ผลคูณตรงและผลคูณอิสระของกรุป

โดย
นายโอลัน น้าวไกรศร

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2551

ผลคูณตรงและผลคูณอิสระของกรุป

โดย
นายโอลัน น้าวไกรศร

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2551

DIRECT PRODUCTS AND FREE PRODUCTS OF GROUPS

By

Olan Naowkraisorn

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " ผลคูณตรงและผลคูณอิสระของกรุป " เสนอโดย นายโอลัน น้าวไกรศร เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

……..

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน................... พ.ศ...........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.จิตติ รักบุตร)

............/......................../..............

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

............/......................../..............

47308308 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : กรุป / ผลคูณตรง / ผลคูณอิสระ

โอลัน น้าวไกรศร : ผลคูณตรงและผลคูณอิสระของกรุป. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : ศ.ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. 40 หน้า.

ให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป เราจะสร้างกรุปผลคูณตรงขึ้นจากผลคูณคาร์ทีเซียนของกรุปเหล่านี้ เราศึกษาผลคูณภายนอกและผลคูณภายในของกรุปตลอดจนความสัมพันธ์ของผลคูณทั้งสองแบบ

ต่อจากนั้นเราศึกษาเพื่อขยายการสร้างผลคูณตรงของกรุปจำนวนจำกัดไปยังกรุปจำนวนอนันต์ ทำให้พบว่าผลคูณตรงของกรุปจำนวนอนันต์เป็นผลคูณในคะติโกรีของกรุป และสุดท้ายเราสร้างกรุปซึ่งเป็นอิสระในคะติโกรีของกรุปจึงเป็นผลคูณอิสระของกรุปด้วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2551

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

47308308 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORDS : GROUP / DIRECT PRODUCTS / FREE PRODUCTS
OLAN NAOWKRAISORN : DIRECT PRODUCTS AND FREE PRODUCTS OF GROUPS. INDEPENDENT STUDY ADVISOR : PROF.CHAWEWAN RATANAPRASERT,Ph.D.. 40 pp.

Let $G_1, G_2, \ldots, G_n$ be groups . We construct the direct product on the catesian product of these groups . We study external direct product , internal direct product and theirs relationships .

Then we extend the result from finite direct product to infinite case . We found that the direct product of infinite groups is the product in category . Finally , we construct a group which is free in category of groups and so , it is a free product of groups .

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2008
Student's signature ....
Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เพราะความกรุณาและความเมตตาจาก ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ ที่ได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางวิชาการของข้าพเจ้ากว้างขึ้น ช่วยเติมเต็มและแก้ไขส่วนที่บกพร่อง จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา พร้อมทั้งหยิบยื่นโอกาสทางการศึกษา จนทำให้ข้าพเจ้าได้พบความสำเร็จ สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ให้ก่อประโยชน์ได้อย่างถูกต้อง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ช่อฟ้า นิลรัตน์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่ได้มอบพื้นฐานที่ดีแก่ข้าพเจ้าตลอดความห่วงใยที่มีต่อข้าพเจ้าเสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อนๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ สำหรับความช่วยเหลือและมิตรภาพอันดีงามระหว่างการศึกษา

สุดท้ายขอขอบคุณ ครอบครัวของข้าพเจ้าที่ได้ให้กำลังใจ มอบความรัก ดูแลและให้การสนับสนุนทางการศึกษา จนทำให้ข้าพเจ้าประสบผลสำเร็จได้ในวันนี้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

เราศึกษาผลคูณภายนอกและผลคูณภายในของกรุปต่างๆ โดยเริ่มจากกรุปบนผลคูณคาร์ทีเซียนที่เรารู้จักกันเป็นอย่างดี จากการศึกษาทำให้เราพบว่าผลคูณภายนอกและผลคูณภายในมีความสัมพันธ์กัน อีกทั้งยังทำให้มีการศึกษาค้นคว้าต่อยอดออกไปในกรุปจำนวนอนันต์ทำให้ได้กรุปที่เรียกว่ากรุปอิสระและผลคูณอิสระของกรุป ในการค้นคว้าอิสระนี้แบ่งการศึกษาออกเป็น 4 บท ดังนี้

บทที่ 2 ศึกษาทบทวนความรู้พื้นฐานที่ควรทราบซึ่งความรู้เหล่านี้จะถูกอ้างอิงหรือนำไปใช้ประกอบการพิสูจน์ในบทอื่นๆต่อไป

ในบทที่ 3 ศึกษาการสร้างกรุปบนผลคูณคาร์ทีเซียนจำกัดที่เรียกว่าผลคูณตรงหรือผลคูณภายนอกและศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณภายนอกและผลคูณภายในของกรุปและสมบัติที่สำคัญต่างๆที่เกี่ยวข้องกับผลคูณภายนอกและผลคูณภายใน

ในบทที่ 4 ศึกษาขยายการสร้างผลคูณตรงไปยังผลคูณตรงของกรุปจำนวนอนันต์และสร้างเซตของคำลดทอนขึ้นเพื่อให้เป็นเอกภพของกรุปอิสระและศึกษาทฤษฎีบทสำคัญที่เกี่ยวข้องกับกรุปอิสระ ศึกษาผลคูณอิสระของกรุปตลอดจนสมบัติของผลคูณอิสระ

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ก่อนจะเริ่มต้นศึกษาเนื้อหาของผลคูณตรง ขอทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อการค้นคว้าอิสระฉบับนี้โดยขอละการพิสูจน์ไว้ และความรู้เหล่านี้จะถูกอ้างอิงหรือนำไปใช้ประกอบการพิสูจน์ในหัวข้อต่อๆไป

ตลอดการค้นคว้าอิสระนี้ จะขอใช้สัญลักษณ์ Z แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

2.1 บทนิยาม ให้ $a , b \in Z$ เรากล่าวว่า **a หาร b ลงตัว (a divides b)** ถ้ามี $k \in Z$ ซึ่ง $b = ka$ และเราแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์ $a|b$

ถ้า $a|b$ เราเรียก b ว่า **พหุคูณ (multiple)** ของ a และเรียก a ว่า **ตัวหาร(divisor)** ของ b

2.2 ทฤษฎีบท ให้ $a , b , c \in Z$ ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

2.3 บทนิยาม ให้ $a , b \in Z$ และ d เป็นจำนวนเต็มบวก เรากล่าวว่า d เป็น **ตัวหารร่วมมาก (greatest common divisor)** ของ a และ b และเขียนแทน d ด้วยสัญลักษณ์ $\gcd(a , b)$
ถ้า 1. $d|a$ และ $d|b$
และ 2. ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c \le d$

2.4 บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ เรากล่าวว่าa และ b เป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime)** ถ้า $\gcd(a , b) = 1$

2.5 บทนิยาม ให้ $a , b \in Z$ และ c เป็นจำนวนเต็มบวก เรากล่าวว่า c เป็น **ตัวคูณร่วมน้อย (least common multiple)** ของ a และ b และเขียนแทน c ด้วยสัญลักษณ์ $\operatorname{lcm}(a , b)$
ถ้า 1. $a|c$ และ $b|c$
และ 2. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a|d$ และ $b|d$ แล้ว $c \le d$

2.6 ทฤษฎีบท ให้ m และ nเป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า lcm (m , n) = c และ gcd (m , n) = d แล้ว mn = cd

2.7 บทนิยาม ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เรากล่าวว่า σ เป็น**การเรียงสับเปลี่ยน** (permutation) บน A ถ้า σ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก A ไป A

ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ B = $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ เป็นเซตย่อยของ A และ σ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ B ซึ่ง $\sigma : x_1 \to x_2 , \sigma : x_2 \to x_3 , \ldots , \sigma : x_{k-1} \to x_k , \sigma : x_k \to x_1$ เรากล่าวว่า σ เป็นวัฏจักรที่มีความยาวเท่ากับ kและในกรณีเช่นนี้จะเขียนแทน σ ด้วยสัญลักษณ์ $(x_1\ x_2 \ldots x_k)$

2.8 ตัวอย่าง ให้ $A = \{1,2,3\}$ และให้ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ แล้ว σ_1 และ σ_2 เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนบน A โดยที่ $\sigma_1 : 1 \to 2$, $\sigma_1 : 2 \to 3$, $\sigma_1 : 3 \to 1$ และ $\sigma_2 : 1 \to 3$, $\sigma_2 : 2 \to 1$, $\sigma_2 : 3 \to 2$ เราจึงแทน σ_1 ได้ด้วย (123) และแทน σ_2 ได้ด้วย(132) ■

2.9 บทนิยาม ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม เรากล่าวว่า **a สมภาคกับ b มอดุโล n** (a is congruence to b modulo n) ถ้า n เป็นตัวหารของ a - b และเขียนแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b(m\ \ cn)$

ขอให้สังเกตว่า**การสมภาค** (congruence) เป็น**ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalence relations) บน Z นั่นคือสำหรับแต่ละ $n \in Z$

1. $a \equiv a(m\ \ cn)$ สำหรับทุกๆ $a \in Z$
2. ถ้า $a \equiv b(m\ \ cn)$ แล้ว $b \equiv a(m\ \ cn)$ สำหรับทุกๆ $a , b \in Z$
3. ถ้า $a \equiv b(m\ \ cn)$ และ $b \equiv c(m\ \ cn)$ แล้ว $a \equiv c(m\ \ cn)$ สำหรับทุกๆ $a , b , c \in Z$

ดังนั้น " การสมภาค " จะทำให้เกิด**ผลแบ่งกั้น** (partition) บน Z

2.10 บทนิยาม ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ k เป็นจำนวนเต็ม เราใช้สัญลักษณ์ $\bar{k}$ แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่ลงรอยกันกับ k มอดุโล n นั่นคือ

$$\bar{k} = \{x \in Z \mid x \equiv k(\ m\ \ cn)\}$$

เราเรียกเซต $\{\bar{k} \mid 0 \leq k < n\}$ ซึ่งเป็นผลแบ่งกั้นหนึ่งของ Z ว่า**ชั้นสมมูลมอดุโล** n (equivalence class modulo n)

สังเกตว่า ชั้นสมมูลมอดุโล n ประกอบด้วยสมาชิก n ตัว คือ $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}$ และเรานิยมเขียนแทนชั้นสมมูลมอดุโล n ด้วย Z_n ดังนั้น

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$$

2.11 **บทนิยาม** ให้ G เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\circ : G \times G \to G$ เรากล่าวว่าโครงสร้าง $(G;\circ)$ เป็น **กรุป** (Group) ถ้า

1. $\circ$ มี**สมบัติการเปลี่ยนหมู่** (associative law) บน G นั่นคือ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ สำหรับทุก $a,b,c \in G$

2. มี $e \in G$ เป็น**เอกลักษณ์** (identity)ของ G ภายใต้ $\circ$ นั่นคือ $a \circ e = a = e \circ a$ สำหรับทุก $a \in G$

3. สำหรับแต่ละสมาชิกของ G มี**ตัวผกผัน** (inverse) ภายใต้ $\circ$ นั่นคือแต่ละ $a \in G$ มี $b \in G$ ซึ่ง $a \circ b = e = b \circ a$ และตัวผกผันของแต่ละ $a \in G$ มีเพียงตัวเดียวจึงนิยมใช้สัญลักษณ์ a^{-1} แทนตัวผกผันของ a

เรากล่าวว่ากรุป $(G;\circ)$ เป็น**กรุปสลับที่** (abelian group) ถ้า $\circ$ มีสมบัติการสลับที่บน G นั่นคือ $a \circ b = b \circ a$ สำหรับทุก $a, b \in G$

2.12 **บทนิยาม** ให้ $(G;\circ)$ เป็นกรุป เราเรียกจำนวนสมาชิกทั้งหมดในกรุป G ว่าขนาดของ G และแทนขนาดของ G ด้วยสัญลักษณ์ $|G|$ เรากล่าวว่ากรุป $(G;\circ)$ เป็น**กรุปจำกัด** (finite group) ถ้าขนาดของเซต G เป็นจำนวนจำกัด และกล่าวว่า $(G;\circ)$ เป็น**กรุปอนันต์** (infinite group) ถ้า $(G;\circ)$ ไม่เป็นกรุปจำกัด

หมายเหตุ : ในการกล่าวถึงกรุป $(G;\circ)$ บางครั้งเราจะละการดำเนินการ $\circ$ บน G โดยกล่าวเพียงว่า G เป็นกรุปและ $a \circ b$ แทนด้วย ab ทุกๆ $a,b \in G$

2.13 **ตัวอย่าง** ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ และให้ $+ : Z_n \times Z_n \to Z_n$ นิยามโดย $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ สำหรับทุก $\bar{a}, \bar{b} \in Z_n$ แล้ว $(Z_n;+)$ เป็นกรุปสลับที่และเป็นกรุปจำกัด

บทพิสูจน์

1. ให้ $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\in Z_n$ ซึ่ง $\bar{a}=\bar{c}$ และ $\bar{b}=\bar{d}$ แล้วจะมี $s,t\in Z$ ที่ทำให้ $a=c+ns$ และ $b=d+nt$ แล้ว $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}=\overline{c+ns+d+nt}=\overline{c+d+n(s+t)}=\overline{c+d}=\bar{c}+\bar{d}$

   ดังนั้น + เป็นฟังก์ชัน

2. ให้ $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in Z_n$ แล้ว

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=(\overline{a+b})+\bar{c}=\overline{a+b+c}=\bar{a}+(\overline{b+c})=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$$

   ดังนั้น $+$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่บน Z_n

3. มี $\bar{0}\in Z_n$ ซึ่ง $\bar{a}+\bar{0}=\overline{a+0}=\bar{a}=\overline{0+a}=\bar{0}+\bar{a}$ สำหรับทุก $\bar{a}\in Z_n$

   ดังนั้น $\bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์ของ Z_n ภายใต้ $+$

4. ให้ $\bar{a}\in Z_n$ เลือก $\bar{b}=\overline{n-a}\in Z_n$ ซึ่งทำให้ได้

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}=\overline{a+(n-a)}=\bar{0}=e=\bar{0}=\overline{(n-a)+a}=\overline{b+a}=\bar{b}+\bar{a}$$

   ดังนั้น $\bar{b}$ เป็นตัวผกผันของ $\bar{a}$ ภายใต้ $+$

5. ให้ $\bar{a},\bar{b}\in Z_n$ แล้ว $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}=\overline{b+a}=\bar{b}+\bar{a}$ นั่นคือ $+$ มีสมบัติการสลับที่บน Z_n

เพราะฉะนั้น Z_n เป็นกรุปสลับที่

เพราะว่า $Z_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\dots,\overline{n-1}\}$ มีสมาชิกจำนวน n ตัว เพราะฉะนั้น Z_n เป็นกรุปจำกัด ■

2.14 ตัวอย่าง ให้ $A=\{1,2,\dots,n\}$ และให้ S_n แทนเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดบน A และให้ $\circ$ แทน**การประกอบ** (composition) ระหว่างฟังก์ชันแล้ว $(S_n;\circ)$ เป็นกรุป เราเรียก $(S_n;\circ)$ ว่า**กรุปสมมาตร** (symmetric group) ขนาด n

บทพิสูจน์

1. เป็นที่ทราบกันดีว่า ผลประกอบระหว่างฟังก์ชันเป็นการดำเนินการซึ่งสอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนั้น $\circ$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่บน S_n ด้วย

2. ให้ α เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ นั่นคือ $\alpha: A\rightarrow A$ นิยามโดย $\alpha(a)=a$ สำหรับทุก ๆ $a\in A$ แล้ว $\alpha\in S_n$ และให้ $\sigma\in S_n$ แล้ว

$$(\sigma\circ\alpha)(a)=\sigma(\alpha(a))=\sigma(a) \text{ และ } (\alpha\circ\sigma)(a)=\alpha(\sigma(a))=\sigma(a)$$

ทำให้ได้ $\sigma\circ\alpha=\sigma=\alpha\circ\sigma$ ดังนั้น α เป็นเอกลักษณ์ของ S_n ภายใต้ $\circ$

3. ให้ $\sigma \in S_n$ และให้ $\delta : A \to A$ นิยามโดย $\sigma(a) = b \leftrightarrow \delta(b) = a$ สำหรับทุกๆ $a, b \in A$

ให้ $a, b \in A$ โดยที่ $\sigma(a) = b$ แล้ว $\delta(b) = a$ ทำให้ได้

$$(\delta o \sigma)(a) = \delta(\sigma(a)) = \delta(b) = a = \alpha(a) \text{ และ}$$

$$(\sigma o \delta)(b) = \sigma(\delta(b)) = \sigma(a) = b = \alpha(b)$$

ดังนั้น $\delta o \sigma = \alpha = \sigma o \delta$

เพราะฉะนั้น δ เป็นตัวผกผันของ σ ภายใต้ o

เพราะฉะนั้น $(S_n; o)$ เป็นกรุป ●

2.15 บทนิยาม ให้ $(G; o)$ เป็นกรุป และให้ $a \in G$ ถ้ามี n เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด ซึ่ง $a^n = e$ เรากล่าวว่า n เป็น**อันดับของ a** (order of a) และจะแทนอันดับของ a ด้วยสัญลักษณ์ $o(a)$ และในกรณีที่ไม่มีจำนวนเต็มบวก m ใดๆ ซึ่ง $a^m = e$ เราจะกล่าวว่า a มี**อันดับอนันต์** (infinite order)

2.16 ตัวอย่าง กรุปสมมาตรบนเซตขนาด 3 คือ S_3 ซึ่งเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ S_3 ได้ดังนี้

$$S_3 = \{(1) , (12) , (13) , (23) , (123) , (132)\}$$

แล้วเห็นได้ชัดว่าอันดับของ (1) เท่ากับ 1

เนื่องจาก $(123)^2 = (123)(123) = (132)$ และ

$(123)^3 = (123)^2(123) = (132)(123) = (1)$

ดังนั้นอันดับของ (123) เท่ากับ 3 ■

2.17 ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุป $a \in G$ ให้ n และ s เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า n เป็นอันดับของ a แล้ว $a^s = e$ ก็ต่อเมื่อ $n | s$

2.18 บทนิยาม ให้ $(G; o)$ เป็นกรุป ถ้ามี $a \in G$ ซึ่ง $G = \{a^r \mid r \in Z\}$ เราเรียก G ว่า **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) และเรียก a ว่า**ตัวก่อกำเนิด** (generator) สำหรับ G และเขียนแทน G ด้วยสัญลักษณ์ $\langle a \rangle$

ตัวอย่างเช่น $(Z_n;+)$ เป็นกรุปวัฏจักร โดยมี 1 เป็นตัวก่อกำเนิด เพราะว่า $Z_n=\langle\bar{1}\rangle$ แต่ $(S_n;\circ)$ ไม่เป็นกรุปวัฏจักร เมื่อ $n>2$ เป็นต้น

2.19 **ทฤษฎีบท** $(G;\circ)$ เป็นกรุปวัฏจักรขนาดจำกัด ก็ต่อเมื่อมี $a\in G$ ซึ่ง $o(a)=|G|$

2.20 **ทฤษฎีบท** ถ้า $(G;\circ)$ เป็นกรุปวัฏจักร แล้ว $(G;\circ)$ เป็นกรุปสลับที่

2.21 **บทนิยาม** ให้ $(G;\circ)$ เป็นกรุป และให้ $H\subseteq G$ โดยที่ $H\neq\phi$ เรากล่าวว่า H เป็น **กรุปย่อย** (subgroup) ของ G ถ้า $(H;\circ)$ เป็นกรุป

2.22 **ทฤษฎีบท** ให้ $(G;\circ)$ เป็นกรุป และให้ $H\subseteq G$ โดยที่ $H\neq\phi$ แล้ว H เป็นกรุปย่อยของ G ถ้า

1. H มีคุณสมบัติปิดภายใต้ $\circ$ นั่นคือ $h\circ k\in H$ สำหรับทุกๆ $h,k\in H$
2. สำหรับแต่ละ $a\in H$ มี $a^{-1}\in H$ เป็นตัวผกผัน ภายใต้ $\circ$

2.23 **ตัวอย่าง** พิจารณากรุปชั้นสมมูลมอดุโล 5 ซึ่งคือ $Z_5=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ แล้ว $H=\{\bar{0},\bar{1},\bar{4}\}$ เป็นกรุปย่อยของ Z_5

บทพิสูจน์ พิจารณาตารางเคย์เลย์ของ H ดังนี้

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

จะเห็นว่า $\bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์ของ H ภายใต้ $+$ นอกจากนั้น $\bar{0},\bar{1}$ และ $\bar{4}$ เป็นตัวผกผันของ $\bar{0},\bar{4}$ และ $\bar{1}$ ตามลำดับ ดังนั้นแต่ละ $\bar{a}\in Z_5$ มีตัวผกผันเพราะฉะนั้น $(H;+)$ เป็นกรุป ดังนั้น $(H;+)$ เป็นกรุปย่อยของ $(Z_5;+)$ ■

2.24 บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุปย่อยของ G จะใช้สัญลักษณ์ $G_1G_2...G_n$ แทนเซตย่อยของ G ซึ่งกำหนดโดย

$$G_1G_2...G_n = \{g_1g_2...g_n \mid g_i \in G_i \text{ สำหรับแต่ละ } i = 1,2,...,n\}$$

ตัวอย่างเช่น ในกรุป S_3 ให้ $H = \{(1),(12)\}$ และ $K = \{(1),(13)\}$ แล้ว H และ K เป็นกรุปย่อยของ S_3 และทำให้ได้

$$HK = \{(1),(12),(13),(12)(13)\} = \{(1),(12),(13),(132)\}$$

ขอให้สังเกตว่า HK ไม่เป็นกรุปย่อยของ S_3

2.25 บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a \in G$ เราเรียก $aH = \{ah | h \in H\}$ ว่า**เซตร่วมทางซ้ายของ H ใน** G (left coset of H in G) และเรียก $Ha = \{h \ | h \in H\}$ ว่า**เซตร่วมทางขวาของ H ใน** G (right coset of H in G)

2.26 บทนิยาม ให้ G เป็นกรุป ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G เรากล่าวว่า $(H; \circ)$ เป็น**กรุปย่อยปรกติ** (normal subgroup) ถ้า $aH = Ha$ สำหรับทุกๆ $a \in G$

2.27 ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุป และ H เป็นกรุปย่อยของ G แล้ว H เป็นกรุปย่อยปรกติก็ต่อเมื่อ $aHa^{-1} \subseteq H$ สำหรับทุกๆ $a \in G$

2.28 ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุป ถ้า G_1 และ G_2 เป็นกรุปย่อยปรกติของ G แล้ว G_1G_2 เป็นกรุปย่อยของ G

2.29 ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุป และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G สำหรับทุกๆ i=1,2,…,n แล้ว $G_1G_2...G_n$ เป็นกรุปย่อยของ G

2.30 บทนิยาม ให้ $(G; *)$ และ $(H; \circ)$ เป็นกรุป และให้ $\phi : G \to H$ เรากล่าวว่า ϕ เป็น**สาทิสสัณฐาน** (homomorphism)จาก G ไปยัง H ถ้า $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจะเรียก ϕ ว่า**เอกสัณฐาน** (monomorphism)

ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจะเรียก ϕ ว่า**อุปริสัณฐาน** (epimorphism)

ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันทั่วถึงจะเรียก ϕ ว่า**สมสัณฐาน** (isomorphism)

ถ้ามี $\phi : G \to H$ เป็นสาทิสสัณฐาน ชนิดหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง เราจะกล่าวว่า G **สมสัณฐานกัน** (isomorphic) กับ H และแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์ $G \cong H$

2.31 **บทนิยาม** ให้ G และ H เป็นกรุป ถ้ามีสาทิสสัณฐาน ชนิดทั่วถึงจาก G ไปยัง H เรากล่าวว่า H เป็น**ภาพสาทิสสัณฐาน** (homomorphic image) ของ G

2.32 **บทนิยาม** ให้ G และ H เป็นกรุป และ $\phi : G \to H$ เป็นสาทิสสัณฐาน ถ้า S เป็นกรุปย่อยของ H เรานิยาม $\phi^{-1}(S) = \{x \in S \mid \phi(x) \in S\}$ และเรียกว่า**ภาพผกผันสาทิสสัณฐาน** (homomorphic inverse image) ของ S

2.33 **ทฤษฎีบท** ถ้า G และ H เป็นกรุป และ ϕ เป็นสาทิสสัณฐาน จาก G ไปยัง H และ K เป็นกรุปย่อยของ H แล้ว $\phi^{-1}(K)$ เป็นกรุปย่อยของ G

2.34 **บทนิยาม** ให้ G เป็นกรุป ให้ H เป็นกรุปที่มี e_H เป็นเอกลักษณ์ และให้ $\phi : G \to H$ เป็นสมสัณฐาน ให้

$$\ker\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H\}$$

เราเรียก $\ker\phi$ ว่า**แก่นกลาง** (kernel) ของ ϕ

2.35 **ทฤษฎีบท** ให้ G และ H เป็นกรุป และให้ $\phi : G \to H$ เป็นสมสัณฐาน แล้วแก่นกลางของ ϕ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G

2.36 **ทฤษฎีบท** ให้ G เป็นกรุปที่มี e_G เป็นเอกลักษณ์ และให้ H เป็นกรุปและให้ $\phi : G \to H$ เป็นสมสัณฐาน แล้ว ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งก็ต่อเมื่อ $\ker\phi = \{e_G\}$

2.37 **บทนิยาม** **คะติโกรี** (category) ประกอบด้วย

1) กลุ่มของ**วัตถุ** (object)

2) สำหรับแต่ละคู่ของวัตถุ A และ B จะมี $f : A \to B$ เราเรียกว่า**สัณฐาน** (morphism) จาก A ไปยัง B

3) สำหรับแต่ละคู่ของสัณฐาน u และ v จะมี $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) ระหว่าง u และ v เราเรียกว่าการประกอบ (composition) ของสัณฐาน และสัณฐานจะสอดคล้องกฎต่อไปนี้

1) ถ้า u เป็นสัณฐานจาก A ไปยัง B และ v เป็นสัณฐานจาก B ไปยัง C จะมีสัณฐาน $u\circ v$ เป็นสัณฐานจาก A ไปยัง C

2) ถ้า u เป็นสัณฐานจาก A ไปยัง B v เป็นสัณฐานจาก B ไปยัง C และ w เป็นสัณฐานจาก C ไปยัง D แล้ว $(u\circ v)\circ w = u\circ(v\circ w)$ นั่นคือสัณฐานมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

3) ถ้า u เป็นสัณฐานจาก A ไปยัง B แล้วจะมีสัณฐานจาก A ไปยัง A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_a และสัณฐานจาก B ไปยัง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_b ซึ่ง $I_a \circ u = u$ และ $u\circ I_b = u$ เราเรียก I_a และ I_b ว่าเอกลักษณ์สัณฐานของ A และ เอกลักษณ์สัณฐานของ B ตามลำดับ

2.38 **ทฤษฎีบท** ให้ $\{A_i | i\in I\}$ เป็นวงศ์ของวัตถุในคะติโกรี ϑ แล้วจะมี P เป็นวัตถุในคะติโกรี ϑ และ $\{\pi_i : P \to A_i \mid i\in I\}$ เป็นวงศ์ของสัณฐาน ที่ทำให้ ถ้า B เป็นวัตถุในคะติโกรี ϑ และ $\{\varphi_i : B \to A_i \mid i\in I\}$เป็นวงศ์ของสัณฐานแล้วจะมีสัณฐาน $\varphi : B \to P$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\pi_i\varphi = \varphi_i$ สำหรับทุกๆ $i\in I$

เรากล่าวว่าP เป็น**ผลคูณ** (product) ของวงศ์ $\{A_i | i\in I\}$

2.39 **บทแทรก** ให้ ϑ เป็นคะติโกรีของกรุป ให้ X เป็นเซตไม่ว่างแล้วจะมี F เป็นกรุปในคะติโกรี ϑ และ $i : X \to F$ เป็นการส่งของเซต ที่ทำให้ ถ้า A เป็นกรุปและ f เป็นการส่งจาก X ไปยัง A แล้วจะมีสัณฐาน $\bar{f} : F \to A$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\bar{f}i = f$ สำหรับทุกๆ $i\in I$ เรากล่าวว่า F เป็นผลคูณ

2.40 **ทฤษฎีบท** ให้ $\{A_i | i\in I\}$ เป็นวงศ์ของวัตถุในคะติโกรี ϑ แล้วจะมี S เป็นวัตถุในคะติโกรี ϑ และ $\{\iota_i : A_i \to S \mid i\in I\}$ เป็นวงศ์ของสัณฐาน ที่ทำให้ ถ้า B เป็นวัตถุในคะติโกรี ϑ และ $\{\Psi_i : A_i \to B \mid i\in I\}$เป็นวงศ์ของสัณฐานแล้วจะมีสัณฐาน $\Psi : S \to B$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\Psi\iota_i = \Psi_i$ สำหรับทุกๆ $i\in I$

เรากล่าวว่าS เป็น**ผลคูณอิสระ** (free product) ของวงศ์ $\{A_i | i\in I\}$

2.41 **บทแทรก** ให้ $\{G_i \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุปในคะติโกรี ϑ จะมี S เป็นกรุปใน ϑ และ $\{\iota_i : G_i \to S \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของสัณฐานแล้วจะมีกรุป B และวงศ์ของสัณฐาน $\{\Psi_i : G_i \to B \mid i \in I\}$ ซึ่ง $\Psi : S \to B$ เป็นสัณฐานเพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\Psi\iota_i = \Psi_i$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ เรากล่าวว่า S เป็นผลคูณอิสระของวงศ์ $\{G_i \mid i \in I\}$

เราเรียกกรุป S ซึ่งเป็นผลคูณอิสระว่ากรุปอิสระ

บทที่ 3
ผลคูณภายนอกและผลคูณภายใน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำกรุปจำนวนจำกัดกรุปมาสร้างกรุปขึ้นใหม่ เราเรียกว่ากรุปผลคูณตรงและยกตัวอย่างกรุปผลคูณตรงตลอดจนศึกษาทฤษฎีบทต่างที่สำคัญของผลคูณตรง

3.1 ทฤษฎีบท ให้ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุป และ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (cartesian product) ของ $G_1, G_2, ..., G_n$ เขียนแทนด้วย $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ นิยามโดย

$$G_1 \times G_2 \times ... \times G_n = \{(g_1, g_2, ..., g_n) \mid g_i \in G_i ; i = 1,2,...,n\}$$

และให้ $o : (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n) \ \times \ (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n) \to (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n)$

นิยามโดย $(g_1, g_2, ..., g_n) \, o \, (h_1, h_2, ..., h_n) = (g_1h_1, g_2h_2, ..., g_nh_n)$

สำหรับทุก ๆ $(g_1, g_2, ..., g_n)$ และ $(h_1, h_2, ..., h_n)$ ใน $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

แล้ว $(G_1 \times G_2 \times ... \times G_n \, ; \, o)$ เป็นกรุป

บทพิสูจน์ ให้ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุป

1. ให้ $(g_1, g_2, ..., g_n), (h_1, h_2, ..., h_n)$ และ $(i_1, i_2, ..., i_n)$ เป็นสมาชิกของ $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
&((g_1, g_2, ..., g_n) \, o \, (h_1, h_2, ..., h_n)) \, o \, (i_1, i_2, ..., i_n) \\
&= (g_1h_1, g_2h_2, ..., g_nh_n) \, o \, (i_1, i_2, ..., i_n) \\
&= ((g_1h_1)i_1 \, , \, (g_2h_2)i_2 \, , ..., \, (g_nh_n)i_n) \\
&= (g_1(h_1i_1), g_2(h_2i_2), ..., g_n(h_ni_n)) \\
&= (g_1, g_2, ..., g_n) \, o \, (h_1i_1, h_2i_2, ..., h_ni_n) \\
&= (g_1, g_2, ..., g_n) \, o \, ((h_1, h_2, ..., h_n) \, o \, (i_1, i_2, ..., i_n))
\end{aligned}
$$

ดังนั้น o มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่บน $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

2. ให้ e_i เป็นเอกลักษณ์บน G_i สำหรับ i =1,2,…,n แล้ว

$(e_1, e_2, ..., e_n) \in G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ ให้ $(g_1, g_2, ..., g_n) \in G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ แล้ว

$$\begin{aligned}(g_1,g_2,\ldots,g_n)\,\mathrm{o}(e_1,e_2,\ldots,e_n)&=(g_1e_1,g_2e_2,\ldots,g_ne_n)\\&=(g_1,g_2,\ldots,g_n)\\&=(e_1g_1,e_2g_2,\ldots,e_ng_n)\\&=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\,\mathrm{o}(g_1,g_2,\ldots,g_n)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ เป็นเอกลักษณ์ของ $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ ภายใต้ o

3. ให้ $(g_1,g_2,\ldots,g_n)\in G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ แล้ว $g_i\in G_i$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$
เพราะว่าแต่ละ $G_1,G_2,\ldots,G_n$ เป็นกรุป ดังนั้น $g_i^{-1}\in G_i$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\ldots,n$
ทำให้ได้ว่า $(g_1^{-1},g_2^{-1},\ldots,g_n^{-1})\in G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ โดยที่

$$\begin{aligned}(g_1,g_2,\ldots,g_n)\,\mathrm{o}(g_1^{-1},g_2^{-1},\ldots,g_n^{-1})&=(g_1g_1^{-1},g_2g_2^{-1},\ldots,g_ng_n^{-1})\\&=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\\&=(g_1^{-1}g_1,g_2^{-1}g_2,\ldots,g_n^{-1}g_n)\\&=(g_1^{-1},g_2^{-1},\ldots,g_n^{-1})\,\mathrm{o}(g_1,g_2,\ldots,g_n)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(g_1^{-1},g_2^{-1},\ldots,g_n^{-1})$ เป็นตัวผกผันของ $(g_1,g_2,\ldots,g_n)\in G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ ภายใต้ o

เพราะฉะนั้น $(G_1\times G_2\times\ldots\times G_n\,;\,\mathrm{o})$ เป็นกรุป ●

3.2 บทนิยาม เราเรียกกรุป $(G_1\times G_2\times\ldots\times G_n\,;\,\mathrm{o})$ ในทฤษฎีบท 3.1 ว่า**ผลคูณตรง** (direct product) ของกรุป $G_1,G_2,\ldots,G_n$

3.3 ตัวอย่าง พิจารณากรุปสมมาตร $S_2=\{(1),(12)\}$ และ
$S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ แล้วผลคูณตรงของ S_2 กับ S_3 คือกรุปบนเซต

$$S_2\times S_3=\left\{\begin{matrix}((1),(1))\,,\,((1),(12))\,,\,((1),(13))\,,\,((1),(23))\,,\\((1),(123))\,,\,((1),(132))\,,\,((12),(1))\,,\,((12),(12))\,,\\((12),(13))\,,\,((12),(23))\,,\,((12),(123))\,,\,((12),(132))\end{matrix}\right\}$$

ที่มีการคูณ $\cdot:(S_2\times S_3)\times(S_2\times S_3)\to(S_2\times S_3)$ กำหนดโดย

$(\sigma,\tau)\cdot(\alpha,\delta)=(\sigma o\alpha,\tau o\delta)$ เมื่อ $\sigma o\alpha$ และ $\tau o\delta$ คือผลประกอบระหว่างฟังก์ชันใน S_2 และ S_3 ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น

$((12),(123))\cdot((1),(132))=((12)(1),(123)(132))=((12),(1))$ เป็นต้น ■

3.4 ตัวอย่าง ผลคูณตรงของกรุป $Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ และ $Z_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ คือกรุป

$$Z_2\times Z_3=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$$

ที่มีการบวก $+:(Z_2\times Z_3)\times(Z_2\times Z_3)\to(Z_2\times Z_3)$ กำหนดโดย

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ เมื่อ a+c และ b+d เป็นการบวกใน Z_2 และ Z_3 ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น $(\bar{1},\bar{1})\cdot(\bar{1},\bar{2})=(\bar{1}+\bar{1},\bar{1}+\bar{2})=(\overline{1+1},\overline{1+2})=(\bar{0},\bar{0})$ เป็นต้น ■

สังเกตว่าจำนวนสมาชิกในผลคูณตรงเท่ากับผลคูณของสมาชิกในกรุปที่นำมาสร้างเป็นผลคูณตรงนั้นๆ เช่นตัวอย่างที่ 3.3 จำนวนสมาชิกของ S_2 เท่ากับ 2 และจำนวนสมาชิกของ S_3 เท่ากับ 6 ดังนั้นจำนวนสมาชิกของผลคูณตรงของ S_2 กับ S_3 เท่ากับ 2x6=12 เป็นต้น

นอกจากนี้ขอให้สังเกตว่าการดำเนินการระหว่างสมาชิกในผลคูณตรงสอดคล้องกับการดำเนินการของกรุปที่นำมาสร้างเป็นผลคูณตรงนั้นๆ ดังตัวอย่างที่ 3.5

3.5 ตัวอย่าง ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลคูณตรงของกรุป Z_m และ S_n คือกรุป

$$Z_m\times S_n=\{(\bar{a},\alpha)\mid \bar{a}\in Z_m;\alpha\in S_n\}$$

ที่มีการดำเนินการ $\cdot:(Z_m\times S_n)\times(Z_m\times S_n)\to(Z_m\times S_n)$ กำหนดโดย

$(\bar{a},\alpha)\cdot(\bar{b},\sigma)=(\overline{a+b},\alpha o\sigma)$ เมื่อ $\overline{a+b}$ และ $\alpha o\sigma$ เป็นการดำเนินการใน Z_m และ S_n ตามลำดับ ■

3.6 บทนิยาม ให้ $G,G_1,G_2,\ldots,G_n$ เป็นกรุป เรากล่าวว่า G เป็น **ผลคูณภายนอก** (external direct product) ของ $G_1,G_2,\ldots,G_n$ ถ้า G สมสัณฐานกันกับผลคูณตรงของ $G_1,G_2,\ldots,G_n$

เพราะว่าผลคูณตรงเป็นกรุป เราจึงจะศึกษาต่อไปถึงการหาอันดับของสมาชิกในผลคูณตรง $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ ว่ามีความสัมพันธ์กันกับสมาชิกในแต่ละกรุป $G_1,G_2,\ldots,G_n$ อย่างไร

3.7 ทฤษฎีบท ให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุปจำกัดจำนวน n กรุป ($n \geq 1$) แล้ว $o(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \mathrm{lcm}\left(o(g_1), o(g_2), \ldots, o(g_n)\right)$ สำหรับทุกๆ $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

บทพิสูจน์ ให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุปจำกัด และ $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ ให้ t_i เป็นอันดับของ g_i สำหรับ i = 1,2,…,n และให้ t เป็นอันดับของ $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ แล้ว

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)^t = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

ให้ s เป็นตัวคูณร่วมน้อยของ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ แล้วสำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ จะมี $m_i \in Z^+$ ซึ่ง $s = t_i m_i$
ดังนั้น $(g_1, g_2, \ldots g_n)^s = (g_1^s, g_2^s, \ldots, g_n^s) = (g_1^{t_1 m_1}, g_2^{t_2 m_2}, \ldots, g_n^{t_n m_n}) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$
จะได้ว่า t เป็นตัวหารของ sดัง นั้น $t \leq s$ แต่

$$(g_1^t, g_2^t, \ldots, g_n^t) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^t = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

ดังนั้น $g_i^t = e_i$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq n$ ทำให้ได้ว่า t_i เป็นตัวหารของ t สำหรับทุก i = 1,2,…,n จะได้ว่า t เป็นพหุคูณของ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ แต่ s เป็นตัวคูณร่วมน้อยของ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ เพราะฉะนั้น $s \leq t$ จาก $t \leq s$ และ $s \leq t$ ดังนั้น s = t ●

ตัวอย่างเช่น ในกรุปของผลคูณตรง $S_2 \times S_3$ ของตัวอย่าง 2.3 เพราะว่า $o(12) = 2$ และ $o(123) = 3$ ใน S_2 และ S_3 ตามลำดับและตัวคูณร่วมน้อยของ $o(12)$ และ $o(123)$ เท่ากับ ตัวคูณร่วมน้อยของ 2 และ3 ซึ่งเท่ากับ 6 เพราะฉะนั้น $o((12), (123)) = 6$

ตัวอย่างการหาอันดับของสมาชิกในผลคูณตรง โดยประยุกต์ทฤษฎีบท 3.7

3.8 ตัวอย่าง จงหาจำนวนสมาชิกทั้งหมดในผลคูณตรง $Z_{25} \times Z_5$ ที่มีอันดับ 5

วิธีทำ ให้ $(a, b) \in Z_{25} \times Z_5$ โดยที่ $o(a, b) = 5$ แล้วเพราะเราต้องการ $o(a, b) = 5$ และ $o(a, b)$ คือตัวคูณร่วมน้อยของ $o(a)$ และ $o(b)$ โดยที่ $a \in Z_{25}$ และ $b \in Z_5$
ดังนั้น $o(a) \mid 5$ และ $o(b) \mid 5$ จะได้ว่า $o(a) \in \{1, 5\}$ และ $o(b) \in \{1, 5\}$ เพราะฉะนั้น $a \in Z_{25}$ ที่เป็นไปได้คือ 0 , 5 , 10 , 15 และ20 และ $b \in Z_5$ ที่เป็นไปได้คือ 0 , 1 , 2 , 3 และ 4 แต่ $(0, 0)$ มีอันดับ 1 ดังนั้น (a,b) ที่เป็นไปได้คือ

$$(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),$$
$$(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),$$
$$(10,0),(10,1),(10,2),(10,3),(10,4),$$
$$(15,0),(15,1),(15,2),(15,3),(15,4),$$
$$(20,0),(20,1),(20,2),(20,3)\text{ และ }(20,4)$$

เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่าสมาชิกทุกๆตัว ดังกล่าวนี้ ทั้งหมดมีอันดับ 5 ดังนั้น จำนวนสมาชิกใน $Z_{25} \times Z_5$ ที่มีอันดับ 5 ทั้งหมดเท่ากับ 24 จำนวน ■

3.9 **ทฤษฎีบท** ให้ G และ H เป็นกรุปจำกัด ถ้า $G \times H$ เป็นกรุปวัฏจักร แล้ว $|G|$ และ $|H|$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

บทพิสูจน์ ให้ G และ H เป็นกรุปจำกัด โดยที่ $|G| = m$ และ $|H| = n$ แล้ว $|G \times H| = m$
ให้ $G \times H$ เป็นกรุปวัฏจักร แล้วจะมี $(g,h) \in G \times H$ ซึ่ง $o(g,h) = m$
แต่จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ $o(g,h) = \operatorname{lcm}(o(g), o(h))$ ดังนั้น $m = \operatorname{lcm}(o(g), o(h))$
เนื่องจาก $|G| = m$ และ $|H| = n$ และ $g \in G$ และ $h \in H$ ดังนั้น $o(g) \mid m$ และ $o(h)\ n$
ให้ $s = \operatorname{lcm}(m,n)$ แล้ว $m \mid s$ และ $n \mid s$ เพราะฉะนั้น $o(g) \mid s$ และ $o(h) \mid s$
เพราะฉะนั้น s เป็นพหุคูณของ $o(g)$ และ $o(h)$ ดังนั้น $m = \operatorname{lcm}(o(g), o(h)) \le s$
แต่ mn เป็นพหุคูณของ m และ n ดังนั้น $s = \operatorname{lcm}(m,n) \le m$ เพราะฉะนั้น $mn = s$
ให้ $d = \gcd(m,n)$ แล้ว $mn = ds = d(mn)$ เพราะฉะนั้น $d = 1$
ดังนั้น m และ n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ●

สังเกตว่า บทกลับของทฤษฎีบท 3.9 ไม่เป็นจริง ตัวอย่างเช่น ผลคูณตรงของ $Z_5 \times S_3$ ซึ่ง $|Z_5| = 5$ และ $|S_3| = 6$ และ 5 และ 6 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน แต่ $Z_5 \times S_3$ ไม่เป็นกรุปวัฏจักรเพราะไม่มีสมาชิกใน $Z_5 \times S_3$ ที่มีอันดับ 30 (ดูทฤษฎีบท 3.7)

ต่อไปจะสร้างกรุป $\overline{G_i}$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ ขึ้นจากกรุป $G_1, G_2, \ldots, G_n$ โดยที่ $\overline{G_i}$ เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ และแสดงว่า $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกันกับ G_i ทุกๆ $1 \le i \le n$

3.10 ทฤษฎีบท ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป แล้วสำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ จะมีกรุปย่อยปรกติ $\overline{G_i}$ ของกรุป $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ ซึ่ง

1. $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกันกับ G_i ทุกๆ $1 \leq i \leq n$
2. $\overline{G_i} \cap \left(\overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}\ldots\overline{G_n}\right) = \left\{\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)\right\}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$
3. $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_n}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,n$ ให้ $\overline{G_i} = \left\{\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \mid g_i \in G_i\right\}$ และให้ $\overline{g_i} \in \overline{G_i}$ โดยที่ $\overline{g_i} = \left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)$ สำหรับแต่ละ $g_i \in G_i$ เราจะพิสูจน์ว่า $\overline{G_i}$ เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,n$

เพราะว่า $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป แล้วแต่ละ G_i จะมี e_i เป็นเอกลักษณ์ สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,n$ ดังนั้นจะมี $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$ เป็นเอกลักษณ์ของ $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ ทำให้ $\overline{G_i} \neq \phi$ สำหรับทุกๆ $i = 1,2,\ldots,n$

1. ให้ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ และให้ $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right), \left(e_1, e_2, \ldots, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$ แล้ว

$$\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)\left(e_1, e_2, \ldots, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) = \left(e_1, e_2, \ldots, g_i h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$$

ดังนั้น $\overline{G_i}$ มีคุณสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการของ $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

2. ให้ $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$ แล้ว $g_i \in G_i$ ดังนั้นมี $g_i^{-1} \in G_i$

ทำให้มี $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned}
&\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)\left(e_1, e_2, \ldots, g_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \\
&\qquad = \left(e_1, e_2, \ldots, g_i g_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \\
&\qquad = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) \\
&\qquad = \left(e_1, e_2, \ldots, g_i^{-1} g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \\
&\qquad = \left(e_1, e_2, \ldots, g_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)$ เป็นตัวผกผันของ $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)$

เพราะฉะนั้น $\overline{G_i}$ เป็นกรุปย่อยของกรุป $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

3. ให้ $\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right) \in \overline{G_i}$ และให้ $\left(g_1, g_2, \ldots, g_n\right) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ แล้ว

$$\begin{aligned}
&\left(g_1, g_2, \ldots, g_n\right)\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)\left(g_1, g_2, \ldots, g_n\right)^{-1} \\
&\quad = \left(g_1, g_2, \ldots, g_n\right)\left(e_1, e_2, \ldots, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\right)\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\right) \\
&\quad = \left(g_1 e_1 g_1^{-1}, g_2 e_2 g_2^{-1}, \ldots, g_{i-1} e_{i-1} g_{i-1}^{-1}, g_i g_i g_i^{-1}, g_{i+1} e_{i+1} g_{i+1}^{-1}, \ldots, g_n e_n g_n^{-1}\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(g_1g_1^{-1},g_2g_2^{-1},\ldots,g_{i-1}g_{i-1}^{-1},g_i,g_{i+1}g_{i+1}^{-1},\ldots,g_ng_n^{-1}\right)$$
$$=\left(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},g_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\in\overline{G_i}$$

ดังนั้น $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\overline{G_i}\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)^{-1}\subseteq\overline{G_i}$ ทุกๆ $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\in G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$
เพราะฉะนั้น $\overline{G_i}$ เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า

1. $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกันกับ G_i สำหรับทุก $1\leq i\leq n$
2. $\overline{G_i}\cap\left(\overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}\ldots\overline{G_n}\right)=\left\{\left(e_1,e_2,\ldots,e_n\right)\right\}$ สำหรับแต่ละ $1\leq i\leq n$
3. $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n=\overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_n}$ สำหรับแต่ละ $1\leq i\leq n$

1. ให้ $i=1,2,\ldots,n$ และให้ $\alpha_i:\overline{G_i}\to G_i$ นิยามโดย $\alpha_i\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)=a_i$ สำหรับทุกๆ $a_i\in G_i$ แล้วเห็นได้ชัดว่า α_i เป็นฟังก์ชัน

1.1 ให้ $\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right),\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\in\overline{G_i}$ แล้วจะได้ว่า

$$\alpha\left(\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\right)$$
$$=\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,a_ib_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)$$
$$=a_ib_i$$
$$=\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)$$

เพราะฉะนั้น α เป็นสาทิสสัณฐาน

1.2 ให้ $\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\in\overline{G_i}$ และ $\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\in\overline{G_i}$ ซึ่ง $\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)=\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)$ แล้ว $a_i=b_i$

ดังนั้น $\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)=\left(e_1,e_2,\ldots,b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)$

เพราะฉะนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1.3 ให้ $a_i\in G_i$ แล้ว $\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)\in\overline{G_i}$ ซึ่ง $\alpha\left(e_1,e_2,\ldots,a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)=a_i$

เพราะฉะนั้น α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ดังนั้น $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกันกับ G_i ทุกๆ $1\leq i\leq n$

2. ให้ $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\in\overline{G_i}\cap\left(\overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}\ldots\overline{G_n}\right)$ แล้ว $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\in\overline{G_i}$ และ $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\in\overline{G_1}\,\overline{G_2}\ldots\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}\ldots\overline{G_n}$
เพราะว่า $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)\in\overline{G_i}$ แล้ว $\left(g_1,g_2,\ldots,g_n\right)=\left(e_1,e_2,\ldots,g_i,e_{i+1},\ldots,e_n\right)$ ดังนั้น $g_k=e_k$ ทุกๆ $k\in\{1,2,\ldots,n\}-\{i\}$

เพราะว่า $(g_1,g_2,...,g_n) \in \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n}$ แล้วจะมี $\overline{g_k} \in \overline{G_k}$ สำหรับ $1 \le k \ne i \le n$
ซึ่ง $(g_1,g_2,...,g_n) = \overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_{i-1}}\,\overline{g_{i+1}}...\overline{g_n} = \overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_{i-1}}\ \overline{e_i}\ \overline{g_{i+1}}...\overline{g_n}$

$(g_1,g_2,...,g_n) = (g_1,g_2,...,g_{i-1},e_i,g_{i+1},...,g_n)$

เพราะฉะนั้น $(e_1,e_2,...,g_i,e_{i+1},...,e_n) = (g_1,g_2,...,g_{i-1},e_i,g_{i+1},...,g_n)$

จะได้ว่า $g_i = e_i$ เพราะฉะนั้น $(g_1,g_2,...,g_n) = (e_1,e_2,...,e_n)$

และในทางกลับกัน $(e_1,e_2,...,e_n) \in \overline{G_i}$ และ $(e_1,e_2,...,e_n) \in \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n}$

จะได้ว่า $(e_1,e_2,...,e_n) \in \overline{G_i} \cap (\overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n})$

เพราะฉะนั้น $\overline{G_i} \cap (\overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n}) = \{(e_1,e_2,...,e_n)\}$ โดยที่ i=1,2,…,n

3. ให้ $(g_1,g_2,...,g_n) \in G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ แล้ว

$$(g_1,g_2,...,g_n) = (g_1,e_2,...,e_n)(e_1,g_2,e_3,...,e_n)...(e_1,e_2,...,g_n) = \overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_n}$$

เพราะฉะนั้น $(g_1,g_2,...,g_n) \in \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_n}$

และในทางกลับกันให้ $\overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_n} \in \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_n}$ แล้ว

$$\overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_n} = (g_1,e,...,e)(e,g_2,e,...,e)...(e,e,...,g_n) = (g_1,g_2,...,g_n) \in G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$$

เพราะฉะนั้น $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n = \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_n}$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ ●

เมื่อศึกษาผลคูณภายนอกและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับผลคูณภายนอกแล้วต่อไปเราจะศึกษาผลคูณของกรุปซึ่งเรียกว่าผลคูณภายในและศึกษาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับผลคูณภายใน

3.11 บทนิยาม ให้ G เป็นกรุปที่มี e เป็นเอกลักษณ์ และ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G เรากล่าวว่าG เป็น**ผลคูณภายใน**(internal direct product) ของ $G_1, G_2, ..., G_n$ ถ้า

1. $G = G_1G_2...G_n$
2. $G_i \cap (G_1G_2...G_{i-1}G_{i+1}...G_n) = \{e\}$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$

3.12 ทฤษฎีบท ให้ G_1 , G_2 , … , G_n เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป G ที่มี e เป็นเอกลักษณ์ ถ้า G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , … , G_n แล้ว

1. $G_i \cap G_j = \{e\}$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \ne j \le n$
2. $h_ih_j = h_jh_i$ สำหรับทุกๆ $h_i \in G_i$ และ $h_j \in G_j$ และ $1 \le i, j \le n$

บทพิสูจน์ ให้ G_1 , G_2 , … , G_n เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป G ที่มี e เป็นเอกลักษณ์ และให้ G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , … , G_n

1. ให้ $1 \le i < j \le n$ และให้ $k \in G_i \cap G_j$ แล้ว $k \in G_i$ และ $k \in G_j$
ให้ $e_s = e$ ทุกๆ $s = 1,2,...,n$ แล้ว

$$k = e_1e_2...e_{i-1}e_{i+1}...e_{j-1}ke_{j+1}...e_n \in G_1G_2...G_{i-1}G_{i+1}...G_n$$

เพราะฉะนั้น $k \in G_i \cap \left(G_1G_2...G_{i-1}G_{i+1}...G_n\right)$ ทำให้ได้ $k = e$

2. ให้ $1 \le i, j \le n$ และให้ $h_i \in G_i$ และ $h_j \in G_j$ แล้วเพราะว่า $h_i^{-1} \in G_i$ และ $h_j, h_j^{-1} \in G$ และ G_i เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป G ดังนั้น $h_jh_i^{-1}h_j^{-1} \in G_i$

ให้ $s_i = h_jh_i^{-1}h_j^{-1} \in G_i$ ทำให้ได้ $h_ih_jh_i^{-1}h_j^{-1} = h_i\left(h_jh_i^{-1}h_j^{-1}\right) = h_is_i \in G_i$

แล้วเพราะว่า $h_j \in G_j$ และ $h_i, h_i^{-1} \in G$ และ G_j เป็นกรุปย่อยปรกติของกรุป G ดังนั้น $h_ih_jh_i^{-1} \in G_j$

ให้ $t_j = h_ih_jh_i^{-1} \in G_j$ ทำให้ได้ $h_ih_jh_i^{-1}h_j^{-1} = \left(h_ih_jh_i^{-1}\right)h_j^{-1} = t_jh_j^{-1} \in G_j$

แล้ว $h_ih_jh_i^{-1}h_j^{-1} \in G_i \cap G_j = \{e\}$ เพราะฉะนั้น $h_ih_jh_i^{-1}h_j^{-1} = e$ แล้ว $h_ih_j = h_jh_i$ ●

จากบทนิยาม 3.11 แสดงให้เห็นว่าถ้า G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , ... , G_n แล้ว $G = G_1G_2...G_n$ ทำให้ได้ว่าแต่ละ $g \in G$ ยังเขียนได้ในรูป $g = g_1g_2...g_n$ โดยที่ $g_i \in G_i$ ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าแต่ละ $g \in G$ เขียนในรูป $g = g_1g_2...g_n$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

3.13 ทฤษฎีบท ให้ G_1 , G_2 , ... , G_n เป็นกรุปย่อยปรกติของ G ถ้า G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , ... , G_n แล้ว แต่ละ $g \in G$ เขียนได้ในรูป $g = g_1g_2...g_n$ โดยที่ $g_i \in G_i$ สำหรับแต่ละ i = 1,2,…,n ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์ ให้ G_1 , G_2 , ... , G_n เป็นกรุปย่อยปรกติของ G และให้ G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , ... , G_n

ให้ $g \in G$ และสมมติมี $g_i \in G_i$ และ $h_i \in G_i$ เมื่อ i = 1,2,…,n ซึ่ง $g = g_1g_2...g_n$ และ $g = h_1h_2...h_n$ แล้ว $g_1g_2...g_n = h_1h_2...h_n$ จะแสดงว่า $g_i = h_i$ ทุกๆ i = 1,2,…,n

ให้ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ แล้วเพราะว่า $g_1g_2...g_n = h_1h_2...h_n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
g_i &= \left(g_1g_2...g_{i-1}\right)^{-1}\left(h_1h_2...h_n\right)\left(g_{i+1}g_{i+2}...g_n\right)^{-1} \\
&= g_{i-1}^{-1}g_{i-2}^{-1}...g_1^{-1}h_1h_2...h_ng_n^{-1}g_{n-1}^{-1}...g_{i+1}^{-1} \\
&= h_i\left(h_1g_1^{-1}\right)\left(h_2g_2^{-1}\right)...\left(h_{i-1}g_{i-1}^{-1}\right)\left(h_{i+1}g_{i+1}^{-1}\right)...\left(h_ng_n^{-1}\right)
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ $g_i h_i^{-1} = (h_1 g_1^{-1})(h_2 g_2^{-1}) \ldots (h_{i-1} g_{i-1}^{-1})(h_{i+1} g_{i+1}^{-1}) \ldots (h_n g_n^{-1})$
ซึ่งแสดงว่า $g_i h_i^{-1} \in G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n$ และ $g_i h_i^{-1} \in G_i$
เพราะฉะนั้น $g_i h_i^{-1} \in G_i \cap (G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n)$
ดังนั้น $g_i h_i^{-1} = e$ เพราะฉะนั้น $g_i = h_i$ ●

หลังจากทราบถึงผลคูณภายนอกและผลคูณภายในแล้ว ต่อไปเราจะแสดงให้เห็นว่าผลคูณภายนอกและผลคูณภายในนั้นมีความสัมพันธ์กัน

3.14 ทฤษฎีบท ให้ $G, G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป แล้ว G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ก็ต่อเมื่อ มีกรุปย่อยปรกติ $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ของ G ซึ่ง G_i สมสัณฐานกันกับ H_i สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ และ G เป็นผลคูณภายในของ $H_1, H_2, \ldots, H_n$

บทพิสูจน์ ให้ $G, G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป

$(\rightarrow)$ ให้ G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ แล้วจะมี $\alpha : G \rightarrow G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ เป็นสมสัณฐาน และโดยทฤษฎีบท 2.10 จะมี $\overline{G_i}$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ ซึ่ง $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกันกับ G_i สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ และเพราะอิมเมจผกผันภายใต้สาทิสสัณฐานของกรุปย่อยปรกติเป็นกรุปย่อยปรกติ เราจะได้ว่า $\alpha^{-1}(\overline{G_i})$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$

สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ ให้ $H_i = \alpha^{-1}(\overline{G_i})$ แล้ว $\alpha(H_i) = \overline{G_i} \cong G_i$ และจะได้ $H_i \cong \alpha(H_i) = \overline{G_i} \cong G_i$ ดังนั้น $H_i \cong G_i$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le n$

ต่อไปเราจะแสดงว่า G เป็นผลคูณภายในของ $H_1, H_2, \ldots, H_n$

1. ให้ $g \in G$ แล้ว $\alpha(g) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ และโดยทฤษฎีบท 3.10(3)จะมี $\overline{g_i} \in \overline{G_i}$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ ที่ทำให้ $\alpha(g) = \overline{g_1}\,\overline{g_2} \ldots \overline{g_n}$ แต่ $\overline{g_i} \in \overline{G_i} = \alpha(H_i)$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ ดังนั้นจะมี $h_i \in H_i$ ซึ่ง $\overline{g_i} = \alpha(h_i)$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le n$ ทำให้ได้

$$\alpha(g) = \overline{g_1}\,\overline{g_2} \ldots \overline{g_n} = \alpha(h_1)\alpha(h_2) \ldots \alpha(h_n)$$

เพราะว่า α เป็นสาทิสสัณฐาน ดังนั้น $\alpha(g) = \alpha(h_1 h_2 \ldots h_n)$ และเพราะ α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้น $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ เพราะฉะนั้น $G = H_1 H_2 \ldots H_n$

2. ให้ $1 \le i \le n$ และให้ $k \in H_i \cap (H_1 H_2 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n)$ แล้ว $k \in H_i$ และ $k \in H_1 H_2 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n$

เพราะว่า $k \in H_i$ แล้วจะมี $h_i \in H_i$ ที่ทำให้ $k = h_i$ ดังนั้น $\alpha(k) = \alpha(h_i) = \overline{g_i}$

เพราะฉะนั้น $\alpha(k) \in \overline{G_i}$

และเพราะว่า $k \in H_1H_2...H_{i-1}H_{i+1}...H_n$ แล้วจะมี $h_j \in H_j$ สำหรับ $1 \leq j \neq 1 \leq n$ ที่ทำให้

$k = h_1h_2...h_{i-1}h_{i+1}...h_n$ ดังนั้น $\alpha(k) = \alpha(h_1h_2...h_{i-1}h_{i+1}...h_n)$

$$= \alpha(h_1)\alpha(h_2)...\alpha(h_{i-1})\alpha(h_{i+1})...\alpha(h_n)$$

$$= \overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_{i-1}}\,\overline{g_{i+1}}...\overline{g_n}$$

เพราะฉะนั้น $\alpha(k) \in \overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n}$

เพราะฉะนั้น $\alpha(k) \in \overline{G_i} \cap \left(\overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}}...\overline{G_n}\right) = \{(e_1, e_2, ..., e_n)\}$ โดยที่ e_i เป็นเอกลักษณ์ของ G_i สำหรับ $1 \leq i \leq n$

เพราะฉะนั้น $\alpha(k) = (e_1, e_2, ..., e_n)$ เป็นเอกลักษณ์ใน $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

ทำให้ได้ $\alpha(k) = \alpha(e)$ แต่ α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้น $k = e$

ในทางกลับกัน เพราะว่า $H_1, H_2, ..., H_n$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G ดังนั้น $H_1H_2...H_{i-1}H_{i+1}...H_n$ เป็นกรุปย่อยของ G ทำให้ได้ $e \in H_i$ และ $e \in H_1H_2...H_{i-1}H_{i+1}...H_n$

เพราะฉะนั้น $H_i \cap (H_1H_2...H_{i-1}H_{i+1}...H_n) = e$

ดังนั้น G เป็นผลคูณภายในของ $H_1, H_2, ..., H_n$

$(\leftarrow)$ ให้ $H_1, H_2, ..., H_n$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G ซึ่ง G_i สมสัณฐานกันกับ H_i โดยสาทิสสัณฐาน α_i สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ และให้ G เป็นผลคูณภายในของ $H_1, H_2, ..., H_n$ จะแสดงว่า G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, ..., G_n$ นั่นคือจะแสดงว่า $G \cong G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

ให้ $\alpha : G \rightarrow G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ นิยามโดย $\alpha(g) = (g_1, g_2, ..., g_n)$ สำหรับแต่ละ $g \in G$ โดยที่ $g = h_1h_2...h_n$ โดยที่ $h_i \in H_i$ และ $\alpha_i(h_i) = g_i$ ทุกๆ $1 \leq i \leq n$

1. ให้ $g, q \in G$ ซึ่ง $g = q$ เมื่อ $g = h_1h_2...h_n$ โดยที่ $h_i \in H_i$ และ $\alpha_i(h_i) = g_i$ ทุกๆ $1 \leq i \leq n$ และ $q = k_1k_2...k_n$ โดยที่ $k_i \in H_i$ และ $\alpha_i(k_i) = q_i$ ทุกๆ $1 \leq i \leq n$

แล้ว $g = h_1h_2...h_n = q = k_1k_2...k_n$ จากทฤษฎีบท 3.13 จะได้ว่า $h_i = k_i$ ทุกๆ $1 \leq i \leq n$

แล้ว
$$\begin{aligned}
\alpha(g) &= \alpha(h_1h_2...h_n) \\
&= (\alpha_1(h_1),\ \alpha_2(h_2),\ ...,\ \alpha_n(h_n)) \\
&= (\alpha_1(k_1),\ \alpha_2(k_2),\ ...,\ \alpha_n(k_n)) \\
&= \alpha(k_1k_2...k_n) \\
&= \alpha(q)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น α เป็นฟังก์ชัน

2.ให้ $g, q \in G$ เมื่อ $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ โดยที่ $h_i \in H_i$ และ $\alpha_i(h_i) = g_i$ ทุกๆ $1 \le i \le n$

และ $q = k_1 k_2 \ldots k_n$ โดยที่ $k_i \in H_i$ และ $\alpha_i(k_i) = q_i$ ทุกๆ $1 \le i \le n$

แล้ว
$$
\begin{aligned}
\alpha(gq) &= \alpha(h_1 h_2 \ldots h_n k_1 k_2 \ldots k_n) \\
&= \alpha(h_1 k_1 h_2 k_2 \ldots h_n k_n) \\
&= (\alpha_1(h_1 k_1)\ ,\ \alpha_2(h_2 k_2)\ ,\ldots,\ \alpha_n(h_n k_n)) \\
&= (\alpha_1(h_1)\alpha_1(k_1)\ ,\ \alpha_2(h_2)\alpha_2(k_2)\ ,\ldots,\ \alpha_n(h_n)\alpha_n(k_n)) \\
&= (g_1 q_1, g_2 q_2, \ldots, g_n q_n)
\end{aligned}
$$

และ $\alpha(g)\alpha(q) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)(q_1, q_2, \ldots, q_n) = (g_1 q_1, g_2 q_2, \ldots, g_n q_n)$

ดังนั้น α เป็นสาทิสสัณฐาน

3. ให้ $g, q \in G$ ซึ่ง $\alpha(g) = \alpha(q)$ เมื่อ $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ โดยที่ $h_i \in H_i$ และ $\alpha_i(h_i) = g_i$ ทุกๆ $1 \le i \le n$ และ $q = k_1 k_2 \ldots k_n$ โดยที่ $k_i \in H_i$ และ $\alpha_i(k_i) = q_i$ ทุกๆ $1 \le i \le n$

แล้ว
$$
\alpha(h_1 h_2 \ldots h_n) = \alpha(k_1 k_2 \ldots k_n)
$$
$$
(\alpha_1(h_1)\ ,\alpha_2(h_2)\ ,\ldots,\ \alpha_n(h_n)) = (\alpha_1(k_1)\ ,\alpha_2(k_2)\ ,\ldots,\ \alpha_n(k_n))
$$

ดังนั้น $\alpha_i(h_i) = \alpha_i(k_i)$ ทุกๆ $1 \le i \le n$

แล้ว $h_i = k_i$ ทุกๆ $1 \le i \le n$ เพราะฉะนั้น $g = q$

เพราะฉะนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

4. ให้ $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ แล้ว $g_i \in G_i$ ทำให้ $\alpha_i(g_i) = h_i \in H_i$ สำหรับแต่ละ $1 \le i \le n$ เลือก $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ แล้ว

$$
\alpha(g) = \alpha(h_1 h_2 \ldots h_n) = (\alpha_1(h_1)\ ,\ \alpha_2(h_2)\ ,\ldots,\ \alpha_n(h_n)) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)
$$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เพราะฉะนั้น α เป็นสมสัณฐาน เพราะฉะนั้น $G \cong G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ ●

3.15 ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกรุปและให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุปย่อยของ G ซึ่ง G เป็นผลคูณภายในของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ถ้า $H_1, H_2, \ldots, H_n$ เป็นกรุปซึ่ง $H_i \cong G_i$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ H เป็นผลคูณภายนอกของ $H_1, H_2, \ldots, H_n$ แล้ว $G \cong H$

บทพิสูจน์ ให้ G เป็นกรุป และให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุปย่อยของ G ซึ่ง G เป็นผลคูณภายในของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ และให้ $H_1, H_2, \ldots, H_n$ เป็นกรุปซึ่ง $H_i \cong G_i$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ H เป็นผลคูณภายนอกของ $H_1, H_2, \ldots, H_n$

ให้ $f_i : H_i \rightarrow G_i$ เป็นสมสัณฐานจาก H_i ไปยัง G_i

ให้ $f : H \rightarrow G$ นิยามโดย $f((h_1,h_2,...,h_n)) = f_1(h_1)f_2(h_2)...f_n(h_n)$

1.ให้ $(h_1,h_2,...,h_n)$ และ $(a_1,a_2,...,a_n)$ เป็นสมาชิกของ $H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ ซึ่ง $(h_1,h_2,...,h_n) = (a_1,a_2,...,a_n)$ แล้ว $h_i = a_i$ สำหรับแต่ละ i = 1 , 2 ,…,n แล้ว

$$f((h_1,h_2,...,h_n)) = f_1(h_1)f_2(h_2)...f_n(h_n) = f_1(a_1)f_2(a_2)...f_n(a_n) = f((a_1,a_2,...,a_n))$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน

2. ให้ $(h_1,h_2,...,h_n)$ และ $(a_1,a_2,...,a_n)$ เป็นสมาชิกของ $H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$

$$\begin{aligned} f((h_1,h_2,...,h_n)(a_1,a_2,...,a_n)) &= f((h_1a_1,h_2a_2,...,h_na_n)) \\ &= f_1(h_1a_1)f_2(h_2a_2)...f_n(h_na_n) \\ &= f_1(h_1)f_1(a_1)f_2(h_2)f_2(a_2)...f_n(h_n)f_n(a_n) \\ &= (f_1(h_1)f_2(h_2)...f_n(h_n))\ (f_1(a_1)f_2(a_2)...f_n(a_n)) \\ &= f(h_1,h_2,...,h_n)\ f(a_1,a_2,...,a_n) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น f เป็นสาทิสสัณฐาน

3. ให้ $(a_1,a_2,...,a_n)$ เป็นสมาชิกของ $H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ ซึ่ง $f((a_1,a_2,...,a_n)) = e$

แล้ว $(a_1,a_2,...,a_n) \in \ker(f)$ แล้ว $f((a_1,a_2,...,a_n)) = e$ แล้ว

$f_1(a_1)f_2(a_2)...f_n(a_n) = e_1e_2...e_n$ จะได้ว่า $f_i(a_i) = e_i$ สำหรับ i=1,2,…,n

เพราะว่า f_i เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $a_i = e_i$ สำหรับ i=1,2,…,n แล้ว

$(a_1,a_2,...,a_n) = (e_1,e_2,...,e_n)$ ซึ่งก็คือเอกลักษณ์ของ H

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

4. ให้ g เป็นสมาชิกของ G ซึ่ง $g = b_1b_2...b_n \mid b_i \in G_i$

เนื่องจาก f_i เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะมี $a_i \in H_i$ ซึ่ง $f_i(a_i) = b_i$

แล้ว $(a_1,a_2,...,a_n) \in H$ ซึ่ง $f((a_1,a_2,...,a_n)) = f_1(a_1)f_2(a_2)...f_n(a_n) = b_1b_2...b_n = g$

เพราะฉะนั้นนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เพราะฉะนั้น f เป็นสมสัณฐาน ดังนั้น $G \cong H$ ●

ถ้าไม่นับการสมสัณฐานกัน เราอาจกล่าวบทแทรกต่อไปนี้

3.16 บทแทรก ให้ G เป็นกรุป และให้ G_1 , G_2 , … , G_n เป็นกรุปย่อยปรกติของ G แล้ว G เป็นผลคูณภายนอกของ G_1 , G_2 , … , G_n ก็ต่อเมื่อ G เป็นผลคูณภายในของ G_1 , G_2 , … , G_n

บทพิสูจน์ ให้ G เป็นกรุปและให้ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุปย่อยปรกติของ G

$(\rightarrow)$ ให้ G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$

เราจะแสดงว่า G เป็นผลคูณภายในของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$

1. ให้ $g \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ และโดยทฤษฎีบท 3.10(3) จะมี $\overline{g_i} \in \overline{G_i}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ ที่ทำให้ $g = \overline{g_1}\,\overline{g_2} \ldots \overline{g_n}$ แต่ $\overline{g_i} \in \overline{G_i}$ และ $\overline{G_i}$ สมสัณฐานกัน กับ G_i สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ ทำให้ได้ $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ เพราะฉะนั้น $G = G_1 G_2 \ldots G_n$

2. ให้ $1 \leq i \leq n$ และให้ $k \in G_i \cap \left(G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n\right)$ แล้ว $k \in G_i$ และ $k \in G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n$ เพราะว่า $k \in G_i$ แล้วจะมี $g_i \in G_i$ ที่ทำให้ $k = g_i = \overline{g_i}$ เพราะฉะนั้น $k \in \overline{G_i}$ และเพราะว่า $k \in G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n$ แล้วจะมี $g_j \in G_j$ สำหรับ $1 \leq j \neq 1 \leq n$ ที่ทำให้ $k = g_1 g_2 \ldots g_{i-1} g_{i+1} \ldots g_n = \overline{g_1}\,\overline{g_2} \ldots \overline{g_{i-1}}\,\overline{g_{i+1}} \ldots \overline{g_n}$

เพราะฉะนั้น $k \in \overline{G_1}\,\overline{G_2} \ldots \overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}} \ldots \overline{G_n}$

เพราะฉะนั้น $k \in \overline{G_i} \cap \left(\overline{G_1}\,\overline{G_2} \ldots \overline{G_{i-1}}\,\overline{G_{i+1}} \ldots \overline{G_n}\right) = \left\{\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)\right\}$ โดยที่ e_i เป็นเอกลักษณ์ของ G_i สำหรับ $1 \leq i \leq n$

เพราะฉะนั้น $k = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ เป็นเอกลักษณ์ใน $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ เพราะฉะนั้น $k = e$

ในทางกลับกัน เพราะว่า $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นกรุป ย่อยปรกติของ G ดังนั้น $k \in G_i \cap \left(G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n\right)$ เป็นกรุปย่อยของ G ทำให้ได้ $e \in G_i$ และ $e \in G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n$

เพราะฉะนั้น $G_i \cap \left(G_1 G_2 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n\right) = e$

ดังนั้น G เป็นผลคูณภายในของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$

$(\leftarrow)$ ให้ G เป็นผลคูณภายในของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ จะแสดงว่า G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ นั่นคือจะแสดงว่า $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

ให้ $g \in G_1 G_2 \ldots G_n$ จากทฤษฎีบท 3.10(1) ทำให้ได้ $g \in \overline{G_1}\,\overline{G_2} \ldots \overline{G_n}$ และ $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \overline{G_1}\,\overline{G_2} \ldots \overline{G_n}$ ดังนั้น $g \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

เพราะฉะนั้น $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

ดังนั้น G เป็นผลคูณภายนอกของ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ●

บทที่ 4
ผลคูณอนันต์และผลคูณอิสระของกรุป

จากบทที่ 3 เราได้สร้างผลคูณภายนอกและผลคูณภายในขึ้นมาจากกรุปต่างๆจำนวนจำกัดกรุป ในบทนี้จะศึกษาผลคูณของกรุปจำนวนอนันต์กรุปตลอดจนศึกษาสมบัติที่สำคัญของผลคูณอนันต์ของกรุปและแสดงว่าผลคูณอนันต์ของกรุปสอดคล้องกับบทนิยาม 2.40 นอกจากนี้ยังจะแสดงการสร้างกรุปที่สอดคล้องกับบทนิยาม 2.41 และ บทนิยาม 2.42 ซึ่งทำให้เราได้ผลคูณอิสระของกรุป

4.1 บทนิยาม ให้ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นวงศ์ของเซตโดยที่ I เป็นเซตดรรชนี และให้ $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) หรือ**ผลคูณ** (product) ของ $\{G_i | i \in I\}$ เขียนแทนด้วย $\prod_{i \in I} G_i$ กำหนดโดย

$$\prod_{i \in I} G_i = \{ f | f : I \to G \text{ โดยที่ } f(i) \in G_i \text{ สำหรับทุก } i \in I \}$$

4.2 ทฤษฎีบท ให้ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุปโดยที่ I เป็นเซตดรรชนี และให้ $\circ : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \to \prod_{i \in I} G_i$ นิยามโดย $f \circ g = f ç$ สำหรับทุกๆ f และ g ใน $\prod_{i \in I} G_i$ โดยที่ $f ç(i) = f(i) g(i)$ สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\left(\prod_{i \in I} G_i ; \circ\right)$ เป็นกรุป

บทพิสูจน์ ให้ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุปโดยที่ I เป็นเซตดรรชนี

1. ให้ f,g และ h เป็นสมาชิกของ $\prod_{i \in I} G_i$ แล้ว

$$(f \circ g) \circ h = (f ç) \circ h = f g \quad = f \circ (g \quad) = f \circ (g \circ h)$$

ดังนั้น $\circ$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่บน $\prod_{i \in I} G_i$

2. ให้ $f \in \prod_{i \in I} G_i$ เพราะว่า G_i เป็นกรุปสำหรับแต่ละ $i \in I$ ให้ e_i เป็นเอกลักษณ์บน G_i สำหรับแต่ละ $i \in I$ ดังนั้นจะมี $e \in \prod_{i \in I} G_i$ ซึ่ง $e(i) = e_i$ แล้ว

$$(f \circ e)(i) = (fe)(i) = f(i)e(i) = f(i)e_i = f(i) \text{ และ}$$

$$(e \circ f)(i) = (ef)(i) = e(i)f(i) = e_i f(i) = f(i)$$

ดังนั้น e เป็นเอกลักษณ์ของ $\prod_{i \in I} G_i$ ภายใต้ $\circ$

3. ให้ $f \in \prod_{i \in I} G_i$ และ $f(i) \in G_i$ เพราะว่า G_i เป็นกรุปสำหรับทุกๆ $i \in I$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $i \in I$ จะมี $g(i) \in G_i$ ซึ่ง $f(i)g(i) = e(i) = g(i)f(i)$ ทำให้ได้

$$(f \circ g)(i) = (fg)(i) = f(i)g(i) = e(i) \text{ และ}$$

$$(g \circ f)(i) = (gf)(i) = g(i)f(i) = e(i)$$

ดังนั้นg เป็นตัวผกผันของ f ภายใต้ $\circ$

เพราะฉะนั้น $\prod_{i \in I} G_i$ เป็นกรุป ●

4.3 บทนิยาม เราเรียกกรุป $\left(\prod_{i \in I} G_i ; \circ\right)$ โดยที่ I เป็นเซตดรรชนี ในทฤษฎีบท4.2 ว่า**ผลคูณตรง** (direct product) ของวงศ์ของกรุป $\{G_i | i \in I\}$

ขอให้สังเกตว่าถ้า I เป็นเซตจำกัดแล้ว $\left(\prod_{i \in I} G_i ; \circ\right)$ ก็คือผลคูณภายนอกในบทที่ 3 และถ้า I เป็นเซตอนันต์เราจะเรียก $\left(\prod_{i \in I} G_i ; \circ\right)$ ว่า**ผลคูณอนันต์** (infinite product) ของกรุป

4.4 ทฤษฎีบท ให้ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุป โดยที่ I เป็นเซตดรรชนี สำหรับแต่ละ $k \in I$ นิยาม $\pi_k : \prod_{i \in I} G_i \to G_k$ โดย $\pi_k(f) = f(k)$ แล้ว π_k เป็นอุปริสัณฐานทุกๆ $k \in I$

บทพิสูจน์ ให้ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุป โดยที่ I เป็นเซตดรรชนีและสำหรับแต่ละ $k \in I$ นิยาม $\pi_k : \prod_{i \in I} G_i \to G_k$ โดย $\pi_k(f) = f(k)$

1. ให้ f และg เป็นสมาชิกของ $\prod_{i \in I} G_i$ โดยที่ f=g เพราะฉะนั้น $f(k) = g(k)$ สำหรับแต่ละ $k \in I$ เพราะฉะนั้น $\pi_k(f) = f(k) = g(k) = \pi_k(g)$

ดังนั้น π_k เป็นฟังก์ชัน

2. ให้ f และg เป็นสมาชิกของ $\prod_{i \in I} G_i$ จะได้ว่า

$$\pi_k(f \circ g) = \pi_k(fg) = (fg)(k) = f(k)g(k) = \pi_k(f)\pi_k(g) \text{ สำหรับทุก } k \in I$$

ดังนั้น π_k เป็นสาทิสสัณฐาน

3. ให้ $g_k \in G_k$ จะมี $f \in \prod_{i\in I} G_i$ ซึ่ง $f : I \to G$ โดยที่ $f(k) = g_k \in G_i$ ที่ทำให้

$$\pi_k(f) = f(k) = g_k$$

ดังนั้น π_k เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า π_k เป็นอุปริสัณฐาน ●

ต่อไปจะแสดงความสัมพันธ์ของ $\prod_{i\in I} G_i$ กับกรุป H ใดๆโดยพิสูจน์ว่า $\prod_{i\in I} G_i$ สอดคล้องคุณสมบัติการเป็นผลคูณสำหรับวงศ์ $\{G_i \mid i \in I\}$ ตามบทแทรก 2.39

4.5 ทฤษฎีบท ให้ $\{G_i \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของกรุปโดยที่ I เป็นเซตดรรชนี และให้ H เป็นกรุปและ $\{\varphi_i : H \to G_i \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของสาทิสสัณฐานแล้วจะมีสาทิสสัณฐาน $\varphi : H \to \prod_{i\in I} G_i$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\pi_i \varphi = \varphi_i$ สำหรับทุกๆ $i \in I$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ \prod_{i\in I} G_i \arrow[rr, "\pi_i"'] & & G_i \end{tikzcd}$$

บทพิสูจน์ เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า $\prod_{i\in I} G_i$ โดยที่ I เป็นเซตดรรชนีมีคุณสมบัติเป็นผลคูณของวงศ์ $\{G_i \mid i \in I\}$ ดังนี้ ให้ H เป็นกรุปและ $\{\varphi_i : H \to G_i \mid i \in I\}$ เป็นวงศ์ของสาทิสสัณฐานและเรานิยาม $\varphi : H \to \prod_{i\in I} G_i$ โดย $\varphi(a)(i) = \varphi_i(a)$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ และ ทุกๆ $a \in H$

1. ให้ a และ b เป็นสมาชิกของ H โดยที่ a=b แล้วจะพิสูจน์ว่า $\varphi(a) = \varphi(b)$

ให้ $i \in I$ เพราะว่า $\varphi_i : H \to G_i$ เป็นสาทิสสัณฐาน เพราะฉะนั้น $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$ ทุกๆ $i \in I$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(a)(i) = \varphi(b)(i)$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ ซึ่งแสดงว่า $\varphi(a) = \varphi(b)$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชัน

2. ให้ a และ b เป็นสมาชิกของ H แล้วสำหรับแต่ละ $i \in I$ จะได้ว่า $\varphi(ab)(i) = \varphi_i(ab)$

เนื่องจาก $\varphi_i : H \to G_i$ เป็นสาทิสสัณฐานสำหรับทุกๆ $i \in I$ เพราะฉะนั้น

$\varphi_i(ab) = \varphi_i(a)\varphi_i(b)$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ ดังนั้น

$$\varphi(ab)(i)=\varphi_i(ab)=\varphi_i(a)\varphi_i(b)=\big(\varphi(a)\varphi(b)\big)(i)$$

ดังนั้น $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ ซึ่งแสดงว่า φ เป็นสาทิสสัณฐาน

3. ให้ $a\in H$ จะได้ว่า $\pi_i\varphi(a)=\varphi(a)(i)=\varphi_i(a)$ สำหรับทุกๆ $i\in I$ ดังนั้น $\pi_i\varphi=\varphi_i$ สำหรับทุกๆ $i\in I$

4. ให้ $\beta:H\to\prod_{i\in I}G_i$ เป็นสาทิสสัณฐานซึ่ง $\pi_i\beta=\varphi_i$ สำหรับทุกๆ $i\in I$ ให้ $a\in H$ และ $i\in I$ จะได้ว่า

$$\varphi(a)(i)=\varphi_i(a)=\pi_i\beta(a)=\beta(a)(i)$$

เพราะฉะนั้น $\varphi(a)=\beta(a)$ ดังนั้น $\varphi=\beta$

เพราะฉะนั้น φ เป็นสาทิสสัณฐานเพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\pi_i\varphi=\varphi_i$ สำหรับทุก $i\in I$ ●

ต่อไปเราจะแสดงวิธีการสร้างกรุปที่จะสอดคล้องตามบทแทรก 2.41 ดังนี้ ให้ X เป็นเซตใดๆ ให้ X^{-1} เป็นเซตต่างสมาชิกของ X โดยที่ $|X|=\left|X^{-1}\right|$ จากนั้นเลือกฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก X ไปยัง X^{-1} โดยใช้สัญลักษณ์ x^{-1} แทนภาพของ $x\in X$ และเลือกเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ต่างจากสมาชิกใน X และ X^{-1} โดยมีสมาชิกเพียงตัวเดียว เราแทนสมาชิกเพียงตัวเดียวนั้นด้วยสัญลักษณ์ 1

เราเรียกลำดับ $(a_1,a_2,..)$ โดยที่ a_i เป็นสมาชิกของ $X\cup X^{-1}\cup\{1\}$ สำหรับแต่ละ $i\in\{1,2,..\}$ ว่า**คำ**(word) และถ้าคำสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) ถ้า x เป็นสมาชิกของ X แล้ว x และ x^{-1} ไม่ประชิดกัน

2) มี $i\geq 1$ ซึ่ง $a_i=1$

3) สำหรับแต่ละ $k\geq 1$ ถ้า $a_k=1$ แล้ว $a_i=1$ สำหรับทุกๆ $i\geq k$

จะเรียกว่า**คำลดทอน**(reduce word) โดยแทนคำลดทอน $(a_1,a_2,...a_n,1,1,..)$ เมื่อ $n\geq 1$ ด้วย $(a_1,a_2,...a_n)$ และคำลดทอน $(1,1,..)$ เรียกว่า**คำว่าง**(empty word) และใช้ 1 เป็นสัญลักษณ์แทนคำว่าง

ให้ F เป็นเซตของคำลดทอนทั้งหมดบน $X\cup X^{-1}\cup\{1\}$ รวมกับคำว่างและเราจะแทนลำดับ $(a_1,a_2,...a_n)$ ด้วย $a_1a_2...a_n$ และนิยามการดำเนินการ * บน F โดยวิธีการ**วางเคียงกัน** (juxtaposition) ดังนี้

$$(a_1,a_2,\ldots a_n)*(b_1,b_2,\ldots b_m)=\begin{cases} a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m & \text{เมื่อ } a_n \neq b_1^{-1} \\ a_1a_2\ldots a_{n-k}b_{k+1}\ldots b_m & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มาก} \\ & \text{ที่สุดซึ่ง } a_{n-j}=b_{j+1}^{-1} \text{ สำหรับ} \\ & j=0,1,\ldots k-1 \\ b_{n+1}\ldots b_m & \text{เมื่อ } a_{n-i+1}=b_i^{-1} \text{ สำหรับ} \\ & i=1,2,\ldots,n \text{ และ } n<m \\ a_1a_2\ldots a_{n-m} & \text{เมื่อ } a_{n-i+1}=b_i^{-1} \text{ สำหรับ} \\ & i=1,2,\ldots,n \text{ และ } m<n \\ 1 & \text{เมื่อ } a_{n-i+1}=b_i^{-1} \text{ สำหรับ} \\ & i=1,2,\ldots,n \text{ และ } m=n \\ a_1a_2\ldots a_n & \text{เมื่อ } b_i=1 \text{ สำหรับทุกๆ} \\ & 1\leq i\leq m \\ b_1b_2\ldots b_m & \text{เมื่อ } a_i=1 \text{ สำหรับทุกๆ} \\ & 1\leq i\leq n \\ 1 & \text{เมื่อ } a_i=1 \text{ สำหรับทุกๆ} \\ & 1\leq i\leq n \text{ และ } b_i=1 \text{ สำหรับ} \\ & \text{ทุกๆ } 1\leq i\leq m \end{cases}$$

จากการนิยามการดำเนินการ * บน F ข้างต้น จะเห็นว่าสำหรับทุกๆ $(a_1,a_2,\ldots a_n)\in F$ จะมี $(1,1,\ldots)\in F$ ซึ่ง $(a_1,a_2,\ldots a_n)*(1,1,\ldots)=(a_1,a_2,\ldots a_n)=(1,1,\ldots)*(a_1,a_2,\ldots a_n)$ นั่นคือ $(1,1,\ldots)$ เป็นเอกลักษณ์ของ F ภายใต้การดำเนินการ * และสำหรับทุกๆ $(a_1,a_2,\ldots a_n)\in F$ จะมี $(a_n^{-1},a_{n-1}^{-1},\ldots a_1^{-1})\in F$ ซึ่ง

$$(a_1,a_2,\ldots a_n)*(a_n^{-1},a_{n-1}^{-1},\ldots a_1^{-1})=(1,1,\ldots)=1=(a_n^{-1},a_{n-1}^{-1},\ldots a_1^{-1})*(a_1,a_2,\ldots a_n)$$

นั่นคือ $(a_n^{-1},a_{n-1}^{-1},\ldots a_1^{-1})$ เป็นตัวผกผันของ $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ ภายใต้การดำเนินการ * บน F

ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าเซต F ภายใต้การดำเนินการ * เป็นกรุปโดยแสดงให้เห็นว่า $(F;*)$ สมสัณฐานกันกับกรุปที่เราสร้างขึ้นมาซึ่งก็คือกรุปย่อยของกรุปการเรียงสับเปลี่ยน

4.6 ทฤษฎีบท $(F; \cdot)$ เป็นกรุป

บทพิสูจน์ ให้ A(F) แทนเซตของฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงทั้งหมดบนเซต F แล้ว A(F) จะเป็นกรุปการเรียงสับเปลี่ยนบน F ภายใต้ผลประกอบ o ของฟังก์ชัน

ให้ $x \in X$ และให้ $|x|$ เป็นฟังก์ชันจาก F ไปยัง F นิยามสำหรับแต่ละ $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in F$ นิยามโดย

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = \begin{cases} xa_1a_2\ldots a_n & \text{เมื่อ } x \neq a_1^{-1} \\ a_2\ldots a_n & \text{เมื่อ } x = a_1^{-1} \\ x & \text{เมื่อ } (a_1, a_2, \ldots a_n) = 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = a_1^{-1} \text{ และ } n=1 \end{cases}$$

1) ให้ $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ และ $(b_1, b_2, \ldots b_m) \in F$ สำหรับทุก $n, m \in \mathbf{I}$ ซึ่ง $(a_1, a_2, \ldots a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ เนื่องจาก $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ และ $(b_1, b_2, \ldots b_m)$ เป็นลำดับ ดังนั้น n=m และ $a_i = b_i$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq n$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x \neq a_1^{-1}$ จะได้ว่า $x \neq b_1^{-1}$ เพราะฉะนั้น

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = xa_1a_2\ldots a_n = xb_1b_2\ldots b_n = xb_1b_2\ldots b_m = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x = a_1^{-1}$ จะได้ว่า $x = b_1^{-1}$ เพราะฉะนั้น

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = a_2\ldots a_n = b_2\ldots b_n = b_2\ldots b_m = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$ จะได้ว่า $(b_1, b_2, \ldots b_m) = 1$ เพราะฉะนั้น

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = x = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

กรณีที่ 4 เมื่อ $x = a_1^{-1}$ และ n=1 จะได้ว่า $x = b_1^{-1}$ เพราะฉะนั้น

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1 = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า ถ้า $(a_1, a_2, \ldots a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ แล้ว

$$|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$$

เพราะฉะนั้น $|x|$ เป็นฟังก์ชัน

2) ให้ $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ และ $(b_1, b_2, \ldots b_m) \in F$ โดยที่ $|x|(a_1, a_2, \ldots a_n) = |x|(b_1, b_2, \ldots b_m)$ ดังนั้น $xa_1a_2\ldots a_n = xb_1b_2\ldots b_m$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x = a_1^{-1}$ และ $x = b_1^{-1}$ เนื่องจาก $xa_1a_2\ldots a_n = xb_1b_2\ldots b_m$ จะได้ว่า

$$a_1^{-1}a_1a_2\ldots a_n = b_1^{-1}b_1b_2\ldots b_m \text{ ดังนั้น } a_2\ldots a_n = b_2\ldots b_m \text{ จะได้ว่า } n = m$$

และ $a_i = b_i$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le m = n$ เพราะฉะนั้น $a_1a_2...a_n = b_1b_2...b_m$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x \ne a_1^{-1}$ และ $x = b_1^{-1}$ ดังนั้น $b_1 = x^{-1}$ เนื่องจาก $xa_1a_2...a_n = xb_1b_2...b_m$

จะได้ว่า $xa_1a_2...a_n = b_1^{-1}b_1b_2...b_m$ ดังนั้น $xa_1a_2...a_n = b_2...b_m$ จะได้ว่า

$b_2 = x$ ซึ่งขัดแย้ง กับ $(b_1, b_2, ...b_m) \in F$ ดังนั้นกรณีนี้ไม่สามารถเกิดขึ้นได้

กรณีที่ 3 เมื่อ $x = a_1^{-1}$ และ $x \ne b_1^{-1}$ ดังนั้น $a_1 = x^{-1}$ เนื่องจาก $xa_1a_2...a_n = xb_1b_2...b_m$

จะได้ว่า $a_1^{-1}a_1a_2...a_n = xb_1b_2...b_m$ ดังนั้น $a_2...a_n = xb_1b_2...b_m$ จะได้ว่า

$a_2 = x$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(a_1, a_2, ...a_n) \in F$ ดังนั้นกรณีนี้ไม่สามารถเกิดขึ้นได้

กรณีที่ 4 เมื่อ $x \ne a_1^{-1}$ และ $x \ne b_1^{-1}$

เนื่องจาก $xa_1a_2...a_n = xb_1b_2...b_m$ ดังนั้น $xa_1 = xb_1$ ทำให้ $a_1 = b_1$ ดังนั้น

$n = m$ และ $a_i = b_i$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le m = n$ นั่นคือ $a_1a_2...a_n = b_1b_2...b_m$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่าถ้า $|x|(a_1, a_2, ...a_n) = |x|(b_1, b_2, ...b_m)$
แล้ว $(a_1, a_2, ...a_n) = (b_1, b_2, ...b_m)$ เพราะฉะนั้น $|x|$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3) ให้ $a_1a_2..a_n \in F$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x = a_1$ จะมี $a_2..a_n \in F$ ที่ทำให้ $|x|(a_2, ...a_n) = (x, a_2, ...a_n) = (a_1, a_2, ...a_n)$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x \ne a_1$ จะมี $x^{-1}a_1a_2..a_n \in F$ ที่ทำให้

$$|x|(x^{-1}, a_1, a_2, ...a_n) = xx^{-1}(a_1, a_2, ...a_n) = (a_1, a_2, ...a_n)$$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า $|x|$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ดังนั้น $|x|$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก F ไปยัง F นั่นคือ $|x| \in A(F)$

4) ให้ $(a_1, a_2, ...a_n) \in F$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x \ne a_1^{-1}$ จะได้ว่า $|x^{-1}|(xa_1a_2...a_n) = a_1a_2...a_n$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x = a_1^{-1}$ จะได้ว่า $|x^{-1}| \circ |x|(a_1, a_2, ...a_n) = |x^{-1}|(a_2...a_n) = x^{-1}a_2...a_n$

$$= x^{-1}(xa_1)a_2...a_n = a_1a_2...a_n$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $(a_1, a_2, ...a_n) = 1$ จะได้ว่า $|x^{-1}| \circ |x|(a_1, a_2, ...a_n) = 1 = a_1a_2...a_n$

จากทุกกรณีข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า $|x^{-1}| \circ |x|(a_1, a_2, ...a_n) = a_1a_2...a_n$

ดังนั้น $|x^{-1}| \circ |x| = 1_F$ นั่นคือ $|x^{-1}|$ เป็นตัวผกผันของ $|x|$

5) ให้ $S = \{|x| \mid x \in X\}$ แล้ว $\langle S \rangle$ เป็นกรุปที่เล็กที่สุดซึ่งมี S เป็นสับเซต ดังนั้น $(\langle S \rangle; \circ)$ เป็นกรุปย่อยของ $(A(F); \circ)$

6) ให้ $\varphi:(F;\cdot)\rightarrow(\langle S\rangle;o)$ นิยามสำหรับ $(a_1,a_2,\ldots a_n)\in F$ นิยามโดย

$$\varphi(a_1,a_2,..a_n)=|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_n| \text{ และ } \varphi(1)=1_F$$

ให้ $(a_1,a_2,..a_n)$ และ $(b_1,b_2,..b_m)\in F$ โดยที่ $(a_1,a_2,..a_n)=(b_1,b_2,..b_m)$

เนื่องจาก $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ และ $(b_1,b_2,\ldots b_m)$ เป็นลำดับดังนั้น n=m และ $a_i=b_i$ สำหรับทุกๆ $1\leq i\leq n$ จะได้ว่า $|a_i|=|b_i|$ ทำให้ได้ว่า

$$\varphi(a_1,a_2,..a_n)=|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_n|=|b_1|o|b_2|o\ldots o|b_n|=|b_1|o|b_2|o\ldots o|bm|$$
$$=\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชัน

7) ให้ $(a_1,a_2,..a_n)$ และ $(b_1,b_2,..b_m)\in F$

กรณีที่ 1 เมื่อ $a_n\neq b_1^{-1}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m))&=\varphi(a_1,a_2,..a_n,b_1,b_2,..b_m)\\&=|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_n|o|b_1|o|b_2|o\ldots o|b_m|\\&=(|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_n|)o(|b_1|o|b_2|o\ldots o|b_m|)\\&=\varphi(a_1,a_2,..a_n)o\varphi(b_1,b_2,..b_m)\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดซึ่ง $a_{n-j}=b_{j+1}^{-1}$ สำหรับ $j=0,1,\ldots k-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\varphi((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m))\\&=\varphi(a_1,a_2,..a_{n-k}b_{k+1},..b_m)\\&=|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_{n-k}|o|b_{k+1}|o\ldots o|b_m|\\&=|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_{n-k}|o(|a_{n-k+1}|o\ldots o|a_n|)o(|b_1|o\ldots o|b_k|)o|b_{k+1}|o\ldots o|b_m|\\&=(|a_1|o|a_2|o\ldots o|a_n|)(|b_1|o|b_2|o..o|b_m|)\\&=\varphi(a_1,a_2,..a_n)o\varphi(b_1,b_2,..b_m)\end{aligned}$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $a_{n-i+1}=b_i^{-1}$ สำหรับ i=1,2,…,n และ n<m จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\varphi((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m))=\varphi(b_{n+1},..b_m)=|b_{n+1}|o,\ldots o|b_m|\\&=(|a_1|o|a_2|o\ldots|a_n|)(|b_1|o|b_2|o\ldots|b_n|)(|b_{n+1}|o,\ldots o|b_m|)\\&=|a_1|o|a_2|o\ldots|a_n|o|b_1|o|b_2|o\ldots|b_n|o|b_{n+1}|o,\ldots o|b_m|\\&=(|a_1|o|a_2|o\ldots|a_n|)o(|b_1|o|b_2|o\ldots|b_n|o|b_{n+1}|o,\ldots o|b_m|)\\&=\varphi(a_1,a_2,..a_n)o\varphi(b_1,b_2,..b_m)\end{aligned}$$

กรณีที่ 4 เมื่อ $a_{n-i+1} = b_i^{-1}$ สำหรับ i=1,2,…,m และ m<n จะได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi(a_1,a_2,..a_{n-m}) = |a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_{n-m}|$$
$$= (|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_{n-m}|)\circ(|a_{n-m+1}|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|)$$
$$= |a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_{n-m}|\circ|a_{n-m+1}|\circ...\circ|a_n|\circ|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|$$
$$= (|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_{n-m}|\circ|a_{n-m+1}|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|)$$
$$= \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

กรณีที่ 5 เมื่อ $a_{n-i+1} = b_i^{-1}$ สำหรับ i=1,2,…,n และm=n จะได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi(1) = 1_F$$
$$= 1_F \circ(|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_n|)$$
$$= (|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|)$$
$$= \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

กรณีที่ 6 เมื่อ $b_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le m$ จะได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(1)\right) = \varphi(a_1,a_2,..a_n)$$
$$= |a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n| = |a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|\circ 1_F = (|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|)\circ(1_F)$$
$$= \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

กรณีที่ 7 เมื่อ $a_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le n$ จะได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi\left((1)*(b_1,b_2,..b_m)\right)$$
$$= \varphi(b_1,b_2,..b_m) = |b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m| = 1_F \circ|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|$$
$$= (1_F)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|)$$
$$= \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

กรณีที่ 8 เมื่อ $a_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le n$ และ $b_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \le i \le m$ จะได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi(1) = 1_F$$
$$= 1_F \circ(|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_n|)$$
$$= (|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|)\circ(|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|)$$
$$= \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า

$$\varphi\left((a_1,a_2,..a_n)*(b_1,b_2,..b_m)\right) = \varphi(a_1,a_2,..a_n)\circ\varphi(b_1,b_2,..b_m)$$

นั่นคือ φ เป็นสาทิสสัณฐาน

8) ให้ $(a_1,a_2,..a_n)$ และ $(b_1,b_2,..b_m)\in F$ โดยที่ $\varphi(a_1,a_2,..a_n)=\varphi(b_1,b_2,..b_m)$
ดังนั้น $|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|=|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|$ ให้ $x \neq y$ ดังนั้น

กรณีที่ 1 เมื่อ $x\neq a_1^{-1}$ จะได้ว่า $|y|\circ|x|(a_1a_2...a_n)= yxa_1a_2...a_n=|yx|(a_1a_2...a_n)$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x=a_1^{-1}$ จะได้ว่า $|y|\circ|x|(a_1a_2...a_n)= ya_2...a_n=|yx|(a_1a_2...a_n)$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า $|y|\circ|x|=|yx|$ ดังนั้น

$$|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|=|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_m|$$
$$|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_{n-1}a_n|=|b_1|\circ|b_2|\circ...\circ|b_{m-1}b_m|$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$|a_1a_2...a_n|=|b_1b_2...b_m|$$

เนื่องจาก $a_1a_2...a_n$ และ $b_1b_2...b_m$ เป็นลำดับ จะได้ว่า $n=m$ และ $a_i=b_i$ สำหรับทุกๆ $1\leq i\leq m=n$ นั่นคือ $a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_m$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

9) ให้ $f\in\langle S\rangle$ ดังนั้นจะมี $(a_1,a_2,..a_n)\in F$ ซึ่ง $|a_1|,|a_2|,...|a_n|\in S$ และ
$f=|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|$ ซึ่งทำให้ $\varphi(a_1,a_2,..a_n)=f=|a_1|\circ|a_2|\circ...\circ|a_n|\in\langle S\rangle$
หรือถ้า $f=1_F$ ก็จะมี $(a_1,a_2,..a_n)=(1)\in F$ ที่ทำให้ $\varphi(a_1,a_2,..a_n)=1_F=f$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า φ เป็นสมสัณฐาน เพราะฉะนั้น $(F;\cdot)$ สมสัณฐานกันกับ $(\langle S\rangle;\circ)$ และเนื่องจาก $(\langle S\rangle;\circ)$ เป็นกรุป ดังนั้น $(F;\cdot)$ เป็นกรุป ●

ต่อไปจะแสดงความสัมพันธ์ของกรุป $(F;\cdot)$ กับกรุป G ใดๆ โดยพิสูจน์ว่ากรุป $(F;\cdot)$ เป็นกรุปอิสระตามบทแทรก 2.41

4.7 ทฤษฎีบท ให้ F เป็นกรุปในทฤษฎีบท 4.6 ถ้า G เป็นกรุปใดๆ และ $f:X\rightarrow G$ แล้วจะมีสาทิสสัณฐาน $\bar{f}:F\rightarrow G$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $\bar{f}\iota = f$ โดยที่ $\iota:X\rightarrow F$ นิยามโดย $\iota(a)=(a,1,1,..)$ สำหรับทุกๆ $a\in X$

$$\begin{tikzcd} & G & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\iota"'] & & F \arrow[ul, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

บทพิสูจน์ เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า $(F;\cdot)$ เป็นกรุปอิสระดังนี้ ให้ $\iota : X \rightarrow F$ นิยามโดย $\iota(a) = (a,1,1,..)$ ให้ G เป็นกรุป และ $f : X \rightarrow G$ ให้ $\bar{f} : F \rightarrow G$ นิยามโดย $\bar{f}(1) = e$ และ $\bar{f}(a_1 a_2 ... a_n) = f(a_1)f(a_2)...f(a_n)$ สำหรับ $a_1, a_2, ... a_n \in X$

1) ให้ $(a_1, a_2, ... a_n)$, $(b_1, b_2, ... b_m)$ และ $1 \in F$

กรณีที่ 1 ให้ $(a_1, a_2, ... a_n) = (b_1, b_2, ... b_m)$

เนื่องจาก $(a_1, a_2, ... a_n)$ และ $(b_1, b_2, ... b_m)$ เป็นลำดับ ดังนั้น n=m และ $a_i = b_i$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq n$ จะได้ว่า $f(a_i) = f(b_i)$ ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(a_1, a_2, ..a_n) &= f(a_1)f(a_2)...f(a_n) = f(b_1)f(b_2)...f(b_n) = f(b_1)f(b_2)...f(b_m) \\
&= \bar{f}(b_1, b_2, ..b_m)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 ให้ $(a_1, a_2, ... a_n) = 1$ จะได้ว่า $\bar{f}(a_1, a_2, ..a_n) = e = \bar{f}(1)$

ดังนั้น $\bar{f}$ เป็นฟังก์ชัน

2) ให้ $(a_1, a_2, ... a_n)$ และ $(b_1, b_2, ... b_m) \in F$

กรณีที่ 1 เมื่อ $a_n \neq b_1^{-1}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\bar{f}((a_1, a_2, ..a_n) * (b_1, b_2, ..b_m)) &= \bar{f}(a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_n)f(b_1)f(b_2)...f(b_{,m}) \\
&= (f(a_1)f(a_2)...f(a_n))(f(b_1)f(b_2)...f(b_{,m})) \\
&= \bar{f}(a_1, a_2, ..a_n)\bar{f}(b_1, b_2, ..b_m)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดซึ่ง $a_{n-j} = b_{j+1}^{-1}$ สำหรับ $j = 0,1, ...k-1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\bar{f}((a_1, a_2, ..a_n) * (b_1, b_2, ..b_m)) \\
&= \bar{f}(a_1 a_2 ... a_{n-k} b_{k+1} ... b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_{n-k})f(b_{k+1})...f(b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_{n-k})(e) f(b_{k+1})...f(b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_{n-k})\bar{f}(1) f(b_{k+1})...f(b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_{n-k})\bar{f}(a_{n-k+1}...a_n b_1 ... b_k)f(b_{k+1})...f(b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_{n-k})f(b_{k+1})...f(b_m)f(a_{n-k+1})...f(a_n)f(b_1)...f(b_k) \\
&= f(a_1)f(a_2)...f(a_n)f(b_1)f(b_2)...f(b_{,m}) \\
&= (f(a_1)f(a_2)...f(a_n))(f(b_1)f(b_2)...f(b_{,m})) \\
&= \bar{f}(a_1, a_2, ..a_n)\bar{f}(b_1, b_2, ..b_m)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $a_{n-i+1}=b_i^{-1}$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ และ $n<m$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1,a_2,..a_n\right)*\left(b_1,b_2,..b_m\right)\right)=\bar{f}\left(b_{n+1},..b_m\right)=f\left(b_{n+1}\right)...f\left(b_m\right)$$
$$=(e)f\left(b_{n+1}\right)...f\left(b_m\right)$$
$$=\bar{f}(1)f\left(b_{n+1}\right)...f\left(b_m\right)$$
$$=\bar{f}\left(a_1...a_nb_1...b_n\right)f\left(b_{n+1}\right)...f\left(b_m\right)$$
$$=f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)f\left(b_1\right)f\left(b_2\right)...f\left(b_{,m}\right)$$
$$=\left(f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\right)\left(f\left(b_1\right)f\left(b_2\right)...f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$=\bar{f}\left(a_1,a_2,..a_n\right)\bar{f}\left(b_1,b_2,..b_m\right)$$

กรณีที่ 4 เมื่อ $a_{n-i+1}=b_i^{-1}$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,m$ และ $m<n$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1,a_2,..a_n\right)*\left(b_1,b_2,..b_m\right)\right)=\bar{f}\left(a_1,..a_{n-m}\right)=f\left(a_1\right)...f\left(a_{n-m}\right)$$
$$=f\left(a_1\right)...f\left(a_{n-m}\right)(e)$$
$$=f\left(a_1\right)...f\left(a_{n-m}\right)\bar{f}(1)$$
$$=f\left(a_1\right)...f\left(a_{n-m}\right)\bar{f}\left(a_{n-m+1}...a_nb_1...b_m\right)$$
$$=f\left(a_1\right)...f\left(a_{n-m}\right)f\left(a_{n-m+1}\right)...f\left(a_n\right)f\left(b_1\right)...f\left(b_m\right)$$
$$=\left(f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\right)\left(f\left(b_1\right)f\left(b_2\right)...f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$=\bar{f}\left(a_1,a_2,..a_n\right)\bar{f}\left(b_1,b_2,..b_m\right)$$

กรณีที่ 5 เมื่อ $a_{n-i+1}=b_i^{-1}$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ และ $m=n$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1,a_2,..a_n\right)*\left(b_1,b_2,..b_m\right)\right)$$
$$=\bar{f}(1)$$
$$=\bar{f}\left(a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m\right)$$
$$=\left(f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\right)\left(f\left(b_1\right)f\left(b_2\right)...f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$=\bar{f}\left(a_1,a_2,..a_n\right)\bar{f}\left(b_1,b_2,..b_m\right)$$

กรณีที่ 6 เมื่อ $b_i=1$ สำหรับทุกๆ $1\leq i\leq m$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1,a_2,..a_n\right)*\left(b_1,b_2,..b_m\right)\right)=\bar{f}\left(\left(a_1,a_2,..a_n\right)*(1)\right)=\bar{f}\left(a_1,a_2,..a_n\right)$$
$$=f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)=f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)(e)=f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\bar{f}(1)$$
$$=\left(f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\right)\bar{f}\left(b_1...b_m\right)$$
$$=\left(f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)...f\left(a_n\right)\right)\left(f\left(b_1\right)f\left(b_2\right)...f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$=\bar{f}\left(a_1,a_2,..a_n\right)\bar{f}\left(b_1,b_2,..b_m\right)$$

กรณีที่ 7 เมื่อ $a_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq n$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1, a_2, ..a_n\right) * \left(b_1, b_2, ..b_m\right)\right) = \bar{f}\left((1) * \left(b_1, b_2, ..b_m\right)\right) = \bar{f}\left(b_1, b_2, ..b_m\right)$$
$$= f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_m\right) = (e)\, f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_m\right) = \bar{f}(1)\, f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_m\right)$$
$$= \bar{f}\left(a_1 ... a_n\right) \left(f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_m\right)\right)$$
$$= \left(f\left(a_1\right) f\left(a_2\right) ... f\left(a_n\right)\right) \left(f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$= \bar{f}\left(a_1, a_2, ..a_n\right) \bar{f}\left(b_1, b_2, ..b_m\right)$$

กรณีที่ 8 เมื่อ $a_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq n$ และ $b_i = 1$ สำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq m$ จะได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1, a_2, ..a_n\right) * \left(b_1, b_2, ..b_m\right)\right)$$
$$= \bar{f}(1)$$
$$= \bar{f}\left(a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m\right)$$
$$= \left(f\left(a_1\right) f\left(a_2\right) ... f\left(a_n\right)\right) \left(f\left(b_1\right) f\left(b_2\right) ... f\left(b_{,m}\right)\right)$$
$$= \bar{f}\left(a_1, a_2, ..a_n\right) \bar{f}\left(b_1, b_2, ..b_m\right)$$

จากทุกกรณีข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า

$$\bar{f}\left(\left(a_1, a_2, ..a_n\right) * \left(b_1, b_2, ..b_m\right)\right) = \bar{f}\left(a_1, a_2, ..a_n\right) \bar{f}\left(b_1, b_2, ..b_m\right)$$

นั่นคือ $\bar{f}$ เป็นสาทิสสัณฐาน

3) ให้ $a_i \in X$ จะได้ว่า $\bar{f}\iota\left(a_i\right) = \bar{f}\left(\iota\left(a_i\right)\right) = \bar{f}\left(a_i, 1, 1, ..\right) = \bar{f}\left(a_i\right)$ เพราะฉะนั้น $\bar{f}\iota = f$

4) เพราะว่า $\bar{f} : F \rightarrow G$ เป็นสาทิสสัณฐาน โดยที่ $\bar{f}\iota = f$

ให้ $g : F \rightarrow G$ เป็นสาทิสสัณฐาน ดังนั้น $g\iota = f$ จะได้ว่า

$$g\left(a_1 a_2 ... a_n\right) = g\left(a_1\right) g\left(a_2\right) ... g\left(a_n\right) = g\iota\left(a_1\right) g\iota\left(a_2\right) ... g\iota\left(a_n\right) = f\left(a_1\right) f\left(a_2\right) ... f\left(a_n\right)$$
$$= \bar{f}\left(a_1 a_2 ... a_n\right)$$

เพราะฉะนั้น $\bar{f} = g$ นั่นคือมีสาทิสสัณฐาน $\bar{f} : F \rightarrow G$ เพียงหนึ่งเดียว ●

บรรณานุกรม

[1] ช่อฟ้า นิลรัตน์ , **พีชคณิตนามธรรม** , มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 2533

[2] Hilton,Peter John , **A Course in Modern Algebra** , Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ,1974.

[3] Thomas W. Judson , **Abstract Algebra : theory and applications** , Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ,1993.

[4] John B. Fraleigh , **A First Course In Abstract Algebra** , Department of Mathematics University of Rhode Island ,1971.

[5] M.A. Armstrong , **Groups and Symmetry** , Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ,1988.

[6] EUGENE SCHENKMAN , **Group Theory** , K.S. Padmanabhan for AFFILIATED EAST-WEST PRESS PRIVATE LTD. ,1965.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นายโอลัน น้าวไกรศร
ที่อยู่	118 หมู่ 1 ต.วังเย็น อ.บางแพ จ.ราชบุรี 70160
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2544	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา
พ.ศ. 2547	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2544-2545	ครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ และ วิชาสถิติ ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง โรงเรียนหาดใหญ่อำนวยวิทย์บริหารธุรกิจ จังหวัดสงขลา
พ.ศ. 2545-2551	ครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพและระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง โรงเรียนดรุณาราชบุรีโปลีเทคนิค จังหวัดราชบุรี