omega_H, \Omega_1$ และ Ω_2 ในสมการที่ (2.3) ถูกคำนวณจากสมการที่ (2.6) สำหรับค่าคงที่ $2/T$ ในสมการที่ (3.5) จะไม่มีผลกระทบต่อผลของการเปลี่ยนแปลงสุดท้าย ด้วยเหตุนี้จึงใช้สมการที่ (2.5) ในการปรับเปลี่ยนการแปลงเชิงเส้นคู่

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{2.7}$$

ดังนั้นสำหรับบทความนี้ ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่อนาลอก Ω และความถี่ดิจิตอล ω จะกลายเป็น

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\pi f}{F_s}\right) \tag{2.8}$$

2.8.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลความถี่ต่ำผ่าน (Lowpass Digital Filter Design)

เพื่อออกแบบวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน ด้วยความถี่ขอบแถบผ่าน f_L ขั้นตอนแรกคือการพิจารณาวงจรกรองสัญญาณอนาลอก $H_d(s)$ ที่ต้องการกับขอบความถี่แถบ $\Omega_L = \tan(\pi f_L / F_s)$ แทน s ในสมการที่ (2.2) ด้วย

$$\frac{s}{\Omega_L} = \cot\left(\frac{\pi f_L}{F_s}\right)s = cs$$

ผลวงจรกรองสัญญาณอนาลอกที่ได้ คือ

$$H_d(s) = \frac{\sum_{j=0}^{N}(c^j A_j)s^j}{\sum_{j=0}^{N}(c^j A_j)s^j} = \frac{\sum_{j=0}^{N}\hat{A}_j s^j}{\sum_{j=0}^{N}\hat{B}_j s^j} \tag{2.9}$$

ซึ่งเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมเศษ (numerator coefficient vector) สามารถแสดงเป็น

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ cA_1 \\ c^2 A_2 \\ \vdots \\ c^N A_N \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

โดย $c = \cot(\pi f_L / F_s)$ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมส่วน (denominator coefficient vector) $H_d(s)$สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน หลังจาก $H_d(s)$ ที่ได้รับการแปลงเชิงเส้นคู่ ในสมการที่ (2.7) $H_d(s)$ จะได้

$$a = P\hat{A} \tag{2.11}$$

ซึ่ง a คือเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมเศษของผลจากการถ่ายโอนฟังก์ชันดิจิตอลที่เกิดขึ้น

$$H_L(z, f_L) = \frac{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}} \tag{2.12}$$

และ P คือ ปาสคาลเมตริกซ์ ที่ถูกกำหนดองค์ประกอบ โดยหาจาก

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^{i} \binom{N-j}{n} \binom{i}{i-n} (-1)^{i-n} \qquad i, j = 0,1,\ldots,N \tag{2.13}$$

2.8.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลความถี่สูงผ่าน (Highpass Digital Filter Design)

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบความถี่สูงผ่านด้วยขอบความถี่แถบ f_H โดยขั้นแรกออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกความถี่สูงที่ต้องการ $H_d(s)$ กับความถี่ขอบ $\Omega_H = \tan(\pi f_H / F_s)$ โดยแทน s ในสมการที่ (2.2) ด้วย

$$\frac{\Omega_H}{s} = \frac{\tan(\pi f_H / F_s)}{s} = \frac{k}{s}$$

จะได้

$$H_d(s) = \frac{\sum_{j=0}^{N} A_j \left(\frac{k}{s}\right)^j}{\sum_{j=0}^{N} B_j \left(\frac{k}{s}\right)^j} = \frac{\sum_{j=0}^{N} (k^j A_j) s^{N-j}}{\sum_{j=0}^{N} (k^j B_j) s^{N-j}} = \frac{\sum_{j=0}^{N} \hat{A}_j s^j}{\sum_{j=0}^{N} \hat{B}_j s^j} \qquad (2.14)$$

โดย $k = \tan(\pi f_H / F_s)$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมเศษของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกความถี่สูง คือ

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^N A_N \\ k^{N-1} A_{N-1} \\ \vdots \\ kA_1 \\ A_0 \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

จากนั้นแทนการแปลงเชิงเส้นคู่ ในสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.14) จะได้ผลวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลความถี่สูง ดังนี้

$$H_H(z,\, f_H) = \frac{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}} \tag{2.16}$$

โดยเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมเศษ คือ

$$a = P\hat{A} \tag{2.17}$$

ซึ่งค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ตัวหารสามารถกำหนดได้ในทิศทางเดียวกันนี้

2.8.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลความถี่แถบผ่าน (Bandpass Digital Filter Design)

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลความถี่แถบผ่าน ด้วยความถี่ขอบล่าง f_{B1} และขอบความถี่บน f_{B2} โดย $f_{B2} > f_{B1}$ ขั้นตอนแรกคือการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบแถบความถี่ผ่านที่ต้องการ $H_d(s)$ กับค่าความถี่ขอบล่างและขอบบน $\Omega_1 = \tan(\pi f_{B1} / F_s)$ และ $\Omega_2 = \tan(\pi f_{B2} / F_s)$ ตามลำดับ กำหนดให้

$$\hat{k} = \Omega_1 \Omega_2, \hat{c} = \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1} \tag{2.18}$$

การแปลงความถี่อนาลอกสำหรับกรณี Bandpass จะกลายเป็น

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_1\Omega_2}{s(\Omega_2 - \Omega_1)} = \frac{\hat{c}(s^2 + \hat{k})}{s} \tag{2.19}$$

แทนสมการที่ (2.19) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้ผลวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบแถบความถี่ผ่านที่ต้องการ คือ

$$H_d(s) = \frac{\sum_{j=0}^{N} A_j[\hat{c}(s^2+\hat{k})/s]^j}{\sum_{j=0}^{N} B_j[\hat{c}(s^2+\hat{k})/s]^j}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{N} A_j[\hat{c}(s^2+\hat{k})/s]^j}{\sum_{j=0}^{N} B_j[\hat{c}(s^2+\hat{k})/s]^j}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{2N} \hat{A}_j s^j}{\sum_{j=0}^{2N} \hat{B}_j s^j} \qquad (3.20)$$

ซึ่งอันดับของวงจรกรองจะเป็นสองเท่า และ

$$\tilde{A}_j = \hat{c}^j A_j, \quad \tilde{B}_j = \hat{c}^j B_j$$

ในที่นี้ต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\tilde{A}_j$ และ $\tilde{A}_j$. โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม เทอมเศษสามารถขยายได้เป็น

$$H_d(s) = \sum_{j=0}^{2N} \hat{A}_j s^j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{A}_j (s^2+\hat{k})^j s^{N-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \tilde{A}_j \cdot \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \hat{k}^{j-i} s^{2i} \cdot s^{N-j} \qquad (2.21)$$

ให้ $j' = N - j$, จะได้

$$H_d(s) = \sum_{j=N}^{0} \hat{A}_{N-j} \cdot \sum_{j=0}^{N-j} \binom{N-j'}{i} \hat{k}^{N-j-i} s^{2i} \cdot s^{j'}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \tilde{A}_{N-j} \cdot \sum_{j=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} \hat{k}^{N-j-i} \cdot s^{2i} \qquad (2.22)$$

หลังจากนั้น แสดงได้เป็น

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = Q^{(B)} \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \\ \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_N \end{bmatrix} = Q^{(B)} \begin{bmatrix} A_0 \\ \hat{c}A_1 \\ \hat{c}^2 A_2 \\ \vdots \\ \hat{c}^N A_N \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

ซึ่ง $Q^{(B)}$ คือการแปลงเมตริกซ์สำหรับกรณี Bandpass ที่มีขนาดคือ $(2N+1)\times(N+1)$ ปัญหานี้เป็นวิธีการหานิพจน์ที่ชัดเจนสำหรับ $Q^{(B)}$

ถ้า $j=0$ แล้ว

$$\tilde{A}_{N-j} \cdot s^j \sum_{i-0}^{N-j} \binom{N-j}{i} \hat{k}^{N-j-i} s^{2i} = \tilde{A}_N \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \hat{k}^{N-i} s^{2i}$$

โดย $\binom{N}{i} \hat{k}^{N-i}$ แสดงองค์ประกอบคอลัมน์สุดท้ายของ $Q^{(B)}$ สำหรับ i และ $2i$ ที่แตกต่างกัน แสดงองค์ประกอบตำแหน่งแถว โดย $i = 0,1,...,N$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของคอลัมน์สุดท้าย คือ

$$Q_{2i,N}^{(B)} = \binom{N}{i} \hat{k}^{N-i}, \quad i = 0,1,...,N$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $j=1$ แล้ว

$$\tilde{A}_{N-j}\cdot s^{j}\sum_{i=0}^{N-j}\binom{N-j}{i}\hat{k}^{N-j-i}s^{2i}=\tilde{A}_{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\binom{N-1}{i}\hat{k}^{N-1-i}s^{2i+1}$$

โดย $s^{2i+1}=s,s^{3},s^{5},\ldots,s^{2N-1}$

เทอม $\binom{N-1}{i}\hat{k}^{N-1-i}$ ข้างต้นแสดงองค์ประกอบสองคอลัมน์สุดท้ายของ $Q^{(B)}$ สำหรับ i และ $(2i+1)$ ที่แตกต่างกัน แสดงองค์ประกอบของตำแหน่งแถว โดย $i=0,1,...,N-1$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของสองคอลัมน์สุดท้าย คือ

$$Q^{(B)}_{2i+1,N-1}=\binom{N-1}{i}\hat{k}^{N-1-i},\quad i=0,1,...,(N-1)$$

ดังนั้นสำหรับ $i,j=0,1,...,N$ เราสามารถสรุปได้เป็น

$$Q^{(B)}_{2i+j,N-j}=\binom{N-j}{i}\hat{k}^{N-j-i} \tag{2.24}$$

ที่ $(2i+j)$ แสดงองค์ประกอบตำแหน่งแถว $i=0,1,...,(N-j)$ และองค์ประกอบที่เหลือเป็นศูนย์ คือ

$$Q^{(B)}_{i',N-j}=o\quad \text{สำหรับ}\quad i'\neq 2i+j$$

เป็นที่ชัดเจนว่า $Q^{(B)}_{2i+j,N-j}$ เป็นเทอมขยายทวินาม ของ $(\hat{k}+1)^{N-j}$ โดยแสดงองค์ประกอบได้ดังสมการ (3.24) สามารถจัดรูปได้ดังต่อไปนี้ โดยให้

$$i'=2i+j$$
$$j'=N-j$$

จะได้

$$i = \frac{i' + j' - N}{2}$$

และ

$$\binom{N-j}{i} = \binom{j'}{\frac{i'+j'-N}{2}}$$
$$\hat{k}^{N-j-i} = \hat{k}^{j'-i'+j'-N/2} = \hat{k}^{j'+N-i'/2}$$

เช่น

$$Q_{i,j}^{(B)} = \binom{j}{\frac{i+j-N}{2}} \hat{k}^{j+N-i/2} \qquad (2.25)$$

ซึ่ง $i = 0,1,...,2N$ และ $j = 0,1,...,N$ ถ้า $(i+j-N)/2$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

$$\binom{j}{\frac{i+j-N}{2}} = \binom{j}{j-\frac{i+j-N}{2}} = \binom{j}{\frac{j+N-i}{2}}$$

และ

$$Q_{i,j}^{(B)} = \frac{j!\hat{k}^{(j+N-1)/2}}{(j+N-i/2)!(i+j-N/2)!} \tag{2.26}$$

ถ้า $(i+j-N)/2$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม จากนั้น $Q_{i,j}^{(B)} = 0$ ด้วยเหตุนี้ สมการที่ (3.24) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3.26) โดยใช้การแปลงเมตริกซ์ $Q^{(B)}$ สัมประสิทธิ์เทอมเศษของเวกเตอร์วงจรกรองสัญญาณอนาลอกแถบความถี่ผ่านที่ต้องการสามารถระบุได้ดังสมการที่ (3.23) จากนั้นสัมประสิทธิ์เทอมเศษของเวกเตอร์ a ของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแถบความถี่ผ่าน สุดท้ายแล้วจะได้

$$H_B(z, f_{B1}, f_{B2}) = \frac{\sum_{j=0}^{2N} a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{2N} b_j z^{-j}} \tag{2.27}$$

สามารถได้ค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมเศษโดยใช้ปาสคาลเมตริกซ์

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N} \end{bmatrix} = P\hat{A} = PQ^{(B)} \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \\ \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_N \end{bmatrix}$$

ค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมส่วน b สามารถกำหนดได้ดังเช่นเดียวกัน

2.9 ความสมมาตรสัมประสิทธิ์เทอมเศษ (Symmetries of numerator coefficient)

ในส่วนนี้ทำการพิสูจน์ความสมมาตรของสัมประสิทธิ์เทอมเศษ ในตัวแปรที่เป็นผลลัพธ์ของวงจรกรองดิจิตอล $H_L(z, f_L), H_H(z, f_H)$ และ $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$ เพื่อความสมมาตรจะช่วยลดความซับซ้อนในการคำนวณใน 3-channel VFB สำหรับบทความนี้วงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบในรูปแบบบรรทัดฐาน Chebychev type-I $H_a(s)$ ถูกใช้เป็นวงจรกรองต้นแบบ ซึ่งมีลักษณะเป็น All-pole filter และฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถแสดงได้ ดังนี้

$$H_a(s) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N} B_j s^j}$$

ซึ่งก็คือเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์เทอมเศษจะกลายเป็น

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

2.9.1 วงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบความถี่ต่ำผ่าน (Variable Lowpass Filter $H_L(z, f_L)$)

วงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบความถี่ต่ำผ่านปรับค่าได้ จะได้รับค่าจากการแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบความถี่ต่ำผ่านที่ต้องการ ซึ่งเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษจะคำนวณได้จากสมการที่ (2.11) คือ

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ cA_1 \\ c^2 A_2 \\ \vdots \\ c^N A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ $H_L(z, f_L)$ คือ

$a = P\hat{A}$; เท่ากับคอลัมน์แรกของ P

ถัดไปพิจารณาในคอลัมน์แรกของปาสคาลเมทริกซ์ P ในสมการที่ (2.13) โดยแทน $j=0$ ลงในสมการที่ (2.13) ได้รับคอลัมน์แรกองค์ประกอบ คือ

$$P_{i,0}=\sum_{n=0}^{i}\binom{N}{n}\binom{0}{i-n}(-1)^{i-n}=\binom{N}{i}$$

กล่าวคือ

$$a_i=P_{i,0}=\binom{N}{i}$$

โดยใช้คุณสมบัติ $\binom{N}{i}=\binom{N}{N-i}$ ซึ่งค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ a สมมาตรกับกึ่งกลาง

นอกจากนี้อนุกรมทวินาม (binomial series) แสดงได้เป็น

$$(1+z^{-1})^N=\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}z^{-i}$$

จะได้ว่าวงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบความถี่ต่ำผ่าน $H_L(z,f_L)$ สามารถแสดงเป็น

$$H_L(z,f_L)=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^N}{\sum_{j=0}^{N}b_j z^{-j}}$$

เป็นผลให้ไม่ต้องมีตัวคูณสำหรับเทอมเศษ มีเพียงแค่ตัวบวก N เท่านั้น ซึ่งเป็นผลให้ลดจำนวนของตัวคูณในกระบวนการกรองลงไปได้

2.9.2 วงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบความถี่สูงผ่าน (Variable Highpass Filter $H_H(z, f_H)$)

สำหรับกรณีของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบความถี่สูงผ่านปรับค่าได้ จะได้รับค่าจากการแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบความถี่สูงผ่านที่ต้องการ โดยจะหาได้จากสมการที่ (2.15) ซึ่งวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบความถี่สูงผ่านมีเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ คือ

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_1 \\ \vdots \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^N A_N \\ k^{N-1} A_{N-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบความถี่สูงผ่านปรับค่าได้ $H_H(z, f_H)$ มาจาก

$a = P\hat{A}$; เท่ากับ คอลัมน์สุดท้ายของ P

แทน $j = N$ ลงในสมการที่ (2.13) ผลขององค์ประกอบของคอลัมน์สุดท้ายของ P คือ

$$P_{i,N} = \sum_{n=0}^{i} \binom{N-N}{n} \binom{N}{i-n} (-1)^{i-n} = \binom{N}{i} (-1)^i$$

กล่าวคือ

$$a_i = \binom{N}{i} (-1)^i, \quad i = 0,1,\ldots,N$$

a_i คือ

$$a_i = \binom{N}{N-i}(-1)^{N-i} \cdot (-1)^N = a_{N-i} \cdot (-1)^N$$

เราสามารถสรุปได้ว่า

$a_i = a_{N-i}$ เมื่อ N เป็นจำนวนคู่

$a_i = -a_{N-i}$ เมื่อ N เป็นจำนวนคี่

ด้วยเหตุนี้ ค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ a สมมาตรกับจุดกึ่งกลางในกรณีที่ N ที่เป็นจำนวนคู่ และปฏิสมมาตรในกรณีที่ N เป็นจำนวนคี่ ยิ่งไปกว่านั้น

$$(1-z^{-1})^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{i}(-z)^i = \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i z^{-i}$$

จะได้ว่าวงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบความถี่สูงผ่าน $H_H(z, f_H)$ สามารถแสดงได้เป็น

$$H_H(z, f_H) = \frac{\left(1-z^{-1}\right)^N}{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}$$

เป็นผลให้ไม่ต้องมีตัวคูณสำหรับเศษ มีเพียงแค่การบวก N ตัวเท่านั้น

2.9.3 วงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบแถบความถี่ผ่าน (Variable Bandpass Filter $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$)

สำหรับกรณีของวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่าน bandpass เราหาได้จากสมการที่ (2.23) ซึ่งเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ $\hat{A}$ ของการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบแถบความถี่ผ่าน คือ

$$\hat{A} = Q^{(B)} \begin{bmatrix} A_0 \\ \hat{c}A_1 \\ \hat{c}^2 A_2 \\ \vdots \\ \hat{c}^N A_N \end{bmatrix} = Q^{(B)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{คอลัมน์แรกของ } Q^{(B)}$$

แทน $j = 0$ ลงในสมการที่ (2.25) ผลองค์ประกอบคอลัมน์แรกของ $Q^{(B)}$ คือ

$$Q_{i,0}^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{i-N}{2} \end{pmatrix} \hat{k}^{N-i/2} = 1 \text{ เมื่อ } i = N$$

$$Q_{i,0}^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{i-N}{2} \end{pmatrix} \hat{k}^{N-i/2} = 0 \text{ เมื่อ } i \neq N$$

ดังนั้น จะได้

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^t$$

เป็นผลให้ค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ ของวงจรกรองสัญญาณปรับค่าได้แบบแถบความถี่ผ่าน $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$ คือ

$a = P\hat{A}$; เท่ากับคอลัมน์กลางของ P

ซึ่งขนาดของ P ใน Bandpass กลายเป็น $(2N+1)\times(2N+1)$ ซึ่งมีองค์ประกอบ คือ

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^{i} \binom{2N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n}, \qquad i, j = 0,1,...,2N \tag{2.29}$$

แทน $j = N$ ลงในสมการ (2.29) ผลองค์ประกอบคอลัมน์กลาง คือ

$$P_{i,N} = \sum_{n=0}^{i} \binom{N}{n} \binom{N}{i-n} (-1)^{i-n} \tag{2.30}$$

และ

$$a = P_{i,N}, \qquad i = 0,1,...,2N \tag{2.31}$$

พิสูจน์ความสมมาตรของเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ a ได้ดังต่อไปนี้

j คอลัมน์สมมาตร : $P_{i,j} = (-1)^j P_{2N-i,j}$

i แถวสมมาตร : $P_{i,j} = (-1)^j P_{i,2N-j}$ (2.32)

พิสูจน์ความสมมาตรคอลัมน์ j โดยการแทน $i = 2N - i$ ในสมการที่ (2.29) จะได้ $P_{2N-i,j}$ คือ

$$P_{2N-i,j}=\sum_{n=0}^{2N-i}\binom{2N-j}{n}\binom{j}{(2N-i)-n}(-1)^{(2N-i)-n}$$

และ $n\le 2N-j, n\le 2N-i, P_{2N-i,j}$ สามารถเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$P_{2N-i,j}=\sum_{n=0}^{2N-j}\binom{2N-j}{n}\binom{j}{(2N-i)-n}(-1)^{(2N-i)-n}$$

เนื่องด้วย $n\ge 0, j\ge (2N-i)-n$ นั้นคือ $n\ge (2N-j)-i, P_{2N-i,j}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$P_{2N-i,j}=\sum_{n=(2N-j)-i}^{2N-j}\binom{2N-j}{n}\binom{j}{(2N-i)-n}(-1)^{(2N-i)-n}$$

ให้ $n'=(2N-j)-n$ จาก i นั้น $n=(2N-j)-n'$ และ

$$P_{2N-i,j}=\sum_{n'=i}^{0}\binom{2N-j}{(2N-j)-n'}\binom{j}{j-i+n'}\times(-1)^{(2N-i)-(2N-j)+n'}$$

$$=\sum_{n'=0}^{i}\binom{2N-j}{n'}\binom{j}{i-n'}(-1)^{j-i+n'}$$

ดังนั้น มีคอลัมน์ j สมมาตรดังสมการที่ (2.32)

พิสูจน์ความสมมาตรแถว i : โดยการแทน $j=2N-j$ ในสมการที่ (2.29) จะได้ $P_{i,2N-j}$ คือ

$$P_{i,2N-j}=\sum_{n=0}^{i}\binom{j}{n}\binom{2N-j}{i-n}(-1)^{i-n}$$

ให้ $n' = i - n$ แล้ว $n = i - n'$ และ $P_{i,2N-j}$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$P_{i,2N-j} = \sum_{n'=i}^{0} \binom{j}{i-n'} \binom{2N-j}{n'} (-1)^{n'}$$

$$= \sum_{n'=0}^{i} \binom{2N-j}{n'} \binom{j}{i-n'} (-1)^{i-n'} \cdot (-1)^{-i} \cdot (-1)^{2n'}$$

$$= (-1)^{i} P_{i,j}$$

ดังนั้น มีแถว i สมมาตรดังสมการที่ (2.32)

บนพื้นฐานของความสมมาตรคอลัมน์ j และสมมาตรแถวที่ i เราจะพิจารณาคุณสมบัติสมมาตรของคอลัมน์กลางของปาสคาลเมทริกซ์ P ซึ่งมีองค์ประกอบที่กำหนดในสมการที่ (2.30) โดยใช้ความสมมาตรของคอลัมน์ j จะได้

$$P_{i,N} = (-1)^{N} P_{2N-i,N} \tag{2.33}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (2.31) ค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เทอมเศษ a ของวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่านปรับค่าได้ $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$ จะเป็นแบบสมมาตรสำหรับ N ที่เป็นจำนวนคู่ และปฏิสมมาตรสำหรับ N ที่เป็นจำนวนคี่

นอกจากนี้ แทน $j = N$ สมมาตรแถวที่ i ดังสมการที่ (2.32) ผลจะได้

$$P_{i,N} = (-1)^{i} P_{i,N}$$

ซึ่งหมายถึง

$$P_{i,N} = (-1)^i P_{i,N} \quad \text{สำหรับ } i \text{ เป็นจำนวนคี่} \tag{2.34}$$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่าค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์เป็นสมมาตรในกรณีที่ N เป็นจำนวนคู่ หรือปฏิสมมาตรในกรณีที่ N เป็นจำนวนคี่ นอกจากนี้ $a_i = 0$ ในกรณีที่ i เป็นจำนวนคี่ จึงเป็นผลให้เศษของ $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$ ประกอบไปด้วยจำนวนคู่เท่านั้น นั่นก็คือ z^0, z^{-2}, z^{-2}, ..., z^{-2N} และสำคัญยิ่งกว่านั้นเศษของ $H_B(z, f_{B1}, f_{B2})$ สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้ $(1-z^{-2})^N$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้ ให้พิจารณาพหุนาม

$$F(z) = (1-z^{-2})^N = (1+z^{-1})^N (1-z^{-1})^N$$

เนื่องจาก

$$(1+z^{-1})^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} z^{-n}$$

$$(1-z^{-1})^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (-1)^n z^{-n}$$

จะได้

$$(1+z^{-1})^N (1-z^{-1})^N = \sum_{i=0}^{2N} \left[\sum_{n=0}^{i} \binom{N}{n} \binom{N}{i-n} (-1)^{i-n} \right] z^{-i}$$

$$= \sum_{n=i}^{2N} P_{i,N} z^{-i}$$

ดังนั้น วงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบแถบความถี่ผ่านปรับค่าได้ สามารถแสดงได้เป็น

$$H_B(z, f_{Bq}, f_{B2}) = \frac{\left(1-z^{-2}\right)^N}{\sum_{j=0}^{2N} b_j z^{-j}}$$

ซึ่งการคำนวณในเทอมเศษไม่จำเป็นต้องมีตัวคูณ โดยต้องการแค่ตัวบวก_N ตัวเท่านั้น ซึ่งหมายถึงจะเป็นการลดความซับซ้อนในการคำนวณ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $N = 2$ แล้วปาสคาลเมทริกซ์สำหรับกรณี Bandpass จะกลายเป็น

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ชัดว่าเมตริกซ์ P มีความสมมาตรทั้งคอลัมน์และแถว ดังสมการที่ (2.32) และสมการที่ (2.33) ตามลำดับ ยิ่งไปกว่านั้นองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของคอลัมน์กลางเป็นสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(1-z^{-2})^N = (1-z^{-2})^2$, นั้นคือ 1, -2, 1

ถ้า $N = 3$ ปาสคาลเมทริกซ์คือ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าทั้งคอลัมน์และแถวกลางของ P เป็นปฏิสมมาตร ดังในสมการที่ (2.32) และสมการที่ (2.33) ตามลำดับ ยิ่งไปกว่านั้นองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของคอลัมน์กลางเป็นสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(1-z^{-2})^N = (1-z^{-2})^3$ นั้นคือ 1, -3, 3, -1

2.10 หลักการในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยใช้วิธีการ Nelder-Mead

ในขั้นตอนการหาค่าที่เหมาะที่สุดโดยใช้วิธีการ Nelder-Mead เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจจะมีการแสดงเป็นขั้นเป็นตอน และแบ่งออกเป็นหลายกรณีที่ใช้ในการเปรียบเทียบในแต่ละขั้นตอน ซึ่งสรุปเป็น Pseudo code ได้เป็นดังรูปที่ 3.1

```
for i=1:1:100
    IF f(E) < f(G) THEN
            replace W with E
    ELSE
            Compute R and f(R)
            IF f(R) < f(W) THEN
                    replace W with R
            END

            IF f(R) >= f(G)
                    Compute C and f(C)
                    IF f(C) < f(W)
                            replace W with C
                    ELSE
                            Compute S
                            replace G with M
                            replace W with S
                    END
            END
    END
END
```

ภาพที่ 2.1 Pseudo code สำหรับการหาค่าเหมาะที่สุด (optimize) โดยใช้วิธีการ Nelder-Mead

จากภาพที่ 2.1 ซึ่งอธิบายได้ว่า เมื่อทำการสุ่มค่าขึ้นมา 3 ค่า โดยค่าที่ทำการสุ่มจะถูกเก็บอยู่ในตัวแปร B, G, W โดย B ย่อมาจาก Best point, G ย่อมาจาก Good point และ W ย่อมาจาก Worse point โดยค่า B เป็นค่าที่ทำให้ค่าในฟังก์ชั่นมีค่าน้อยที่สุดส่วน G เป็นค่าทีทำให้ค่าในฟังก์ชั่นมีค่ามากกว่า

ค่า B แต่น้อยกว่าค่า W และ W เป็นค่าที่ทำให้ค่าในฟังก์ชั่นมีค่ามากที่สุด จึงสรุปได้เป็นความสัมพันธ์ ดังนี้ f(B) < f(G) < f(W) จากนั้นทำการหาค่า M (Mid point), E (Expansion point) ซึ่งค่าของ M และ E สามารถหาได้ดังสมการที่ (2.35) และ (2.36) คือ

$$M = \frac{B+G}{2} \tag{2.35}$$

$$E = 3M - 2W \tag{2.36}$$

โดยค่า M และ E ที่ได้ คือ สัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการแทนค่า จากนั้น ทำการนำค่า E ที่ได้ไปแทนในฟังก์ชั่นจากโจทย์ที่ต้องการหาค่าต่ำที่สุดเป็นฟังก์ชั่น f(E) จากนั้นนำค่า f(E) เทียบกับ f(G) โดยถ้า f(E) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าค่าต่ำที่สุดของการดำเนินการในรอบแรกคือค่า E จากนั้นทำการแทน W = E แต่ถ้า f(E) มีค่ามากกว่า หรือเท่ากับ f(G) จะต้องทำการคำนวณหาค่า R (Reflect point) ซึ่งค่าของ R สามารถหาได้ดังสมการที่ (2.37)

$$R = 2M - W \tag{2.37}$$

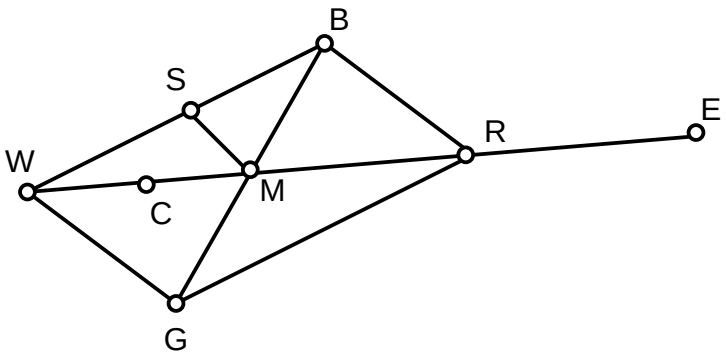
โดยค่า R ที่ได้เป็นค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งนำไปใช้หาค่า f(R) และนำค่า f(R) ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับ f(W) ถ้า f(R) มีค่าน้อยกว่า f(W) ทำการแทน W = R จากนั้นทำการเปรียบเทียบ f(R) กับ f(G) โดยถ้า f(R) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าค่าต่ำที่สุดของการดำเนินการในรอบแรกคือค่า R แต่ถ้า f(R) มีค่ามากกว่า หรือเท่ากับ f(G) จะต้องทำการคำนวณหาค่า C (Construction point) ซึ่งค่าของ C สามารถหาได้ดังสมการที่ (2.38)

$$C = \frac{W+M}{2} \tag{2.38}$$

โดยค่า C ที่ได้เป็นค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งนำไปใช้หาค่า f(C) และนำค่า f(C) ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับ f(W) ถ้า f(C) มีค่าน้อยกว่า f(W) ทำการแทน W = C ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าค่าต่ำที่สุดของการดำเนินการในรอบแรกคือค่า C แต่ถ้า f(C) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ f(W) จะต้องทำการคำนวณหาค่า S (Shrink point) ซึ่งค่าของ S สามารถหาได้ดังสมการที่ (2.39)

$$S = \frac{B+W}{2} \tag{2.39}$$

โดยค่า S ที่ได้เป็นค่าสัมประสิทธิ์ จากนั้นทำการแทน G = M และ W = S เป็นอันสิ้นสุดการดำเนินการในรอบแรก และเริ่มการดำเนินการในรอบต่อไปจนกระทั่งได้ค่าต่ำที่สุดตามเกณฑ์ ซึ่งจำนวนรอบที่ใช้หาค่าที่เหมาะสมที่สุดในโครงงานครั้งนี้ ใช้จำนวนรอบทั้งหมด 100 รอบ ซึ่งจุดต่างๆ ที่ทำการสร้างขึ้นสามารถแสดงได้ดังในภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 ภาพการหาจุดต่างๆ ด้วยวิธีการ Nelder-Mead

ตัวอย่าง จงทำการหาค่า ต่ำที่สุดของฟังก์ชั่น $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - y + xy$

เริ่มแรกทำการหาค่า 3 ค่าที่นำมาใช้ในการคำนวณสมมติสุ่มออกมาได้ค่า

V1 = (0,0), V2 = (1.2,0), V3 = (0,0.8)

ดังนั้นค่าใน f(x,y) จะได้ f(0,0) = 0, f(1.2,0) = -3.36, f(0,0.8) = -0.16

โดยเมื่อนำค่าทั้ง 3 ค่ามาพิจารณาจะได้ค่า B, G, W เป็นดังนี้

B = (1.2,0), G = (0,0.8), W = (0,0)

รอบที่ 1

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในฟังก์ชั่นจะได้ f(B) = -3.36, f(G) = -0.16, f(W) = 0

จากนั้นทำการหาค่า M, R จาก

$M = \frac{B+G}{2} = (0.6, 0.4)$ และ $E = 3M - 2W = (1.8,1.2)$

จากนั้นหาฟังก์ชั่น f(E) = f(1.8,1.2) = -5.88

ซึ่ง f(E) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้นค่าที่ต่ำที่สุดในการดำเนินการในรอบแรกคือค่าของการขยาย

ดังนั้น f(W) = f(E) = -5.88 โดย W=(1.8,1.2)

จึงสรุปได้ว่าค่าที่ต่ำที่สุดของการดำเนินการในครั้งนี้คือค่าของการขยาย

ดังนั้นค่า B, G, W ใหม่ที่ได้คือ

B = (1.2,0),G = (0,0.8), W = (1.8,1.2)

จะได้ค่าในฟังก์ชั่นดังนี้ f(1.2,0) = -3.36, f(0,0.8) = -016, f(1.8,1.2) = -5.88

จากนั้นทำการ ปรับ weight ใหม่จะได้เป็น

B = (1.8,1.2), G=(1.2,0), W = (0,0.8)

โดยค่าต่ำสุดที่ได้ของการดำเนินการในรอบแรกมีค่าเท่ากับ -5.88 จากนั้นเริ่มการดำเนินการหาค่าต่ำสุดในรอบต่อไป

รอบที่ 2

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในฟังก์ชั่นจะได้ f(B) = -5.88, f(G) = -3.36, f(W) = -0.16

ทำการหาค่า $M = \frac{B+G}{2} = (1.5, 0.6)$ และ $E = 3M - 2W = (4.5, 1.2)$

จากนั้นหาฟังก์ชั่น f(E) = f(4.5,1.2) = -2.91

ซึ่ง f(E) มีค่ามากกว่า f(G) ดังนั้นทำการหาค่า $R = 2M - W = (3, 0.4)$

ดังนั้น f(R) = f(3,0.4) = -4.44

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(W) ดังนั้นจะต้องทำการแทนค่า W = R

จะได้ W = (3,0.4) และ f(W) = -4.44

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าค่าที่ต่ำที่สุดของดำเนินการในครั้งนี้คือค่าของการสะท้อน

ดังนั้นค่า B, G, W ใหม่ที่ได้คือ

B = (1.8,1.2), G = (1.2,0), W = (3,0.4)

จะได้ค่าในฟังก์ชั่นดังนี้ f(1.8,1.2) = -5.88, f(1.2,0) = -3.36,f(3,0.4) = -4.44

จากนั้นทำการ ปรับ weight ใหม่จะได้เป็น

B = (1.8,1.2), G=(3,0.4), W = (1.2,0)

โดยค่าต่ำสุดที่ได้ของการดำเนินการในรอบที่สองมีค่าเท่ากับ -4.44 จากนั้นเริ่มการดำเนินการหาค่าต่ำสุดในรอบต่อไป

รอบที่ 3

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในฟังก์ชั่นจะได้ f(B) = -5.88, f(G) = -4.44, f(W) = -3.36

ทำการหาค่า $M = \frac{B+G}{2} = (2.4, 0.8)$ และ $E = 3M - 2W = (4.8, 2.4)$

จากนั้นหาฟังก์ชั่น f(E) = f(4.8,2.4) = -4.32

ซึ่ง f(E) มีค่ามากกว่า f(G) ดังนั้นทำการหาค่า $R = 2M - W = (3.6, 1.6)$

ดังนั้น f(R) = f(3.6,1.6) = -6.24

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(W) ดังนั้นจะต้องทำการแทนค่า W = R

จะได้ W = (3.6,1.6) และ f(W) = -6.24

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าค่าที่ต่ำที่สุดของดำเนินการในครั้งนี้คือค่าของการสะท้อน

ดังนั้นค่า B, G, W ใหม่ที่ได้คือ

B = (1.8,1.2), G = (3,0.4), W = (3.6,1.6)

จะได้ค่าในฟังก์ชั่นดังนี้ f(1.8,1.2) = -5.88, f(3,0.4) = -4.44,f(3.6,1.6) = -6.24

จากนั้นทำการ ปรับ weight ใหม่จะได้เป็น

B = (3.6,1.6), G=(1.8,1.2), W = (3,0.4)

โดยค่าต่ำสุดที่ได้ของการดำเนินการในรอบที่สามมีค่าเท่ากับ -6.24 จากนั้นเริ่มการดำเนินการหาค่าต่ำสุดในรอบต่อไป

รอบที่ 4

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในฟังก์ชั่นจะได้ f(B) = -6.24, f(G) = -5.88, f(W) = -4.44

ทำการหาค่า $M = \frac{B+G}{2} = (2.7,1.4)$ และ $E = 3M - 2W = (2.1,3.4)$

จากนั้นหาฟังก์ชั่น f(E) = f(2.1,3.4) = -2.97

ซึ่ง f(E) มีค่ามากกว่า f(G) ดังนั้นทำการหาค่า $R = 2M - W = (2.4,2.4)$

ดังนั้น f(R) = f(2.4,2.4) = -6.24

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(W) ดังนั้นจะต้องทำการแทนค่า W = R

จะได้ W = (2.4,2.4) และ f(W) = -6.24

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(G) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าค่าที่ต่ำที่สุดของดำเนินการในครั้งนี้คือค่าของการสะท้อน

ดังนั้นค่า B, G, W ใหม่ที่ได้คือ

B = (3.6,1.6), G = (1.8,1.2), W = (2.4,2.4)

จะได้ค่าในฟังก์ชั่นดังนี้ f(3.6,1.6) = -6.24, f(3,0.4) = -4.44,f(2.4,2.4) = -6.24

จากนั้นทำการ ปรับ weight ใหม่จะได้เป็น

B = (3.6,1.6), G=(2.4,2.4), W = (1.8,1.2)

โดยค่าต่ำสุดที่ได้ของการดำเนินการในรอบที่สี่มีค่าเท่ากับ -6.24 จากนั้นเริ่มการดำเนินการหาค่าต่ำสุดในรอบต่อไป

รอบที่ 5

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในฟังก์ชั่นจะได้ f(B) = -6.24, f(G) = -6.24, f(W) = -5.88

ทำการหาค่า $M = \frac{B+G}{2} = (3,2)$ และ $E = 3M - 2W = (5.4,3.6)$

จากนั้นหาฟังก์ชั่น f(E) = f(5.4,3.6) = -2.52

ซึ่ง f(E) มีค่ามากกว่า f(G) ดังนั้นทำการหาค่า $R = 2M - W = (4.2,2.8)$

ดังนั้น f(R) = f(4.2,2.8) = -5.880000000000003

ซึ่ง f(R) มีค่าน้อยกว่า f(W) ดังนั้นจะต้องทำการแทนค่า W = R

จะได้ W = (4.2,2.8) และ f(W) = -5.88

ซึ่ง f(R) มีค่ามากกว่า f(G) ดังนั้นจะต้องทำการหาค่า $C = \frac{W+M}{2} = (3.6, 2.4)$

ดังนั้น f(C) = f(3.6,2.4) = -6.72

ซึ่ง f(C) มีค่าน้อยกว่า f(W) ดังนั้นจะต้องทำการแทนค่า W = C

จะได้ W = (3.6,2.4) และ f(W) = -6.72

จึงสรุปได้ว่าค่าที่ต่ำที่สุดของดำเนินการในครั้งนี้คือค่าของการขยาย

ดังนั้นค่า B, G, W ใหม่ที่ได้คือ

B = (3.6,1.6), G = (2.4,2.4), W = (3.6,2.4)

จะได้ค่าในฟังก์ชั่นดังนี้ f(3.6,1.6) = -6.24, f(2.4,2.4) = -6.24, f(3.6,2.4) = -6.72

จากนั้นทำการ ปรับ weight ใหม่จะได้เป็น

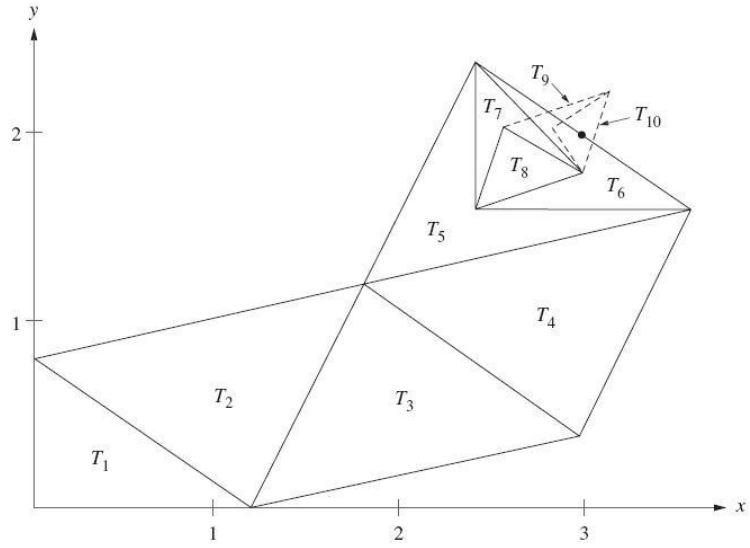
B = (3.6,2.4), G=(3.6,1.6), W = (2.4,2.4)

โดยค่าต่ำสุดที่ได้ของการดำเนินการในรอบที่ห้ามีค่าเท่ากับ -6.72 จากนั้นเริ่มการดำเนินการหาค่าต่ำสุดในรอบต่อไป ซึ่งสรุปออกมาได้เป็นดังตารางที่ 2.1 และภาพที่ 2.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.1 ผลของกระบวนการหาค่าต่ำสุดด้วยวิธี Nelder-Mead ทั้งหมด 10 รอบ

k	Best point	Good point	Worst point
1	f(1.2,0) = -3.36	f(0,0.8) = -0.16	f(0,0) = 0
2	f(1.8,1.2) = -5.88	f(1.2,0) = -3.36	f(0,0.8) = -0.16
3	f(1.8,1.2) = -5.88	f(3,0.4) = -4.44	f(1.2,0) = -3.36
4	f(3.6,1.6) = -6.24	f(1.8,1.2) = -5.88	f(3,0.4) = -4.44
5	f(3.6,1.6) = -6.24	f(2.4,2.4) = -6.24	f(1.8,1.2) = -5.88
6	f(3.6,2.4) = -6.72	f(3.6,1.6) = -6.24	f(2.4,2.4) = -6.24
7	f(3,2.2) = -6.96	f(3.6,2.4) = -6.72	f(3.6,1.6) = -6.24

8	f(3,2.2) = -6.96	f(3.45,1.95) = -6.7725	f(3.6,2.4) = -6.72
9	f(3,2.2) = -6.96	f(2.85,1.75) = -6.9525	f(3.45,1.95) = -6.7725
10	f(3,2.2) = -6.96	f(3.1875,1.9625) = -6.9564	f(2.85,1.75) = -6.9525



ภาพที่ 2.3 ภาพแสดงกระบวนการหาค่าต่ำที่สุดด้วยวิธี Nelder-Mead