



การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

โดย

นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

โดย

นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

FOURIER TRANSFORMS AND THE APPLICATION IN ELECTROMAGNETRIC WAVE

By

Sirichai Rompotantong

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง “ การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ” เสนอโดย นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารท อง เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

.....

(รองศาสตราจารย์ ดร.สิริชัย ชินะตั้งกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.....เดือน..... พ.ศ.....

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

..... ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

...../...../.....

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.กลศ พัฒนระพีเลิศ)

...../...../.....

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

...../...../.....

48308306 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : อนุกรมฟูรีเยร์, การแปลงฟูรีเยร์, คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

สิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง : การแปลงฟูรีเยร์และการประยุกต์ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า.

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รศ.ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง. 67 หน้า.

การค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้ได้นำเสนอ การศึกษาค้นคว้าอนุกรมฟูรีเยร์ การแปลงฟูรีเยร์ และได้นำการแปลงฟูรีเยร์ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาคุณสมบัติของสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นดินที่มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลง อย่าง ต่อเนื่อง แบบ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ในการศึกษาได้ใช้ระบบสมการของแมกซ์เวลล์อิงตัวแปรความถี่ และเมื่อดำเนินการแก้ระบบสมการพบว่าสามารถหาคำตอบในรูปฟังก์ชันสนามไฟฟ้าที่อิงตัวแปรเวลาได้ ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อนำเสนอในรูปกราฟจะแสดงให้เห็นภาพการลดลงของปริมาณของสนามไฟฟ้าอย่างรวดเร็วเมื่อเวลาผ่านไป

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2551

ลายมือชื่อนักศึกษา.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

48308306 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : FOURIER SERIES, FOURIER TRANSFORMS,ELECTROMAGNETRIC WAVE
SIRICHAJ ROMPOTANTONG : FOURIER TRANSFORMS AND THE APPLICATION
IN ELECTROMAGNETRIC WAVE. INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC. PROF.
SUABSAGUN YOOYUANYONG, Ph.D. 67 pp.

In this study, we present Fourier series, Fourier transforms and their applications to the electric field that response from the ground. The conductivities of the ground are varied continuously as an exponential function. The system of Maxwell's equations are used and solved to get the time domain electric field. The results can be plotted to show that the electric field rapidly decreases as time increases.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2008
Student's signature
Independent Study Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้สำเร็จได้ เพราะความกรุณาของรองศาสตราจารย์ ดร .สืบสกุล อยู่ยืนยง ที่ให้คำปรึกษา และคำแนะนำ ทางด้านคณิตศาสตร์และธรณีฟิสิกส์ และแก้ไขส่วนต่างๆที่บกพร่อง ทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จได้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ขอขอบคุณเพื่อนๆ และรุ่นพี่ สาขาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ สำหรับความช่วยเหลือ คำแนะนำ ที่ให้กันตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบคุณ บิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนทางการศึกษา จนมีความสำเร็จทางการงานในทุกวันนี้ และขอขอบคุณ ภรรยา ที่เป็นกำลังใจที่ดีในการ ค้นคว้าอิสระฉบับนี้

สิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

20 พฤษภาคม 2552

สารบัญ

		หน้า
	บทคัดย่อภาษาไทย	ง
	บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
	กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
	สารบัญภาพประกอบ	ณ
	บทที่	
1	บทนำ.....	1
	บัญชีสัญลักษณ์	2
2	อนุกรมฟูรีเยร์	4
	นิยาม และทฤษฎีเบื้องต้น	4
	ฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่.....	8
	อนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ และอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์	14
	การลู่เข้าของอนุกรมฟูรีเยร์	19
3	การแปลงฟูรีเยร์	26
	การแปลงฟูรีเยร์ และการแปลงฟูรีเยร์ผกผัน	26
	ทฤษฎีบทการลู่เข้า และคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงฟูรีเยร์	27
	การแปลงฟูรีเยร์ไซน์ และการแปลงฟูรีเยร์โคไซน์	33
4	การประยุกต์ใช้การแปลงฟูรีเยร์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า	37
	สนามไฟฟ้าในบริเวณทั่วไป	39
	สนามไฟฟ้าในอากาศ.....	44
	สนามไฟฟ้าในดิน	47
	เงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้า.....	48
	สนามไฟฟ้าในตัวแปรเวลา	51
5	สรุปผลการศึกษา.....	59
	บรรณานุกรม	60
	ภาคผนวก	61
	ภาคผนวก ก ฟังก์ชันเบสเซล	62
	ภาคผนวก ข การแปลงฮังเกิล	64
	ภาคผนวก ค อนุกรมฟูรีเยร์เชิงซ้อน	65

	หน้า
ประวัติผู้วิจัย	67

สารบัญภาพประกอบ

ภาพที่		หน้า
2-1	กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n = 1, 2, 3$ ของอนุกรมฟูรีเยร์ ของ $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in [-\pi, \pi]$ (Pinsky, 1991)	12
2-2	กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n = 1, 2, 3$ ของอนุกรมฟูรีเยร์ ของ $f(x) = x $ สำหรับทุก $x \in [-\pi, \pi]$ (Pinsky, 1991)	13
4-1	แผนภาพแบบจำลองทางเรขาคณิตของ โครงสร้างพื้น โลกที่มีแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้า	38
4-2	แผนภาพแสดงสภาพนำไฟฟ้าบนดิน	43
4-3	เส้นทางการหาปริพันธ์	54

บทที่ 1

บทนำ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้นำเสนออนุกรมที่สำคัญอนุกรมหนึ่งได้แก่ อนุกรมฟูรีเยร์ ซึ่งมีประโยชน์มากนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆได้หลายแขนงผู้ศึกษาได้นำเสนอไว้ในบทที่ 2 และเมื่อได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมไปอีกพบว่ารูปทั่วไปของอนุกรมฟูรีเยร์เขียนได้ ในรูปของการแปลงฟูรีเยร์ ซึ่งได้นำเสนอไว้ในบทที่ 3 สำหรับบทที่ 4 เป็นการนำเสนอการประยุกต์ใช้ การแปลงฟูรีเยร์ ในแขนงวิชา คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยได้มีความพยายามใช้ การแปลงฟูรีเยร์ ในการเปลี่ยนคำตอบของสนามไฟฟ้าที่อิงโดเมนความถี่ไปเป็นโดเมนเวลา และในบทที่ 5 เป็นการสรุปผลการศึกษา

บัญชีสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
σ	สภาพนำไฟฟ้าของตัวกลางใดๆ
σ_{air}	สภาพนำไฟฟ้าของอากาศ มีค่าโดยประมาณเป็น 0
ε	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของตัวกลาง ใดๆ
ε_0	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของ สุญญากาศมีค่าโดยประมาณ 8.8510×10^{-12} F/m
μ	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของ ตัวกลางใดๆ
μ_0	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของ สุญญากาศมีค่าโดยประมาณ 12.57×10^{-7} Wb/A-m
ω	ความถี่เชิงมุม
$I(\omega)$	ปริมาณของกระแสไฟฟ้าในขดลวด
a	รัศมีของขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้า
r	ระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าถึง เครื่องมือรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวระดับ

สัญลักษณ์	ความหมาย
z	ระยะความลึกของวัตถุใดๆจากระดับพื้นผิวโลก(metres) มีค่าเป็นลบเมื่อวัตถุอยู่เหนือพื้นผิวโลก มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อวัตถุอยู่ระดับผิวโลก และมีค่าเป็นบวกเมื่อวัตถุอยู่ลึก ลงไปจากระดับพื้นผิวโลก
h	ตำแหน่งของขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ
$\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง r, ϕ และ z ตามลำดับ
\vec{E}	เวกเตอร์สนามไฟฟ้า
E_r	องค์ประกอบของ \vec{E} ในทิศทางของ \hat{e}_r
E_ϕ	องค์ประกอบของ \vec{E} ในทิศทางของ \hat{e}_ϕ
E_z	องค์ประกอบของ \vec{E} ในทิศทางของ \hat{e}_z
E_{air}	สนามไฟฟ้าในอากาศ
\vec{H}	เวกเตอร์สนามแม่เหล็ก
H_r	องค์ประกอบของ \vec{H} ในทิศทางของ \hat{e}_r
H_ϕ	องค์ประกอบของ \vec{H} ในทิศทางของ \hat{e}_ϕ
H_z	องค์ประกอบของ \vec{H} ในทิศทางของ \hat{e}_z
\vec{J}_s	เป็นความหนาแน่นของกระแสในแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้า

บทที่ 2

อนุกรมฟูรีเยร์

บทนำ

อนุกรมอนันต์มีประโยชน์อย่างมาก เราสามารถ ประมาณฟังก์ชันต่างๆ ด้วยอนุกรมอนันต์ได้ อนุกรมอนันต์ที่น่าสนใจ ได้แก่ อนุกรมเทย์เลอร์ อนุกรมแมคลอริน อนุกรมฟูรีเยร์ เป็นต้น สำหรับอนุกรมสองอนุกรมแรก ฟังก์ชันที่เขียนในรูปอนุกรมต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในทุกอันดับ แต่ถ้าฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้วจำเป็นต้องใช้อนุกรมอื่น ซึ่งในสัมมนาฉบับนี้จะเสนออนุกรมฟูรีเยร์ซึ่งจะแทนฟังก์ชันบนช่วงใดช่วงหนึ่งได้ ถึงแม้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นจะหาไม่ได้ที่จุดบางจุดในช่วงนั้น อนุกรมฟูรีเยร์เป็นอนุกรมที่ใช้กันมากในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ ในการศึกษาอนุกรมฟูรีเยร์ เราจะเริ่มด้วยการกำหนดนิยาม และทฤษฎีที่จำเป็นก่อน

นิยามและทฤษฎีเบื้องต้น

บทนิยาม 2.1 : อนุกรมตรีโกณมิติบนช่วงปิด $[-L, L]$ คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2-1)$$

เมื่อ A_0, A_1, B_1, \dots เป็นค่าคงตัว ■

ทฤษฎีบท 2.2 : ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาอนุกรมฟูรีเยร์มีดังต่อไปนี้

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ L & , n = m \neq 0 \\ 2L & , n = m = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ L & , n = m \neq 0 \\ 0 & , n = m = 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{สำหรับทุกๆ } m \text{ และ } n \quad (2-4) \quad \blacksquare$$

การพิสูจน์ความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้นทำได้โดยใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

บทพิสูจน์ สมการ(2-2) จะพิสูจน์ว่า
$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ L & , n = m \neq 0 \\ 2L & , n = m = 0 \end{cases}$$

โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n \neq m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(n-m)\pi x/L]}{(n-m)} \Big|_{-L}^L + \frac{\sin[(n+m)\pi x/L]}{(n+m)} \Big|_{-L}^L \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณี 2: $n = m \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2L + \left[\left(\frac{L}{2n\pi}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \right\} \\ &= L \end{aligned}$$

กรณี 3: $n = m = 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 1 dx = 2L \quad \bullet$$

บทพิสูจน์ สมการ(2-3) จะพิสูจน์ว่า
$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ L & , n = m \neq 0 \\ 0 & , n = m = 0 \end{cases}$$

โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n \neq m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\sin((n-m)\pi x/L)}{n-m} \Big|_{-L}^L - \frac{\sin((n+m)\pi x/L)}{n+m} \Big|_{-L}^L \right\} \\ &= \frac{L}{2\pi} \left(\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m} - \frac{\sin(n-m)\pi}{n-m} - \frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณี 2 : $n = m \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2L - \left(\frac{L}{2n\pi} \right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \right\} \\ &= L \end{aligned}$$

กรณี 3 : $n = m = 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 0 dx = 0 \quad \bullet$$

บทพิสูจน์ สมการ (2-4) จะพิสูจน์ว่า $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ สำหรับทุกๆ m และ n

โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n \neq m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{-\cos((n-m)\pi x/L)}{n-m} \Big|_{-L}^L - \frac{\cos((n+m)\pi x/L)}{n+m} \Big|_{-L}^L \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณี 2: $n = m \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(\sin 0 + \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{-L}{2n\pi} \right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณี 3: $n = m = 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin 0 \cos 0 dx = 0 \quad \bullet$$

บทนิยาม 2.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-L, L]$ แล้วอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

อนุกรมตรีโกณมิติ ดังสมการ (2-1) เมื่อ A_0, A_n และ B_n กำหนดโดย

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2-5)$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , n = 1, 2, \dots \quad (2-6)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , n = 1, 2, \dots \quad (2-7) \quad \blacksquare$$

จากสมการ (2-1) เมื่อแทนค่า A_0, A_n และ B_n จะได้อนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

(2-8)

ในการหาอนุกรมฟูเรียร์ดังสมการ (2-8) ถ้าเราทราบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ เราสามารถลดรูปสมการ (2-8) ได้ ในที่นี้จึงจำเป็นต้องศึกษาเรื่องของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ก่อน

ฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่

บทนิยาม 2.4 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[-L, L]$ แล้วเราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

ถ้า $f(-x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ และ f เป็นฟังก์ชันคี่

ถ้า $f(-x) = -f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ ■

ข้อสังเกต 2.5 : สำหรับผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคู่ เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคี่

เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของฟังก์ชันคู่ กับ ฟังก์ชันคี่ เป็นฟังก์ชันคี่ ■

ตัวอย่าง 2.1 : จงแสดงว่า $x^2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 \cos x$

แล้ว $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$

ดังนั้น $x^2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่ ●

ตัวอย่าง 2.2 : จงแสดงว่า $x \sin x$ เป็นฟังก์ชันคี่

วิธีทำ ให้ $f(x) = x \sin x$

แล้ว $f(-x) = (-x) \sin(-x)$

$$= -x(-\sin x)$$

$$= x \sin x$$

$$= f(x)$$

ดังนั้น $x \sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่ ●

จาก 2 ตัวอย่างข้างต้นเป็นตัวอย่างที่แสดงว่า ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคู่ เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคี่ เป็นฟังก์ชันคู่

ข้อสังเกต 2.6 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคี่ และให้ $x \in [-L, L]$

ถ้ากำหนดให้ $x = -t$ และ $dx = -dt$ แล้วจะได้

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-t) dt$$

เนื่องจาก $\int_0^L f dx = - \int_L^0 f dx$ และ f เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) dx &= \int_0^L f(-t) dt \\ &= - \int_0^L f(t) dt \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= - \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

●

ข้อสังเกต 2.7 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคู่ และให้ $x \in [-L, L]$

แล้ว

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) dx &= - \int_L^0 f(-t) dt \\ &= \int_0^L f(-t) dt \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(t) dt$$

ดังนั้น

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx$$

$$= \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx \quad \bullet$$

ทฤษฎีบท 2.8 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $B_n = 0$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
 และถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $A_n = 0$
 สำหรับ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคู่ และให้ $x \in [-L, L]$

และ
$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

เนื่องจาก $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

จากข้อสังเกต 2.6 จะได้ว่า
$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \bullet$$

สำหรับกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันคี่ และให้ $x \in [-L, L]$

และ
$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

จากข้อสังเกต 2.6 จะได้ว่า
$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \bullet$$

ตัวอย่าง 2.3 : จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ ของ $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$

วิธีทำ ให้ $x \in [-L, L]$ และเพราะว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $A_n = 0$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\text{และ} \quad B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

เนื่องจาก $x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$\text{โดยข้อสังเกต 2.7 จะได้ว่า} \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

เมื่อทำการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

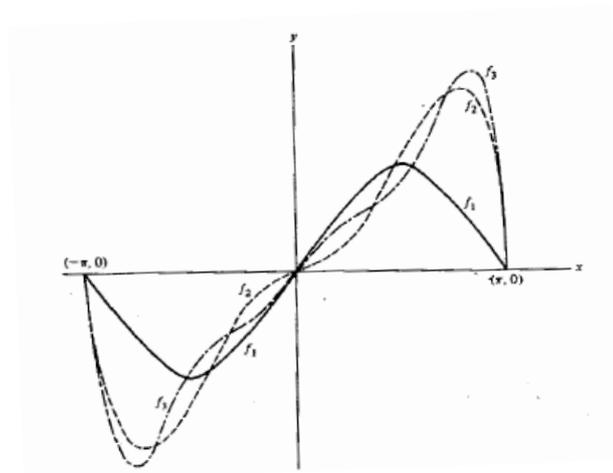
$$\text{โดยให้} \quad u = x \text{ และ } dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad B_n &= \frac{2}{L} \left(-x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{-2L}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \right\} \\ &= \frac{-2L}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2L}{(n\pi)^2} \sin n\pi \\ &= \frac{-2L}{n\pi} \cos n\pi \\ &= \frac{-2L}{n\pi} (-1)^n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมฟูรีเยร์ของ f คือ

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 + \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ &= \left(\frac{2L}{\pi} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \bullet \end{aligned}$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟเฉพาะกรณี $n = 1, 2, 3$ จะได้กราฟดังนี้



ภาพที่ 2-1 : กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n=1,2,3$ ของอนุกรมฟูรีเยร์ ของ $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in [-\pi, \pi]$ (Pinsky, 1991)

ตัวอย่าง 2.4 : จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x) = |x|$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$

วิธีทำ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $B_n = 0$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \dots$

และ $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ $n \neq 0$

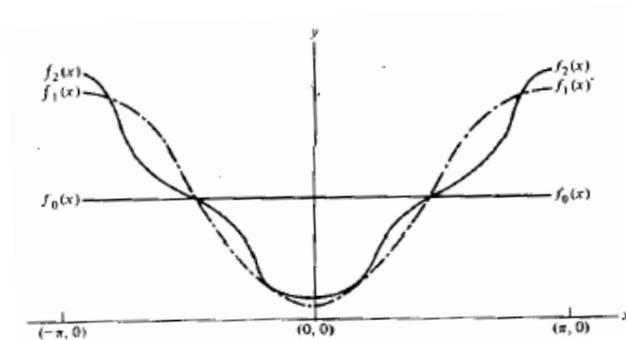
$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \left(x \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\
 &= \frac{-2}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{-2}{n\pi} \left(\frac{-L}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \\
 &= \frac{2L}{(n\pi)^2} [\cos n\pi - 1] \\
 &= \frac{2L}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \text{ สำหรับ } n \neq 0
 \end{aligned}$$

เมื่อ $n=0$ จะได้ $A_0 = \frac{1}{2} \int_0^L x dx = \frac{L}{2}$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] &= \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \cos\frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{L} \bullet \end{aligned}$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟเฉพาะกรณี $n=0,1,2$ จะได้กราฟดังนี้



ภาพที่ 2-2 : กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n=0,1,2$ ของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = |x|$ สำหรับทุก $x \in [-\pi, \pi]$ (Pinsky, 1991)

บทนิยาม 2.9 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x \in [-\infty, \infty]$ และ f จะมีคาบเป็น $2L$

$$\text{ถ้า } f(x+2L) = f(x) \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 2.5 : จงแสดงว่า $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ และ $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ มีคาบเป็น $2L$ สำหรับทุกๆ

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ สำหรับทุกๆ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \text{แล้ว } f(x+2L) &= \sin\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right) \\ &= \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

$$= f(x)$$

และให้ $g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ สำหรับทุกๆ $n = 1, 2, 3, \dots$

แล้ว
$$\begin{aligned} g(x+2L) &= \cos\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ และ $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ มีคาบเป็น $2L$ สำหรับทุกๆ $n = 1, 2, 3, \dots$ •

ตัวอย่าง 2.6 : จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ ของฟังก์ชัน $f(x) = -1$ ถ้า $(2n-1)L \leq x \leq 2nL$

และ $f(x) = 1$ ถ้า $2nL \leq x \leq (2n+1)L$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $A_n = 0$

และ
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right) (1 - (-1)^n)$$

ดังนั้นอนุกรมฟูรีเยร์ คือ

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - (-1)^n)}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \bullet \end{aligned}$$

อนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ และอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์

บทนิยาม 2.10 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, L]$ และให้ f_o เป็นฟังก์ชันคี่

ที่ถูกขยายมาจาก f กำหนดดังนี้

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 < x \leq L \\ -f(-x) & , -L \leq x < 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

เรียก f_o ว่า การขยายคู่ ของ f ไปบนช่วง $[-L, L]$ และ f_o เป็นฟังก์ชันคู่
 ดังนั้นจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ ของ f_o เขียนได้ดังนี้

$$A_0 = 0 \text{ สำหรับ } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

และอนุกรมฟูรีเยร์ ที่ได้คือ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right)$ เมื่อ $0 \leq x \leq L$

เราจะเรียกอนุกรมฟูรีเยร์ ที่ได้ว่า อนุกรมฟูรีเยร์ไซน์

บทนิยาม 2.11 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, L]$ และให้ f_E เป็นฟังก์ชันคู่
 ที่ถูกขยายมาจาก f กำหนดดังนี้

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 < x \leq L \\ -f(-x) & , -L \leq x < 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

เรียก f_E ว่า การขยายคู่ ของ f ไปบนช่วง $[-L, L]$ และ f_E เป็นฟังก์ชันคู่
 ดังนั้นจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ ของ f_E เขียนได้ดังนี้

$$B_n = 0 \text{ สำหรับ } n = 0, 1, 2, \dots$$

และ $A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_E(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_E(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

และอนุกรมฟูรีเยร์ที่ได้คือ $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right)$ เมื่อ $0 \leq x \leq L$

เราจะเรียก อนุกรมฟูรีเยร์ ที่ได้ว่า อนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์

ตัวอย่าง 2.7: จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ ของ $f(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in [0, L]$

วิธีทำ เนื่องจาก $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{-2L}{Ln\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

ดังนั้น อนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ คือ $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$ •

ต่อไปจะกล่าวถึงการแทนฟังก์ชัน f ด้วย $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]$

เมื่อ A_n และ B_n เป็นสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ เราสามารถเขียนได้ใหม่โดยให้ $L = \pi$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้สามารถเปลี่ยนกลับไปให้อยู่ในช่วง $[-L, L]$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $x' = \frac{\pi x}{L}$

ปกติแล้วอนุกรมฟูรีเยร์จะมีทั้งอนุกรมที่ลู่ออกและลู่ออกเราต้องศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชันที่ทำให้อนุกรมฟูรีเยร์ลู่ออก ดังนี้

บทนิยาม 2.12 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x \in [-a, b]$ เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

(piecewise continuous) ถ้ามีเซตจำกัดของจุด $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = b$ ซึ่ง

f มีความต่อเนื่องที่ x ในทุกช่วงย่อย เมื่อ $x \neq x_i$ โดยที่ $i = 1, \dots, p$ (2-9)

$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_i + \varepsilon)$ หาได้ , $i = 0, \dots, p$ (2-10)

$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_i - \varepsilon)$ หาได้ , $i = 1, \dots, p + 1$ (2-11)

ในรูปแบบของ(2-10) เราเขียนแทนด้วย $f(x_i + 0)$ จะเรียกว่า ลิมิตขวา

และรูปแบบของ(2-11) เราเขียนแทนด้วย $f(x_i - 0)$ จะเรียกว่า ลิมิตซ้าย ■

บทนิยาม 2.13 : ถ้า f และ อนุพันธ์ทั้งหมดของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

(piecewise continuous) บนช่วง $[a, b]$ แล้ว ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

(piecewise smooth) ■

ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง แล้วอนุพันธ์ของ f หาได้สำหรับ $x = x_1, \dots, x_p$ โดย f' นี้คือฟังก์ชันเป็นช่วงของ f ส่วนในทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ยังคงสอดคล้องตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส โดยอยู่ในรูปแบบ

$$f(b-0) - f(a+0) = \int_a^b f'(x) dx + \sum_{i=1}^p [f(x_i+0) - f(x_i-0)]$$

และในแต่ละช่วง (x_i, x_{i+1}) จะได้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสที่มีรูปแบบ

$$f(x_{i+1}-0) - f(x_i+0) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) dx$$

ถ้าฟังก์ชัน f ปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องแล้ว ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสเขียนได้ดังนี้

$$f(b-0) - f(a+0) = \int_a^b f'(x) dx$$

ตัวอย่าง 2.8 : จงแสดงว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$

วิธีทำ ให้ $x_0 = -\pi, x_1 = 0, x_2 = \pi$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องทุกๆค่าในช่วง $[-\pi, \pi]$

แล้ว f' ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ

โดยที่ $f'(0+0) = 1, f'(0-0) = -1$

ส่วนอนุพันธ์อันดับสูงมีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.9 : จงแสดงว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 & , -\pi \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & , 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ยกเว้นที่จุด $x = 0$

เมื่อเรามี $f(0+0) = 1$ และ $f(0-0) = 0$

และอนุพันธ์อันดับสูงอื่นๆ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงๆ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.10 : จงแสดงว่า $f(x) = x|x|$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ในกรณีนี้ f และ f' ต่อเนื่อง

และ f'' ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ ซึ่ง $f''(0+0) = 2$

และ $f''(0-0) = -2$ ซึ่งทั้งหมดนี้มีอนุพันธ์มากกว่าศูนย์

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.11 : จงแสดงว่า $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ และ $f(0) = 0$ เป็นฟังก์ชัน

ปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ในกรณีนี้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi, \pi]$

และ f' ต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi, \pi]$

อย่างไรก็ตาม $f'(0+0)$ และ $f'(0-0)$ ไม่สามารถหาค่าได้

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ไม่ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ●

ตัวอย่าง 2.12 : จงแสดงว่า $f(x) = \frac{1}{x^2 - \pi^2}$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ถึงแม้ว่าในกรณีนี้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi, \pi]$

แต่ก็ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[-\pi, \pi]$

เนื่องจาก $f(-\pi+0)$ และ $f(\pi-0)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ใช่ ฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ●

เมื่อศึกษาฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ยกเว้นที่ จุดแบ่งย่อย x_0, x_1, \dots, x_{p+1} นั้น ไม่ได้ส่งผลกระทบต่อการศึกษาอนุกรมฟูรีเยร์ เพราะว่าลิมิตปริพันธ์ฟูรีเยร์ A_n, B_n ถูกนิยามในรูปของปริพันธ์ ซึ่งไม่มีผลกับค่าของ $f(x)$ ที่มีจำนวนจุดจำกัด ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $f_1(x) = f_2(x)$ ยกเว้นที่จุด

$x = x_0, x_1, \dots, x_{p+1}$ แล้ว $\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f_2(x) dx$ ดังนั้นเราจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์
ไม่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวน $f(x_0), \dots, f(x_{p+1})$

บทนิยาม 2.14 : สมมุติ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[a, b]$ เรานิยามการยืดขยาย

เป็นคาบของ f โดย

$$f(x + n(b-a)) = f(x) \text{ เมื่อ } x \in [a, b] \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \quad \blacksquare$$

การดูเข้าของอนุกรมฟูรีเยร์

เนื่องจากการกำหนดช่วงของโดเมนเป็น $[-\pi, \pi]$ โดยการเปลี่ยนตัวแปรทำให้สามารถ
เขียนแทน $\cos(m\pi x / L)$ และ $\sin(m\pi x / L)$ ด้วย $\cos mx$ และ $\sin mx$

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการดูเข้าของอนุกรมฟูรีเยร์จำเป็นต้องศึกษาเกี่ยวกับบท
ตั้ง (Lemma) ต่อไปนี้

บทตั้ง 2.15 (รีมันน์) : ถ้า f และ f' เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$(ก). \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0$$

$$(ข). \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0 \quad \blacksquare$$

บทพิสูจน์ (ก). $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0$

เนื่องจาก $\int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = \sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \lambda x dx$

ดังนั้นจะแสดงว่า $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \lambda x dx = 0$

เมื่อหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u = f(x), dv = \sin \lambda x dx$

ดังนั้น $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \lambda x dx = \left. \frac{-f(x) \cos \lambda x}{\lambda} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\lambda} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \cos \lambda x dx$

ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นศูนย์เมื่อ $\lambda \rightarrow \infty$

ดังนั้น
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \lambda x dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad \bullet$$

บทพิสูจน์ (๗).
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0$$

เนื่องจาก
$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cos \lambda x dx$$

ดังนั้นจะแสดงว่า
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cos \lambda x dx = 0$$

เมื่อหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u = f(x), dv = \cos \lambda x dx$

ดังนั้น
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{f(x) \sin \lambda x}{\lambda} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\lambda} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \cos \lambda x dx$$

ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นศูนย์เมื่อ $\lambda \rightarrow \infty$

ดังนั้น
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cos \lambda x dx = 0 \quad \bullet$$

เราต้องการหาค่าของ

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{m=1}^N (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \quad \text{เมื่อ } N \text{ มีค่ามากสู่อินฟินิตี้}$$

เมื่อใช้นิยามของ A_0, A_m, B_m ที่มีใน บทนิยาม 2.3 จะได้

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin f(t) (\cos mt \cos mx + \sin mt \sin mx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos m(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^N \cos m(t-x) \right] dt \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นเพื่อความสะดวกในการใช้งานต่อไปเราจะเขียน $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^N \cos m(t-x)$

ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยใช้บทตั้งที่ 2.16 ดังนี้

บทตั้ง 2.16 : จะแสดงว่า

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \dots + \cos N\alpha = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} \quad \text{เมื่อ } \alpha \in \mathfrak{R} \text{ และ } \alpha \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad \blacksquare$$

บทพิสูจน์ ให้ $S = \frac{1}{2} + \cos \alpha + \dots + \cos N\alpha$

คูณตลอดด้วย $\sin \alpha$ จะได้

$$S \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \dots + \sin \alpha \cos N\alpha$$

จากเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

และ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(b - a)] \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} S \sin \alpha &= \frac{1}{2} [\sin \alpha + \sin 2\alpha - 0 + \sin 3\alpha - \sin \alpha + \dots + \sin(N + 1)\alpha - \sin(N - 1)\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [\sin N\alpha + \sin(N + 1)\alpha] \end{aligned} \quad (2-12)$$

ถ้ากำหนดให้ $a + b = (N + 1)\alpha$, $a - b = N\alpha$

และ $a = (N + \frac{1}{2})\alpha$, $b = \frac{1}{2}\alpha$

ดังนั้นจากขวามือของสมการ (2-12) จะได้

$$\frac{1}{2} [\sin N\alpha + \sin(N + 1)\alpha] = \sin(N + \frac{1}{2})\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$$

นั่นคือสมการ (2-12) เขียนได้เป็น

$$S = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}$$

เมื่อแทนเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ ลงในสมการข้างต้น

จะได้
$$S = \frac{1}{2} + \cos \alpha + \dots + \cos N\alpha = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$$
 ●

จาก $f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^N \cos m(t-x) \right] dt$ เมื่อใช้ บทตั้ง 2.16 จะได้

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} dt \quad (2-13)$$

รูปแบบสมการ(2-13) นี้เป็นรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ที่ดี เนื่องจากไม่มีการอ้างถึงสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ A_n , และ B_n

บทนิยาม 2.17 : กำหนดให้

$$D_N(u) = \begin{cases} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2\pi \sin(u/2)}, & u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ \frac{2N+1}{2\pi}, & u = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

จะกล่าวว่า D_N คือ แก่นกลางคิริเคล ซึ่งเป็นฟังก์ชันคู่ที่มีคาบขนาดเท่ากับ 2π ■

เนื่องจาก $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = 1$ และเพราะว่า $D_N(u)$ เป็นฟังก์ชันคู่

จะได้
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = 2 \int_0^{\pi} D_N(u) du$$

ดังนั้น
$$\int_0^{\pi} D_N(u) du = \frac{1}{2} = \int_{-\pi}^0 D_N(u) du$$

ทฤษฎีบท 2.18 : ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$

อนุกรมฟูเรียร์ของ f จะเข้าสู่ $\frac{1}{2} [\bar{f}(x+0) + \bar{f}(x-0)]$ สำหรับทุกๆ x

เมื่อ \bar{f} คือ การยืดขยายเป็นคาบ ของ f ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi, \pi]$

และให้ \bar{f} คือ การยืดขยายเป็นคาบ ของ f ที่มีคาบเท่ากับ 2π

ดังนั้นผลคูณ $D_N(t-x)\bar{f}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเป็น 2π

นั่นคือจะได้
$$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) D_N(t-x) dt$$

เมื่อแทน $t-x = u$ จะได้

$$f_N(x) = \int_{\pi-x}^{\pi-x} \bar{f}(x+u) D_N(u) du$$

เนื่องจาก ฟังก์ชันเป็นคาบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u) du \\ &= \int_{-\pi}^0 \bar{f}(x+u) D_N(u) du + \int_0^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u) du \end{aligned}$$

เราแบ่งพิจารณาเป็นสองปริพันธ์ ดังนี้

$$(ก). \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u) du = \frac{1}{2} \bar{f}(x+0)$$

$$(ข). \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 \bar{f}(x+u) D_N(u) du = \frac{1}{2} \bar{f}(x-0)$$

พิจารณา (ก) เราต้องการแสดงว่า $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u) du = \frac{1}{2} \bar{f}(x+0)$

ให้
$$g(u) = \frac{\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x+0)}{u}$$

และ
$$U(u) = \frac{u}{2 \sin(u/2)}$$
 โดยที่ $u \neq 0$

และ
$$U(0) = 1$$

แล้ว
$$\int_0^{\pi} [\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x+0)] D_N(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(u) U(u) \sin(N + \frac{1}{2}) u du$$

ใช้หลักเกณฑ์ไลป์ทาล เราจะเห็นว่าฟังก์ชัน U มีความต่อเนื่องและต่อเนื่องในช่วง $[-\pi, \pi]$

และ
$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \bar{f}'(x+0)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} g'(u) = \frac{1}{2} \bar{f}''(x+0)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง และ มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ ฟังก์ชัน U มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

ดังนั้นผลคูณของฟังก์ชัน g และฟังก์ชัน U ก็มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

และเมื่อใช้ บทตั้ง 2.15 เราพิสูจน์ได้ว่า

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(u)U(u) \sin(N + \frac{1}{2})u du = 0$$

เมื่อเขียนในรูปของ \bar{f} จะได้

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \bar{f}(x+u)D_N(u)du = \bar{f}(x+0) \int_0^{\pi} D_N(u)du = \frac{1}{2} \bar{f}(x+0) \quad \bullet$$

พิจารณา (ข) เราต้องการ $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 \bar{f}(x+u)D_N(u)du = \frac{1}{2} \bar{f}(x-0)$

$$\text{ให้ } g(u) = \frac{\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x-0)}{u}$$

$$\text{และ } U(u) = \frac{u}{2 \sin(u/2)} \text{ โดยที่ } u \neq 0 \text{ และ } U(0) = 1$$

$$\text{แล้ว } \int_{-x}^0 [\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x-0)]D_N(u)du = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^0 g(u)U(u) \sin(N + \frac{1}{2})u du$$

ใช้หลักเกณฑ์ไลป์ทาล เราจะเห็นว่าฟังก์ชัน U ต่อเนื่องและต่อเนื่องในช่วง $[-\pi, \pi]$

$$\text{และ } \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \bar{f}'(x-0)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} g'(u) = \frac{1}{2} \bar{f}''(x-0)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง และ มีอนุพันธ์ต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ U มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง

ดังนั้นผลคูณของฟังก์ชัน g และฟังก์ชัน U ก็มีอนุพันธ์ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ

และเมื่อใช้ บทตั้ง 2.15 เราพิสูจน์ได้ว่า

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-x}^0 g(u)U(u) \sin(N + \frac{1}{2})u du = 0$$

เมื่อเขียนในรูปของ \bar{f} จะได้

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-x}^0 \bar{f}(x-u) D_N(u) du = \bar{f}(x-0) \int_{-x}^0 D_N(u) du = \frac{1}{2} \bar{f}(x-0) \quad \bullet$$

เมื่อพิจารณาทั้ง (ก) และ (ข) แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 \bar{f}(x+u) D_N(u) du + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u) du \\ &= \frac{1}{2} \bar{f}(x-0) + \frac{1}{2} \bar{f}(x+0) \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ f จะลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2} [\bar{f}(x+0) + \bar{f}(x-0)]$ สำหรับทุกๆ x •

การแสดงการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์เราสามารถแสดงได้ดังเช่นจาก ตัวอย่าง 2.3 และ ตัวอย่าง 2.4 และได้การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ดังนี้

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = x \quad \text{บนช่วง } [-\pi, \pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx = |x| \quad \text{บนช่วง } [-\pi, \pi]$$

ทั้งสองตัวอย่างนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องตาม $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$

สำหรับทุก x บนช่วง $[-\pi, \pi]$

บทที่ 3

การแปลงฟูรีเยร์

การแปลงฟูรีเยร์และการแปลงฟูรีเยร์ผกผัน

จากภาคผนวก ก เราจะได้อนุกรมฟูรีเยร์เชิงซ้อน บนช่วง $[-L, L]$ ซึ่งดูเข้า ดังนี้ (Pinsky, 1991)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/L} \quad (3-1)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (3-2)$$

กำหนดให้ μ_n เป็นตัวแปรวิฤต(discrete) โดย

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{เมื่อ} \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad \text{และ} \quad \Delta\mu_n = \frac{\pi}{L} = \mu_{n-1} - \mu_n$$

จากสมการ (3-1) และสมการ (3-2) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\mu_n) e^{i\mu_n x} \Delta\mu_n \quad (3-3)$$

$$F_L(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\mu x} dx \quad (3-4)$$

จากสมการข้างต้นให้ ลิมิต $L \rightarrow \infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงค่าจริง (real valued piecewise smooth function) และหาปริพันธ์ได้สมบูรณ์(absolutely integrable)บนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้วสมการ (3-3) เป็นการประมาณผลรวมสำหรับ (ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ) ปริพันธ์แบบรีมันน์ ดังนั้นเราจะได้

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} d\mu \quad (3-5)$$

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \quad (3-6)$$

เราเรียก $f(x)$ และ $F(\mu)$ ว่า คู่ของการแปลงฟูรีเยร์

โดย $F(\mu)$ ในสมการ (3-6) คือการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x)$

และสมการ (3-5) เป็นสูตรการแปลงฟูรีเยร์ผกผันของ $F(\mu)$ ■

ทฤษฎีบท 3.1 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$ และให้ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ แล้วการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $F(\mu)$ จะหาค่าได้ สำหรับ $\mu \in (-\infty, \infty)$ ■

บทพิสูจน์ : เพราะว่า $|f(x)e^{-i\mu x}| = |f(x)|$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\mu x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\mu x}| dx$ หาค่าได้

นั่นคือ $F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx$ หาค่าได้ ●

จากการนำสมการ (3-1) และ (3-4) มารวมกันจะได้มาซึ่งรูปแบบของเอกลักษณ์ปาร์เซอวาล(Parseval's equality) ดังนี้

$$\int_L |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_L(\mu_n)|^2 \Delta\mu_n$$

เมื่อให้ลิมิต $L \rightarrow \infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงค่าจริง (real valued piecewise smooth function) ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงและหาปริพันธ์ได้สมบูรณ์ (absolutely integrable) บนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้วเราจะได้ทฤษฎีบทปาร์เซอวาลสำหรับการแปลงฟูเรียร์ ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu \quad (3-7)$$

ทฤษฎีบทการลู่เข้าและคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงฟูเรียร์

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเงื่อนไขที่สำคัญของการหาปริพันธ์และตัวแทนฟูเรียร์ (Fourier representation) ตามสมการ (3-5)

ทฤษฎีบท 3.2 : ทฤษฎีบทการลู่เข้าสำหรับการแปลงฟูเรียร์

ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $(-\infty, \infty)$ สำหรับแต่ละช่วงจำกัด

โดยที่ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ ลู่เข้า และ นิยามการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$ ดังสมการ (3-6)

แล้วสำหรับแต่ละ x

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L F(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0) \quad \blacksquare$$

การพิสูจน์ดูได้จาก(Pinsky,1991)

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงคุณสมบัติพื้นฐานบางประการของการแปลงฟูเรียร์

คุณสมบัติที่สำคัญ :

(ก) คุณสมบัติเชิงเส้น :

ถ้า F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_2 แล้ว $a_1 F_1 + a_2 F_2$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $a_1 f_1 + a_2 f_2$ เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว

(ข) สัจวัตนาการ(convolution) :

ถ้า F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_2 แล้ว $(2\pi)F_1 F_2$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ $f_1 * f_2$ ซึ่งการสังวัตนาการของสองฟังก์ชันได้นิยามโดยปริพันธ์ ดังนี้

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(x-z) dz$$

(ค) การหาอนุพันธ์ :

ถ้า $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ แล้ว $i\mu F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f'(x)$ และ $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $-ixf(x)$

(ง) การเลื่อน :

ถ้า $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ แล้ว $e^{ia\mu} F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x-a)$ และ $F(\mu+b)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{ibx} f(x)$

(จ) การคงสภาพค่าเฉลี่ยกำลังสองของปริพันธ์ :

ถ้า F เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f แล้วทฤษฎีบทพาร์เซวาล จริงนั่นคือ

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad \blacksquare$$

บทพิสูจน์ (ก) : ให้ $F_1(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f_1(x)$ และ $F_2(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ $f_2(x)$ และ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu) &= \frac{1}{2\pi} a_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} f_1(x) dx + \frac{1}{2\pi} a_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} f_2(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] e^{-i\mu x} dx \quad \bullet \end{aligned}$$

บทพิสูจน์ (ข) : ให้ F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f_2 ต้องการแสดงว่า $(2\pi)F_1(\mu)F_2(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $(f_1 * f_2)(x)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} (f_1 * f_2)(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(x-z) dz \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z} e^{-i\mu(x-z)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(x-z) dz \right) dx \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $s = x - z$

$$\begin{aligned} \text{แล้วจะได้} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} (f_1 * f_2)(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z} e^{-i\mu s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(s) dz \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu s} f_2(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z} f_1(z) dz \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu s} f_2(s) (2\pi F_1(\mu)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi F_1(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu s} f_2(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi F_1(\mu) 2\pi F_2(\mu) \\ &= 2\pi F_1(\mu) F_2(\mu) \quad \bullet \end{aligned}$$

บทพิสูจน์ (ค) : ให้ $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{แล้ว} \quad 2\pi i \mu F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) i \mu e^{-i\mu x} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{d}{dx} \right) e^{-i\mu x} dx \end{aligned}$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u = f(x)$, $dv = \left(\frac{d}{dx} \right) e^{-i\mu x} dx$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2\pi i \mu F(\mu) = - f(x) e^{-i\mu x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\mu x} dx$$

$$2\pi i\mu F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\mu x} dx$$

$$i\mu F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} f'(x) dx$$

ดังนั้น $i\mu F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $f'(x)$

ต่อไปจะแสดงว่า $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $-ixf(x)$

จาก
$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx$$

แล้ว
$$\frac{d}{d\mu} F(\mu) = \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx \right)$$

$$2\pi F'(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ixe^{-i\mu x}) dx$$

$$F'(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)(e^{-i\mu x}) f(x) dx$$

ดังนั้น $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $-ixf(x)$ ●

บทพิสูจน์ (ง) : ให้ $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\mu x} dx &= e^{ia\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\mu(x-a)} d(x-a) \\ &= e^{ia\mu} F(\mu) \end{aligned}$$

ดังนั้น $e^{ia\mu} F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x-a)$

และ
$$F(\mu+b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\mu+b)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ibx} f(x)e^{-i\mu x} dx$$

ดังนั้น $F(\mu+b)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $e^{-ibx} f(x)$ ●

บทพิสูจน์ (จ) : ให้ F เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ f แล้ว ทฤษฎีบทพาร์เซวาล จริง

จะได้
$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$
 ●

ตัวอย่าง 3.1 : จงหาการแปลงฟูรีเยร์ของ “square wave”

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & \text{เมื่อ } a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

วิธีทำ จาก $F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-i\mu x} dx$

$$F(\mu) = \begin{cases} \frac{e^{-i\mu b} - e^{-i\mu a}}{-2\pi i \mu}, & \mu \neq 0 \\ \frac{b-a}{2\pi}, & \mu = 0 \end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 3.1 $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L F(\mu)e^{i\mu x} d\mu = \frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0)$

จะได้
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{(e^{-i\mu b} - e^{-i\mu a})e^{i\mu x}}{-2\pi i \mu} d\mu = \begin{cases} 0 & , x < a \\ 1/2 & , x = a \\ 1 & , a < x < b \\ 1/2 & , x = b \\ 0 & , x > b \end{cases}$$

และโดยทฤษฎีบทพาร์เซวาล $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$

จะได้
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{-i\mu b} - e^{-i\mu a}|^2}{\mu^2} d\mu = b - a$$
 •

ตัวอย่าง 3.2 : ให้ $f(x) = x^2 e^{-x}$ สำหรับ $x > 0$ และ $f(x) = 0$ สำหรับ $x < 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า $F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx$

จะได้
$$\begin{aligned} 2\pi F(\mu) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} e^{-i\mu x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x(1+i\mu)} dx \\ &= \frac{2}{(1+i\mu)^3} \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$ คือ $\frac{1}{\pi(1+i\mu)^3}$ •

ตัวอย่าง 3.3 : ให้ $f(x) = (\sin x)e^{-x}$ สำหรับ $x > 0$ และ $f(x) = 0$ สำหรับ $x < 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า $F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx$

จะได้

$$\begin{aligned}
 2\pi F(\mu) &= \int_0^{\infty} (\sin x) e^{-x} e^{-i\mu x} dx \\
 &= (2i)^{-1} \int_0^{\infty} (e^{-x(1+i\mu-i)} - e^{-x(1+i\mu+i)}) dx \\
 &= (2i)^{-1} \left(\frac{1}{(1+i\mu-i)} - \frac{1}{(1+i\mu+i)} \right) \\
 &= \frac{1}{(1+i\mu)^2 + 1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$ คือ $\frac{1}{2\pi[(1+i\mu)^2 + 1]}$ •

ตัวอย่าง 3.4 : ให้ $f(x) = e^{-x}$ สำหรับ $x > 0$ และ $f(x) = e^{2x}$ สำหรับ $x < 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx$$

จะได้

$$\begin{aligned}
 2\pi F(\mu) &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\mu x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{2x} e^{-i\mu x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\mu)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(2-i\mu)} dx \\
 &= \frac{1}{1+i\mu} + \frac{1}{2-i\mu}
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$F(\mu) = \frac{3}{2\pi(2+i\mu+\mu^2)}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$ คือ $\frac{3}{2\pi(2+i\mu+\mu^2)}$ •

ตัวอย่าง 3.5 : จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x) = e^{-|x|}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx$$

จะได้

$$\begin{aligned}
 2\pi F(\mu) &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\mu x} dx + \int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\mu x} dx \\
 &= \frac{1}{1+i\mu} + \frac{1}{1-i\mu} = \frac{2}{1+\mu^2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\frac{1}{\pi(1+\mu^2)}$ •

ตัวอย่าง 3.6 : จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.5 เราได้ว่าการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{-|x|}$ คือ $\frac{1}{\pi(1+\mu^2)}$

ใช้ ทฤษฎีบท 3.1 คือ $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L F(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0)$

จะได้ $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{1}{\pi(1+\mu^2)} e^{i\mu x} d\mu = e^{-|x|}$

นั่นคือ $\pi e^{-|x|} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{1}{(1+\mu^2)} e^{i\mu x} d\mu$

และเนื่องจากปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่อู่เข้าแบบสมบูรณ์ เปลี่ยนตัวแปร x และ μ

จะได้ $\frac{1}{2\pi} \pi e^{-|\mu|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{(1+x^2)} e^{i\mu x} dx$

ดังนั้น การแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\frac{e^{-|\mu|}}{2}$ ●

การแปลงฟูเรียร์ไซน์และการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

ในสมการ (3-5) และ สมการ (3-6) เป็นการหาการแปลงฟูเรียร์ของ f ที่นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$ ถ้าต้องการหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่นิยามเพียงครึ่งช่วง คือ $x > 0$ เราสามารถขยายฟังก์ชันสำหรับค่า $x < 0$ โดยแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณี 1 : ให้ f_E เป็นฟังก์ชันที่นิยาม โดย

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

แล้ว f_E เป็นฟังก์ชันคู่

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad 2\pi F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\mu x} dx + \int_0^{\infty} f(-x) e^{-i\mu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\mu x} dx - \int_0^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\mu x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-i\mu x} + e^{i\mu x}) dx \end{aligned}$$

เพราะว่า $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

ดังนั้น $2\pi F(\mu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \mu x dx$

และเมื่อแทน $F_c(\mu) = 2F(\mu)$ จะได้

$$F_c(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \mu x dx \quad (3-8)$$

และจาก สมการ (3-5)

จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} + \int_{-\infty}^0 F(-\mu) e^{i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} - \int_0^{\infty} F(\mu) e^{-i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} + \int_0^{\infty} F(\mu) e^{-i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) (e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}) d\mu \end{aligned}$$

เพราะว่า $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

ดังนั้น $f(x) = 2 \int_0^{\infty} F(\mu) \cos \mu x d\mu$

และเมื่อแทน $F_c(\mu) = 2F(\mu)$ จะได้

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_c(\mu) \cos \mu x d\mu \quad (3-9)$$

เรียก $F_c(\mu)$ และ $f(x)$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$ ว่าคู่ของการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ ■

กรณี 2 : ให้ f_o เป็นฟังก์ชันที่นิยาม โดย

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

แล้ว f_o เป็นฟังก์ชันคี่

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 2\pi F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx + \int_{-\infty}^0 -f(-x) e^{-i\mu x} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx - \int_0^{\infty} f(x) e^{i\mu x} dx \end{aligned}$$

$$2\pi F(\mu) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-e^{-i\mu x} + e^{i\mu x})dx$$

เพราะว่า $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

ดังนั้น $2\pi F(\mu) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \mu x dx$

และเมื่อแทน $F_s(\mu) = 2iF(\mu)$

จะได้ $F_s(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \mu x dx$ (3-10)

และจาก สมการ (3-5)

จะได้
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} + \int_{-\infty}^0 -F(-\mu) e^{i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} + \int_0^{\infty} F(\mu) e^{-i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} - \int_0^{\infty} F(\mu) e^{-i\mu x} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} F(\mu) (e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}) d\mu \end{aligned}$$

เพราะว่า $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

ดังนั้น $f(x) = 2i \int_0^{\infty} F(\mu) \sin \mu x d\mu$

และเมื่อแทน $F_s(\mu) = 2iF(\mu)$

จะได้ $f(x) = \int_0^{\infty} F_s(\mu) \sin \mu x d\mu$ (3-11)

และเรียก $F_s(\mu)$ และ $f(x)$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$ ว่าคู่การแปลงฟูเรียร์ไซน์ ■

ตัวอย่าง 3.7 : ให้ $f(x) = e^{-ax}$ สำหรับ $x > 0$ เมื่อ $a > 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์

โคไซน์ $F_c(\mu)$ และการแปลงฟูเรียร์ไซน์ $F_s(\mu)$

วิธีทำ $\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{i\mu x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(a-i\mu)} dx = \frac{1}{a-i\mu} = \frac{a+i\mu}{a^2+\mu^2}$

แยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพจะได้

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \mu x dx = \frac{a}{a^2 + \mu^2} \quad \text{และ} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \mu x dx = \frac{\mu}{a^2 + \mu^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}F_c(\mu) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \mu x dx \\&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \mu x dx \\&= \frac{2a}{\pi(a^2 + \mu^2)}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}F_s(\mu) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \mu x dx \\&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \mu x dx \\&= \frac{2\mu}{\pi(a^2 + \mu^2)}\end{aligned}$$



บทที่ 4

การประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

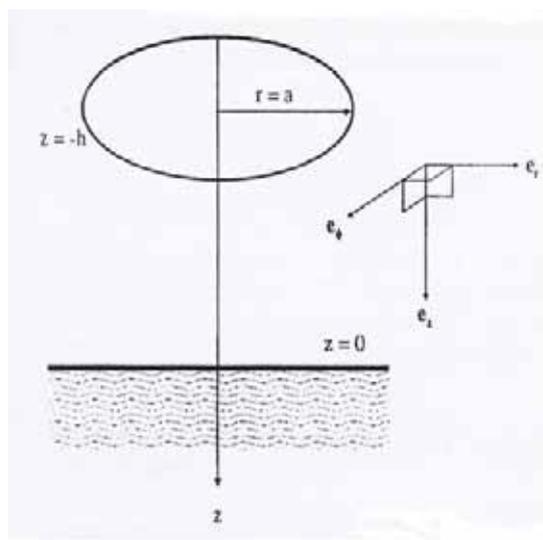
โดยทั่วไปวิธีการทางแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการสำรวจหาแหล่งทรัพยากรที่ฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลก เพราะว่าวิธีการดังกล่าวใช้ค่าใช้จ่ายในการสำรวจค่อนข้างต่ำกว่าวิธีการอื่น และสามารถสำรวจหาแหล่งทรัพยากรที่ฝังตัวอยู่ตั้งแต่ระดับตื้นๆ จนไปถึงระดับที่ลึกมาก ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความถี่และเป้าหมายของการสำรวจ

หลักการสำคัญของวิธีการนี้คือการใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ปลดปล่อยจากแหล่งกำเนิด (source) (ซึ่งโดยทั่วไปแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใช้เป็นขดลวดวงแหวนกลมวางตัวอยู่ในแนวระดับหรือแนวตั้งซึ่งถูกติดตั้งอยู่ในอากาศหรือที่ระดับพื้นผิวโลก) ไปเหนี่ยวนำตัวกลางอื่นๆ ที่อยู่โดยรอบทั้งในอากาศและในพื้นดิน แต่ตัวกลางที่สนใจคือตัวกลางที่เป็นพื้นดิน หลังจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าดังกล่าวเคลื่อนที่ทะลุเข้าไปในพื้นดิน พื้นดินจะถูกเหนี่ยวนำให้เกิดกระแสไหลวน (eddy currents) ซึ่งกระแสไหลวนนี้จะไปเหนี่ยวนำให้ตัวกลางต่างๆ ในพื้นดินให้สร้างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตอบสนองออกมา โดยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตอบสนองออกมานี้จะถูกตรวจวัดด้วยเครื่องมือวัดปริมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถูกติดตั้ง ณ บริเวณพื้นผิวโลกหรือในอากาศ โดยเราจะเรียกสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ปลดปล่อยออกมาจากแหล่งกำเนิดว่าสนามปฐมภูมิ (primary fields) ส่วนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพื้นดินที่ถูกเหนี่ยวนำจากกระแสไหลวนถูกเรียกว่าสนามทุติยภูมิ (secondary fields)

เป้าหมายหลักที่สำคัญเป้าหมายหนึ่งในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของพื้นโลกคือการทำนายปริมาณและพฤติกรรมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพื้นโลกหรือที่พื้นผิวโลก ในช่วงเวลา 30 ปีที่ผ่านมา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจด้วยวิธีทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ใช้สมมติฐานที่ว่าโครงสร้างของโลกสามารถแบ่งออกเป็นชั้นๆ ตามแนวระดับ โดยแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัดยกเว้นชั้นล่างสุดจะมีความลึกเป็นอนันต์ ตัวอย่างเช่น Ryu และ Ward (1970) ได้สร้าง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ของพื้นโลกที่มีโครงสร้างเป็นชั้นๆ ในลักษณะดังกล่าวข้างต้น โดยแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าถูกสร้างจากขดลวดวงแหวนกลมวางตัวขนานกับพื้นโลก (ดูรูปที่ 4-1) อย่างไรก็ตามแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สมมติฐานดังกล่าวข้างต้นมีความไม่สมจริงกับโครงสร้างทางธรณีวิทยาของพื้นโลกในบางบริเวณ เช่น ณ บางบริเวณของโลกซึ่งเปลือกโลกชั้นบนสุด (overburden) เป็นชั้นดินใหม่ที่ทับถมอยู่บนเปลือกโลกที่เป็นชั้นดินที่เก่าแก่ๆ อายุหลายหมื่นหลายแสนปี สภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดของอาณาบริเวณดังกล่าวจะไม่เป็นค่าคงตัวเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ในทางตรงข้ามลักษณะของสภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดจะมีลักษณะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น

แบบจำลองของโลกที่มีโครงสร้างเป็นชั้นๆ และน่าสนใจศึกษาเป็นพิเศษคือแบบจำลองที่มีชั้นบางชั้นมีลักษณะ ของสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องกับความลึกที่เพิ่มขึ้น (คงตัวในแนวระดับ) โดยเฉพาะกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงของสภาพนำไฟฟ้าเป็นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งที่มีการเปลี่ยนแปลงทางสภาพนำไฟฟ้าค่อนข้างสมจริง เหตุผลหนึ่งที่มาสนับสนุนแนวความคิดดังกล่าวคือ เหตุผลที่ได้รายงานไว้ในงานวิจัยของ Lee และ Ignatik (1994) พวกเขาได้พิจารณาการตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้าชั่วขณะต่อพื้นโลกที่มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล และได้ชี้ให้เห็นถึงเหตุผลที่มาสนับสนุนว่ามีอาณาบริเวณบางแห่งในโลกที่มีลักษณะของสภาพนำไฟฟ้าของชั้นเปลือกโลกบางชั้นเปลี่ยนแปลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลกับความลึกเพิ่มขึ้น



ภาพที่ 4-1 : แบบจำลองทางเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกที่มีแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สนามไฟฟ้าในบริเวณทั่วไป

สนามแม่เหล็กประกอบด้วยองค์ประกอบสองส่วนคือ H_r และ H_z สำหรับสนามไฟฟ้าประกอบด้วยองค์ประกอบในแนว ϕ เพื่อให้ง่ายจะใช้สัญลักษณ์ E จากงานของMorrison(1969)จะได้สมการที่สอดคล้องกับของแมกซ์เวลล์(Maxwell's equation)ที่มีรูปแบบดังนี้

$$i\omega\mu H_r = -\frac{\partial E}{\partial z} \quad (4-1)$$

$$i\omega\mu H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \quad (4-2)$$

และ
$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s \quad (4-3)$$

เมื่อ $J_s = I(\omega)\delta(r-a)\delta(z+h)$ คือ ตัวส่งกระแสสัญญาณ(source current density)

ω คือ ความถี่เชิงมุม

δ คือ ฟังก์ชันเดลต้า โดยที่ สำหรับทุก $x \in \mathfrak{R}$, $\delta(x) = \begin{cases} 1; x = 0 \\ 0; x \neq 0 \end{cases}$

$\sigma(z)$ คือ สภาพนำไฟฟ้า(electrical conductivity)

ε คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของตัวกลางใดๆ

μ คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของตัวกลางใดๆ

จากสมการ(4-1), (4-2) และ (4-3) เราสามารถหาสนามไฟฟ้าโดยใช้กระบวนการดังนี้

หาอนุพันธ์สมการ(4-1)เทียบกับ z จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z}(i\omega\mu H_r) = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

หรือ
$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (4-4)$$

หาอนุพันธ์สมการ(4-2) เทียบกับ r จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(i\omega\mu H_z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \right) \\ i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r\partial E + E\partial r}{r\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E}{r} \right) \\
&= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{r\partial E - E\partial r}{r^2\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} \right) \quad (4-5)$$

นำสมการ (4-4) และ (4-5) แทนในสมการ (4-3) จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \left(-\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} \right) \right) \\
&= (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s
\end{aligned}$$

นั่นคือ
$$\frac{-1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} \right) = (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} &= -i\omega\mu [(\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s] \\
&= -(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E - i\omega\mu J_s
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$i\omega\mu J_s = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \quad (4-6)$$

จากสมการ (4-6) ใช้การแปลงฮังเคิล(Hankel transform)ที่นิยามโดย

$$\tilde{E}(\lambda, z, \omega) = \int_0^\infty r J_1(\lambda r) E(r, z, \omega) dr$$

เมื่อ $J_1(_)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1 (Bessel function of the first kind of order 1)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty r (i\omega\mu J_s) J_1(\lambda r) dr \\
&= \int_0^\infty r \left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \right) J_1(\lambda r) dr \quad (4-7)
\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณา

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} r \left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \right) J_1(\lambda r) dr \\
&= - \int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} J_1(\lambda r) dr - \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} \frac{E}{r} J_1(\lambda r) dr \\
&\quad - \int_0^{\infty} r(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E J_1(\lambda r) dr \tag{4-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad - \int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} J_1(\lambda r) dr &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} r E J_1(\lambda r) dr \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\tilde{E}) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} \tag{4-9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad - \int_0^{\infty} r(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E J_1(\lambda r) dr &= -(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon) \int_0^{\infty} r E J_1(\lambda r) dr \\
&= -(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon) \tilde{E} \tag{4-10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad - \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr &= - \int_0^{\infty} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} \right] J_1(\lambda r) dr \\
&= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนโดยให้ $u = J_1(\lambda r)$, $dv = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) dr$, $du = \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) dr$

และ $v = r \frac{\partial E}{\partial r}$ จะได้

$$\begin{aligned}
- \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr \\
&= - J_1(\lambda r) \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} r \frac{\partial E}{\partial r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) dr \\
&= \int_0^{\infty} r \frac{\partial E}{\partial r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) dr
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนโดยให้

$u = r \frac{d}{dr} J_1(\lambda r)$, $dv = \frac{\partial E}{\partial r} dr$, $du = \left(r \frac{d^2}{dr^2} J_1(\lambda r) + \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) \right) dr$ และ $v = E$ จะได้

$$\begin{aligned}
- \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr &= \int_0^{\infty} r \frac{\partial E}{\partial r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) dr \\
&= r \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) E \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} E \left(r \frac{d^2}{dr^2} J_1(\lambda r) + \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) \right) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr &= -\int_0^{\infty} \left(rE \frac{d^2}{dr^2} J_1(\lambda r) + E \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) \right) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(rE \frac{d(\lambda r)}{dr} \frac{d(\lambda r)}{dr} J_1''(\lambda r) + E \frac{d(\lambda r)}{dr} J_1'(\lambda r) \right) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) \right) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad -\int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} \frac{E}{r} J_1(\lambda r) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) \right) dr + \int_0^{\infty} \frac{E}{r} J_1(\lambda r) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r} J_1(\lambda r) \right) dr
\end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad J_1''(\lambda r) + \frac{1}{\lambda r} J_1'(\lambda r) + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2 r^2} \right) J_1(\lambda r) = 0$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) + rE \lambda^2 J_1(\lambda r) - \frac{E}{r} J_1(\lambda r) = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r} J_1(\lambda r) = -rE \lambda^2 J_1(\lambda r)$$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad -\int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} \frac{E}{r} J_1(\lambda r) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(rE \lambda^2 J_1''(\lambda r) + E \lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r} J_1(\lambda r) \right) dr \\
&= -\int_0^{\infty} \left(-rE \lambda^2 J_1(\lambda r) \right) dr \\
&= \lambda^2 \int_0^{\infty} rE J_1(\lambda r) dr \\
&= \lambda^2 \tilde{E} \tag{4-11}
\end{aligned}$$

แทนสมการ (4-9), (4-10) และ (4-11) ในสมการ (4-8) จะได้

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} r \left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \right) J_1(\lambda r) dr \\
&= -\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} J_1(\lambda r) dr - \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} \frac{E}{r} J_1(\lambda r) dr \\
&\quad - \int_0^{\infty} r(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E J_1(\lambda r) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} r \left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \right) J_1(\lambda r) dr \\
= -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + \lambda^2 \tilde{E} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon) \tilde{E} \\
= -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)] \tilde{E}
\end{aligned} \tag{4-12}$$

ต่อไปพิจารณา $\int_0^{\infty} r(i\omega\mu J_s) J_1(\lambda r) dr$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้} \quad \int_0^{\infty} r(i\omega\mu J_s) J_1(\lambda r) dr &= i\omega\mu \int_0^{\infty} r J_s J_1(\lambda r) dr \\
&= i\omega\mu \int_0^{\infty} r [I(\omega)\delta(r-a)\delta(z+h)] J_1(\lambda r) dr \\
&= i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h) \int_0^{\infty} r\delta(r-a) J_1(\lambda r) dr
\end{aligned}$$

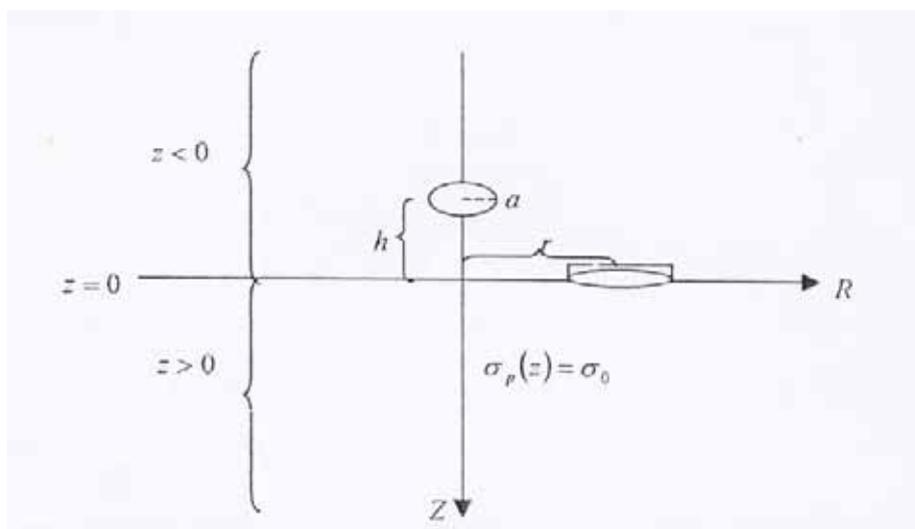
และเพราะว่า $\int_0^{\infty} r\delta(r-a) J_1(\lambda r) dr = a J_1(\lambda a)$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad \int_0^{\infty} r(i\omega\mu J_s) J_1(\lambda r) dr &= i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h) \int_0^{\infty} r\delta(r-a) J_1(\lambda r) dr \\
&= i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h) a J_1(\lambda a)
\end{aligned} \tag{4-13}$$

แทนสมการ (4-12) และ (4-13) ในสมการ (4-7) จะได้

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h) a J_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)] \tilde{E} \tag{4-14}$$

ต่อไปจะใช้สมการ (4-14) หาสนามไฟฟ้าในบริเวณต่างๆ



ภาพที่ 4-2 : แผนภาพแสดงสภาพนำไฟฟ้าบนดิน

สนามไฟฟ้าในอากาศ

สนามไฟฟ้าในอากาศแทนด้วยสัญลักษณ์ $\tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega)$ ซึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ

$$\tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) = \tilde{E}^p(\lambda, z, \omega) + \tilde{E}^s(\lambda, z, \omega) \quad (4-15)$$

ในอากาศค่าของ $\sigma_{air}(z) \cong 0$, $\mu_{air} \approx \mu_0$ และ $\varepsilon_{air} \approx \varepsilon_0$

เมื่อ $\tilde{E}^p(\lambda, z, \omega)$ คือ สนามไฟฟ้าปฐมภูมิ

$\tilde{E}^s(\lambda, z, \omega)$ คือ สนามไฟฟ้าทุติยภูมิ

μ_0 คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ

ε_0 คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ

ดังนั้นจากสมการ (4-14)

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)]\tilde{E}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 a I(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a) &= -\frac{\partial^2 \tilde{E}^p}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu_0\sigma_{air}(z) + \omega^2\mu_0\varepsilon_0)]\tilde{E}^p \\ &= -\frac{\partial^2 \tilde{E}^p}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (\omega^2\mu_0\varepsilon_0)]\tilde{E}^p \end{aligned}$$

ให้ $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ และ $m_0^2 = \lambda^2 - k_0^2$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$i\omega\mu_0 a I(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}^p}{\partial z^2} + m_0^2 \tilde{E}^p \quad (4-16)$$

จะเห็นว่า สมการ (4-16) อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ordinary differential equation)

และสามารถเขียนสมการ (4-16)ใหม่ได้เป็น

$$i\omega\mu_0 a I(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a) = -\frac{d^2 \tilde{E}^p}{dz^2} + m_0^2 \tilde{E}^p \quad (4-17)$$

ต่อไปจะหาผลเฉลยของสมการ (4-17) ซึ่งอยู่ในรูปที่ไม่เอกพันธ์

ให้ผลเฉลย คือ $\tilde{E}^p(\lambda, z, \omega) = \tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega) + \tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega)$ (4-18)

เมื่อ $\tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega)$ คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์

และ $\tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega)$ คือ ผลเฉลยเฉพาะ

และจะหาผลเฉลย $\tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega)$ ได้จากสมการ $\frac{d^2 \tilde{E}_h^p}{dz^2} - m_0^2 \tilde{E}_h^p = 0$

ผลเฉลยที่ได้คือ $\tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega) = A_1 e^{-m_0 z} + A_2 e^{m_0 z}$

เมื่อ A_1, A_2 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบสำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะจะหาโดยใช้วิธีการกระจายพารามิเตอร์ (method of variation of parameters)

$$\tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega) = \tilde{E}_1 \int \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) \delta(z+h) J_1(\lambda a) \tilde{E}_2}{W\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2\}} dz - \tilde{E}_2 \int \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) \delta(z+h) J_1(\lambda a) \tilde{E}_1}{W\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2\}} dz$$

เมื่อ \tilde{E}_1 และ \tilde{E}_2 คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์

และ $W\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2\}$ คือ รอนสเกียน

กำหนดให้ $g = -i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a)$, $\tilde{E}_1 = e^{-m_0 z}$, $\tilde{E}_2 = e^{m_0 z}$

$$\begin{aligned} \text{และ } W\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2\} &= \tilde{E}_1 \tilde{E}_2' - \tilde{E}_2 \tilde{E}_1' \\ &= e^{-m_0 z} (m_0 e^{m_0 z}) - e^{m_0 z} (-m_0 e^{-m_0 z}) \\ &= m_0 + m_0 = 2m_0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$\tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega) = -e^{-m_0 z} \int \frac{g \delta(z+h) e^{m_0 z}}{2m_0} dz + e^{m_0 z} \int \frac{g \delta(z+h) e^{-m_0 z}}{2m_0} dz$$

ค่าลิมิตของการหาปริพันธ์เลือกกำหนดโดยใช้เงื่อนไขของบริเวณอากาศค่าสนามไฟฟ้าจาก $z = -\infty$ ถึง $z = 0$ ทำให้เขียนสมการข้างบนได้เป็น

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega) &= -e^{-m_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g \delta(x+h) e^{m_0 x}}{2m_0} dx + e^{m_0 z} \int_0^{\infty} \frac{g \delta(x+h) e^{-m_0 x}}{2m_0} dx \\ &= \frac{g}{2m_0} \left[-e^{-m_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{m_0 x} \delta(x+h) dx - e^{m_0 z} \int_z^0 e^{-m_0 x} \delta(x+h) dx \right] \\ &= -\frac{g}{2m_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m_0(z-x)} \delta(x+h) dx + \int_z^0 e^{m_0(z-x)} \delta(x+h) dx \right] \\ &= -\frac{g}{2m_0} \int_{-\infty}^0 G(z, x) dx \end{aligned}$$

เมื่อ $G(z, x)$ คือฟังก์ชันของกรีน (Green's function) ที่นิยามโดย

$$G(z, x) = e^{-m_0 |z-x|} \delta(x+h) = \begin{cases} e^{-m_0(z-x)} \delta(x+h); & z \geq x \\ e^{m_0(z-x)} \delta(x+h); & z < x \end{cases}$$

และเพราะว่า $\int_{-\infty}^0 G(z, x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{-m_0 |z-x|} \delta(x+h) dx = e^{-m_0 |z+h|}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega) &= -\frac{g}{2m_0} \int_{-\infty}^0 G(z, x) dx \\ &= -\frac{g}{2m_0} e^{-m_0|z+h|}, z \leq 0 \end{aligned}$$

แทนค่า $\tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega)$ และ $\tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega)$ ในสมการ (4-18) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{E}^p(\lambda, z, \omega) &= \tilde{E}_h^p(\lambda, z, \omega) + \tilde{E}_p^p(\lambda, z, \omega) \\ &= A_1 e^{-m_0 z} + A_2 e^{m_0 z} - \frac{g}{2m_0} e^{-m_0|z+h|} \\ &= A_1 e^{-m_0 z} + A_2 e^{m_0 z} - \frac{[-i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a)]}{2m_0} e^{-m_0|z+h|} \end{aligned}$$

เมื่อ $z \rightarrow -\infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{E}^p \rightarrow 0$ ดังนั้นจะได้ $A_1 = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad \tilde{E}^p(\lambda, z, \omega) = A_2 e^{m_0 z} + \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} \quad (4-19)$$

สำหรับสนามไฟฟ้าทุติยภูมิ (\tilde{E}^s) เนื่องจาก $I(\omega) = 0$ ดังนั้นจากสมการ (4-14)

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\epsilon)]\tilde{E}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 0 &= -\frac{\partial^2 \tilde{E}^s}{\partial z^2} + [\lambda^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_0]\tilde{E}^s \\ 0 &= \frac{\partial^2 \tilde{E}^s}{\partial z^2} - m_0^2 \tilde{E}^s \end{aligned}$$

จะเห็นว่า สมการข้างต้นอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญเอกพันธ์และเขียนได้

$$\frac{d^2 \tilde{E}^s}{dz^2} - m_0^2 \tilde{E}^s = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\tilde{E}^s(\lambda, z, \omega) = A_3 e^{-m_0 z} + A_4 e^{m_0 z}$$

เมื่อ A_3, A_4 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบ

ซึ่ง $z \rightarrow -\infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{E}^s \rightarrow 0$ ดังนั้นจะได้ $A_3 = 0$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าทุติยภูมิ คือ

$$\tilde{E}^s(\lambda, z, \omega) = A_4 e^{m_0 z} \quad (4-20)$$

แทนสมการ (4-19) และ (4-20) ในสมการ (4-15) จะได้สนามไฟฟ้าในอากาศ คือ

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) &= A_3 e^{m_0 z} + \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A_4 e^{m_0 z} \\ \tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) &= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A e^{m_0 z}, z \leq 0\end{aligned}\quad (4-21)$$

เมื่อ $A = A_3 + A_4$

สนามไฟฟ้าในพื้นดิน

สนามไฟฟ้าในพื้นดินแทนด้วยสัญลักษณ์ $\tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega)$ หรือ $E_{gro}(r, z, \omega)$

ให้ $\sigma_{gro}(z) = \sigma_0$ คือ สภาพนำไฟฟ้าในพื้นดินซึ่งสมมติให้มีค่าคงตัว

ϵ_g คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของพื้นดิน

μ_g คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของพื้นดิน

$$k_g^2 = i\omega\mu_g\sigma_0 + \omega^2\mu_g\epsilon_g \text{ และ } m_g^2 = \lambda^2 - k_g^2$$

จากสมการ (4-6)

$$i\omega\mu J_s = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\epsilon)E$$

สำหรับในพื้นดิน ค่า J_s คือตัวส่งกระแสสัญญาณซึ่งมีค่าเป็น 0 จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{gro}}{\partial r} - \frac{E_{gro}}{r^2} + (i\omega\mu_g\sigma_0(z) + \omega^2\mu_g\epsilon_g)E_{gro} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{gro}}{\partial r} - \frac{E_{gro}}{r^2} + k_g^2 E_{gro} = 0$$

ใช้การแปลงฮังเคิล และ จากสมการ (4-14) จะได้

$$\begin{aligned}i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) &= -\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\epsilon)]\tilde{E} \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}_{gro}}{\partial z^2} - m_g^2 \tilde{E}_{gro} &= 0\end{aligned}$$

จะเห็นว่า สมการข้างต้นอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์และสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2 \tilde{E}_{gro}}{dz^2} - m_g^2 \tilde{E}_{gro} = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega) = A_5 e^{-m_g z} + A_6 e^{m_g z}$$

เมื่อ A_5, A_6 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบ

ซึ่ง $z \rightarrow \infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{E}_{gro} \rightarrow 0$ ดังนั้นจะได้ $A_6 = 0$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าในพื้นดิน คือ

$$\tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega) = A_5 e^{-m_g z}, z \geq 0 \quad (4-22)$$

เงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้า

จากสมการ (4-21) และ (4-22) จะมีตัวคงค่า A และ A_5 ที่ไม่ทราบค่าติดอยู่ เราจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าในอากาศและในพื้นดิน โดยพิจารณาสนามไฟฟ้าบริเวณรอยต่อระหว่างอากาศกับพื้นดิน เพื่อหาตัวคงค่า นั้น โดยการประมาณให้ $\mu_g = \mu_0$, $\varepsilon_g = \varepsilon_0$,

$$\tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = \tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega)$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega)$$

หาอนุพันธ์สมการ (4-21) และ (4-22) เทียบกับ z จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A e^{m_0 z} \right) \\ &= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a)}{2m_0} \frac{\partial}{\partial z} (e^{-m_0|z+h|}) + A \frac{\partial}{\partial z} (e^{m_0 z}) \\ &= \frac{-i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|} m_0}{2m_0} + m_0 A e^{m_0 z} \\ &= -\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2} + m_0 A e^{m_0 z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega) &= \frac{\partial}{\partial z} A_5 e^{-m_g z} \\ &= A_5 \frac{\partial}{\partial z} e^{-m_g z} \\ &= -m_g A_5 e^{-m_g z} \end{aligned}$$

และที่บริเวณรอยต่อ ($z = 0$) จะได้

$$\tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega) = A_5$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega) = -m_g A_5$$

$$\text{และ } \tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0} + A$$

$$= \gamma + A \quad \text{เมื่อ } \gamma = \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = -\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2} \frac{m_0}{m_0} + m_0 A$$

$$= -m_0 \gamma + m_0 A$$

$$\text{ดังนั้นจาก } \tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = \tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega)$$

$$\text{จะได้ } \gamma + A = A_5$$

$$\text{นั่นคือ } A = A_5 - \gamma \quad (4-23)$$

$$\text{และจาก } \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{air}(\lambda, 0, \omega) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{gro}(\lambda, 0, \omega)$$

$$\text{จะได้ } -m_0 \gamma + m_0 A = -m_g A_5$$

$$\text{นั่นคือ } A = -\frac{m_g}{m_0} A_5 + \gamma \quad (4-24)$$

จากสมการ (4-23) และ (4-24) จะได้ว่า

$$A_5 - \gamma = -\frac{m_g}{m_0} A_5 + \gamma$$

$$\frac{m_0 A_5 + m_g A_5}{m_0} = 2\gamma$$

$$\text{นั่นคือ } A_5 = \frac{2m_0 \gamma}{m_0 + m_g}$$

แทนค่า A_5 ไปที่สมการ (4-23) จะได้

$$A = \frac{2m_0 \gamma}{m_0 + m_g} - \gamma = \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1 \right) \gamma$$

แทนค่า A และ A_5 ในสมการ (4-21) และ (4-22) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) &= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A e^{m_0 z} \\ &= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1 \right) \gamma e^{m_0 z}, z \leq 0\end{aligned}\quad (4-25)$$

และ

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega) &= A_5 e^{-m_g z} \\ &= \frac{2m_0 \gamma}{m_0 + m_g} e^{-m_g z}, z \geq 0\end{aligned}\quad (4-26)$$

จะหา $E_{air}(r, z, \omega)$ และ $E_{gro}(r, z, \omega)$ ได้โดยใช้การแปลงซิงเกิลพิกพัน ในสมการ (4-25) และ (4-26) ดังนี้

$$\begin{aligned}E_{air}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty \lambda \tilde{E}_{air}(\lambda, z, \omega) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1 \right) \gamma e^{m_0 z} \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1 \right) \gamma e^{m_0 z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1 \right) \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0} e^{m_0 z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega)}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} e^{-m_0|z+h|} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} \right) \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0} e^{m_0 z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ &\quad - \int_0^\infty \lambda \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0} e^{m_0 z} J_1(\lambda r) d\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega)}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} e^{-m_0|z+h|} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0 + m_g} \right) i\omega\mu_0 a I(\omega) e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad - \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega)}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega)}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} \left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + i\omega\mu_0 a I(\omega) \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0 + m_g} \right) e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4-27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad E_{gro}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty \lambda \tilde{E}_{gro}(\lambda, z, \omega) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda \left(\frac{2m_0 e^{-m_g z}}{m_0 + m_g} \gamma \right) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda \left(\frac{2m_0 e^{-m_g z}}{m_0 + m_g} \cdot \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|h|}}{2m_0} \right) J_1(\lambda r) d\lambda \\
E_{gro}(r, z, \omega) &= i\omega\mu_0 a I(\omega) \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0 + m_g} \right) e^{-(m_g z + m_0|h|)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4-28)
\end{aligned}$$

จากสมการ (4-27) และ (4-28) ถ้าแทน $z = 0$ จะได้สนามไฟฟ้าบริเวณรอยต่อ คือ

$$E_{sur}(r, 0, \omega) = i\omega\mu_0 a I(\omega) \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0 + m_g} \right) e^{-m_0|h|} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4-29)$$

สนามไฟฟ้าในชั่วแปรเวลา

จากสมการ (4-27) และ (4-28) ค่าสนามไฟฟ้าประกอบด้วยตัวแปรอิสระ ω เราต้องการทราบว่าสนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเวลาเปลี่ยนไป และจะทำการแปลงฟูเรียร์เพื่อทำการหาสนามไฟฟ้าที่ขึ้นกับตัวแปรเวลาดังกล่าว โดย

$$\begin{aligned}
E_{air}(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{air}(r, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega)}{2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{m_0} \left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-h)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + i\omega\mu_0 a I(\omega) \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m_0 + m_g} \right) e^{m_0(z-h)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right] e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{\mu_0 a}{2} \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega I(\omega)}{m_0} \left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-h)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + \mu_0 a \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega I(\omega)}{m_0 + m_g} \left(e^{m_0(z-h)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4-30)
\end{aligned}$$

ต่อไปจะลดทอมในสมการ (4-30) โดยพิจารณาต่อไปนี้

เมื่อ $\mu_0 \varepsilon_0$ คือ จำนวนบวขนาดเล็ก แล้ว $m_0^2 = \lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \approx \lambda^2$ นั่นคือ $m_0 \approx \lambda$

และเมื่อเราปิดสวิตซ์กระแสไฟฟ้าและให้ $t = 0$ จะหาค่า $I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(1-u(t))e^{-i\omega t} dt$

เมื่อ I_0 คือ แอมพลิจูดของกระแสไฟฟ้า

$u(t)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันไดของเฮบวิไซด์ (step-function of Heaviside)

และการแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชัน $u(t)$ จะได้ $U(\omega) = \frac{1}{i\omega}$

$\omega = \omega_0 + ib$ เมื่อ b คือส่วนจินตภาพ

เนื่องจาก ω คือจำนวนจริง จะได้ $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_0(1-u(t))e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{I_0}{i\omega}
\end{aligned}$$

แสดงว่า $i\omega I(\omega) = I_0$

เนื่องจาก $e^{-i\omega t}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 0$ (Wunsch, 1994)

ดังนั้นจากสมการ (4-30) จะได้

$$\begin{aligned}
E_{air}(r, z, t) &= \frac{\mu_0 a}{2} \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega I(\omega)}{m_0} \left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-h)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + \mu_0 a \int_0^{\infty} \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega I(\omega)}{m_0 + m_g} \left(e^{m_0(z-h)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 a I_0}{2} \int_0^\infty \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda} \left(e^{-\lambda|z+h|} - e^{\lambda(z-|h|)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + \mu_0 a \int_0^\infty \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I_0}{\lambda + m_g} \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \frac{\mu_0 a I_0}{2} \int_0^\infty \left(e^{-\lambda|z+h|} - e^{\lambda(z-|h|)} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} d\omega \right] J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + \mu_0 a I_0 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g} e^{-i\omega t} d\omega \right] \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \mu_0 a I_0 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g} e^{-i\omega t} d\omega \right] \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda
\end{aligned}$$

ให้ $F_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g} e^{-i\omega t} d\omega$

ดังนั้น $E_{air}(r, z, t) = \mu_0 a I_0 \int_0^\infty \lambda F_3 \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda$ (4-31)

ต่อไปจะใช้การประยุกต์การหาปริพันธ์ตามเส้นทาง(contour integration)ของ บอมวิส (Bromwich contour) และใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง(residue theorem) ใน ระนาบ φ เพื่อหา F_3

ให้ $\varphi = \lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_0$ และ $m_g = \sqrt{\varphi}$

จะได้ $\omega = \frac{\lambda^2 - \varphi}{i\mu_0\sigma_0}$ และ $d\omega = -\frac{1}{i\mu_0\sigma_0} d\varphi$

พิจารณา F_3 ในระนาบ φ จะได้

$$\begin{aligned}
F_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g} e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda^2+i\infty}^{\lambda^2-i\infty} \left(\frac{1}{\lambda + \sqrt{\varphi}} \right) e^{-i \left(\frac{\lambda^2 - \varphi}{i\mu_0\sigma_0} \right) t} \left(-\frac{1}{i\mu_0\sigma_0} d\varphi \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0\sigma_0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda^2-i\infty}^{\lambda^2+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2 - \varphi) \frac{t}{\mu_0\sigma_0}}}{\lambda + \sqrt{\varphi}} d\varphi \right)
\end{aligned}$$

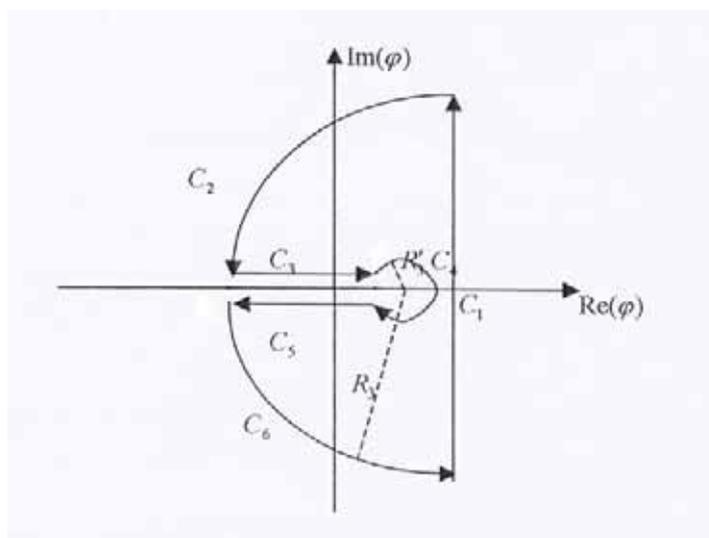
ให้ $\tau_3 = \frac{t}{\mu_0\sigma_0}$ และ $f_3(\varphi) = \frac{e^{-(\lambda^2 - \varphi)\tau_3}}{\lambda + \sqrt{\varphi}}$ ดังนั้นจะได้

$$F_3 = \frac{1}{\mu_0\sigma_0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda^2-i\infty}^{\lambda^2+i\infty} f_3(\varphi) d\varphi \right)$$

ในกรณีที่ $\lambda + \sqrt{\varphi} = 0$ แล้ว $f_3(\varphi)$ จะไม่นิยาม

ดังนั้นจะพิจารณา $\varphi = i^4 \lambda^2$ ซึ่ง $\lambda + \sqrt{\varphi} = \lambda + \sqrt{i^4 \lambda^2} = \lambda + i^2 \lambda = 0$

นั่นคือเส้นทางของ $f_3(\varphi)$ ไม่รวมที่จุด $\varphi = i^4 \lambda^2$



ภาพที่4-3 : เส้นทางหาปริพันธ์

พิจารณา $\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda^2 - i\infty}^{\lambda^2 + i\infty} f_3(\varphi) d\varphi$ จะหา C_1 ได้จากการหาปริพันธ์ C_2 ถึง C_6

$$\begin{array}{llll}
 \text{เส้นทาง } C_2 & , \varphi = R_3 e^{i\theta} & , d\varphi = iR_3 e^{i\theta} d\theta & , \sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}} \\
 C_3 & , \varphi = -r & , d\varphi = -dr & , \sqrt{\varphi} = i\sqrt{r} \quad \text{เมื่อ } \theta = \pi \\
 C_4 & , \varphi = R_3' e^{i\theta} & , d\varphi = iR_3' e^{i\theta} d\theta & , \sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3'} e^{\frac{i\theta}{2}} \\
 C_5 & , \varphi = -r & , d\varphi = -dr & , \sqrt{\varphi} = -i\sqrt{r} \quad \text{เมื่อ } \theta = -\pi \\
 C_6 & , \varphi = R_3 e^{i\theta} & , d\varphi = iR_3 e^{i\theta} d\theta & , \sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}}
 \end{array}$$

ดังนั้นผลรวมของค่าการหาปริพันธ์ตามเส้นทางทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ $(2\pi) \text{Res}(f_3(\varphi), i^4 \lambda^2)$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยที่} \quad \text{Res}(f_3(\varphi), i^4 \lambda^2) &= \lim_{\varphi \rightarrow i^4 \lambda^2} (\varphi - i^4 \lambda^2) \frac{e^{-(\lambda^2 - \varphi)\tau_3}}{\lambda + \sqrt{\varphi}} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow i^4 \lambda^2} \left(-(\lambda - \sqrt{\varphi}) e^{-(\lambda^2 - \varphi)\tau_3} \right) \\
 &= -2\lambda e^{-\lambda_j \tau_3}
 \end{aligned}$$

เมื่อ $\lambda_j = \lambda^2 - \eta_j^2$ และ $\eta_j^2 \rightarrow \lambda^2$ และให้ $\lambda_j = j$ เมื่อ j เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ $\text{Res}(f_3(\varphi), i^4 \lambda^2) = -2\lambda e^{-j\tau_3}$

แสดงว่า

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_1} \frac{e^{-(\lambda^2 - \varphi)\tau_3}}{\lambda + \sqrt{\varphi}} d\varphi + \int_{C_2} \frac{e^{-(\lambda^2 - R_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3 e^{\frac{i\theta}{2}}}} (iR_3 e^{i\theta} d\theta) \\
 & + \int_{C_3} \frac{e^{-(\lambda^2 + r)\tau_3}}{\lambda + i\sqrt{r}} (-dr) + \int_{C_4} \frac{e^{-(\lambda^2 - R_3' e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3' e^{\frac{i\theta}{2}}}} (iR_3' e^{i\theta} d\theta) \\
 & + \int_{C_5} \frac{e^{-(\lambda^2 + r)\tau_3}}{\lambda - i\sqrt{r}} (-dr) + \int_{C_6} \frac{e^{-(\lambda^2 - R_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3 e^{\frac{i\theta}{2}}}} (iR_3 e^{i\theta} d\theta) \\
 & = (2\pi i)(-2\lambda e^{-j\tau_3}) \tag{4-32}
 \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาปริพันธ์ในแต่ละเทอมของสมการ (4-32)

โดยพิจารณา I_{23} คือ ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_2

เมื่อ $\varphi = R_3 e^{i\theta} = R_3(\cos\theta + i\sin\theta)$, $d\varphi = iR_3 e^{i\theta} d\theta$, $\sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 I_{23} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-(\lambda^2 - R_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} (iR_3 e^{i\theta} d\theta) \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3 \cos\theta})(e^{i\tau_3 R_3 \sin\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} iR_3 e^{i\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $|i| = 1$, $|e^{i\tau_3 R_3 \sin\theta}| = 1$ และ $e^{\tau_3 R_3 \cos\theta}$ เป็นจำนวนบวก

และ $\cos\theta \leq 1 - \frac{2}{\pi}\theta$ สำหรับ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
 |I_{23}| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3 \cos\theta})(e^{i\tau_3 R_3 \sin\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} \right| |iR_3 e^{i\theta}| d\theta \\
 &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3 \cos\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3}} R_3 d\theta \\
 &= \frac{R_3 e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau_3 R_3 \cos\theta} d\theta \\
 &\leq \frac{R_3 e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau_3 R_3 (1 - \frac{2}{\pi}\theta)} d\theta
 \end{aligned}$$

$$|I_{23}| \leq \frac{R_3 e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3}} \left(\frac{\pi}{2\tau_3 R_3} (1 - e^{-\tau_3 R_3}) \right)$$

ถ้ากำหนดให้ $R_3 \rightarrow \infty$ แล้ว $I_{23} \rightarrow 0$

ดังนั้น ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_2 มีค่าเท่ากับ 0

ในทำนองเดียวกัน ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_6 มีค่าเท่ากับ 0

และให้ I_{43} คือ ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_4

$$\text{เมื่อ } \varphi = R'_3 e^{i\theta} = R'_3 (\cos \theta + i \sin \theta), d\varphi = iR'_3 e^{i\theta} d\theta, \sqrt{\varphi} = \sqrt{R'_3} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad I_{43} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-(\lambda^2 - R'_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R'_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} (iR'_3 e^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R'_3 \cos \theta})(e^{i\tau_3 R'_3 \sin \theta})}{\lambda + \sqrt{R'_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} iR'_3 e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

เนื่องจาก $|i|=1$, $|e^{i\tau_3 R'_3 \sin \theta}|=1$ และ $e^{\tau_3 R'_3 \cos \theta}$ เป็นจำนวนบวก

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad |I_{43}| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R'_3 \cos \theta})(e^{i\tau_3 R'_3 \sin \theta})}{\lambda + \sqrt{R'_3} e^{\frac{i\theta}{2}}} \right| |iR'_3 e^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R'_3 \cos \theta})}{\lambda + \sqrt{R'_3}} R'_3 d\theta \\ &= \frac{R'_3 e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R'_3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\tau_3 R'_3 \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้ $R'_3 \rightarrow 0$ แล้ว $I_{43} \rightarrow 0$

ดังนั้น ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_4 มีค่าเท่ากับ 0

จากสมการ (4-32) กำหนดให้ ลิมิต $R'_3 \rightarrow 0$ และ $R_3 \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi + \int_{C_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3 e^2}} (iR_3 e^{i\theta} d\theta) + \int_{C_3}^{R'_3} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}} (-dr) \\
& + \int_{C_4}^{\pi} \frac{e^{-(\lambda^2-R'_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R'_3 e^2}} (iR'_3 e^{i\theta} d\theta) + \int_{C_5}^{R_3} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}} (-dr) + \int_{C_6}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3 e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3 e^2}} (iR_3 e^{i\theta} d\theta) \\
& = \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi - \int_{C_3}^0 \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}} dr - \int_{C_5}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}} dr \\
& = \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi + \int_{C_3}^0 \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}} dr - \int_{C_5}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}} dr \\
& = \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi + \int_{C_3}^0 \left(\frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}} \right) - \left(\frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}} \right) dr \\
& = \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} f_3(\varphi) d\varphi = \int_{C_1}^{\eta+i\infty} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}} d\varphi = (2\pi i)(-2\lambda e^{-j\tau_3})$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
F_3 &= \frac{1}{\mu_0 \sigma_0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda^2-i\infty}^{\lambda^2+i\infty} f_3(\varphi) d\varphi \right) \\
&= \frac{-2\lambda e^{-j\tau_3}}{\mu_0 \sigma_0}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก j มีค่าน้อยมากเราจะให้ $j \cong \lambda$ และให้ $s_3 = |h| - z$

ดังนั้นจากสมการ (4-31) แทนค่า F_3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E_{air}(r, z, t) &= \mu_0 a I_0 \int_0^{\infty} \lambda F_3 \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \mu_0 a I_0 \int_0^{\infty} \lambda \left(\frac{-2\lambda e^{-\lambda\tau_3}}{\mu_0 \sigma_0} \right) \left(e^{\lambda(z-|h|)} \right) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \frac{-2a I_0}{\sigma_0} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda(z-|h|-\tau_3)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\
&= \frac{-2a I_0}{\sigma_0} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(s_3+\tau_3)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \tag{4-33}
\end{aligned}$$

เนื่องจากรัศมีของวงแหวนของเครื่องส่งสนามไฟฟ้ามีขนาดเล็ก จะได้ $a \rightarrow 0$

ดังนั้นจะได้ $J_1(\lambda a) \cong \frac{\lambda a}{2}$

และเมื่อ $r \rightarrow 0$ แสดงว่าระยะทางระหว่างเครื่องส่งสัญญาณและเครื่องรับสัญญาณมีขนาดเล็ก

$$\text{ดังนั้นจะได้} \quad J_1(ra) \cong \frac{\lambda r}{2}$$

ดังนั้นสมการ (4-33) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} E_{air}(r, z, t) &= \frac{-2aI_0}{\sigma_0} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(\zeta_3 + \tau_3)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \frac{-2aI_0}{\sigma_0} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(\zeta_3 + \tau_3)} \left(\frac{\lambda a}{2}\right) \left(\frac{\lambda r}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{-ra^2 I_0}{2\sigma_0} \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda(\zeta_3 + \tau_3)} d\lambda \end{aligned} \quad (4-34)$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนในสมการ (4-34) จะได้

$$E_{air}(r, z, t) = \frac{-6ra^2 I_0}{\sigma_0(\zeta_3 + \tau_3)} \quad (4-35)$$

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา

การค้นคว้าอิสระนี้มุ่งศึกษาสาระสำคัญของอนุกรมฟูเรียร์ดังที่กล่าวในบทที่ 2 ซึ่งเป็นการหารูปแบบทางคณิตศาสตร์ในรูปของอนุกรมเพื่อแทนฟังก์ชันบนช่วงใดช่วงหนึ่งโดยที่ฟังก์ชันนั้นอาจหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่บางจุดในช่วงนั้นก็ตาม และยังศึกษาความเป็นฟังก์ชันคู่, ฟังก์ชันคี่, อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ พร้อมพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์

ส่วนในบทที่ 3 นั้นเราศึกษารูปแบบของ การแปลงฟูเรียร์ ทฤษฎีการลู่เข้า และคุณสมบัติบางประการของการแปลงฟูเรียร์ รวมทั้งการแปลงฟูเรียร์ไซน์และการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

ในการศึกษาสองบทที่กล่าวไปนั้นเพื่อเป็นพื้นฐานในการนำการแปลงฟูเรียร์ไปประยุกต์ใช้หาค่าสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองจากโครงสร้างพื้นโลกซึ่งขึ้นกับโดเมนเวลา

บรรณานุกรม

- [1] สมชาย จิตะพันธ์กุล. การแปลงฟูรีเยร์และการประยุกต์. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.
- [2] Albert Boggess and Francis J. Narcowich, “A First Course in Wavelets with Fourier Analysis” , Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [3] Chumchob, N. “Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular cylinder body embedded in a conducting half-space” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2000.
- [4] Ketchanwit, P. “Time domain electromagnetic response in heterogeneous media.” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2001.
- [5] Khongkha,P. “A mathematical model of electromagnetic response on a multilayered earth with layers having exponentially varying conductivities.”Department of Mathematics, Faculty of science, Silpakorn University, 2005.
- [6] Lee, T. J. and Ingetik, R., 1994, Transient Electromagnetic Response of a half-space with Exponential Conductivity Profile and Its Applications to Salinity mapping, *Exploration Geophysics* **25**, 39-51.
- [7] Murray R. Spiegel , “Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems” , Schaum’s outline series , McGraw-Hill Book Company.
- [8] Pinsky, Mark A., 1991, Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications, McGraw-Hill, Inc., Second Edition.
- [9] Sripunya, W. “Magnetic field of direct current in homogeneous media.” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2005.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y'^{n-1} + \dots + b_n(x)y = R(x)$$

เมื่อ $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x), R(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น สมการข้างต้นจะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีอันดับ n

บทนิยาม : สมการเบสเซลที่มีอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบดังนี้

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{ก-1})$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการ (ก-1) คือ

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \quad (\text{ก-2})$$

เมื่อ $J_n(x)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 ของอันดับ n

$Y_n(x)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 ของอันดับ n หรือฟังก์ชันนอยมันน์

และ $\Gamma(x)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา

โดยที่
$$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k! \Gamma(k+n+1)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy$$

$$Y_n(x) = \cot(n\pi)J_n(x) - \operatorname{cosec}(n\pi)J_{-n}(x) \quad \text{เมื่อ } n \text{ ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก}$$

$$Y_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\phi x)}{\sqrt{1+\phi^2}} d\phi$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_0^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi} \sum_0^{\pi} \frac{(-1)^k}{(n-k)!k!} \left((\Omega_k + \Omega_{k+n}) \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \right) \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

$$\Omega_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \quad ; \Omega_0 = 0$$

$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n) \right)$ มีชื่อว่า ค่าคงตัวฮอยเลอร์หรือค่าคงตัวของมาเซ

โรนี่ มีค่าประมาณ 0.5772157

นอกจากนี้ยังมีรูปแบบที่ถูกดัดแปลงเพื่อความเหมาะสมของฟังก์ชันเบสเซลชนิดต่าง
ดังต่อไปนี้

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx) = j^n J_n(-jx)$$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$I_{-n}(x) = I_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\frac{d(x^n J_n(x))}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$$

ภาคผนวก ข

การแปลงฮังเกิล

บทนิยาม : ให้ $I = [0, \infty)$ และ $f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ เป็นฟังก์ชันแล้ว การแปลงฮังเกิล (Hankel Transforms) ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} xf(x)J_v(\lambda x)dx \quad (\text{ข-1})$$

และ $f(x) = \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda)J_v(\lambda x)d\lambda \quad (\text{ข-2})$

โดยที่ $J_v(\lambda)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ v

และ λ คือ ตัวแปรฮังเกิล

โดยทั่วไปเราเรียกสมการ (ข-1) ว่าการแปลงฮังเกิล

และเรียกสมการ (ข-2) ว่าการแปลงฮังเกิลผกผัน

ตัวอย่าง : พิจารณากฎของแอมแปร์

$$H(r, z) = \frac{I}{2\pi r}$$

โดยบทนิยามของการแปลงฮังเกิลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\lambda, z) &= \int_0^{\infty} rH(r, z)J_1(\lambda r)dr \\ &= \int_0^{\infty} r\left(\frac{I}{2\pi r}\right)J_1(\lambda r)dr \\ &= \frac{I}{2\pi\lambda} \end{aligned}$$

เมื่อ $J_1(_)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1

ในทางกลับกัน โดยบทนิยามของการแปลงฮังเกิลผกผันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} H(r, z) &= \int_0^{\infty} \lambda \tilde{H}(\lambda, z)J_1(\lambda r)dr \\ &= \int_0^{\infty} \lambda\left(\frac{I}{2\pi\lambda}\right)J_1(\lambda r)dr \\ &= \frac{I}{2\pi r} \end{aligned}$$

ภาคผนวก ค

อนุกรมฟูรีเยร์เชิงซ้อน

เราสามารถหาอนุกรมฟูรีเยร์เชิงซ้อนได้โดยการใช้สูตรของเดอมัวฟวร์ (De Moivre's formula) และจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนในสูตรของอนุกรมฟูรีเยร์ซึ่งดูเข้า

เมื่อ สูตรของเดอมัวฟวร์ คือ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

และ $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$

จากอนุกรมฟูรีเยร์บนช่วง $[-L, L]$ คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) - iB_n(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L})] \\ &= A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n - iB_n)e^{in\pi x/L} + (A_n + iB_n)e^{-in\pi x/L}] \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } \alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_n - iB_n), & n = 1, 2, \dots \\ A_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(A_{-n} + iB_{-n}), & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/L} \quad (\text{ค-1})$$

พิจารณากรณี 1 : $n = 1, 2, \dots$

จาก $\alpha_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n)$ และโดยนิยาม A_n, B_n ในสมการ (2-6) และ (2-7)

จะได้ว่า $\alpha_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \end{aligned}$$

กรณี 2 : $n = -1, -2, \dots$

จาก $\alpha_n = \frac{1}{2}(A_{-n} - iB_{-n})$ และโดยนิยาม A_n, B_n ในสมการ (2-6) และ (2-7)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \alpha_n &= \frac{1}{2}(A_{-n} - iB_{-n}) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \end{aligned}$$

และกรณี 3 : $n = 0$ แล้ว $\alpha_n = A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณี

$$\text{จะได้ว่า } \alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{ค-2})$$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง
ที่อยู่	24 ถนนกมลโกวิท ตำบลบางเขม อำเภอเมืองนครนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000
ที่ทำงาน บางเขม	ห้างหุ้นส่วนจำกัด กิจอรุณชัยรัตน์ 24 ถนนกมลโกวิท ตำบล อำเภอเมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2546	สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม
พ.ศ. 2548	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์และ เทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม