อสมการ

โดย

นางสาวนงลักษณ์ อาภาสัตย์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

อสมการ

โดย

นางสาวนงลักษณ์ อาภาสัตย์

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

INEQUALITIES

By

Nongluck Apasut

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " อสมการ " เสนอโดย นางสาวนงลักษณ์ อาภาสัตย์ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

……...

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน.................... พ.ศ...........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตรจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สมเจตน์ ชัยยะ)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

............/......................../..............

48308302 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : อสมการ

นงลักษณ์ อาภาสัตย์ : อสมการ. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : ศ.ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. 82 หน้า.

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับอสมการในฟิลด์อันดับของจำนวนจริงรูปแบบต่าง ๆ ที่มีชื่อเสียง รูปแบบอสมการที่ศึกษา ได้แก่ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต อสมการโคชีและชวาร์ซ อสมการโฮลเดอร์ อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก อสมการแบร์นูลลี อสมการเจนเซน และอสมการที่ได้จากการประยุกต์อสมการที่ศึกษา พร้อมทั้งศึกษาการประยุกต์ทฤษฎีบทเหล่านี้ในการแก้โจทย์ปัญหา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2551

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

48308302 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORD : INEQUALITIES

NONGLUCK APASUT : INEQUALITIES. AN INDEPENDENT STUDY ADVISOR : PROF.CHAWEWAN RATANAPRASERT,Ph.D. 82 pp.

This independent study focuses on definitions and theorems concerning various classical inequalities in the ordered field of real numbers. These include Arithmetic mean – Geometric mean inequalities, Cauchy – Schwartz inequality, Holder’s inequality, Power – mean inequality, Weighted Arithmetic mean – Geometric mean inequality, Bernoulli’s inequalities, Jensen's inequality, and other inequalities derived therefrom. Applications of these inequalities are also presented.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2008

Student's signature ....

An Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำ แก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่าง ๆ และช่วยเติมเต็มความรู้ จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จด้วยดี

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ และพี่ ๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณพ่อและแม่ ที่ให้การสนับสนุนการศึกษาและเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จได้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ เราศึกษาอสมการในฟิลด์อันดับของจำนวนจริง พร้อมทั้งพิสูจน์อสมการรูปแบบต่าง ๆ ที่มีชื่อเสียงที่อาจช่วยให้การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการง่ายขึ้นซึ่งบางปัญหาสามารถที่จะประยุกต์ใช้รูปแบบอสมการได้หลายรูปแบบในการแก้ปัญหา และในการค้นคว้าอิสระนี้ได้ให้ตัวอย่างการประยุกต์ใช้อสมการรูปแบบต่าง ๆ ไว้ในแต่ละหัวข้อด้วย

ในบทที่ 2 เรากล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานของ จำนวนจริงและอันดับ เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาในบทต่อ ๆ ไป เริ่มต้นด้วยการให้บทนิยามของอันดับ อันดับโดยแท้และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับอันดับและอันดับโดยแท้ และนำเสนอหลักการพิสูจน์อสมการที่อาจช่วยให้การพิสูจน์อสมการง่ายขึ้น

ในบทที่ 3 เราศึกษาอสมการที่เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก เริ่มต้นด้วยการให้บทนิยามค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก พร้อมทั้งพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต และประยุกต์ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต เพื่อสร้างอสมการใหม่หรือหาความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยอื่น ๆ สุดท้ายได้สรุปความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และรากกำลังสองเฉลี่ย

ในบทที่ 4 เราสนใจศึกษาอสมการขั้นสูงบางรูปแบบ ได้แก่ อสมการโคชีและชวาร์ซ และประยุกต์ใช้อสมการโคชีและชวาร์ซ เพื่อพิสูจน์อสมการสามเหลี่ยมและอสมการโฮลเดอร์ และประยุกต์ใช้อสมการโฮลเดอร์ เพื่อพิสูจน์อสมการมินคอฟสกีและอสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง นอกจากนี้เรายังศึกษาอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก และประยุกต์ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก เพื่อพิสูจน์อสมการแบร์นูลลี และสุดท้ายกล่าวถึงอสมการเจนเซน ซึ่งเป็นอสมการที่มีความเกี่ยวเนื่องกับลักษณะกราฟของฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง พร้อมทั้งแสดงการประยุกต์ใช้อสมการเหล่านี้ในการแก้โจทย์ปัญหา

ในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ อาจจะมีบางการพิสูจน์ที่ต้องใช้ทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนจริงบางประการในการพิสูจน์ จึงได้กล่าวถึงทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนจริงบางประการไว้ในภาคผนวกโดยไม่มีการพิสูจน์

บทที่ 2
สมบัติเบื้องต้นของจำนวนจริงและอสมการ

ในบทนี้ เราศึกษาและกล่าวถึงอสมการในฟิลด์อันดับ (Ordered field) ของจำนวนจริง พร้อมทั้งนำเสนอหลักการพิสูจน์อสมการที่อาจช่วยให้การพิสูจน์อสมการง่ายขึ้น เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรื่องราวในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้

2.1 จำนวนจริงและอันดับ

ในหัวข้อนี้ เราจะเริ่มเรื่องราวของการค้นคว้าอิสระนี้โดยกล่าวถึงบทนิยามความสัมพันธ์ที่เป็นอันดับและทฤษฎีบทเกี่ยวกับอันดับที่มีความจำเป็นที่จะนำไปใช้ในหัวข้อต่อ ๆ ไป

ตลอดการค้นคว้าอิสระฉบับนี้กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด เรารู้จักการดำเนินการ (operation) 2 ตัวบน R คือ $+$ (การบวก) และ $\bullet$ (การคูณ) ว่าคือฟังก์ชัน

$+ : \mathrm{R}\times\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ และ $\bullet : \mathrm{R}\times\mathrm{R} \to \mathrm{R}$

ซึ่งกำหนดโดย

$+(a,b) = a+b$ และ $\bullet(a,b) = ab$

สำหรับทุก ๆ คู่ของจำนวนจริง a และ b ตามลำดับ นอกจากนี้ระบบจำนวนจริง $(\mathrm{R};+,\bullet)$ เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. การสลับที่ นั่นคือ $a+b=b+a$ สำหรับทุก $a,b\in\mathrm{R}$
   และ $ab=ba$ สำหรับทุก $a,b\in\mathrm{R}$
2. การจัดหมู่ นั่นคือ $a+(b+c)=(a+b)+c$ สำหรับทุก $a,b,c\in\mathrm{R}$
   และ $a(bc)=(ab)c$ สำหรับทุก $a,b,c\in\mathrm{R}$
3. การกระจายของการคูณเหนือการบวก
   นั่นคือ $a(b+c)=ab+ac$ สำหรับทุก $a,b,c\in\mathrm{R}$
4. การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวกและการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ
   นั่นคือ มี $0\in\mathrm{R}$ สำหรับทุก $a\in\mathrm{R}$ ซึ่ง $a+0=a=0+a$
   และ มี $1\in\mathrm{R}$ สำหรับทุก $a\in\mathrm{R}$ ซึ่ง $a1=a=1a$

5. การมีตัวผกผันสำหรับการบวกและการมีตัวผกผันสำหรับการคูณ
นั่นคือ สำหรับทุก $a \in R$ จะมี $-a \in R$ ซึ่ง $a+(-a)=0=(-a)+a$
และ สำหรับทุก $a \in R-\{0\}$ จะมี $a^{-1} \in R$ ซึ่ง $a(a^{-1})=1=(a^{-1})a$

2.1.1 ข้อตกลง : สำหรับจำนวนจริง a และ b เราเขียน $a-b$ แทน $a+(-b)$

นอกจากนี้เซต R ยังประกอบด้วยสับเซต P ซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

6. สมบัติปิดภายใต้การบวก นั่นคือ $a+b \in P$ สำหรับทุก $a,b \in P$
7. สมบัติปิดภายใต้การคูณ นั่นคือ $ab \in P$ สำหรับทุก $a,b \in P$
8. สมบัติไตรวิภาค ซึ่งกล่าวว่า “ ถ้า $a \in R$ แล้ว a จะต้องสอดคล้องและสอดคล้องเพียงหนึ่งเดียวของข้อความต่อไปนี้ คือ $a \in P$ หรือ $a=0$ หรือ $-a \in P$ ”

โดยสมบัติข้อ 6 ถึงข้อ 8 ทำให้เราทราบว่า เซตของจำนวนจริง ถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วน โดยที่แต่ละส่วนไม่มีส่วนร่วมกับส่วนอื่น ๆ ดังนี้คือ

(ก) P (ข) $\{0\}$ (ค) $\{-a \mid a \in P\}$

ซึ่งเซต P จะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย R^+ และเรียกกันว่า “เซตของจำนวนจริงบวก” สำหรับเซตในข้อ (ค) เราจะเรียกว่า “เซตของจำนวนจริงลบ” และแทนด้วยสัญลักษณ์ R^-

2.1.2 บทนิยาม : ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $r \subseteq A \times A$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation) บน A โดยเขียนแทน $(a,b) \in r$ ด้วยสัญลักษณ์ $a\,r\,b$ เราเรียกความสัมพันธ์ r ว่า **อันดับ (order)** บน A ถ้า r สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1) สมบัติสะท้อน (reflexivity) นั่นคือ $a\,r\,a$ สำหรับทุก $a \in A$
2) สมบัติปฏิสมมาตร (anti – symmetry) นั่นคือ ถ้า $a\,r\,b$ และ $b\,r\,a$ แล้ว $a=b$ สำหรับทุก $a,b \in A$
3) สมบัติถ่ายทอด (transitivity) นั่นคือ ถ้า $a\,r\,b$ และ $b\,r\,c$ แล้ว $a\,r\,c$ สำหรับทุก $a,b,c \in A$

2.1.3 ทฤษฎีบท : ให้ $\leq \subseteq R \times R$ นิยามโดย $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ ($b-a \in R^+$ หรือ $a=b$) สำหรับทุก $a,b \in R$ แล้ว $\leq$ เป็นอันดับบน R

บทพิสูจน์ ให้ $\leq \subseteq R \times R$ นิยามโดย $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ ($b-a \in R^+$ หรือ $a=b$) สำหรับทุก $a,b \in R$ จะแสดงว่า $\leq$ เป็นอันดับบน R

1) ให้ $a \in R$ เพราะว่า $a = a$ ดังนั้นโดยนิยาม $\leq$ จะได้ $a \leq a$

2) ให้ $a, b \in R$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว ($b - a \in R^+$ หรือ $a = b$) และ ($a - b \in R^+$ หรือ $b = a$) ดังนั้นแยกพิจารณาเป็น 4 กรณีดังนี้

กรณี 1 $b - a \in R^+$ และ $a - b \in R^+$

เพราะว่า $-(a - b) = b - a \in R^+$ ดังนั้น $-(a - b) \in R^+$ และ $a - b \in R^+$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 2 $b - a \in R^+$ และ $b = a$

เพราะว่า $b = a$ ทำให้ได้ว่า $b - a = 0$ ดังนั้น $b - a = 0$ และ $b - a \in R^+$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 3 $a = b$ และ $a - b \in R^+$

เพราะว่า $a = b$ ทำให้ได้ว่า $a - b = 0$ ดังนั้น $a - b = 0$ และ $a - b \in R^+$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้กรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

กรณี 4 $a = b$ และ $b = a$

เนื่องจากกรณี 1 ถึงกรณี 3 ไม่เกิดขึ้น

ดังนั้นกรณีที่ 4 นี้จึงเกิดขึ้น ซึ่งก็คือ $a = b$

เพราะฉะนั้น $a = b$

3) ให้ $a, b, c \in R$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว ($b - a \in R^+$ หรือ $a = b$) และ ($c - b \in R^+$ หรือ $b = c$) ดังนั้นแยกพิจารณาเป็น 4 กรณีดังนี้

กรณี 1 $b - a \in R^+$ และ $c - b \in R^+$ ดังนั้น $(c - b) + (b - a) \in R^+$

แต่ $(c - b) + (b - a) = c - a$ ทำให้ได้ว่า $c - a \in R^+$

ดังนั้นโดยนิยาม $\leq$ จะได้ $a \leq c$

กรณี 2 $b - a \in R^+$ และ $b = c$ ทำให้ได้ว่า $c - a = b - a \in R^+$

ดังนั้นโดยนิยาม $\leq$ จะได้ $a \leq c$

กรณี 3 $a = b$ และ $c - b \in R^+$ ทำให้ได้ว่า $c - a = c - b \in R^+$

ดังนั้นโดยนิยาม $\leq$ จะได้ $a \leq c$

กรณี 4 $a = b$ และ $b = c$ ทำให้ได้ว่า $a = c$

ดังนั้นโดยนิยาม $\leq$ จะได้ $a \leq c$

ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด ๆ $a \leq c$

เพราะว่าข้อ 1), 2) และ 3) เป็นจริง ดังนั้น $\leq$ เป็นอันดับบน R ❑

2.1.4 หมายเหตุ : ถ้า $a,b \in R$ และ $a \leq b$ เราจะอ่านว่า "a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b" หรืออาจแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์ $b \geq a$ และอ่านว่า "b มากกว่าหรือเท่ากับ a"

2.1.5 บทนิยาม : ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $r \subseteq A \times A$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation) บน A โดยเขียนแทน $(a,b) \in r$ ด้วยสัญลักษณ์ $a\,r\,b$ (และเขียนแทน $(a,b) \notin r$ ด้วย $a \not r\, b$) เราเรียกความสัมพันธ์ r ว่า **อันดับโดยแท้ (strictly order)** บน A ถ้า r สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1) สมบัติไม่สะท้อน (irreflexivity) นั่นคือ $a \not r\, a$ สำหรับทุก $a \in A$

2) สมบัติถ่ายทอด (transitivity) นั่นคือ ถ้า $a\,r\,b$ และ $b\,r\,c$ แล้ว $a\,r\,c$ สำหรับทุก $a,b,c \in A$

2.1.6 ทฤษฎีบท : ถ้า $< \subseteq R \times R$ นิยามโดย $a < b$ ก็ต่อเมื่อ ($a \leq b$ และ $a \neq b$) สำหรับทุก $a,b \in R$ แล้ว $<$ เป็นอันดับโดยแท้บน R

บทพิสูจน์ ให้ $< \subseteq R \times R$ นิยามโดย $a < b$ ก็ต่อเมื่อ ($a \leq b$ และ $a \neq b$) สำหรับทุก $a,b \in R$ จะแสดงว่า $<$ เป็นอันดับโดยแท้บน R

1) ให้ $a \in R$ เพราะว่า $a = a$ ดังนั้นโดยนิยาม $<$ จะได้ $a \not< a$

2) ให้ $a,b,c \in R$ ซึ่ง $a < b$ และ $b < c$ แล้ว ($a \leq b$ และ $a \neq b$) และ ($b \leq c$ และ $b \neq c$)

เพราะว่า $a \leq b$ และ $b \leq c$

ดังนั้นโดยสมบัติถ่ายทอดของอันดับ จะได้ $a \leq c$ ……………..(2.1)

ต่อไปจะแสดงว่า $a \neq c$

สมมติ $a = c$ เพราะว่า $a \leq b$ แต่ $c = a$ ทำให้ได้ว่า $c \leq b$ แต่ $b \leq c$

ฉะนั้น $c \leq b$ และ $b \leq c$ ดังนั้นโดยสมบัติปฏิสมมาตรของอันดับ จะได้ $b = c$

แต่ $b \neq c$ ดังนั้น $b = c$ และ $b \neq c$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ทำให้ได้ว่า $a \neq c$ ……………...(2.2)

จาก (2.1) และ (2.2) จะได้ว่า $a < c$

เพราะว่าข้อ 1) และ 2) เป็นจริง ดังนั้น $<$ เป็นอันดับโดยแท้บน R ❑

2.1.7 หมายเหตุ : ถ้า $a,b \in R$ และ $a < b$ เราจะอ่านว่า "a น้อยกว่า b" หรืออาจแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์ $b > a$ และอ่านว่า "b มากกว่า a"

2.1.8 ทฤษฎีบท : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $a > b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b \in R^+$

บทพิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

$(\Rightarrow)$ ให้ $a > b$ แล้ว $a \geq b$ และ $a \neq b$ นั่นคือ ($a - b \in R^+$ หรือ $a = b$) และ $a \neq b$ ดังนั้นแยกพิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $a - b \in R^+$ และ $a \neq b$ ดังนั้น $a - b \in R^+$

กรณี 2 $a = b$ และ $a \neq b$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นกรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

จากทั้ง 2 กรณี จึงสรุปว่า $a - b \in R^+$

$(\Leftarrow)$ ให้ $a - b \in R^+$ จะแสดงว่า $a > b$ จึงสมมติ $b \geq a$ แล้ว $b - a \in R^+$ หรือ $a = b$ ดังนั้นแยกพิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $b - a \in R^+$

เพราะว่า $-(a - b) = b - a \in R^+$ ดังนั้น $a - b \in R^+$ และ $-(a - b) \in R^+$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2 $a = b$

เพราะว่า $a = b$ ทำให้ได้ว่า $a - b = 0$ ดังนั้น $a - b = 0$ และ $a - b \in R^+$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

เนื่องจากทั้ง 2 กรณีเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ $b \geq a$ เป็นเท็จ ดังนั้นจะได้ว่า $a > b$ เป็นจริง

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ เป็นจริง จึงสรุปได้ว่า $a > b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b \in R^+$ ❑

2.1.9 บทนิยาม : เราเรียกระบบจำนวนจริง $(R; +, \bullet, \leq)$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติข้อ 1 ถึงข้อ 8 ในหน้าที่ 2 และ 3 ว่า **ฟิลด์อันดับ (ordered field)**

2.1.10 ทฤษฎีบท : กฎไตรวิภาค

สำหรับจำนวนจริง a และ b จะได้ว่า เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงและเป็นจริงเพียงหนึ่งเดียว

1) $a > b$
2) $a = b$
3) $b > a$

บทพิสูจน์ ให้ $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a - b \in R$ ดังนั้น โดยสมบัติข้อ 8 ในหน้าที่ 3 จะได้ $a - b \in R^+$ หรือ $a - b = 0$ หรือ $-(a - b) \in R^+$ เป็นจริงและเป็นจริงเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

กรณี 1 $a - b \in R^+$ โดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a > b$

กรณี 2 $a - b = 0$ จะได้ $a = b$

กรณี 3 $-(a - b) \in R^+$ เพราะว่า $b - a = -(a - b) \in R^+$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $b > a$

ดังนั้น $a > b$ หรือ $a = b$ หรือ $b > a$ เป็นจริงและเป็นจริงเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น ❑

2.1.11 หมายเหตุ : โดยกฎไตรวิภาค ถ้า $a, b \in R$ แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง $a > b$ หรือ $a = b$ หรือ $b > a$ เป็นที่รู้จักกันทั่วไปว่า ถ้า $a = b$ เราจะเรียกว่า "**สมการ**" ดังนั้นในกรณีที่ $a > b$ หรือ $b > a$ หรือ $a \geq b$ หรือ $b \geq a$ จะไม่ใช่สมการ เราจึงเรียกความสัมพันธ์ในลักษณะนี้ว่า "**อสมการ**"

2.1.12 ข้อตกลง : ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง

$a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

$a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$

$a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$

2.1.13 ทฤษฎีบท : ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1) ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2) ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$
4) ถ้า $a > b$ และ $x > 0$ แล้ว $xa > xb$
5) ถ้า $a > b$ และ $x < 0$ แล้ว $xa < xb$
6) ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
7) ถ้า $a > b > 0$ หรือ $0 > a > b$ แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

บทพิสูจน์ ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1) ให้ $a > b$ และ $b > c$ โดยสมบัติถ่ายทอดของอันดับโดยแท้ จะได้ว่า $a > c$
2) ให้ $a > b$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a - b \in R^+$ แต่ $(a + c) - (b + c) = a - b$
   ดังนั้น $(a + c) - (b + c) \in R^+$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a + c > b + c$
3) ให้ $a > b$ และ $c > d$ โดยข้อ 2) จะได้ $a + c > b + c$ และ $b + c > b + d$
   เพราะฉะนั้น โดยข้อ 1) จะได้ $a + c > b + d$
4) ให้ $a > b$ และ $x > 0$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a - b \in R^+$ และ $x \in R^+$

เพราะฉะนั้น $x(a-b) \in R^+$ แต่ $x(a-b) = xa - xb$ ดังนั้น $xa - xb \in R^+$

และโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $xa > xb$

5) ให้ $a > b$ และ $x < 0$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a - b \in R^+$ และ $0 - x \in R^+$

ดังนั้น $-x = 0 - x \in R^+$ และทำให้ได้ว่า $(-x)(a-b) \in R^+$

แต่ $(-x)(a-b) = (-x)a - (-x)b = xb - xa$

ดังนั้น $xb - xa \in R^+$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $xb > xa$

6) ให้ $0 < a < b$ และ $0 < c < d$

เนื่องจาก $b > a$ และ $d > 0$ โดยข้อ 4) จะได้ $bd > ad$ ………….. (2.3)

เนื่องจาก $d > c$ และ $a > 0$ โดยข้อ 4) จะได้ $ad > ac$ ………….. (2.4)

จาก (2.3) , (2.4) และโดยข้อ 1) จะได้ $bd > ac$

7) ให้ $a > b > 0$ หรือ $0 > a > b$

กรณี 1 สมมติ $a > b > 0$ แล้วโดยทฤษฎีบท 8 ภาคผนวก ก

จะได้ว่า $a^{-1} > 0$ และ $b^{-1} > 0$

ดังนั้นโดยข้อ 4 จะได้ $aa^{-1} > ba^{-1}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $1 > ba^{-1}$

และโดยข้อ 4 จะได้ $b^{-1}1 > b^{-1}ba^{-1}$

แต่ $b^{-1}1 = b^{-1}$ และ $b^{-1}ba^{-1} = 1a^{-1} = a^{-1}$

ดังนั้น $b^{-1} > a^{-1}$

กรณี 2 สมมติ $0 > a > b$ แล้วโดยทฤษฎีบท 8 ภาคผนวก ก

จะได้ว่า $a^{-1} < 0$ และ $b^{-1} < 0$

ดังนั้นโดยข้อ 5 จะได้ $a^{-1}a < a^{-1}b$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $1 < a^{-1}b$

และโดยข้อ 5 จะได้ $1b^{-1} > a^{-1}bb^{-1}$

แต่ $1b^{-1} = b^{-1}$ และ $a^{-1}bb^{-1} = a^{-1}1 = a^{-1}$

ดังนั้น $b^{-1} > a^{-1}$ ❑

2.1.14 ทฤษฎีบท : ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว $a^2 \geq 0$

บทพิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยกฎไตรวิภาค จะได้ว่า $a = 0$ หรือ $a \in R^+$ หรือ $-a \in R^+$

กรณี $a = 0$ จะได้ $a^2 = 0^2 = 0$

กรณี $a \in R^+$ จะได้ $a \cdot a \in R^+$ แต่ $a \cdot a = a^2$ และ $a^2 = a^2 - 0$

เพราะฉะนั้น $a^2 - 0 \in R^+$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a^2 > 0$

กรณี $-a \in R^{+}$ จะได้ $(-a)\cdot(-a) \in R^{+}$ แต่ $(-a)\cdot(-a) = a\cdot a = a^2$ และ $a^2 = a^2 - 0$

เพราะฉะนั้น $a^2 - 0 \in R^{+}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ $a^2 > 0$

ดังนั้น ไม่ว่ากรณีใด ๆ $a^2 \geq 0$ ❑

2.1.15 ทฤษฎีบท : ให้ a, x และ y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x > y$

1) ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^x > a^y$

2) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^x < a^y$

บทพิสูจน์ ให้ a, x และ y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x > y$

1) สมมติ $a > 1$ เนื่องจาก $x > y$ โดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ว่า $x - y \in R^{+}$ ทำให้ได้ว่า มี $b \in R^{+}$ ซึ่ง $b = x - y$ นั่นคือ $x = y + b$ และเพราะว่า $a > 1$ ทำให้ได้ว่า $a^b > 1^b = 1$ และได้ว่า $a^b a^y > 1a^y$ ดังนั้น $a^x = a^{y+b} = a^b a^y > 1a^y = a^y$

2) สมมติ $0 < a < 1$ เนื่องจาก $x > y$ โดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ว่า $x - y \in R^{+}$ ทำให้ได้ว่า มี $b \in R^{+}$ ซึ่ง $b = x - y$ นั่นคือ $x = y + b$ และเพราะว่า $0 < a < 1$ ทำให้ได้ว่า $a^b < 1^b = 1$ และได้ว่า $a^b a^y < 1a^y$ ดังนั้น $a^x = a^{y+b} = a^b a^y < 1a^y = a^y$ ❑

2.1.16 ทฤษฎีบท : ให้ a, b และ p เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > b > 0$

1) ถ้า $p > 0$ แล้ว $a^p > b^p$

2) ถ้า $p < 0$ แล้ว $a^p < b^p$

บทพิสูจน์ ให้ a, b และ p เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > b > 0$ เนื่องจาก $a > b > 0$ จะได้ $\frac{a}{b} > 1$ โดยทฤษฎีบท 2.1.15 ข้อ 1 จะได้ว่า ถ้า $p > 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)^p > \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ดังนั้น $a^p > b^p$ และถ้า $p < 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{b}\right)^p < \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ดังนั้น $a^p < b^p$ ❑

2.2 หลักการพิสูจน์อสมการ

ในการพิสูจน์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการ เราไม่มีหลักการพิสูจน์ที่แน่นอนและใช้ได้เสมอกับทุกอสมการ และในบางครั้งการพิสูจน์อสมการเดียวกันอาจมีหลายวิธี จึงขอนำเสนอเพียงบางหลักการพิสูจน์ที่อาจช่วยให้การพิสูจน์อสมการง่ายขึ้น ดังนี้

1. การแปลงสมมูล (Equivalent Transformation) โดยอาจเริ่มคิดจากอสมการที่ต้องการพิสูจน์แล้วทำย้อนกลับไปดูว่าสมมูลกับอสมการใดบ้างที่ทราบแล้วว่าเป็นจริง หรือ

อสมการใดที่รู้ว่าเป็นจริงแล้วจะนำไปสู่อสมการที่ต้องการได้

2.2.1 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $\frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{1}{2}$ ทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนจริง

เพราะว่า
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2x^2 \le 1+x^4 \\ &\Leftrightarrow 1-2x^2+x^4 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x^2)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

และเพราะว่า $(1-x^2)^2 \ge 0$ เป็นจริง ดังนั้นอสมการที่กำหนดเป็นจริง หรืออาจเขียนพิสูจน์จากสิ่งที่เป็นจริงไปสู่สิ่งที่ต้องการ ดังนี้

เพราะว่า $(1-x^2)^2 \ge 0$ ฉะนั้น $1-2x^2+x^4 \ge 0$ ดังนั้น $2x^2 \le 1+x^4$ ทำให้ได้ว่า $\frac{1}{2} \ge \frac{x^2}{1+x^4}$ ❑

2.2.2 ตัวอย่าง : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$

วิธีทำ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ เพราะว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}\right)^3 \le \left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8}\left(a+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+b\right) \le \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow a+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+b \le 4a+4b \\ &\Leftrightarrow 3a-3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+3b \ge 0 \\ &\Leftrightarrow a+b-\left(\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}\right) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\right] \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

และเพราะว่า $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 \ge 0$ เป็นจริง ดังนั้นอสมการที่กำหนดเป็นจริง ❑

2. ถ้าอสมการมีความสมมาตรของตัวแปรทั้งหมด กล่าวคือ การสลับที่ของตัวแปรคู่ใด ๆ ในอสมการไม่ทำให้อสมการเปลี่ยนแปลงแล้ว เราสามารถสมมติอันดับให้กับตัวแปรได้ เช่น ถ้าอสมการประกอบด้วยตัวแปร $a_1, a_2, ..., a_n$ ของจำนวนจริงและอสมการมีสมมาตรในตัวแปรทั้งหมด แล้วเราสามารถสมมติ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป

2.2.3 ตัวอย่าง : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $a^b b^a \le a^a b^b$

วิธีทำ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้วโดยกฎไตรวิภาค จะได้ $a > b$ หรือ $a = b$ หรือ $a < b$ เนื่องจากอสมการสมมาตรในตัวแปร a และ b ฉะนั้นเราสามารถสมมติได้ว่า $a \ge b$ เพราะถ้า $a < b$ เราสามารถสลับตัวแปร a และ b แล้วยังคงได้อสมการเดิม

สมมติ $a \ge b$ แล้ว $a - b \ge 0$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.16 ข้อ 1 จะได้ $a^{a-b} \ge b^{a-b}$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.13 ข้อ 4 และ $a^b b^b > 0$ จะได้ $a^{a-b} a^b b^b \ge b^{a-b} a^b b^b$ ดังนั้น $a^a b^b \ge a^b b^a$

❑

2.2.4 ตัวอย่าง : กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \ge 0$$

วิธีทำ ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก แล้วโดยกฎไตรวิภาค จะได้ $a \ge b$ หรือ $a \ge c$ หรือ $b \ge a$ หรือ $b \ge c$ หรือ $c \ge a$ หรือ $c \ge b$

สมมติ $c \ge b$ และ $b \ge a$

เนื่องจาก $c \ge b$ ดังนั้น $c - a \ge b - a$ และจะได้ว่า $c(c-a) \ge b(b-a)$

ดังนั้น $c(c-a) - b(b-a) \ge 0$ และเนื่องจาก $c - b \ge 0$

ดังนั้น $(c-b)\left[c(c-a) - b(b-a)\right] \ge 0$ ………….(2.5)

เพราะว่า $c \ge b$ และ $b \ge a$ ดังนั้น $a - b \le 0$ และ $a - c \le 0$

ทำให้ได้ว่า $a(a-b)(a-c) \ge 0$ …………...(2.6)

นำ (2.5) รวมกับ (2.6) จะได้ $a(a-b)(a-c) + (c-b)\left[c(c-a) - b(b-a)\right] \ge 0$

ฉะนั้น $a(a-b)(a-c) + c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \ge 0$

ดังนั้น $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \ge 0$ ❑

3. การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การพิสูจน์วิธีนี้ใช้กับอสมการที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction) :

ถ้า P(n) เป็นประโยคเปิดของตัวแปร n ซึ่งเป็นจำนวนนับ และให้ a เป็นจำนวนนับ

โดยที่ 1) P(a) เป็นจริง (ขั้นฐาน) และ

2) สำหรับจำนวนนับ k ทุกตัวที่ $k \geq a$ ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย (ขั้นอุปนัย)

แล้วจะสรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ n ทุกตัวซึ่ง $n \geq a$

2.2.5 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $2^n > n$ สำหรับจำนวนนับ n

วิธีทำ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

ให้ P(n) แทนข้อความ $2^n > n$

ขั้นฐาน $(n=1)$: เห็นได้ชัดว่า $2^1 = 2 > 1$ ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติให้ k เป็นจำนวนนับซึ่ง P(k) เป็นจริง นั่นคือ $2^k > k$

แล้ว $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k = k + k \geq k+1$ ดังนั้น $2^{k+1} > k+1$

ทำให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกจำนวนนับ n ❑

2.2.6 ตัวอย่าง : เอกลักษณ์ของลากรองจ์ (Lagrange's identity) จงแสดงว่า

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$

วิธีทำ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริง และ P(n) แทนข้อความ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

ขั้นฐาน $(n=1)$: ให้ a_1 และ b_1 เป็นจำนวนจริง

แล้ว $\sum_{i=1}^{1} a_i^2 \sum_{i=1}^{1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} a_i b_i \right)^2 = a_1^2 b_1^2 - (a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 = 0$

และ $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1} (a_i b_1 - a_1 b_i)^2 = \frac{1}{2}(a_1 b_1 - a_1 b_1)^2 = \frac{1}{2}(0) = 0$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{1} a_i^2 \sum_{i=1}^{1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} a_i b_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{1} (a_i b_j - a_j b_i)^2$ ทำให้ได้ว่า P(1) เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติให้ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $a_1, a_2, ..., a_{k+1}, b_1, b_2, ..., b_{k+1}$ เป็นจำนวนจริง

และ P(k) เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(a_i b_j - a_j b_i)^2$

แล้ว $\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2$

$$= \left(a_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(b_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) - \left(a_{k+1}b_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2$$

$$= a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2$$

$$\quad - \left(a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2\right)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2\right] + \left[a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{k}\left(a_i^2 b_{k+1}^2 - 2a_i b_{k+1} a_{k+1} b_i + a_{k+1}^2 b_i^2\right)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2 \quad \text{โดย P(k) เป็นจริง}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(a_{k+1} b_j - b_{k+1} a_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(a_{k+1} b_j - b_{k+1} a_j\right)^2$$

$$\quad + \frac{1}{2}\left(a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_{k+1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{k}\left(a_{k+1} b_j - a_j b_{k+1}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2\right.$$

$$\quad \left. + \left(a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_{k+1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k+1}\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 + \left(a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ❑

4. การพิสูจน์โดยวิธีเดินหน้าและถอยหลัง **(Forward and Backward Induction)**

การพิสูจน์อสมการที่อยู่ในรูปแบบของผลบวกหรือผลคูณของ n พจน์ บางอสมการเราจะพิสูจน์โดยเดินหน้าว่าอสมการนั้นเป็นจริงสำหรับจำนวนนับ n บางตัว แล้วนำผลที่ได้ไปใช้พิสูจน์แบบถอยหลังกับจำนวนเต็ม m ที่ข้ามมา ตัวอย่างเช่น พิสูจน์แบบเดินหน้าโดยพิสูจน์กรณี $n = 2$ เป็นจริงแล้วนำไปใช้พิสูจน์กรณี $n = 4$ เป็นจริง แล้วนำกรณี $n = 4$ เป็นจริงไปใช้พิสูจน์กรณี $n = 8$ เป็นจริง ไปเรื่อย ๆ หลังจากนั้นจึงพิสูจน์แบบถอยหลังโดยนำผลกรณี $n = 8$ เป็นจริงมาใช้พิสูจน์กรณี $n = 7$ เป็นจริงแล้วนำผลกรณี $n = 7$ เป็นจริงมาใช้พิสูจน์กรณี $n = 6$ เป็นจริง เป็นต้น

2.2.7 ตัวอย่าง : กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{4} \le \sqrt[3]{\frac{a+b+c+d}{4}} \text{ และ } \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3} \le \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}$$

วิธีทำ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ แล้วจากตัวอย่าง 2.2.2 จะได้ว่า

$$\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}} \qquad \text{…......……(2.7)}$$

ต่อไปเราจะนำผลของ (2.7) พิสูจน์แบบเดินหน้ากับจำนวนเต็ม 4 จำนวนดังนี้

ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

จาก (2.7) จะได้ว่า $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$ และ $\frac{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}$ …………..(2.8)

เพราะฉะนั้น
$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{4} = \frac{\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}+\frac{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{2}\right)^3}}{2}$$

$$\leq \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}\right)^3}}{2} \quad \text{โดย (2.8)}$$

$$\leq \frac{\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}}{2}$$

$$\leq \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{c+d}{2}\right)}{2}} \quad \text{จาก (2.7) เมื่อ } x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{c+d}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{4} \leq \sqrt[3]{\dfrac{a+b+c+d}{4}}$ ....(2.9)

ต่อไปเราจะนำผลของ (2.7) และ (2.9) พิสูจน์แบบถอยหลังกับจำนวนเต็ม 3 จำนวนดังนี้

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3} = \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}-\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}-\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}\right) \quad \text{.........(2.10)}$$

จาก (2.9) จะได้

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{4(a+b+c)}{3}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}$$

เพราะฉะนั้นจาก (2.10) จะได้ $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3} \le \dfrac{4}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3} \le \sqrt[3]{\dfrac{a+b+c}{3}}$ ❑

5. อสมการบางรูปแบบสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของอสมการอื่น ๆ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต อสมการค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ฮาร์โมนิก อสมการของโคชี อสมการสามเหลี่ยม เป็นต้น เราจะศึกษาอสมการเหล่านี้ในบทต่อไป

บทที่ 3
อสมการที่เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก

ในบทนี้ เราจะศึกษาและพิสูจน์อสมการที่เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก พร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างของการประยุกต์แก้โจทย์ปัญหา

3.1 อสมการที่เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก สำหรับจำนวนจริง 2 จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง 2 จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

เรียก $\dfrac{a+b}{2}$ ว่า **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean)** ของ a และ b

เรียก $\sqrt{ab}$ ว่า **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean)** ของ a และ b

เรียก $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ว่า **ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean)** ของ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

และเรียก $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ ว่า **รากกำลังสองเฉลี่ย (root–mean–square)** ของ a และ b

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนจริง 2 จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเสมอ โดยการพิสูจน์จะแนะนำทั้งวิธีทางพีชคณิตและวิธีทางเรขาคณิต

3.1.1 ทฤษฎีบท : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง 2 จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ และ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

บทพิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง 2 จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

วิธีที่ 1 (โดยวิธีทางพีชคณิต)

เพราะว่า $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ดังนั้น $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$ ซึ่งสมมูลกับ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ทำให้ได้ $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \iff a = b$

เพราะว่า $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b=2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b=0$$

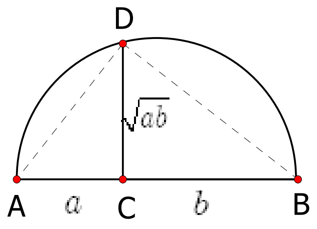
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

วิธีที่ 2 (โดยการพิจารณาความหมายทางเรขาคณิต)

ให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งวงกลมที่มีความยาว $a+b$ และให้ C เป็นจุดที่ทำให้ $AC=a$ และ $CB=b$ และ D เป็นจุดบนส่วนโค้งของครึ่งวงกลมซึ่งเส้นตรง $DC\perp AB$ ที่จุด C



รูปที่ 3.1

แล้ว ΔACD คล้ายกับ ΔCDB

ดังนั้น $\frac{a}{CD}=\frac{CD}{b}$ ทำให้ได้ว่า $(CD)^2=ab$

นั่นคือ $CD=\sqrt{ab}$

เนื่องจากรัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับ $\frac{a+b}{2}$ และ CD จะยาวไม่เกินรัศมีของวงกลม

ดังนั้น $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ และ $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ ก็ต่อเมื่อ จุด D เป็นจุดยอดบนส่วนโค้งของครึ่งวงกลม ซึ่งทำให้ได้ว่า C แบ่งครึ่งด้าน AB พอดี นั่นคือ $a=b$ ❑

อสมการในทฤษฎีบท 3.1.1 เรียกว่า **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต (arithmetic mean – geometric mean inequality)** สำหรับ 2 จำนวน ต่อไปจะให้ตัวอย่างการประยุกต์การแก้ปัญหา

3.1.2 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า $x+\frac{1}{x}\ge 2$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x และ

$x+\frac{1}{x}=2$ ก็ต่อเมื่อ $x=1$

วิธีทำ ให้ $x\in R^+$ แล้วโดยทฤษฎีบท 8 ภาคผนวก ก จะได้ $\frac{1}{x}\in R^+$

และโดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\ge\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1$ ดังนั้น $x+\frac{1}{x}\ge 2$

และโดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2}=\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$

แต่ $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2}=1$ สมมูลกับ $x+\frac{1}{x}=2$ ดังนั้น $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=1$ ❑

3.1.3 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq 8$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x และ y

วิธีทำ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก แล้วโดยทฤษฎีบท 8 ภาคผนวก ก จะได้ $\frac{1}{x}$ และ $\frac{1}{y}$ เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ และ $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$ เป็นจำนวนจริงบวก

และโดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}{2} \geq \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$$
$$=xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

นั่นคือ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq 2\left(xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

เนื่องจาก xy เป็นจำนวนจริงบวก และโดยตัวอย่าง 3.1.2 จะได้ว่า

$xy+\frac{1}{xy} \geq 2$ และ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

ดังนั้น $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq 2(2+2)=8$ ❑

3.1.4 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $\tan\theta+\cot\theta \geq 2$ ทุก ๆ $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ และ $\tan\theta>0$ ทุก $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ดังนั้น โดยตัวอย่าง 3.1.2 จะได้ว่า $\tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} \geq 2$ ❑

ต่อไปจะประยุกต์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ 2 จำนวน เพื่อสร้างอสมการใหม่หรือหาความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยอื่น ๆ

3.1.5 บทแทรก : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะได้ว่า $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ และ $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ เราเรียกอสมการนี้ว่า **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ฮาร์โมนิก (geometric mean –harmonic mean inequality)** สำหรับ 2 จำนวน

บทพิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้วโดยทฤษฎีบท 8 ภาคผนวก ก จะได้ $\frac{1}{a}$ และ $\frac{1}{b}$ เป็นจำนวนจริงบวก

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ ……..……….(3.1)

ทำให้ได้ว่า $\sqrt{ab} \ge \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ นั่นคือ $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$

จาก (3.1) และโดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow a = b$

แต่ $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab}$ สมมูลกับ $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ ดังนั้น $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b$ ❑

จากบทแทรก 3.1.5 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกเสมอ และในบทแทรก 3.1.6 เราจะพิสูจน์ว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และบทแทรก 3.1.7 เราจะพิสูจน์ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับรากกำลังสองเฉลี่ยเสมอ

3.1.6 บทแทรก : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะได้ว่า

$$\frac{a+b}{2} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \text{ และ } \frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = b$$

บทพิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ และ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b$ ………..…….(3.2)

โดยบทแทรก 3.1.5 จะได้ $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ และ $\sqrt{ab} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a = b$ ……….......…..(3.3)

ดังนั้น จาก (3.2) และ (3.3) จะได้ $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ และ $\frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a = b$ ❑

3.1.7 บทแทรก : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน จะได้ว่า

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ และ } \frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = b$$

บทพิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก เนื่องจาก $(a-b)^2 \geq 0$ ดังนั้น $a^2+b^2 \geq 2ab$ ทำให้ได้ว่า $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+(a^2+b^2) = 2(a^2+b^2)$

ฉะนั้น $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ ดังนั้น $\frac{a+b}{2} \leq \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a = b$ นั่นคือจะต้องแสดงว่า

1) ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ และ

2) ถ้า $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ แล้ว $a = b$

1) ให้ $a = b$ แล้วจะได้ว่า $\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$

และ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a$

ดังนั้น $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2) ให้ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ แล้วจะได้ว่า $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$

ฉะนั้น $a^2+2ab+b^2 = 2a^2+2b^2$ และจะได้ $a^2-2ab+b^2 = 0$

ดังนั้น $(a-b)^2 = 0$ เพราะฉะนั้น $a = b$

จาก 1) และ 2) สรุปได้ว่า $\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ ❑

3.2 อสมการเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก สำหรับจำนวนจริง n จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงอสมการเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก สำหรับจำนวนจริง n จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เมื่อ $n \geq 2$ และได้สรุปความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และรากกำลังสองเฉลี่ย

3.2.1 บทนิยาม : ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ n จำนวน โดยที่ $n \geq 2$ เรานิยามค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean) และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean) ของ $a_1, a_2, ..., a_n$ ดังนี้

เรียก $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1, a_2, ..., a_n$

เรียก $(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$ ว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1, a_2, ..., a_n$

เรียก $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ ว่า ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของ $a_1, a_2, ..., a_n$

และเรียก $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ ว่า รากกำลังสองเฉลี่ยของ $a_1, a_2, ..., a_n$

ในการพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $a_1, a_2, ..., a_n$ มีการพิสูจน์ไว้หลายแบบ ในที่นี้จะทำการพิสูจน์โดยใช้วิธีของนักคณิตศาสตร์ชื่อ **โอกุสต์ โคชี** (Auguste Cauchy) ดังนี้

1. พิสูจน์ว่า อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ที่อยู่ในรูป 2^k เมื่อ k เป็นจำนวนนับ

2. พิสูจน์ว่า ถ้าอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ n จำนวน แล้วอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจริงสำหรับ $n-1$ จำนวนด้วย

เพื่อให้เข้าใจการพิสูจน์ง่ายขึ้น จะขอนำเสนอตัวอย่าง 3.2.2 ถึงตัวอย่าง 3.2.5 ก่อน แล้วจึงสรุปเป็นบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต ต่อไป

3.2.2 ตัวอย่าง : กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า

1) $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$

2) $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8}{8} \geq \sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 ... a_8}$

วิธีทำ ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

1) เพราะว่า

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}$$

$$\geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 3.1.1}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 3.1.1}$$

$$= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \quad \text{... ……………(3.4)}$$

ดังนั้น $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$

2) เพราะว่า

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8}{8} = \frac{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} + \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}}{2}$$

$$\geq \frac{\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} + \sqrt[4]{a_5 a_6 a_7 a_8}}{2} \quad \text{โดย (3.4)}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}\sqrt[4]{a_5 a_6 a_7 a_8}} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 3.1.1}$$

$$= \sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$$

ดังนั้น $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8}{8} \geq \sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 ... a_8}$ ❑

จากทฤษฎีบท 3.1.1 และตัวอย่าง 3.2.2 เราสามารถพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต ในกรณี $n = 2$, $n = 4$ และ $n = 8$ ได้โดยวิธีพิสูจน์แบบเดินหน้าซึ่งนำไปสู่การพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต โดยวิธีของโอกุสต์ โคชี ข้อที่ 1. ตามตัวอย่าง 3.2.3 ดังนี้

3.2.3 ตัวอย่าง : กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^n}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^n}}{2^n} \geq \left(a_1 a_2 ... a_{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \quad \text{และ}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^n}}{2^n} = \left(a_1 a_2 ... a_{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } a_1 = a_2 = ... = a_{2^n}$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^n}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^n}}{2^n} \geq \left(a_1 a_2 ... a_{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}$ และ $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^n}}{2^n} = \left(a_1 a_2 ... a_{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{2^n}$ "

(1) จะแสดงว่า P(1) เป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}$ และ $\frac{a_1 + a_2}{2} = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a_1 = a_2$
ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จะแสดงว่า ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกและ P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง
ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ P(k) เป็นจริง และให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^{k+1}-1}, a_{2^{k+1}}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ แบ่งจำนวนออกเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ $a_1, a_2, ..., a_{2^k-1}, a_{2^k}$ และ $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, ..., a_{2^{k+1}}$
พิจารณา $a_1, a_2, ..., a_{2^k-1}, a_{2^k}$ จะเห็นว่า $a_1, a_2, ..., a_{2^k-1}, a_{2^k}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์จำนวน 2^k ตัว และ P(k) เป็นจริง ทำให้ได้ว่า $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2^k} \geq \left(a_1 a_2 ... a_{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}}$

และ $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2^k} = \left(a_1 a_2 ... a_{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{2^k-1} = a_{2^k}$ ....(3.5)

พิจารณา $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, ..., a_{2^{k+1}}$
จะเห็นว่า $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, ..., a_{2^{k+1}}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์จำนวน 2^k ตัว และ P(k) เป็นจริง ทำให้ได้ว่า

$$\frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}}}{2^k} \geq \left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} ... a_{2^{k+1}-1} a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^k}}$$ และ

$$\frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}}}{2^k} = \left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} ... a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^k}} \Leftrightarrow a_{2^k+1} = a_{2^k+2} = ... = a_{2^{k+1}} \quad ....(3.6)$$

จาก $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right] \quad ....(3.7)$$

ให้ $x = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2^k}$ และ $y = \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}}}{2^k}$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ $\frac{1}{2}[x+y] \geq [xy]^{\frac{1}{2}}$ และ $\frac{1}{2}[x+y] = [xy]^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = y$ ……..(3.8)

โดย (3.5) และ (3.6) จะได้

$$
\begin{aligned}
[xy]^{\frac{1}{2}} &\geq \left[\left(a_1a_2\ldots a_{2^k-1}a_{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}}\left(a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}-1}a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^k}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left(a_1a_2\ldots a_{2^k-1}a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}-1}a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^k}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a_1a_2\ldots a_{2^k-1}a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}-1}a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \left(a_1a_2\ldots a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}$ และ

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \left(a_1a_2\ldots a_{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_{2^{k+1}}$ ❑

จากตัวอย่าง 3.2.3 เราได้พิสูจน์ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต เป็นจริงสำหรับ $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$ เสร็จแล้ว ต่อไปเป็นการพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตโดยวิธีการของ โอกุสต์ โคชี ข้อที่ 2. ตามตัวอย่าง 3.2.5 เพื่อให้การพิสูจน์เข้าใจง่าย จะนำเสนอตัวอย่าง 3.2.4 ก่อน ดังนี้

3.2.4 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ a_1, a_2, a_3, a_4 และ $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ แล้วทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ b_1, b_2, b_3 จะได้ว่า $\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geq \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$ และ $\frac{b_1+b_2+b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$ ก็ต่อเมื่อ $b_1 = b_2 = b_3$

วิธีทำ ให้ a_1, a_2, a_3, a_4 เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ซึ่ง $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ และ $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ……....(3.9)

จะพิสูจน์ว่า ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ b_1, b_2, b_3 จะได้ว่า $\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geq \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$ และ $\frac{b_1+b_2+b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1b_2b_3} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = b_3$

ให้ b_1, b_2, b_3 เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และให้ $X = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$

ดังนั้น b_1, b_2, b_3 และ X เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ 4 จำนวน

จาก (3.9) จะได้ว่า $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + X}{4} \geq \sqrt[4]{b_1 b_2 b_3 X}$ ………(3.10)

เพราะว่า $b_1 + b_2 + b_3 + X = 3X + X = 4X$ ดังนั้น $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + X}{4} = X$ ……..…(3.11)

จาก (3.10) และ (3.11) จะได้ว่า $X \geq \sqrt[4]{b_1 b_2 b_3 X}$ ดังนั้น $X^4 \geq b_1 b_2 b_3 X$

พิจารณา X

กรณี 1 ถ้า $X \neq 0$ จะได้ $X^3 \geq b_1 b_2 b_3$

กรณี 2 ถ้า $X = 0$ จาก (3.11) จะได้ $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ เพราะฉะนั้น $X^3 \geq b_1 b_2 b_3$

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า $\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^3 = X^3 \geq b_1 b_2 b_3$ เพราะฉะนั้น $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \geq \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = b_3$ นั่นคือจะต้องแสดงว่า

1) ถ้า $b_1 = b_2 = b_3$ แล้ว $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$ และ

2) ถ้า $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$ แล้ว $b_1 = b_2 = b_3$

1) ให้ $b_1 = b_2 = b_3$ แล้วจะได้ $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \frac{b_1 + b_1 + b_1}{3} = \frac{3b_1}{3} = b_1$

และ $\sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} = \sqrt[3]{b_1 b_1 b_1} = \sqrt[3]{b_1^3} = b_1$ ดังนั้น $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$

2) ให้ $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$ แล้วจะได้ $\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^3 = b_1 b_2 b_3$

และจาก $X = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$ จะได้ $X^3 = \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^3 = b_1 b_2 b_3$

และจาก (3.11) จะได้ $\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + X}{4}\right)^4 = X^4 = X^3 X = b_1 b_2 b_3 X$

ดังนั้น $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + X}{4} = \sqrt[4]{b_1 b_2 b_3 X}$ และโดย (*) จะได้ $b_1 = b_2 = b_3 = X$

จาก 1) และ 2) สรุปได้ว่า $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = b_3$ ❑

3.2.5 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

แล้วทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ จะได้ $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}}$ และ $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}}$ ก็ต่อเมื่อ $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$

วิธีทำ ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ซึ่ง $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ และ $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$ …….. (3.12)

จะพิสูจน์ว่า ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ จะได้

$$\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}} \text{ และ}$$

$$\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$$

ให้ $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และให้ $X = \frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1}$

ดังนั้น $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ และ X เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ n จำนวน

จาก (3.12) จะได้ว่า $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + X}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_{n-1} X}$ ………(3.13)

เพราะว่า $b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + X = (n-1)X + X = nX$

ดังนั้น $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + X}{n} = X$ ….…..(3.14)

จาก (3.13) และ (3.14) จะได้ว่า $X \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_{n-1} X}$

ดังนั้น $X^n \geq b_1 b_2 ... b_{n-1} X$

พิจารณา X

กรณี 1 ถ้า $X \neq 0$ จะได้ $X^{n-1} \geq b_1 b_2 ... b_{n-1}$

กรณี 2 ถ้า $X = 0$ จาก (3.14) จะได้ $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1} = 0$

เพราะฉะนั้น $X^{n-1} \geq b_1 b_2 ... b_{n-1}$

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า $\left(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} = X^{n-1} \geq b_1 b_2 ... b_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$

นั่นคือจะต้องแสดงว่า

1) ถ้า $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$ แล้ว $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}}$ และ

2) ถ้า $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1 b_2 ... b_{n-1}}$ แล้ว $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$

1) ให้ $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$ แล้วจะได้

$$\frac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1} = \frac{\overbrace{b_1+b_1+...+b_1}^{n-1\text{ตัว}}}{n-1} = \frac{(n-1)b_1}{n-1} = b_1 \text{ และ}$$

$$\sqrt[n-1]{b_1b_2...b_{n-1}} = \sqrt[n-1]{\underbrace{b_1b_1...b_1}_{n-1\text{ตัว}}} = \sqrt[n-1]{b_1^{n-1}} = b_1$$

ดังนั้น $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1b_2...b_{n-1}}$

2) ให้ $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1b_2...b_{n-1}}$ แล้วจะได้ $\left(\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} = b_1b_2...b_{n-1}$

จาก $X = \dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1}$ จะได้ $X^{n-1} = \left(\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} = b_1b_2...b_{n-1}$

และจาก (3.14) จะได้ $\left(\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}+X}{n}\right)^{n} = X^n = X^{n-1}X = b_1b_2...b_{n-1}X$

ดังนั้น $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}+X}{n} = \sqrt[n]{b_1b_2...b_{n-1}X}$

และโดย (3.12) จะได้ว่า $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1} = X$

จาก 1) และ 2) สรุปได้ว่า $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{n-1}}{n-1} = \sqrt[n-1]{b_1b_2...b_{n-1}} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_{n-1}$ ❑

จากตัวอย่าง 3.2.3 และตัวอย่าง 3.2.5 เราสามารถพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต ตามวิธีของ โอกุสต์ โคชี ได้ครบทั้ง 2 ข้อ แล้วจะนำมาเขียนเป็นบทพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

3.2.6 ทฤษฎีบท : อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต (arithmetic mean – geometric mean inequality) สำหรับ n จำนวน

กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และ $n \ge 2$ จะได้ว่า

$\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ และ $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ซึ่ง $n \ge 2$ และให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ $n \le 2^k$

เพราะว่า 1) $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{2^k}}{2^k} \ge \sqrt[2^k]{b_1b_2...b_{2^k}}$ ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $b_1, b_2, ..., b_{2^k}$

และ $\dfrac{b_1+b_2+...+b_{2^k}}{2^k} = \sqrt[2^k]{b_1b_2...b_{2^k}} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_{2^k}$

ซึ่งข้อความนี้เป็นจริงโดยตัวอย่าง 3.2.3

และ 2) ถ้า $\dfrac{b_1+b_2+...+b_m}{m} \ge \sqrt[m]{b_1b_2...b_m}$ ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $b_1, b_2, ..., b_m$

และ $\dfrac{b_1+b_2+...+b_m}{m} = \sqrt[m]{b_1b_2...b_m} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_m$

แล้วทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $c_1, c_2, ..., c_{m-1}$ จะได้ว่า

$\dfrac{c_1+c_2+...+c_{m-1}}{m-1} \ge \sqrt[m-1]{c_1c_2...c_{m-1}}$ และ

$\dfrac{c_1+c_2+...+c_{m-1}}{m-1} = \sqrt[m-1]{c_1c_2...c_{m-1}} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = ... = c_{m-1}$

ซึ่งข้อความนี้เป็นจริงโดยตัวอย่าง 3.2.5

เพราะฉะนั้น $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

และ $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$ ❑

3.2.7 บทแทรก : อสมการค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ฮาร์โมนิก (geometric mean – harmonic mean inequality) สำหรับ n จำนวน

กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์ และ $n \in N$ ซึ่ง $n \ge 2$

แล้ว $$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \le (a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ และ}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} = (a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a_1 = a_2 = ... = a_n$$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์ และ $n \in N$ ซึ่ง $n \ge 2$

แล้ว $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, ..., \dfrac{1}{a_n}$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์

โดยทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า $$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n} \ge \left(\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}}$$

ดังนั้น $(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}}$ และ

$$(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2}=...=\frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n \qquad \square$$

3.2.8 หมายเหตุ : กำหนดให้ $a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์ และ $n \in N$ ซึ่ง $n \geq 2$ แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.6 และบทแทรก 3.2.7 จะได้ว่า

$$\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \text{ และ}$$

$$\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}} = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a_1=a_2=...=a_n$$

ซึ่งเราจะเรียกอสมการนี้ว่า **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ฮาร์โมนิก (arithmetic mean – harmonic mean inequality)** สำหรับ n จำนวน

บทแทรก 3.2.9 ที่จะกล่าวถึงต่อไป จะแสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับรากกำลังสองเฉลี่ย ซึ่งจะได้ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับรากกำลังสองเฉลี่ยเสมอ

3.2.9 บทแทรก : ให้ $a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และ $n \in N$ ซึ่ง $n \geq 2$ แล้ว $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ และ

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a_1=a_2=...=a_n$$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และ $n \in N$ ซึ่ง $n \geq 2$ พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n) \quad ....(3.15)$$

และเนื่องจาก $(a_i+a_j)^2 \geq 0$ เสมอ ดังนั้น $a_i^2+a_j^2 \geq 2a_ia_j$ ....(3.16)

โดยการแทนที่ $2a_ia_j$ ด้วย $a_i^2+a_j^2$ ทางขวามือของสมการ (3.15) จะได้ว่า

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)$$
$$\le a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + \ldots + (a_{n-1}^2 + a_n^2)$$
$$= n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

ดังนั้น $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \left\{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \frac{\left\{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

นั่นคือจะต้องแสดงว่า

1) ถ้า $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ แล้ว $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) ถ้า $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ แล้ว $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

1) ให้ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ แล้วจะได้ว่า $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{n\text{ ตัว}}}{n} = \frac{na_1}{n} = a_1$

และ $$\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\overbrace{a_1^2 + a_1^2 + \ldots + a_1^2}^{n\text{ ตัว}}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{na_1^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a_1^2\right)^{\frac{1}{2}} = a_1$$

ดังนั้น $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2) ให้ $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

แล้วจะได้ $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$

ฉะนั้น

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n) = n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)-2(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n)=0$$

$$(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\dots+(a_1-a_n)^2+\dots+(a_{n-1}-a_n)^2=0 \qquad \dots\dots(3.17)$$

เนื่องจาก $(a_i-a_j)^2 \ge 0$ เสมอ

ดังนั้น สมการ (3.17) เป็นจริง เมื่อ $(a_i-a_j)^2=0$ ทุกพจน์

และทำให้ได้ว่า $a_1=a_2, a_1=a_3, \dots, a_1=a_n, a_2=a_3, \dots, a_{n-1}=a_n$

เพราะฉะนั้น $a_1=a_2=\dots=a_n$

จาก 1) และ 2) สรุปได้ว่า $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a_1=a_2=\dots=a_n$ ❑

จากทฤษฎีบท 3.2.6 บทแทรก 3.2.7 บทแทรก 3.2.8 และบทแทรก 3.2.9 เราสามารถสรุปความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และรากกำลังสองเฉลี่ย ดังนี้

$$\boxed{\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}} \le (a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \le \left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ตัวอย่างอีกหลาย ๆ ตัวอย่างต่อจากนี้ จะเป็นตัวอย่างโจทย์ประยุกต์ที่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยการประยุกต์อสมการที่เกี่ยวข้องกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และบางตัวอย่างอาจจะสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยอสมการรูปแบบอื่น ๆ ที่จะกล่าวถึงในบทที่ 4 ต่อไป

3.2.10 ตัวอย่าง : กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกและ $a_1+a_2+\dots+a_n=1$

จงแสดงว่า $\left(1+\dfrac{1}{a_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) \ge (n+1)^n$

วิธีทำ ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกและ $a_1+a_2+\dots+a_n=1$

แล้วจะได้ว่า $1+\dfrac{1}{a_1}, 1+\dfrac{1}{a_2}, \dots, 1+\dfrac{1}{a_n}$ เป็นจำนวนจริงบวก

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ฮาร์โมนิก จะได้ว่า

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \geq \frac{n}{\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a_2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}}$$

$$=\frac{n}{\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n}}$$

$$=\frac{n}{\left(1-\frac{1}{1+a_1}\right)+\left(1-\frac{1}{1+a_2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+a_n}\right)}$$

$$=\frac{n}{n-\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right)}$$

ดังนั้น $n-\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right) \geq \frac{n}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}}$

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} \leq n-\frac{n}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}}$$

$$\frac{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}{n} \leq 1-\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}} \qquad \text{.......(3.18)}$$

เพราะว่า $\frac{1}{1+a_1},\frac{1}{1+a_2},\ldots,\frac{1}{1+a_n}$ เป็นจำนวนจริงบวก และโดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ฮาร์โมนิก จะได้ว่า

$$\frac{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}{n} \geq \frac{n}{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$$

$$=\frac{n}{n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)}=\frac{n}{n+1} \qquad \text{......(3.19)}$$

(เพราะว่า $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$)

จาก (3.18) และ (3.19) จะได้ $\frac{n}{n+1} \leq 1-\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}}$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)...\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}} \le 1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)...\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \le \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$$

ดังนั้น $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)...\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \ge (n+1)^n$ ❑

3.2.11 ตัวอย่าง : ให้ m, n เป็นจำนวนนับ และ x, y เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า

$$\frac{mx+ny}{m+n} \ge x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} \text{ และ } \frac{mx+ny}{m+n} = x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} \Leftrightarrow x=y$$

วิธีทำ ให้ m, n เป็นจำนวนนับ และ x, y เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

โดยที่ $a_1 = a_2 = ... = a_m = x$ และ $a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_{m+n} = y$

ดังนั้น $a_1 + a_2 + ... + a_{m+n} = mx + ny$ และ $a_1 a_2 ... a_{m+n} = x^m y^n$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต จะได้ว่า

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{m+n}}{m+n} \ge (a_1 a_2 ... a_{m+n})^{\frac{1}{m+n}} \text{ และ}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{m+n}}{m+n} = (a_1 a_2 ... a_{m+n})^{\frac{1}{m+n}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{m+n}$$

แต่ $\frac{a_1+a_2+...+a_{m+n}}{m+n} = \frac{mx+ny}{m+n}$ และ $(a_1 a_2 ... a_{m+n})^{\frac{1}{m+n}} = (x^m y^n)^{\frac{1}{m+n}} = x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}}$

และ $a_1 = a_2 = ... = a_{m+n}$ ก็คือ $x = y$

ดังนั้น $\frac{mx+ny}{m+n} \ge x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}}$ และ $\frac{mx+ny}{m+n} = x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} \Leftrightarrow x=y$ ❑

3.2.12 ตัวอย่าง : จงหาค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ $x^2 + y^2$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$ และ $x \ne 0$

วิธีทำ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องเงื่อนไข $xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$ และ $x \ne 0$

และกำหนดให้ $A = x^2 + y^2$ และ $B = x^2 - y^2$ แล้วจะได้ $x^2 = \frac{A+B}{2}$ และ $y^2 = \frac{A-B}{2}$

ทำให้ได้ $xy = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

นอกจากนี้ จะได้ $A = x^2 + y^2 = xy(x^2 - y^2) = B\sqrt{\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

ต่อไปเราจะหาค่าน้อยสุดของ A โดยการประยุกต์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต

ทำให้ได้ว่า $\sqrt{\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right)} \le \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}}{2} = \frac{A}{2}$

ดังนั้น $A = x^2 + y^2 = xy(x^2 - y^2) = B\sqrt{\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right)} \le \frac{A}{2}B$

และเพราะว่า ถ้า $A = 0$ แล้ว $x = 0$ จึงได้ว่า $A > 0$ ทำให้ได้ $B \ge 2$

แต่ $A = B\sqrt{\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right)}$ สมมูลกับ $4A^2 = B^2(A^2 - B^2) = B^2A^2 - B^4$

ทำให้ได้ $A^2(B^2 - 4) = B^4$

และถ้า $B = 2$ แล้ว $4A^2 = 4(A^2 - 4)$ ซึ่งทำให้ได้ $-16 = 0$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $B \ne 2$ จึงได้ $A^2 = \frac{B^4}{B^2 - 4}$

จาก $0 \le (B^2 - 8)^2 = B^4 - 16B^2 + 64$ ทำให้ได้ว่า $B^4 \ge 16B^2 - 64 = 16(B^2 - 4)$

ดังนั้น $A^2 = \frac{B^4}{B^2 - 4} \ge 16$ ซึ่งทำให้ได้ $x^2 + y^2 = A \ge 4$ ❑

3.2.13 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้าผลคูณของจำนวนจริงบวก 3 จำนวน a, b และ c เท่ากับ 1 แล้ว อสมการต่อไปนี้เป็นจริง $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge a + b + c$

วิธีทำ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก 3 จำนวนซึ่ง $abc = 1$

แล้วเราประยุกต์ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $\frac{a}{b}, \frac{a}{b}$ และ $\frac{b}{c}$ จะได้

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) = \frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \quad \text{เราจึงได้อสมการ} \quad \frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \ge a$$

แล้วประยุกต์ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต สำหรับ $\frac{b}{c}, \frac{b}{c}$ และ $\frac{c}{a}$ กับ $\frac{c}{a}, \frac{c}{a}$ และ $\frac{a}{b}$ ในทำนองเดียวกัน จะทำให้เราได้อีก 2 อสมการ คือ $\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \ge b$ และ $\frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \ge c$

เมื่อนำอสมการทั้งสามมารวมกันจะได้

$$a + b + c \le \left(\frac{2a}{3b} + \frac{a}{3b}\right) + \left(\frac{2b}{3c} + \frac{b}{3c}\right) + \left(\frac{2c}{3a} + \frac{c}{3a}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$ ❑

3.2.14 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า $a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $a_1+a_2+...+a_n=1$ แล้ว $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}$

วิธีทำ ให้ $a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $a_1+a_2+...+a_n=1$

แล้วโดยการประยุกต์ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ฮาร์โมนิก สำหรับ $a_1,a_2,...,a_n$ จะได้

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\leq\frac{a_1+a_2}{2},\frac{2}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}\leq\frac{a_2+a_3}{2},...,\frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}}\leq\frac{a_{n-1}+a_n}{2},\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}}\leq\frac{a_n+a_1}{2}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2},\frac{2a_2a_3}{a_2+a_3}\leq\frac{a_2+a_3}{2},...,\frac{2a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}\leq\frac{a_{n-1}+a_n}{2},\frac{2a_na_1}{a_n+a_1}\leq\frac{a_n+a_1}{2}$$

เมื่อนำอสมการทั้งหมดมารวมกันจะได้

$$\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{2a_2a_3}{a_2+a_3}+...+\frac{2a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{2a_na_1}{a_n+a_1}\leq\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+...+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}+\frac{a_n+a_1}{2}$$

$$=\frac{2(a_1+a_2+...+a_n)}{2}=a_1+a_2+...+a_n=1$$

และเพราะ $\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{2a_2a_3}{a_2+a_3}+...+\frac{2a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{2a_na_1}{a_n+a_1}\leq 1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_2a_3}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right)\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_2a_3}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right)\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n)-\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_2a_3}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right)$$

$$=\left(a_1-\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)+\left(a_2-\frac{a_2a_3}{a_2+a_3}\right)+...+\left(a_{n-1}-\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-1}+a_n}\right)+\left(a_n-\frac{a_na_1}{a_n+a_1}\right)\geq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}$ ❑

3.2.15 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ แล้ว $ab+bc+ca \le \frac{3}{4}$

วิธีทำ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ แล้ว

$$\begin{aligned}1 &= (a+b)(b+c)(c+a)\\ &= abc+b^2c+ac^2+bc^2+a^2b+ab^2+a^2c-abc\\ &= (a^2b+ab^2+abc)+(abc+b^2c+bc^2)+(a^2c+abc+ac^2)-abc\\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\end{aligned}$$

ดังนั้น $ab+bc+ca = \dfrac{1+abc}{a+b+c}$

เพราะว่า $a+b+c = \frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]$

และโดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต จะได้ว่า

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ดังนั้น $a+b+c \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$ ซึ่งทำให้ได้ $\dfrac{1}{a+b+c} \le \dfrac{2}{3}$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต ในอีกทางหนึ่ง เราได้ว่า

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc} \text{ และ } \frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ca}$$

ทำให้ได้ $1=(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8\sqrt{(ab)(bc)(ca)} = 8abc$ ดังนั้น $abc \le \frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้น $ab+bc+ca = \dfrac{1+abc}{a+b+c} \le \dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{8}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{9}{8}\right) = \dfrac{3}{4}$ ❑

3.2.16 ตัวอย่าง : ให้ $S = x_1+x_2+\ldots+x_n$ โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{S}{S-x_1}+\dfrac{S}{S-x_2}+\ldots+\dfrac{S}{S-x_n} \ge \dfrac{n^2}{n-1}$ และ $\dfrac{S}{S-x_1}+\dfrac{S}{S-x_2}+\ldots+\dfrac{S}{S-x_n} = \dfrac{n^2}{n-1}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

วิธีทำ ให้ $S = x_1+x_2+\ldots+x_n$ โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก

เพราะว่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $S > x_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ซึ่งทำให้ $\dfrac{S}{S-x_i}$ เป็นจำนวนจริงบวกสำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

เราจึงให้ $a_i = \dfrac{S}{S-x_i}$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

แล้ว $a_1+a_2+\ldots+a_n = \dfrac{S}{S-x_1}+\dfrac{S}{S-x_2}+\ldots+\dfrac{S}{S-x_n}$ และ

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=\frac{S-x_1}{S}+\frac{S-x_2}{S}+...+\frac{S-x_n}{S}$$
$$=\left(1-\frac{x_1}{S}\right)+\left(1-\frac{x_2}{S}\right)+...+\left(1-\frac{x_n}{S}\right)$$
$$=n-\frac{x_1+x_2+...+x_n}{S}=n-1$$

แต่โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ฮาร์โมนิก สำหรับจำนวนจริงบวก n จำนวน $a_1,a_2,...,a_n$

เราจะได้ $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+...+a_n^{-1}}$

ทำให้ได้ $\frac{1}{n}\left(\frac{S}{S-x_1}+\frac{S}{S-x_2}+...+\frac{S}{S-x_n}\right)=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\frac{n}{n-1}$

ซึ่งสมมูลกับ $\frac{S}{S-x_1}+\frac{S}{S-x_2}+...+\frac{S}{S-x_n}\ge\frac{n^2}{n-1}$

เพราะว่า อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ฮาร์โมนิกเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=...=a_n$ และ

เห็นได้ชัดว่า $\frac{S}{S-x_1}=\frac{S}{S-x_2}=...=\frac{S}{S-x_n}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1=x_2=...=x_n$ ❑

3.2.17 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2n จำนวน แล้วอสมการใดอสมการหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\ge n \text{ หรือ } \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\ge n \qquad ....(3.20)$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2n จำนวน ต้องการแสดงว่าอสมการใดอสมการหนึ่งใน (3.20) เป็นจริง

จึงสมมติให้ $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\ge n$ ไม่เป็นจริง

นั่นคือ จะได้ว่า $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}<n$ แล้วจะมี i ซึ่ง $1\le i\le n$ และ $\frac{a_i}{b_i}\le 1$

(ถ้า $\frac{a_i}{b_i}>1$ สำหรับทุก ๆ i แล้ว $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\ge n$ ซึ่งจะขัดแย้งกับที่สมมติไว้)

ดังนั้น $\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\right)<1$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต จะได้

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_n}}\le\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ และ } \sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}}\le\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ทำให้ได้ $\sqrt[n]{\dfrac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_n}} \leq 1$ และได้ $\sqrt[n]{\dfrac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}} \geq 1$

ซึ่งแสดงว่า $1 \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + ... + \dfrac{b_n}{a_n}\right)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + ... + \dfrac{b_n}{a_n} \geq n$ ตามต้องการ ❑

จากตัวอย่าง 3.2.16 และตัวอย่าง 3.2.17 เราจะนำเสนอตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างนี้อีกครั้งในบทที่ 4 ด้วยการประยุกต์ใช้อสมการโคชีและชวาร์ซในตัวอย่าง 4.1.9 และ 4.1.10

บทที่ 4
อสมการขั้นสูงและการประยุกต์

ในบทนี้ เราศึกษาและกล่าวถึงอสมการขั้นสูงบางรูปแบบที่มีชื่อเสียงและแสดงการนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหา ซึ่งบางตัวอย่างได้แสดงการแก้ปัญหาไปแล้วในบทที่ 3 อสมการที่จะกล่าวถึงในบทนี้ ได้แก่ อสมการโคชีและชวาร์ซ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก อสมการโฮลเดอร์ และอสมการค่าเฉลี่ยยกกำลังสอง เป็นต้น

4.1 อสมการโคชีและชวาร์ซ

ในวิชาพีชคณิต เรารู้จักเอกลักษณ์ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(b^2c^2-2abcd+a^2d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$ และเนื่องจาก $(bc-ad)^2 \geq 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a,b,c และ d ทำให้ได้อสมการ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a,b,c และ d และสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก a,b,c และ d จะได้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd \qquad \text{..........(4.1)}$$

และหากขยายแนวความคิดของอสมการ (4.1) ไปสู่กรณีผลบวก n พจน์ จะได้

$$\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)} \geq a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \qquad \text{..........(4.2)}$$

เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก 2 ชุดคือ $a_1,a_2,...,a_n$ และ $b_1,b_2,...,b_n$ ด้วยการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งจะกล่าวถึงในทฤษฎีบท 4.1.1 ต่อไป

อสมการ (4.2) มีชื่อเรียกตามท่านผู้พิสูจน์ความจริงของอสมการได้เป็นท่านแรก ๆ ว่า "อสมการโคชีและชวาร์ซ" (Cauchy – Schwartz inequality)

ต่อไปเราจะพิสูจน์อสมการโคชีและชวาร์ซ โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต

4.1.1 ทฤษฎีบท : ให้ $a_1,a_2,...,a_n$ และ $b_1,b_2,...,b_n$ เป็นจำนวนจริง 2n จำนวน จะได้ว่า

$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$ และ

$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n = \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $a_i = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$

หรือ 2) $b_i = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$

หรือ 3) มี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $a_i = \alpha b_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริง $2n$ จำนวน

วิธีที่ 1 ให้ $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ และ $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{A^2} = 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{B^2}$

ต่อไปเราจะแยกพิจารณา A และ B เป็น 3 กรณี

กรณี 1 $A = 0$ นั่นคือ $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = 0$

จะได้ $a_i = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$

ดังนั้น $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = 0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$

กรณี 2 $B = 0$ นั่นคือ $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} = 0$

จะได้ $b_i = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$

ดังนั้น $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = 0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$

กรณี 3 $A > 0$ และ $B > 0$

เนื่องจาก $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ทุกจำนวนจริง a และ b

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{B}\right)^2 \geq 2\left(\frac{a_i}{A}\right)\left(\frac{b_i}{B}\right)$

และจะได้

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{B}\right)^2 \geq 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)\left(\frac{b_i}{B}\right)$$

$$\frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{B^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq \frac{2}{AB}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$1 + 1 \geq \frac{2}{AB}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$1 \geq \frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$AB \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB$

เพราะฉะนั้น $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$

ต่อไปจะแสดงว่า $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$ ก็ต่อเมื่อ มี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $a_i = \alpha b_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, ..., n$ ....(4.3)

$(\Rightarrow)$ สมมติว่า $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$ ....(4.4)

และเพราะว่า (4.4) $\Leftrightarrow 1=\frac{a_1b_1}{AB}+\frac{a_2b_2}{AB}+\ldots+\frac{a_nb_n}{AB}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{AB}$

$$\Leftrightarrow 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{AB}=0$$

$$\Leftrightarrow 2-2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{AB}=0$$

$$\Leftrightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{A^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{B^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{AB}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i}{A}\right)^2+\left(\frac{b_i}{B}\right)^2-2\frac{a_ib_i}{AB}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}-\frac{b_i}{B}\right)^2$$

และ (4.4) เป็นจริงตามสมมติ

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}-\frac{b_i}{B}\right)^2=0$ ซึ่งทำให้ $\frac{a_i}{A}-\frac{b_i}{B}=0$ ทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n$

ทำให้ได้ว่า $a_i=\frac{A}{B}b_i$ สำหรับแต่ละ $i=1,2,\ldots,n$ โดยที่ $\frac{A}{B}$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ

เราจึงสรุปได้ว่า มีจำนวนจริงไม่เป็นลบ $\alpha=\frac{A}{B}$ ซึ่ง $a_i=\alpha b_i$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n$

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า มีจำนวนจริงไม่เป็นลบ α ซึ่ง $a_i=\alpha b_i$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n$ แล้ว

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\alpha\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)$$

$$=\alpha\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

$$=\sqrt{(\alpha b_1)^2+(\alpha b_2)^2+\ldots+(\alpha b_n)^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ ทำให้ได้ว่า (4.3) เป็นจริง

วิธีที่ 2 ใช้เอกลักษณ์ของลากรองจ์ (Lagrange's identity)

จากตัวอย่าง 2.2.6 จะได้

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2+\sum_{1\le j<i\le n}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2+\sum_{1\le i=j\le n}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\left(a_jb_i-a_ib_j\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$$

เพราะว่า $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2\ge 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\ge 0$

ทำให้ได้ $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$ ❑

ต่อไปเราจะสร้างอสมการอื่น ๆ จากอสมการโคชีและชวาร์ซ

4.1.2 บทแทรก : ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$a_1+a_2+\ldots+a_n\le\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$ และ

$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=\ldots=a_n$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยอสมการโคชีและชวาร์ซ จะได้ว่า

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1\cdot a_1+1\cdot a_2+\ldots+1\cdot a_n\le\sqrt{1^2+1^2+\ldots+1^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$
$$=\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}$$

และ $a_1+a_2+\ldots+a_n=\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงไม่เป็นลบ α

ซึ่ง $a_i=\alpha\cdot 1=\alpha$ สำหรับทุก ๆ $i=1,2,\ldots,n$ นั่นคือก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=\ldots=a_n$ ❑

4.1.3 บทแทรก : ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$ และ

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=\ldots=a_n$

บทพิสูจน์ เนื่องจากบทแทรก 4.1.2 เป็นจริง ดังนั้นเราจะหารทั้งสองข้างของ

$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$ ด้วยจำนวนบวก n เราจะได้

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

และเราจะได้

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \Leftrightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n=\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$$
$$\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n \qquad \square$$

4.1.4 ข้อสังเกต : เราทราบว่าพจน์ทางซ้ายมือของอสมการในบทแทรก 4.1.3 คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนจริงบวก n จำนวน ส่วนพจน์ทางขวามือของอสมการในบทแทรก 4.1.3 มีชื่อเรียกว่า "รากกำลังสองเฉลี่ย (root – mean – square)" ดังนั้น อสมการในบทแทรก 4.1.3 จึงบอกเราว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ มีค่าน้อยกว่ารากกำลังสองเฉลี่ยของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ และค่าทั้งสองจะเท่ากันเมื่อ $a_1=a_2=\ldots=a_n$ นั่นคือเมื่อทั้ง n จำนวนเป็นจำนวนเดียวกัน

4.1.5 ข้อสังเกต : ถ้า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และสำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ นิยามให้ $x_i=\sqrt{a_i}$ และ $y_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}$ แล้วโดยอสมการโคชีและชวาร์ซ จะได้ว่า

$$n=\sqrt{a_1}\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\le\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ $n^2\le(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$

4.1.6 บทแทรก : ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ และ $b_1,b_2,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2 ชุด จะได้ว่า

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

บทพิสูจน์ ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ และ $b_1,b_2,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2 ชุด แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

แต่โดยอสมการโคชีและชวาร์ซ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ ซึ่งทำให้ได้

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

ดังนั้น $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ $\square$

เราอาจแปลความหมายของอสมการในบทแทรก 4.1.5 ในทางเรขาคณิตโดยให้ $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ และ $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ เป็นเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใน n มิติ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{a},\vec{b}$

และ $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n\right)$ ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วเวกเตอร์ทั้งสามจะสามารถประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ดังนั้นผลบวกความยาวของด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยม (คือผลบวกของขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ทางด้านขวามือของอสมการในบทแทรก 4.1.5) ต้องยาวกว่าด้านที่สาม (คือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}+\vec{b}$ ทางด้านซ้ายมือของอสมการในบทแทรก 4.1.5) ด้วยความหมายทางเรขาคณิตของอสมการในบทแทรก 4.1.5 ดังกล่าว เราจึงเรียกอสมการในบทแทรก 4.1.5 ว่า "**อสมการสามเหลี่ยม (Triangle Inequality)**"

ต่อไปเราจะยกตัวอย่างการประยุกต์อสมการโคชีและชวาร์ซในการแก้ปัญหา

4.1.7 ตัวอย่าง : ให้ $x_1,x_2,...,x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์อสมการ

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_1+...+x_n}<\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

วิธีทำ สำหรับแต่ละ $k=1,2,...,n$ กำหนดให้ $s_k=x_1+x_2+...+x_k$

แล้วเราสังเกตได้ว่า $s_1<s_2<...<s_n$ และ $x_k=s_k-s_{k-1}$ สำหรับ $k\geq 2$

โดยอสมการโคชีและชวาร์ซ เราจะได้

$$\left(\frac{1}{1+s_1}+\frac{1}{1+s_2}+...+\frac{1}{1+s_n}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{\sqrt{x_1}}{1+s_1}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{\sqrt{x_1}}{1+s_2}+...+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{\sqrt{x_1}}{1+s_n}\right)^2$$

$$\leq\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\left(\frac{x_1}{(1+s_1)^2}+\frac{x_2}{(1+s_2)^2}+...+\frac{x_n}{(1+s_n)^2}\right)$$

แต่เพราะ $s_1<s_2<...<s_n$ ทำให้ได้ $(1+s_{k-1})(1+s_k)<(1+s_k)^2$ สำหรับทุก ๆ $k\geq 2$ และ $(1+s_1)<(1+s_1)^2$ และได้ว่า $\frac{1}{(1+s_k)^2}<\frac{1}{(1+s_{k-1})(1+s_k)}$ และ $\frac{1}{(1+s_1)^2}<\frac{1}{(1+s_1)}$

ดังนั้น

$$\frac{x_1}{(1+s_1)^2}+\frac{x_1}{(1+s_2)^2}+...+\frac{x_1}{(1+s_n)^2}<\frac{x_1}{(1+s_1)}+\frac{x_2}{(1+s_1)(1+s_2)}+...+\frac{x_n}{(1+s_{n-1})(1+s_n)}$$

และเพราะ $x_k=s_k-s_{k-1}$ สำหรับ $k\geq 2$ เราจึงได้

$$\frac{x_1}{(1+s_1)}+\frac{x_2}{(1+s_1)(1+s_2)}+...+\frac{x_n}{(1+s_{n-1})(1+s_n)}=\frac{s_1}{(1+s_1)}+\frac{s_2-s_1}{(1+s_1)(1+s_2)}+...+\frac{s_n-s_{n-1}}{(1+s_{n-1})(1+s_n)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{(1+s_1)}\right)+\left(\frac{1}{(1+s_1)}-\frac{1}{(1+s_2)}\right)+...+\left(\frac{1}{(1+s_{n-1})}-\frac{1}{(1+s_n)}\right)$$

$$=1-\frac{1}{1+s_n}<1$$

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{1}{1+s_1}+\frac{1}{1+s_2}+\ldots+\frac{1}{1+s_n}\right)^2<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$

และดังนั้น $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_1+\ldots+x_n}<\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$ ❑

4.1.8 ตัวอย่าง : ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์อสมการ

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

วิธีทำ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

แล้วเพราะว่า $\frac{(a-b)^2}{b}=\frac{a^2-2ab+b^2}{b}=\frac{a^2}{b}-2a+b$

ดังนั้น $\frac{a^2}{b}=\frac{(a-b)^2}{b}+2a-b$ ....(4.5)

และในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวแปรคู่อื่น ๆ เราจะได้ $\frac{b^2}{c}=\frac{(b-c)^2}{c}+2b-c$ ....(4.6)

และ $\frac{c^2}{a}=\frac{(c-a)^2}{a}+2c-a$ .... (4.7)

เมื่อนำสมการ (4.5) (4.6) และ (4.7) ไปแทนในอสมการที่ต้องพิสูจน์ จะได้อสมการที่ต้องพิสูจน์คือ

$$\frac{(a-b)^2}{b}+2a-b+\frac{(b-c)^2}{c}+2b-c+\frac{(c-a)^2}{a}+2c-a\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

ซึ่งสมมูลกับอสมการ $\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\ge\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}=\frac{(2a-2b)^2}{a+b+c}$ ....(4.8)

ในการพิสูจน์อสมการ (4.8) เราประยุกต์อสมการโคชีและชวาร์ซ ดังนี้

$$(b+c+a)\left(\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\right)\ge\left(\sqrt{b}\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\frac{\sqrt{(b-c)^2}}{\sqrt{c}}+\sqrt{a}\frac{\sqrt{(c-a)^2}}{\sqrt{a}}\right)^2$$

$$=\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2$$

และโดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า $|b-c|+|c-a|\ge|(b-c)+(c-a)|=|b-a|=|a-b|$

ดังนั้น $\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2\ge\left(2|a-b|\right)^2=4(a-b)^2$

เพราะฉะนั้น $(b+c+a)\left(\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\right)\ge 4(a-b)^2$

ซึ่งสมมูลกับ $\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\ge\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ ❑

4.1.9 ตัวอย่าง : จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2n จำนวน แล้วอสมการใดอสมการหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq n \text{ หรือ } \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n} \geq n$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก 2n จำนวน จากข้อสังเกต 4.1.5 เราประยุกต์อสมการโคชีและชวาร์ซได้ว่า

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และทุก ๆ จำนวนจริงบวก $a_1, a_2, ..., a_n$

ดังนั้นสำหรับจำนวนเต็มบวก n และจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ทั้งหมด 2n จำนวนที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n}\right)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq n^2$$

และหาก $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} < n$ และ $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} < n$ ทั้งคู่ แล้วผลคูณของนิพจน์ทั้งสองจะน้อยกว่า n^2 ซึ่งจะทำให้เกิดข้อขัดแย้งกันเอง เพราะฉะนั้น $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_n}{b_n} \geq n$ หรือ $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n} \geq n$ ❑

4.1.10 ตัวอย่าง : ให้ $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$ โดยที่ $x_1, x_2, ..., x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $\frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + ... + \frac{S}{S - x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$

วิธีทำ ให้ $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$ โดยที่ $x_1, x_2, ..., x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก

เพราะว่า $x_1, x_2, ..., x_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $S > x_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, ..., n$

ซึ่งทำให้ $\frac{S}{S - x_i}$ เป็นจำนวนจริงบวกสำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, ..., n$

เราจึงให้ $a_i = \frac{S}{S - x_i}$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$

แล้ว $a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + ... + \frac{S}{S - x_n}$ และ

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{S - x_1}{S} + \frac{S - x_2}{S} + ... + \frac{S - x_n}{S} = \left(1 - \frac{x_1}{S}\right) + \left(1 - \frac{x_2}{S}\right) + ... + \left(1 - \frac{x_n}{S}\right)$$

$$= n - \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{S} = n - 1$$

และโดยข้อสังเกต 4.1.5 เราประยุกต์อสมการโคชีและชวาร์ซได้ว่า

$n^2 \le (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และทุก ๆ จำนวนจริงบวก $a_1, a_2, ..., a_n$ ดังนั้นสำหรับจำนวนเต็มบวก n และจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, ..., a_n$ ทั้งหมด n จำนวนที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$n^2 \le \left(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + ... + \frac{S}{S-x_n}\right)\left(\frac{S-x_1}{S} + \frac{S-x_2}{S} + ... + \frac{S-x_n}{S}\right)$$

$$= (n-1)\left(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + ... + \frac{S}{S-x_n}\right)$$

ทำให้ได้ว่า $\frac{n^2}{n-1} \le \left(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + ... + \frac{S}{S-x_n}\right)$ หรือนั่นคือ

$$\left(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + ... + \frac{S}{S-x_n}\right) \ge \frac{n^2}{n-1}$$ ❑

4.2 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก

ในบทที่ 3 เรากล่าวถึงอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต ของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ n จำนวน $a_1, a_2, ..., a_n$ ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนนับใด ๆ ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวน n จำนวน มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ n จำนวนนั้น นั่นคือ

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

แต่เราอาจเขียนอสมการนี้ได้ใหม่ในรูป $\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + ... + \frac{1}{n}a_n \ge a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} ... a_n^{\frac{1}{n}}$ และสังเกตว่า ผลบวกของจำนวนจริง $\frac{1}{n}$ ในที่นี้ n ตัวเท่ากับ 1 จึงเกิดเป็นคำถามว่า ถ้า $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ n จำนวน และ $m_1, m_2, ..., m_n$ เป็นจำนวนจริงบวก n จำนวนซึ่ง $m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$ แล้วอสมการ $m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_n a_n \ge a_1^{m_1} a_2^{m_2} ... a_n^{m_n}$ นี้จะยังคงเป็นจริงหรือไม่ ในหัวข้อนี้จึงทำการพิสูจน์อสมการนี้พร้อมทั้งให้ตัวอย่างการประยุกต์

4.2.1 ทฤษฎีบท : ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกและ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < 1$

แล้ว $x^a \le ax + (1-a)$ ยิ่งไปกว่านั้น $x^a = ax + (1-a)$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยการประยุกต์เรื่องอนุพันธ์ในวิชาแคลคูลัสเพื่อหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน จึงต้องเริ่มต้นด้วยการกำหนดฟังก์ชันค่าจริง f ในตัวแปร x และในที่นี้จะขอกำหนด f สำหรับจำนวนจริงคงค่า $0 < a < 1$ ซึ่งนิยามสำหรับแต่ละจำนวนจริง $x > 0$ โดย $f(x) = x^a - ax - 1 + a$

แล้วหาอนุพันธ์ได้เป็น $f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1)$ และจะเห็นว่า $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ ซึ่งแสดงว่าค่าวิกฤติของ f มีเพียงค่าเดียว เมื่อ $x = 1$

ต่อไปจะตรวจสอบเครื่องหมายของอนุพันธ์ซึ่งจะขึ้นกับพจน์ $x^{a-1} - 1$ เท่านั้น เราจึงเริ่มพิจารณาก่อนว่า $a - 1 < 0$

ถ้า $0 < x < 1$ แล้วเพราะ $a - 1 < 0$ ดังนั้น $x^{a-1} > 1$ ทำให้ได้ $f'(x) = a(x^{a-1} - 1) > 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด $(0,1)$

แต่ถ้า $x > 1$ แล้ว $x^{a-1} < 1$ ทำให้ได้ $f'(x) = a(x^{a-1} - 1) < 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงอนันต์ $(1,\infty)$

ทำให้เห็นได้ชัดว่า f มีค่าสูงสุดที่ $x = 1$ และค่าสูงสุดเท่ากับ $f(1) = 1 - a - 1 + a = 0$ ดังนั้นสำหรับ x อื่น ๆ ซึ่ง $x > 0$ จะได้ว่า $f(x) \le 0$ นั่นคือ $x^a - ax - 1 + a \le 0$ ซึ่งสมมูลกับ $x^a \le ax + (1-a)$ ยิ่งไปกว่านั้นจากการตรวจสอบเครื่องหมายอนุพันธ์ของ f จะได้ว่า $f(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ ดังนั้น $x^a = ax + (1-a)$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ ❑

ต่อไปเราจะพิสูจน์อสมการ $m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n \ge a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_n^{m_n}$ ในกรณีเฉพาะเมื่อ $n = 2$

4.2.2 ทฤษฎีบท : ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบและ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < 1$ แล้ว $x^a y^{1-a} \le ax + (1-a)y$ ยิ่งไปกว่านั้น $x^a y^{1-a} = ax + (1-a)y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

บทพิสูจน์ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบและ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < 1$ แล้วเห็นได้ชัดว่าอสมการเป็นจริงถ้า $x = 0$ หรือ $y = 0$ เราจึงจะพิสูจน์ในกรณี $x > 0$ และ $y > 0$ แล้วจะได้ $\frac{x}{y}$ เป็นจำนวนจริงบวก ทำให้ได้โดยทฤษฎีบท 4.2.1 ว่า อสมการ $\left(\frac{x}{y}\right)^a \le a\left(\frac{x}{y}\right) + (1-a)$ เป็นจริง และอสมการนี้สมมูลกับ $x^a y^{1-a} \le ax + (1-a)y$ ดังต้องการ จึงเป็นอันจบการพิสูจน์ช่วงแรก

ถ้า $x = y$ แล้วเห็นได้ชัดว่า $x^a y^{1-a} = ax + (1-a)y$ จึงสมมติในทางกลับกันว่า $x^a y^{1-a} = ax + (1-a)y$ แล้วจะพิสูจน์ว่า $x = y$

จะเห็นว่าถ้า $x = 0$ หรือ $y = 0$ แล้ว $0 = (1-a)y$ หรือ $0 = ax$ ตามลำดับโดยที่ $a > 0$ และ $1 - a > 0$ จึงได้ $x = 0$ หรือ $y = 0$ ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด $x = y = 0$

ต่อไปให้ $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{x}{y} > 0$ และโดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = a\left(\frac{x}{y}\right) + (1-a) \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{x}{y} = 1 \quad \text{นั่นคือก็ต่อเมื่อ } x = y$$

แต่ $\left(\frac{x}{y}\right)^a = a\left(\frac{x}{y}\right) + (1-a)$ สมมูลกับ $x^a y^{1-a} = ax + (1-a)y$

ดังนั้น $x^a y^{1-a} = ax + (1-a)y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ ❑

ต่อไปจะพิสูจน์อสมการ $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \geq a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$ ในกรณีทั่วไปสำหรับจำนวน n จำนวนโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4.2.3 ทฤษฎีบท : ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ n จำนวนโดยที่ $n \geq 1$ และ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$ แล้ว

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \geq a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$$

ยิ่งไปกว่านั้น $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ P(n) แทนข้อความ " ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบและ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$ แล้ว

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \geq a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$$

และ $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ "

ถ้า $n = 1$ แล้ว $m_1 = 1$ ทำให้ได้ $m_1a_1 = 1a_1 = a_1$ และ $a_1^{m_1} = a_1^1 = a_1$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ต่อไปให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง P(k) เป็นจริง และให้ $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ $k+1$ จำนวนและ $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$ เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $m_1 + m_2 + \ldots + m_{k+1} = 1$

ให้ $p = \frac{m_k}{m_k + m_{k+1}}$ และ $q = \frac{m_{k+1}}{m_k + m_{k+1}}$ แล้ว p และ q เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $p + q = 1$ หรือ $q = 1 - p$ ทำให้ได้ $x = pa_k + qa_{k+1} \geq a_k^p a_{k+1}^q$ และ

$x = pa_k + qa_{k+1} = \frac{m_ka_k + m_{k+1}a_{k+1}}{m_k + m_{k+1}}$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ

ดังนั้น

$$\begin{aligned} m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k + m_{k+1}a_{k+1} &= m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_{k-1}a_{k-1} + (m_ka_k + m_{k+1}a_{k+1}) \\ &= m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_{k-1}a_{k-1} + (m_k + m_{k+1})x \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ $a_1,a_2,...,a_{k-1},x$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ k จำนวนและ $m_1,m_2,...,m_{k-1},m_k+m_{k+1}$ เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $m_1+m_2+...+m_{k-1}+(m_k+m_{k+1})=1$
เพราะฉะนั้นโดยสมมติฐานของอุปนัย จะได้

$$\begin{aligned} m_1a_1+m_2a_2+...+m_ka_k+m_{k+1}a_{k+1} &\geq a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_{k-1}}x^{m_k+m_{k+1}} \\ &\geq a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_{k-1}}\left(a_k^pa_{k+1}^q\right)^{m_k+m_{k+1}} \\ &= a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_{k-1}}a_k^{m_k}a_{k+1}^{m_{k+1}} \end{aligned}$$

และถ้า

$$\begin{aligned} m_1a_1+m_2a_2+...+m_ka_k+m_{k+1}a_{k+1} &= a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_{k-1}}a_k^{m_k}a_{k+1}^{m_{k+1}} \\ &= a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_{k-1}}\left(a_k^pa_{k+1}^q\right)^{m_k+m_{k+1}} \end{aligned}$$

แล้วโดยสมมติฐานของอุปนัยจะได้ $a_1=a_2=...=a_{k-1}=x=a_k=a_{k+1}$
ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ❑

4.2.4 ข้อสังเกต : เราอาจพิจารณา $m_1,m_2,...,m_n$ ในผลบวก $m_1a_1+m_2a_2+...+m_na_n$ เป็นน้ำหนักของแต่ละ $a_1,a_2,...,a_n$ โดยมีอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตเป็นตัวอย่างกรณีเฉพาะที่มีน้ำหนักของแต่ละ $a_1,a_2,...,a_n$ เท่า ๆ กันซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{n}$ จึงนิยมเรียกอสมการในทฤษฎีบท 4.2.3 ว่า "**อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก (weighted A.M.-G.M. inequality)**" นอกจากนี้อสมการดังกล่าวยังทำให้ได้อสมการที่มีชื่อเสียงและมีการประยุกต์มากมาย ต่อไปจึงขอแสดงตัวอย่างอสมการที่มีชื่อเสียงดังกล่าวซึ่งในที่นี้ก็คืออสมการของแบร์นูลลี

4.2.5 ทฤษฎีบท (Bernoulli's Inequalities) : ให้ a เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $0<a<1$ แล้ว $(1+x)^a\leq 1+ax$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x\geq -1$
2. ถ้า $a>1$ หรือ $a<0$ แล้ว $(1+x)^a\geq 1+ax$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x\geq -1$

และในแต่ละข้อเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x=0$

บทพิสูจน์

(1) ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0<a<1$ และ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x\geq -1$
แล้ว $1+x$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบและ a เป็นจำนวนจริงบวก
ดังนั้นโดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก
จะได้ $(1+x)^a\cdot 1^{1-a}\leq a(1+x)+(1-a)1=a+ax+1-a=1+ax$
และ $(1+x)^a=1+ax$ ก็ต่อเมื่อ $1+x=1$ ซึ่งก็ต่อเมื่อ $x=0$

(2) ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 1$ หรือ $a < 0$ และให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \geq -1$

กรณี $a > 1$ เนื่องจาก $a > 1$ เราจึงยังประยุกต์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนักไม่ได้ อย่างไรก็ตาม $(1+x)^a \geq 0$

ดังนั้นถ้า $1+ax < 0$ แล้วเห็นได้ชัดว่า $(1+x)^a \geq 1+ax$ เราจึงพิจารณากรณี $1+ax \geq 0$ นั่นคือ $ax \geq -1$ และเพราะว่า $0 < \frac{1}{a} < 1$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ข้อ (1) จะได้

$$(1+ax)^{\frac{1}{a}} \leq 1 + \frac{1}{a}(ax) = 1+x$$

ซึ่งทำให้ได้ $1+ax = \left((1+ax)^{\frac{1}{a}}\right)^a \leq (1+x)^a$ และได้ว่า

$$1+ax = (1+x)^a \Leftrightarrow (1+ax)^{\frac{1}{a}} = 1+x \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

กรณี $a < 0$ เนื่องจาก $x \geq -1$ ฉะนั้น $1+x > 0$ ในกรณีนี้เราจะประยุกต์ใช้กรณี $a > 1$ โดยให้ $b = 1-a$ และ $y = \frac{1}{1+x} - 1$ แล้ว $b > 1$ และ $y > -1$ ทำให้ได้ว่า $(1+y)^b \geq 1+by$ และเพราะว่า $a = 1-b$ และ $x = \frac{1}{1+y} - 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \left(1 + \frac{1}{1+y} - 1\right)^{1-b} = \left(\frac{1}{1+y}\right)^{1-b} = \frac{1}{1+y}(1+y)^b \\ &= (1+x)(1+y)^b \geq (1+x)(1+by) = (1+x)\left(1 + (1-a)\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\right) \\ &= (1+x)\left(1 + \frac{1-a}{1+x} - 1 + a\right) = (1+x)\left(\frac{1-a}{1+x} + a\right) = 1-a+a(1+x) = 1-a+a+ax \\ &= 1+ax\end{aligned}$$

ยิ่งไปกว่านั้น $(1+x)^a = 1+ax \Leftrightarrow (1+y)^b = 1+by \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ❑

4.2.6 ตัวอย่าง : สำหรับจำนวนจริง a ซึ่ง $-1 < a < 0$ และทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{(n+1)^{a+1} - n^{a+1}}{a+1} < n^a < \frac{n^{a+1} - (n-1)^{a+1}}{a+1}$$

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < a < 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $0 < a+1 < 1$ และ $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ ทำให้ $\frac{1}{n} > 0 > -1$ และ $-\frac{1}{n} \geq -1$

ดังนั้นโดยอสมการแบร์นูลลี จะได้ว่า $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+1}<1+\frac{a+1}{n}$ และ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{a+1}<1-\frac{a+1}{n}$

โดยการคูณอสมการทั้งสองด้วย n^{a+1} จะได้ว่า

$$(n+1)^{a+1}<n^{a+1}+(a+1)n^{a} \text{ และ } (n-1)^{a+1}<n^{a+1}-(a+1)n^{a}$$

และทำให้ได้ว่า $(n+1)^{a+1}-n^{a+1}<(a+1)n^{a}$ และ $(a+1)n^{a}<n^{a+1}-(n-1)^{a+1}$

ดังนั้น $\frac{(n+1)^{a+1}-n^{a+1}}{a+1}<n^{a}<\frac{n^{a+1}-(n-1)^{a+1}}{a+1}$ ❑

4.2.7 ตัวอย่าง : สำหรับจำนวนจริงบวก a และ b จงแสดงว่า $a^{a}b^{b}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

วิธีทำ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{a+b}$ และ $\frac{b}{a+b}$ เป็นจำนวนจริงบวก

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}\leq\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{b}\right)=\frac{2}{a+b}$$

ฉะนั้น $\frac{1}{a^{a}}\cdot\frac{1}{b^{b}}\leq\left(\frac{2}{a+b}\right)^{a+b}$ ดังนั้น $a^{a}b^{b}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ ❑

4.2.8 ทฤษฎีบท : อสมการยัง (Young's inequality)

ให้ u, v เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และ p, q เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ จะได้ว่า $uv\leq\frac{1}{p}u^{p}+\frac{1}{q}v^{q}$ และ $uv=\frac{1}{p}u^{p}+\frac{1}{q}v^{q}$ ก็ต่อเมื่อ $u^{p}=v^{q}$

บทพิสูจน์ ให้ u, v เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และ p, q เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

และให้ $x=u^{p}, y=v^{q}$ และ $\alpha=\frac{1}{p}$ จะได้ว่า $1-\alpha=\frac{1}{q}$

โดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ $uv=(u^{p})^{\frac{1}{p}}(v^{q})^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{p}u^{p}+\frac{1}{q}v^{q}$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ $uv=\frac{1}{p}u^{p}+\frac{1}{q}v^{q}$ ก็ต่อเมื่อ $(u^{p})^{\frac{1}{p}}(v^{q})^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{p}u^{p}+\frac{1}{q}v^{q}$

ซึ่งคือก็ต่อเมื่อ $u^{p}=v^{q}$ ❑

4.3 อสมการโฮลเดอร์

อสมการโฮลเดอร์เป็นอสมการที่ขยายจากอสมการโคชีและชวาร์ซไปสู่กรณีทั่วไป ซึ่งสนใจกำลังที่เป็นจำนวนจริงบวก p และ q โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ กล่าวคือ ถ้า $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ อสมการโฮลเดอร์คือ

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \le \left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

และเราจะนำอสมการโฮลเดอร์ไปประยุกต์เพื่อให้ได้อสมการอื่น ๆ เช่น อสมการมินคอฟสกี (Minkowski’s inequality) และอสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง (power – mean inequality)

4.3.1 ทฤษฎีบท : อสมการโฮลเดอร์ (Holder’s inequality)

กำหนดให้ $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ และ p,q เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ จะได้ว่า

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \le \left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ และ}$$

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n = \left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

มี $\alpha>0$ ที่ทำให้ $y_i^q=\alpha x_i^p$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ หรือ $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ หรือ $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$

บทพิสูจน์ ให้ $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ และ p,q เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ และให้ $X=\left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$ และ $Y=\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$

กรณีที่ 1 $X=0$ จะได้ $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ เพราะฉะนั้น

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=0=\left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

กรณีที่ 2 $Y=0$ จะได้ $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ เพราะฉะนั้น

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=0=\left(x_1^p+x_2^p+...+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

กรณีที่ 3 $X>0$ และ $Y>0$ เนื่องจาก $\frac{x_i}{X}$ และ $\frac{y_i}{Y}$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ

โดยทฤษฎีบท 4.2.8 จะได้

$$\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{y_i}{Y}\right) \le \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q \text{ ทุกค่า } i=1,2,...,n \qquad \text{.........(4.9)}$$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\frac{y_i}{Y}\right) \le \frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q$

เพราะว่า $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p = \frac{1}{X^p}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ และ $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q = \frac{1}{Y^q}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q = 1$ และ

$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\frac{y_i}{Y}\right) = \frac{1}{XY}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

จาก (4.9) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{XY}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\frac{y_i}{Y}\right) \le \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q = \frac{1}{p}(1) + \frac{1}{q}(1) = 1$$

ดังนั้น $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \le XY$ หรือนั่นคือ

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \le \left(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \ldots\ldots.(4.10)$$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \left(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ ก็ต่อเมื่อ

มี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $y_i^q = \alpha x_i^p$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ …….(4.11)

$(\Leftarrow)$ สมมติ มี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $y_i^q = \alpha x_i^p$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $y_i = \alpha^{\frac{1}{q}} x_i^{\frac{p}{q}}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ และเพราะว่า $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

ทำให้ได้ว่า $1 + \frac{p}{q} = p$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \alpha^{\frac{1}{q}} x_i^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{1}{q}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{1+\frac{p}{q}}\right) = \alpha^{\frac{1}{q}}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p$ และ

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha x_i^p\right)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^p\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \alpha^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{1}{q}}\sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

ดังนั้น $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$(\Rightarrow)$ ให้ $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \left(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$

จะพิสูจน์ว่า มี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $y_i^q = \alpha x_i^p$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะว่า $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \left(x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(y_1^q + y_2^q + ... + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$

ก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{y_i}{Y}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$

แต่โดยทฤษฎีบท 4.2.8 $\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{y_i}{Y}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^q$ ก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{x_i}{X}\right)^p = \left(\frac{y_i}{Y}\right)^q$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ เพราะฉะนั้น $y_i^q = X^{-p}Y^q x_i^p$ โดยที่ $X^{-p}Y^q$ เป็นจำนวนจริงไม่เป็นลบ

ดังนั้น มี $\alpha = X^{-p}Y^q$ ที่ทำให้ $y_i^q = \alpha x_i^p$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$

จาก $(\Leftarrow)$ และ $(\Rightarrow)$ จะได้ว่า (4.11) เป็นจริง ❑

4.3.2 ทฤษฎีบท : อสมการมินคอฟสกี (Minkowski's inequality)

ให้ x_i, y_i เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ และ $p > 1$ จะได้ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ และ $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

ก็ต่อเมื่อ
1. $x_i = 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ หรือ
2. $y_i = 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ หรือ
3. มี $\lambda > 0$ ที่ทำให้ $y_i = \lambda x_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$

บทพิสูจน์ ให้ x_i, y_i เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ และ $p > 1$

กรณีที่ 1 $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = 0$ เพราะฉะนั้น $x_i = 0$ และ $y_i = 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$

เพราะฉะนั้น $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

กรณีที่ 2 $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p > 0$

ให้ $q > 0$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ เพราะฉะนั้น $(p-1)q = p$

ต่อไปเราพิจารณา

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)(x_i + y_i)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}\end{aligned}$$

เราใช้อสมการโฮลเดอร์กับจำนวนจริง $x_i, (x_i + y_i)^{p-1}$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$

จะได้ $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{..........(4.12)}$$

(เพราะว่า $(p-1)q = p$)

ในทำนองเดียวกันโดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับจำนวนจริง $y_i, (x_i + y_i)^{p-1}$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{..........(4.13)}$$

จาก (4.12) และ (4.13) จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)(x_i + y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}}$$

และ $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \le \left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}}$

เพราะว่า $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} > 0$ เพราะฉะนั้น $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{q}} > 0$

เพราะฉะนั้น $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{-\frac{1}{q}} \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

เพราะว่า $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ เพราะฉะนั้น $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ....(4.14)

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

ก็ต่อเมื่อ 1. $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$ หรือ

2. $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$ หรือ

3. มี $\lambda>0$ ที่ทำให้ $y_i=\lambda x_i$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$

$(\Rightarrow)$ สมมติ $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ และมี x_i บางตัวไม่เท่ากับศูนย์ และมี y_j บางตัวไม่เท่ากับศูนย์

เพราะว่า $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

และ $\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ เป็นจริง ซึ่งก็ต่อเมื่อ มี $\alpha>0$ ที่ทำให้ $x_i^p=\alpha(x_i+y_i)^p$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$

$$x_i\alpha^{-\frac{1}{p}}=x_i+y_i$$

$$y_i=x_i\alpha^{-\frac{1}{p}}-x_i=(\alpha^{-\frac{1}{p}}-1)x_i$$

เพราะว่า $\alpha=\left(\dfrac{x_i}{x_i+y_i}\right)^p$ และ $p>1$

เพราะฉะนั้น $0<\alpha<1$ เพราะฉะนั้น $\alpha^{-\frac{1}{p}}>1$

เลือก $\lambda=\alpha^{-\frac{1}{p}}-1$ เพราะฉะนั้น $\lambda>0$ และ $y_i=\lambda x_i$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$

$(\Leftarrow)$ จะพิสูจน์ว่า ถ้า 1. $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$ หรือ

2. $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$ หรือ

3. มี $\lambda>0$ ที่ทำให้ $y_i=\lambda x_i$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$

แล้ว $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

กรณี 1 $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,\ldots,n$ จะได้

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(0+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ และ}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=0+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ดังนั้น $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

กรณี 2 $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ จะได้

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+0)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ และ}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+0=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ดังนั้น $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

กรณี 3 มี $\lambda>0$ ที่ทำให้ $y_i=\lambda x_i$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ จะได้ว่า

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda)^p x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=(1+\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ และ}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda^p x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=(1+\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

เพราะฉะนั้น $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ จะได้ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

ก็ต่อเมื่อ
1. $x_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ หรือ
2. $y_i=0$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ หรือ
3. มี $\lambda>0$ ที่ทำให้ $y_i=\lambda x_i$ ทุกค่า $i=1,2,...,n$ ❑

4.3.3 ทฤษฎีบท : อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง (Power-mean inequality)

ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ r, s เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $r < s$

จะได้ว่า $\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$ และ

$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

บทพิสูจน์ ให้ $p = \frac{s}{r}$ และ $q = \frac{s}{s-r}$ เพราะฉะนั้น $p > 0, q > 0$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับจำนวนจริง $a_1^r, a_2^r, ..., a_n^r$ และ $1, 1, ..., 1$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r (1) \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^r\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{............(4.15)}$$

เพราะว่า

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r = \sum_{i=1}^{n} a_i^r (1) \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^r\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^r\right)^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}} (n)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{r}{s}} (n)^{\frac{s-r}{s}} = (n)^{\frac{s-r}{s}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{r}{s}}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n} \le n^{\frac{s-r}{s}-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{r}{s}} = n^{-\frac{r}{s}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^s}{n}\right)^{\frac{r}{s}}$

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

$(\Leftarrow)$ สมมติ $a_1 = a_2 = ... = a_n$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

$(\Rightarrow)$ สมมติ $\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n} a_i^r(1) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^r\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} 1^q\right)^{\frac{1}{q}}$ เป็นจริง ซึ่งจะได้ว่า a_i ทุกตัวเท่ากับศูนย์หรือมี $\lambda > 0$ ที่ทำให้ $a_i^r = \lambda 1 = \lambda$ ทุกค่า $i = 1, 2, ..., n$ เพราะฉะนั้น $a_1 = a_2 = ... = a_n$

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a_1 = a_2 = ... = a_n \qquad \square$$

ต่อไปจะนำเสนอตัวอย่างที่ประยุกต์ใช้อสมการรูปแบบต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา

4.3.4 ตัวอย่าง : กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง และ $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ จงแสดงว่า

$$2 \le \frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \sqrt{6}$$

วิธีทำ ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง และ $x^2 + y^2 + z^2 > 0$

โดยอสมการโคชีกับ 1, 1, 1 และ $\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+z^2}, \sqrt{y^2+z^2}$ จะได้

$$\left[(1)\sqrt{x^2+y^2} + (1)\sqrt{y^2+z^2} + (1)\sqrt{z^2+x^2}\right]^2$$
$$\le (1^2+1^2+1^2)\left[(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\right]$$
$$= 6(x^2+y^2+z^2)$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \sqrt{6}$ …………..(4.16)

เพราะว่า
$$x^2 = \sqrt{x^4} = \sqrt{x^2x^2} \le \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}$$
$$y^2 = \sqrt{y^4} = \sqrt{y^2y^2} \le \sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)}$$
$$z^2 = \sqrt{z^4} = \sqrt{z^2z^2} \le \sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}$$

เพราะฉะนั้น

$$x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + \sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)} + \sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}$$
$$2(x^2+y^2+z^2) \le 2\left[\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + \sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)} + \sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}\right]$$

เพราะฉะนั้น $4(x^2+y^2+z^2) = 2(x^2+y^2+z^2) + 2(x^2+y^2+z^2)$

$$\le 2(x^2+y^2+z^2) + 2\left[\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + \sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)} + \sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}\right]$$

$$=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)+2\left[\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+\sqrt{(y^2+x^2)(y^2+z^2)}+\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}\right]$$

$$=\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{z^2+x^2}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น $2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}$

$$2 \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{............(4.17)}$$

จาก (4.16) และ (4.17) จะได้ $2 \le \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \sqrt{6}$ ❑

4.3.5 ตัวอย่าง : กำหนดให้ $a \ge 0$ และ $b \ge 0$ จงแสดงว่า

1) $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$
2) $(a+b)^3 \le 4(a^3+b^3)$
3) $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$
4) $(a+b)^n \le 2^{n-1}(a^n+b^n)$ ทุกค่า $n = 5,6,7,...$

วิธีทำ ให้ $a \ge 0$ และ $b \ge 0$

1) โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a,b และ $1,1$ โดยเลือก $p=2, q=2$ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

เพราะฉะนั้น $(a)(1)+(b)(1) \le (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(1^2+1^2)^{\frac{1}{2}}$ ทำให้ได้ $a+b \le \sqrt{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

2) โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a,b และ $1,1$ โดยเลือก $p=3, q=\frac{3}{2}$ ซึ่งจะได้ว่า

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ เพราะฉะนั้น $(a)(1)+(b)(1) \le (a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}(1^{\frac{3}{2}}+1^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$

ทำให้ได้ $a+b \le 2^{\frac{2}{3}}(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้น $(a+b)^3 \le 4(a^3+b^3)$

3) โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a,b และ $1,1$ โดยเลือก $p=4, q=\frac{4}{3}$ ซึ่งจะได้ว่า

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ เพราะฉะนั้น $(a)(1)+(b)(1) \le (a^4+b^4)^{\frac{1}{4}}(1^{\frac{4}{3}}+1^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$

ทำให้ได้ $a+b \le 2^{\frac{3}{4}}(a^4+b^4)^{\frac{1}{4}}$ ดังนั้น $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$

4) ให้ $n = 5, 6, 7, \ldots$ โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a, b และ $1, 1$ โดยเลือก $p = n, q = \dfrac{n}{n-1}$

ซึ่งจะได้ว่า $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n} = 1$

เพราะฉะนั้น $(a)(1) + (b)(1) \le (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} (1^{\frac{n}{n-1}} + 1^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}$

ทำให้ได้ $a + b \le 2^{\frac{n-1}{n}} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ ดังนั้น $(a + b)^n \le 2^{n-1}(a^n + b^n)$ ❑

4.3.6 ตัวอย่าง : กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า

1) $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

2) $(a + b + c)^3 \le 9(a^3 + b^3 + c^3)$

3) $(a + b + c)^n \le 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n)$ ทุกค่า $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$

วิธีทำ ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก

1) โดยใช้อสมการโคชีกับ a, b, c และ $1,1,1$ จะได้ $(a)(1)+(b)(1)+(c)(1) \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1+1+1}$

ทำให้ได้ $a+b+c \le \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ดังนั้น $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

2) โดยใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a, b, c และ $1,1,1$ โดยเลือก $p = 3, q = \dfrac{3}{2}$

ซึ่งจะได้ว่า $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$

เพราะฉะนั้น $(a)(1) + (b)(1) + (c)(1) \le \left(a^3 + b^3 + c^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(1^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

ทำให้ได้ $a + b + c \le \left(a^3 + b^3 + c^3\right)^{\frac{1}{3}} (3)^{\frac{2}{3}}$ ดังนั้น $(a + b + c)^3 \le 9(a^3 + b^3 + c^3)$

3) ให้ $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$ ใช้อสมการโฮลเดอร์กับ a, b, c และ $1,1,1$ โดยเลือก $p = n, q = \dfrac{n}{n-1}$

ซึ่งจะได้ว่า $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n} = 1$

เพราะฉะนั้น $(a)(1) + (b)(1) + (c)(1) \le (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} (1^{\frac{n}{n-1}} + 1^{\frac{n}{n-1}} + 1^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}$

ทำให้ได้ $a + b + c \le (3)^{\frac{n-1}{n}} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}}$

ดังนั้น $(a + b + c)^n \le 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n)$ ❑

4.3.7 ตัวอย่าง : กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก และ $xyz = 1$ จงแสดงว่า

$$x + y + z \le x^2 + y^2 + z^2$$

วิธีทำ ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก และ $xyz = 1$

โดยใช้อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลังกับ x, y, z และ $r = 1, s = 2$ จะได้ $\dfrac{x+y+z}{3} \le \left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

ซึ่งทำให้ได้ $\dfrac{(x+y+z)^2}{9} \le \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$

ดังนั้น $\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} \le \dfrac{3}{x+y+z}$ ....(4.18)

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเราขาคณิต – ฮาร์โมนิกกับ $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ จะได้

$$\frac{3}{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)}} \le \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z}\right)}$$

ทำให้ได้ $\dfrac{3}{x+y+z} \le \sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1}} = 1$ ....(4.19)

จาก (4.18) และ (4.19) จะได้ $\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} \le 1$ เพราะฉะนั้น $x + y + z \le x^2 + y^2 + z^2$ ❑

4.4 อสมการเจนเซน (Jensen's Inequality)

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอที่มาของอสมการที่มีชื่อเสียงรูปแบบหนึ่งซึ่งมีความเกี่ยวเนื่องกับลักษณะกราฟของฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง พร้อมทั้งแสดงการประยุกต์อสมการเหล่านี้

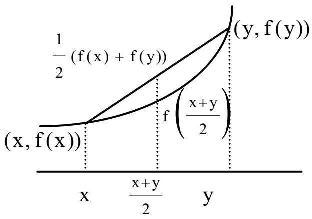
4.4.1 บทนิยาม : เราเรียกฟังก์ชันที่มีค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนจริง นั่นคือพิสัยเป็นเซตย่อย (subset) ของเซตของจำนวนจริงทั้งหมด R และโดเมนเป็นเซตย่อยของ R ว่าฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง

ในวิชาแคลคูลัสเราสนใจฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริงซึ่งต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิดหรือช่วงเปิด สมมติว่า x และ y เป็นจำนวนจริง 2 จำนวนใด ๆ ในช่วงเปิด I ซึ่งเป็นเซตย่อยของโดเมนของฟังก์ชันค่าจริง f แล้วจุด A และ B ซึ่งมีพิกัดเป็น $(x, f(x))$ และ $(y, f(y))$ ตามลำดับจะอยู่บนกราฟ f และเมื่อลากเส้นตรงเชื่อมจุด A และ B จะได้พิกัดของจุด

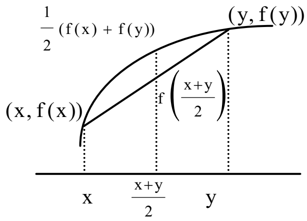
กึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงนี้เป็น $\left(\frac{x+y}{2},\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$ แต่ $\frac{x+y}{2}$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าระหว่าง x และ y จึงอยู่ในช่วงเปิด I ด้วย ทำให้จุด $\left(\frac{x+y}{2},f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$ อยู่บนกราฟ f อย่างไรก็ตาม $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ และ $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ต่างเป็นจำนวนจริง ดังนั้นโดยกฎไตรวิภาค จะได้อสมการ

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \text{............(4.20)}$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \text{............(4.21)}$$



รูปที่ 4.1



รูปที่ 4.2

ซึ่งมีลักษณะกราฟของ f ในบริเวณดังกล่าวเป็นดังรูปที่ 4.1 หรือรูปที่ 4.2 ตามลำดับ

4.4.2 บทนิยาม : ถ้าอสมการ (4.20) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ x และ y ในช่วงเปิด I จะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันนูน (convex function)** บน I แต่ถ้าอสมการ (4.21) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ x และ y ในช่วง I จะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันเว้า (concave function)** บน I

4.4.3 ตัวอย่าง : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=\ln(x)$ สำหรับ $x\in(0,\infty)$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเว้า

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=\ln(x)$ สำหรับ $x\in(0,\infty)$ เพราะว่าสำหรับทุก ๆ คู่ $x,y\in(0,\infty)$ โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต จะได้ $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ และ เพราะฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ ln เป็นฟังก์ชันเพิ่มจึงได้

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge\ln\sqrt{xy}=\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเว้า ❑

4.4.4 ตัวอย่าง : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=e^x$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันนูน

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=e^x$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x เพราะว่าสำหรับทุก ๆ คู่จำนวนจริง x และ y โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิตและฟังก์ชันเชิงกำลัง e เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{e^x+e^y}{2}\geq\sqrt{e^xe^y}=e^{\frac{x+y}{2}}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันนูน ❑

สังเกตว่าการตรวจสอบโดยตรงจากนิยามว่าฟังก์ชันค่าจริงใดเป็นฟังก์ชันนูนหรือฟังก์ชันเว้าบนช่วงหนึ่ง ๆ หรือไม่ อาจไม่สะดวกสำหรับบางฟังก์ชัน ในวิชาแคลคูลัสจึงมีเกณฑ์สำหรับตรวจสอบดังจะกล่าวโดยไม่แสดงการพิสูจน์ ดังต่อไปนี้

4.4.5 ทฤษฎีบท : เกณฑ์การเป็นฟังก์ชันนูนหรือฟังก์ชันเว้า

ให้ I เป็นช่วงเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ R และ $f: I\to R$ ซึ่งหาอนุพันธ์อันดับสอง f'' ได้บน I แล้ว

1. f เป็นฟังก์ชันนูน บน I ก็ต่อเมื่อ $f''(x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in I$
2. f เป็นฟังก์ชันเว้า บน I ก็ต่อเมื่อ $f''(x)\leq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in I$

4.4.6 ตัวอย่าง : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=\tan x$ สำหรับ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันนูน

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=\tan x$ สำหรับ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

เพราะว่าสำหรับทุก ๆ คู่ $x+y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ $f'(x)=\sec^2 x$

และได้ $f''(x)=2(\sec^2 x)(\tan x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันนูน ❑

ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าถ้าฟังก์ชันใดก็ตามซึ่งสอดคล้องอสมการ (4.20) หรือ อสมการ (4.21) ข้างต้น สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ แล้ว

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \text{ หรือ}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \text{ ตามลำดับ สำหรับทุก ๆ}$$

จำนวนเต็ม $n \ge 2$ และทุก ๆ $x_1, x_2, ..., x_n$ ในโดเมนของ f โดยจะแสดงการพิสูจน์ความจริงนี้ ในกรณีของฟังก์ชันนูนเท่านั้น สำหรับกรณีของฟังก์ชันเว้าพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

4.4.7 ทฤษฎีบท : อสมการเจนเซน (Jensen's Inequality)

ถ้าฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง f เป็นฟังก์ชันนูน บนโดเมนของ f แล้ว

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(4.22)$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \ge 2$ และทุก ๆ $x_1, x_2, ..., x_n$ ในช่วงเปิด I ซึ่งเป็นเซตย่อยของโดเมนของ f

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันนูน บนโดเมนของ f แล้วเห็นได้ชัดโดยนิยามของฟังก์ชันนูนว่า อสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับ $n = 2$

ต่อไปจะพิสูจน์ข้อความว่า

(1) "ถ้าอสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $m \ge 2$ แล้วอสมการ (4.22) จะเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $2m$" โดยสมมติฐานของข้อความที่จะพิสูจน์ จะได้ว่า

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m)}{m}$$

$$f\left(\frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{2m}}{m}\right) \le \frac{f(x_{m+1}) + f(x_{m+2}) + \ldots + f(x_{2m})}{m}$$

และ

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m}}{2m}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{2m}}{m}\right)\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right) + f\left(\frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{2m}}{m}\right)\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m)}{m} + \frac{f(x_{m+1}) + f(x_{m+2}) + \ldots + f(x_{2m})}{m}\right) \\
&= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2m})}{2m}
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นอันจบการพิสูจน์ข้อความ (1) และเพราะอสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับ $n = 2$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ข้อความ (1) ด้วยกรณีเริ่มต้น $m = 2$ โดยตลอด เราจะได้ข้อความ (2) ต่อไปนี้เป็นจริง

(2) "อสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่เป็นกำลังบวกของ 2" และสุดท้ายเราจะพิสูจน์ข้อความ (3) ซึ่งกล่าวว่า

(3) "อสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ไม่เป็นกำลังบวกของ 2"

โดยเริ่มต้นให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นกำลังบวกของ 2

แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก $m \geq 2$ ซึ่ง $2^{m-1} < n < 2^m$

เราให้ $k = 2^m - n$ แล้ว k เป็นจำนวนเต็มบวก

และจะนิยาม $y_1 = y_2 = ... = y_k = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

แล้ว $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k$ เป็นจำนวนจริงในช่วงเปิด I ทั้งหมด $n + k = n + 2^m - n = 2^m$ จำนวน

ทำให้ได้โดยข้อความ (2) ว่าอสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับ $n + k = 2^m$

นั่นคือ

$$f\left(\frac{x_1 + ... + x_n + y_1 + ... + y_k}{2^m}\right) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_n) + f(y_1) + ... + f(y_k)}{2^m}$$

แต่ $y_1 + y_2 + ... + y_k = \dfrac{k(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n}$ และ $k = 2^m - n$

ทำให้ได้
$$f\left(\frac{x_1 + ... + x_n + y_1 + ... + y_k}{2^m}\right) = f\left(\frac{x_1 + ... + x_n + \frac{k}{n}(x_1 + ... + x_n)}{2^m}\right)$$
$$= f\left(\frac{n(x_1 + ... + x_n) + (2^m - n)(x_1 + ... + x_n)}{2^m}\right)$$
$$= f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

เพราะฉะนั้น
$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_n) + f(y_1) + ... + f(y_k)}{2^m}$$
$$= \frac{f(x_1) + ... + f(x_n) + kf\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)}{2^m}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$2^m f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le f(x_1)+\ldots+f(x_n)+(2^m-n)f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

ทำให้ได้ $\quad f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$ ตามต้องการ

เพราะฉะนั้นอสมการ (4.22) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \ge 2$ ❑

4.4.8 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos x}{2\cos y\cos z}+\frac{\cos y}{2\cos z\cos x}+\frac{\cos z}{2\cos x\cos y} \ge 3$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ ซึ่ง $x+y+z=\pi$ (นั่นคือ x, y, z เป็นค่าของมุมภายในสามเหลี่ยมที่วัดค่ามุมในหน่วยเรเดียน)

วิธีทำ ให้ $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x+y+z=\pi$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – เรขาคณิต จะได้ว่า

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\cos x}{2\cos y\cos z}+\frac{\cos y}{2\cos z\cos x}+\frac{\cos z}{2\cos x\cos y}\right] \ge \sqrt[3]{\frac{(\cos x)(\cos y)(\cos z)}{(2\cos y\cos z)(2\cos z\cos x)(2\cos x\cos y)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{8(\cos x)(\cos y)(\cos z)}}$$

จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{8(\cos x)(\cos y)(\cos z)}} \ge 3 \text{ ซึ่งสมมูลกับ } \sqrt[3]{\frac{1}{8(\cos x)(\cos y)(\cos z)}} \ge 1$$

และสมมูลกับ $(\cos x)(\cos y)(\cos z) \le \frac{1}{8}$ …………(4.23)

ถ้า x หรือ y หรือ z จำนวนใดจำนวนหนึ่งมีค่าเกิน $\frac{\pi}{2}$ แล้วจะมี x หรือ y หรือ z เพียงจำนวนเดียวที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งค่าโคไซน์ของค่านั้นเป็นลบหรือศูนย์ ทำให้ผลคูณ $(\cos x)(\cos y)(\cos z)$ มีค่าเป็นลบหรือศูนย์ ดังนั้นอสมการ (4.23) จะเป็นจริง เราจึงพิจารณากรณีที่ x, y, z มีค่าน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ ทั้งสามค่า นั่นคือกรณีที่ x, y, z เป็นค่าของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมแหลม ในกรณีเช่นนี้ $\cos x, \cos y, \cos z$ เป็นจำนวนจริงบวก จึงอยู่ในช่วงที่ ln เป็นฟังก์ชันเว้า ดังแสดงให้เห็นจริงแล้วในตัวอย่าง 4.4.3 เราจึงจะประยุกต์อสมการเจนเซน โดยพิจารณาฟังก์ชันเว้า f ซึ่งกำหนดโดย $f(t)=\ln(\cos t)$ เมื่อ $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ซึ่งจะทำให้ได้

$$\frac{1}{3}\ln(\cos x\cos y\cos z) \le \ln\left(\cos\frac{x+y+z}{3}\right) = \ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$ ซึ่งสมมูลกับ

$\ln(\cos x \cos y \cos z) \le 3\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$ และฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันเพิ่ม ทำให้ได้ $(\cos x)(\cos y)(\cos z) \le \frac{1}{8}$ ตามต้องการ ❑

ต่อไปจะนำเสนอแนวคิดของอสมการเจนเซนในรูปทั่วไป พร้อมทั้งแสดงการประยุกต์อสมการดังกล่าว โดยจะขอกล่าวถึงเฉพาะกรณีของฟังก์ชันนูน ส่วนกรณีฟังก์ชันเว้าจะได้ผลในลักษณะคู่กัน นั่นคือกลับเครื่องหมายอสมการของการเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x < y$ ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \le a \le y$ แล้วจุดบนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมโยงจุด $(x, f(x))$ และ $(y, f(y))$ ณ ตำแหน่ง $x = a$ จะอยู่สูงกว่าจุด $(a, f(a))$ นอกจากนี้ถ้า $x \le a \le y$ แล้ว $t = \frac{a-x}{y-x}$ จะเป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 \le t \le 1$ และทำให้ $a = (1-t)x + ty$ และในทางกลับกันถ้า t เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 \le t \le 1$ และ $a = (1-t)x + ty$ แล้ว $a = x + t(y-x) \le x + (y-x) = y$ และเพราะ $t(y-x) \ge 0$ จึงได้ $x \le a$ ดังนั้น $x \le a \le y$ เราจึงอาจกล่าวกรณีที่กว้างกว่าข้อความ "ถ้า f เป็นฟังก์ชันนูน บนช่วงเปิด I แล้ว $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$" ได้ดังนี้

(A) "ถ้า f เป็นฟังก์ชันนูน บนช่วงเปิด I แล้ว $f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $0 \le t \le 1$"

เพราะว่า $Y = f(x) + \left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)(X - x)$ เป็นสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(x, f(x))$ และ $(y, f(y))$ ในระนาบ XY และ $x \le (1-t)x + ty \le y$

ดังนั้น $Y = f(x) + \left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)((1-t)x + ty - x) = (1-t)f(x) + tf(y)$ ซึ่งแสดงว่าจุด $((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(x, f(x))$ และ $(y, f(y))$ เพราะฉะนั้น $f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$

เราอาจกล่าวข้อความ (A) ได้อีกอย่างหนึ่งว่า

(B) "ถ้า f เป็นฟังก์ชันนูน บนช่วงเปิด I แล้ว $f(t_1x + t_2y) \le t_1f(x) + t_2f(y)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวกหรือศูนย์ t_1, t_2 ซึ่ง $t_1 + t_2 = 1$ และทุก ๆ $x, y \in I$ "

ข้อความ B ทำให้เราได้รูปทั่วไปของอสมการเจนเซน เป็นดังนี้

4.4.9 ทฤษฎีบท : รูปทั่วไปของอสมการเจนเซน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันนูน บนช่วงเปิด I แล้ว $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $t_1, t_2, ..., t_n$ ซึ่ง $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$ และทุก ๆ $x_1, x_2, ..., x_n \in I$

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งสำหรับขั้นฐาน $n = 2$ เห็นได้ชัดว่าเป็นจริงโดยข้อความ B จึงสมมติให้ $n > 2$ และทฤษฎีบทเป็นจริงกรณี n แล้วพิจารณากรณี $n+1$ ดังนี้

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i + t_{n+1}x_{n+1}\right)$$

$$= f\left(t_{n+1}x_{n+1} + (1-t_{n+1})\frac{1}{(1-t_{n+1})}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$$

$$\le t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-t_{n+1})f\left(\frac{1}{(1-t_{n+1})}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \text{ โดยข้อความ A}$$

$$= t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-t_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1-t_{n+1})} x_i\right)$$

$$\left(\because \frac{1}{(1-t_{n+1})}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1-t_{n+1})} x_i\right)$$

$$= t_{n+1}f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

$$\left(\because (1-t_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1-t_{n+1})} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_{n+1})t_i}{(1-t_{n+1})} x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริงกรณี $n+1$ ด้วย จึงเป็นอันจบการพิสูจน์ ❑

4.4.10 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{100}{3}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก a, b และ c ซึ่ง $a+b+c=1$

วิธีทำ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง

ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x

แล้วเพราะ $f(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ จึงทำให้ได้ $f'(x) = 2x - 2x^{-3}$

และได้ $f''(x) = 2 + 6x^{-4} = 2\left(1 + \frac{3}{x^4}\right) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.4.5 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันนูน บนทุก ๆ ช่วงเปิดของจำนวนจริงบวก

เราจึงสามารถประยุกต์รูปทั่วไปของอสมการเจนเซน สำหรับกรณี $n = 3$ และ $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}$ ได้ดังนี้

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) = \frac{1}{3}\left[f(a) + f(b) + f(c)\right]$$ สำหรับทุก ๆ

จำนวนจริงบวก a, b และ c

และสำหรับกรณีจำนวนจริงบวก a, b และ c ซึ่ง $a + b + c = 1$ จะได้ว่า

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} + 3\right)^2 = \frac{100}{9}$$

เพราะฉะนั้น $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3}\left[f(a) + f(b) + f(c)\right] \geq 3 \cdot \frac{100}{9} = \frac{100}{3}$

ตามต้องการ ❑

4.4.11 ตัวอย่าง : จงพิสูจน์ว่า $a^p b^q + (1-a)^p (1-b)^q \leq 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b, p และ q ซึ่ง $0 < a, b < 1, p \geq 0, q \geq 0$ และ $p + q = 1$

วิธีทำ ให้ a, b, p และ q เป็นจำนวนจริงดังกำหนด แล้ว $0 \leq p \leq 1, q = 1 - p$ และสังเกตว่า

$$a^p b^q + (1-a)^p (1-b)^q = a^p b^{1-p} + (1-a^p)(1-b)^{1-p} = b\left(\frac{a}{b}\right)^p + (1-b)\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^p$$

จึงนิยามฟังก์ชันค่าจริง f โดย $f(x) = x^p$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x แล้วทำให้ได้ $f'(x) = px^{p-1}$ และได้ $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ แต่เพราะว่า p และ x^{p-2} เป็นจำนวนจริงบวก สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x แต่ $p - 1 < 0$ จึงได้ว่า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก x ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเว้า บนเซตของจำนวนจริงบวก

เราจึงสามารถประยุกต์รูปทั่วไปของอสมการเจนเซน สำหรับกรณี $n = 2$ และ $t_1 = b$ และ $t_2 = 1 - b$ ทำให้ได้อสมการสำหรับ $x_1 = \frac{a}{b} > 0$ และ $x_2 = \frac{1-a}{1-b} > 0$ ดังนี้

$$\begin{aligned} a^p b^q + (1-a)^p (1-b)^q = b\left(\frac{a}{b}\right)^p + (1-b)\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^p &= bf\left(\frac{a}{b}\right) + (1-b)f\left(\frac{1-a}{1-b}\right) \\ &\leq f\left[b\frac{a}{b} + (1-b)\left(\frac{1-a}{1-b}\right)\right] \\ &= f(a + (1-a)) = f(1) = 1^p = 1 \end{aligned}$$

❑

ต่อไปเราจะประยุกต์ใช้รูปทั่วไปของอสมการเจนเซนวิเคราะห์โจทย์ในตัวอย่างต่อไปนี้

4.4.12 ตัวอย่าง : จงหาค่าน้อยสุดของนิพจน์ $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$ เมื่อ a,b และ c เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่งน้อยกว่า 1 และ $ab+bc+ca=1$

วิธีทำ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งน้อยกว่า 1
แล้วเพราะฟังก์ชัน tan เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ไปยังเซตของจำนวนจริงทั้งหมด
จึงมีจำนวนจริง A,B และ C ซึ่ง $a=\tan A,\ b=\tan B$ และ $c=\tan C$
และเพราะ $0<a,b,c<1$ จึงได้ $0<A,B,C<\frac{\pi}{4}$
และจากความสัมพันธ์ $ab+bc+ca=1$ จะได้ $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan A\tan C=1$
ซึ่งสมมูลกับ $\tan A\tan B+\tan B\tan C=1-\tan A\tan C$
และจากสูตร $\tan(A+C)=\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}$

ทำให้ได้ $1-\tan A\tan C=\tan A\tan B+\tan B\tan C=\tan B(\tan A+\tan C)$

$$=(1-\tan A\tan C)\tan(A+C)\tan B$$

และทำให้ได้ $\tan(A+C)\tan B=1$
แต่จากสูตร $\tan x\tan y=1-\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan(x+y)}$ จะได้ $1=\tan(A+C)\tan B=1-\dfrac{\tan(A+C)+\tan B}{\tan(A+B+C)}$
ซึ่งสมมูลกับ $\dfrac{\tan(A+C)+\tan B}{\tan(A+B+C)}=0$ โดยที่ $0<A,B,C<\frac{\pi}{4}$
จึงเป็นไปได้เพียงกรณีเดียวคือ $A+B+C=\frac{\pi}{2}$
นอกจากนี้โดยสูตร $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C)\end{aligned}$$

ในตัวอย่าง 4.4.6 เราได้แสดงแล้วว่า ฟังก์ชันค่าจริง f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \tan x$ เป็นฟังก์ชันนูน สำหรับทุก ๆ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ดังนั้นโดยอสมการเจนเซน สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \tan x$ จะได้

$$
\begin{aligned}
(\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C) &= 3\left(\frac{\tan 2A}{3} + \frac{\tan 2B}{3} + \frac{\tan 2C}{3}\right) \\
&= 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}(2A) + \frac{1}{3}(2B) + \frac{1}{3}(2C)\right) \\
&\le 3 \cdot f\left(\frac{2A + 2B + 2C}{3}\right) \\
&= 3 \cdot f\left(\frac{2(A+B+C)}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของนิพจน์ และถ้าเราสามารถหาจำนวนจริง $0 < a, b, c < 1$ ซึ่งทำให้ $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ก็จะได้ว่า $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ เป็นค่าน้อยสุดของนิพจน์ $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}$

เราจึงเลือก $A = B = C = \frac{\pi}{6}$ ซึ่งจะทำให้ได้ $a = b = c = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนจริงในช่วงที่ต้องการและได้

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} &= \frac{1}{2}(\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C) \\
&= \frac{1}{2}(\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

ตามต้องการ ❑

บรรณานุกรม

[1] ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ “**มากกว่าหรือน้อยกว่า ตอนที่ 7**” นิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATHS 4, 7 (สิงหาคม 2551) : 26 – 28.

[2] ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ “**มากกว่าหรือน้อยกว่า ตอนที่ 10**” นิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATHS 4, 10 (พฤศจิกายน 2551) : 25 – 27.

[3] ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ “**มากกว่าหรือน้อยกว่า ตอนที่ 11**” นิตยสารคณิตศาสตร์ MY MATHS 4, 11 (ธันวาคม 2551) : 28 – 30.

[4] ดำรง ทิพย์โยธา **คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 30 โลกอสมการ 2** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2549.

[5] ภัททิรา เรืองสินทรัพย์ **อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน** โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. 2548.

[6] วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล **อสมการ** เอกสารเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2544.

[7] สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ **ระบบจำนวน** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2538.

[8] Cohen, L.W. and Ehrlich., G. **The Structure of the Real Number System,** Maryland : College Park, 1963.

[9] Engel, A. **Problem-Solving Strategies**, Springer, 1997.

[10] Herman, J., Kucera, R. and Simsa, J. **Equations and Inequaties**, Springer, 2000.

[11] Mitrinovic, D.S. **Elementary Inequalities**, Netherlands : P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1964.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีบทเบื้องต้นของจำนวนจริงที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในการค้นคว้าอิสระซึ่งเพิ่มเติมจากบทที่ 2 โดยขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 1 : สำหรับจำนวนจริง a, b และ c

1.1) ถ้า $a = b$ แล้ว $c + a = c + b$

1.2) ถ้า $a = b$ แล้ว $ca = cb$

1.3) ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$

1.4) ถ้า $b + a = c + a$ แล้ว $b = c$

ทฤษฎีบท 2 : สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว จะได้ $-(-a) = a$

ทฤษฎีบท 3 : สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว จะได้ $a0 = 0$ และ $0a = 0$

ทฤษฎีบท 4 : สำหรับจำนวนจริง a และ b จะได้

4.1) $a(-b) = -(ab)$

4.2) $(-a)b = -(ab)$

4.3) $(-a)(-b) = ab$

ทฤษฎีบท 5 : สำหรับจำนวนจริง a และ b จะได้

5.1) $(-1)a = -a$

5.2) $-(a + b) = -a - b$

5.3) $-(a - b) = b - a$

ทฤษฎีบท 6 : สำหรับจำนวนจริง a และ b ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 7 : สำหรับจำนวนจริง a และ b

7.1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบและ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว ab เป็นจำนวนจริงลบ

7.2) ถ้าทั้ง a และ b เป็นจำนวนจริงลบแล้ว ab เป็นจำนวนจริงบวก

ทฤษฎีบท 8 : สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว

8.1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว a^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก

8.2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบแล้ว a^{-1} เป็นจำนวนจริงลบ

บทนิยาม 10 : ให้ $x \in R$ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 11 : สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า $|x| \geq 0$

ทฤษฎีบท 12 : สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า $-|x| \leq x \leq |x|$

ภาคผนวก ข

บัญชีสัญลักษณ์

R แทน เซตของจำนวนจริง

R^{+} แทน เซตของจำนวนจริงบวก

R^{-} แทน เซตของจำนวนจริงลบ

$\leq$ แทน อันดับ เรียกว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ

$\geq$ แทน อันดับ เรียกว่า มากกว่าหรือเท่ากับ

$<$ แทน อันดับโดยแท้ เรียกว่า น้อยกว่า

$>$ แทน อันดับโดยแท้ เรียกว่า มากกว่า

$\Leftrightarrow$ แทน ก็ต่อเมื่อ

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาวนงลักษณ์ อาภาสัตย์
ที่อยู่	22/1 หมู่ 6 ตำบลปากกราน อำเภอพระนครศรีอยุธยา จังหวัดพระนครศรีอยุธยา 13000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2543	สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต เกียรตินิยมอันดับสอง สาขาวิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2548	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2543	ครูสอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนเซนต์ฟรังซีสเซเวียร์ จังหวัดนนทบุรี
พ.ศ. 2544 – ปัจจุบัน	ครูวิชาการ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ จังหวัดนครปฐม