

การถดถอย (Regression Model) ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะนำวิธีนี้มาปรับใช้กับตัวแบบถดถอยบนตัวเอง (Autoregressive Model) ดังนี้

1.3.1 ถ้ากระบวนการถดถอยบนตัวเอง ใช้สัญลักษณ์เป็น AR(p) และตัวแบบที่ใช้พยากรณ์เป็นดังในสมการ $x_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p}$ อนุกรมเวลา (x_t) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้คือ

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}'_{t-i} \boldsymbol{\phi}_i + \varepsilon_t$$

และได้สมการถดถอยเป็น

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}'_{t-i} \hat{\boldsymbol{\phi}}_i$$

ได้ค่าเศษส่วนเหลือ (residual) เป็น

$$r_t = x_t - \hat{x}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_{t-1} \hat{\boldsymbol{\phi}}_i$$

ค่าสังเกตที่อยู่ใกล้เวลาปัจจุบันควรมีความสำคัญต่อการประมาณค่าพารามิเตอร์มากกว่าค่าที่อยู่ไกลออกไป เพราะบ่งบอกถึงพฤติกรรมในปัจจุบันของกระบวนการได้ดีกว่า

จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการหาค่าต่ำสุดของผลรวมค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนลด ดังนี้

$$l(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{t=p+1}^T W_t^2 \varepsilon_t^2 \quad (37)$$

เมื่อ W_t คือค่ารากที่สองของค่าถ่วงน้ำหนักของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง ณ เวลา t สมการที่ (37) นี้เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยสุดที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนลด (Discounted Least Squares) และอนุกรมเวลา (x_t) เขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{X}(T) = \begin{bmatrix} 1 & x_T & x_{T-1} & \cdots & x_{T-p+1} \\ 1 & x_{T-1} & x_{T-2} & \cdots & x_{T-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

ตัวแบบจะเขียนได้เป็น

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(T)\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

การถ่วงน้ำหนักผลรวมค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\phi}) &= (\mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon})' (\mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{W}' \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{W}^2 \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= [\mathbf{x} - \mathbf{X}(T)\boldsymbol{\phi}]' \mathbf{W}^2 [\mathbf{x} - \mathbf{X}(T)\boldsymbol{\phi}] \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{W}$ คือ เมทริกซ์ทแยงมุมของค่ารากที่สองของค่าถ่วงน้ำหนัก

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{p+1p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{p+2p+2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{TT} \end{bmatrix} \quad (39)$$

เช่นเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยสุดจะให้ $\frac{\partial l(\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} = 0$ ซึ่งทำให้ได้สมการปกติของวิธีนี้ดังนี้

$$\mathbf{X}'(T) \mathbf{W}^2 \mathbf{X}(T) \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{X}'(T) \mathbf{W}^2 \mathbf{x}$$

$$\text{ถ้าให้} \quad \mathbf{G}(T) = \mathbf{X}'(T) \mathbf{W}^2 \mathbf{X}(T) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{และให้} \quad \mathbf{g}_i(T) &= \mathbf{X}'(T) \mathbf{W}^2 \mathbf{x} \\ \text{ดังนั้นจะได้} \quad \mathbf{G}(T) \hat{\boldsymbol{\phi}} &= \mathbf{g}(T) \end{aligned} \quad (41)$$

คำตอบของสมการปกตินี้คือ

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i(T) = \mathbf{G}^{-1}(T) \mathbf{g}(T) \quad (42)$$

ซึ่งต้องการหา $\hat{\phi}_t(T)$ โดยไม่ต้องการหาค่า $\mathbf{G}^{-1}(T)$ ซ้ำๆ รอบ ซึ่ง Brown ได้เสนอที่คำนวณ $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}(T)$ ในตัวแบบการถดถอย (Regression Model) ซึ่งในตัวแบบถดถอยบนตัวเอง (Autoregressive Model) ค่า $\mathbf{G}(T)$ มีข้อสมมติเบื้องต้นว่าจะลู่เข้าหาค่าหนึ่ง เมื่อเวลาเป็นอนันต์ ($T \rightarrow \infty$) ซึ่งถ้าใช้ T ที่มีค่ามากๆ ก็จะได้ $\mathbf{G}(T)$ ที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ $\mathbf{G}(\infty)$ จากนั้นใช้วิธีปรับเรียบโดยตรง (Direct Smoothing) ดังนี้

วิธีปรับเรียบโดยตรง (Direct Smoothing) เป็นวิธีในการปรับเลื่อนค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแบบ โดยการปรับเรียบค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าเก่าด้วยค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ค่าปัจจุบัน
โดยให้

$$W_{T-jT-j}^2 = \beta^j \quad \text{เมื่อ } j = 0, 1, \dots, T-1$$

โดยที่ β เป็นค่าถ่วงน้ำหนัก (discounted factor) โดยที่มีค่า $0 < \beta < 1$ หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$W = \begin{bmatrix} \beta^{T-1-(p+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta^{T-2-(p+1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

จะได้สมการที่ (43) เป็น

$$l(\hat{\phi}) = \sum_{j=0}^{T-1} W_{T-jT-j}^2 \left[x_{T-j} - (\mathbf{x}'(-j)\hat{\phi}(T)) \right]^2$$

หรือ

$$l(\hat{\phi}) = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left[x_{T-j} - (\mathbf{x}'(-j)\hat{\phi}(T)) \right]^2$$

ให้ $\mathbf{x}(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา ค่าที่เวลา $t+1$ เป็นผลบวกเชิงเส้น ของฟังก์ชันเดียวกันนี้ที่เวลา T ดังนั้น

$$\mathbf{x}(t+1) = L_{i1}x_1(t) + L_{i2}x_2(t) + \dots + L_{ip}x_p(t) \quad (44)$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{x}(T+1) = \mathbf{L}\mathbf{x}(T)$$

เมื่อ $\mathbf{L}$ คือ ทรานซิชันเมตริกซ์ (transition matrix) ที่สามารถหา $\mathbf{x}(T)$ ได้เป็น

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{L}^T \mathbf{x}(0)$$

ซึ่งทรานซิชันเมตริกซ์ ($\mathbf{L}$) ของตัวแบบถดถอยบนตัวเอง $x_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p}$ คือ

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p & \phi_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

เวกเตอร์ด้านขวา ของระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{G}(T)\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{g}(T)$ คือ

$$\begin{aligned} g(T) &= \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j x_{T-j} x(j) \\ &= x_T x(0) + \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j x_{T-j} x(j) \\ &= x_T x(0) + \beta \sum_{j=1}^{T-1} \beta^{j-1} x_{T-j} x(j) \\ &= x_T x(0) + \beta L^{-1} \sum_{k=0}^{T-2} \beta^k x_{T-1-k} x(-k) \\ g(T) &= x_T x(0) + \beta L^{-1} g(T-1) \end{aligned} \quad (46)$$

แทนค่า $g(T)$ ลงในสมการที่ (42) จะได้

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i(T) &= G^{-1}(T) [x_T x(0) + \beta L^{-1} g(T-1)] \\ \hat{\phi}_i(T) &= x_T G^{-1} x(0) + \beta G^{-1} L^{-1} G \phi(T-1) \end{aligned}$$

ถ้าให้ $h = G^{-1}x(0)$

และ $H = \beta G^{-1}L^{-1}G$

แต่

$$L^{-1}G = L^{-1}G(L')^{-1}G$$

$$\begin{aligned} L'G &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j L^{-1}x(-j)x'(-j)(L')^{-1}(L') \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (L^{-1}x(-j))(L^{-1}x(-j))'(L') \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x(-j-1)x'(-j-1)(L') \\ &= \beta^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p x(-p)x'(-p)(L') \\ &= \beta^{-1} (G - x(0)x'(0))L' \end{aligned}$$

แทนค่า $L^{-1}G$ ลงใน H จะได้

$$\begin{aligned} H &= \beta G^{-1} \beta^{-1} (G - x(0)x'(0))L' \\ &= G^{-1} (G - x(0)x'(0))L' \\ &= (I - G^{-1}x(0)x'(0))L' \end{aligned}$$

แทนค่า h ลงใน H จะได้

$$H = L' - hx'(0)L'$$

และได้

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i(T) &= hx_T + (L' - h(x'(1)))\hat{\phi}(T-1) \\ &= L'\hat{\phi}_i(T-1) + h(x_T - x'(1))\hat{\phi}(T-1) \\ &= L'\hat{\phi}_i(T-1) + h(x_T - \hat{x}_T) \\ \hat{\phi}_i(T) &= L'\hat{\phi}_i(T-1) + hr_1(T) \end{aligned} \tag{47}$$

ขั้นตอนการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ในเวกเตอร์ $\hat{\phi}_T$

1. คำนวณ $G(T)$ ดังในสมการที่ (40) เมื่อ $T = 15,000$ และทราบค่าถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม

2. คำนวณ $g(T)$ ดังในสมการที่ (46)

3. คำนวณ $G^{-1}(T)$ หรือ $G(T) = Q_T R_T$ โดยในคำสั่งใน MATLAB
4. หาค่า $\hat{\phi}_T$ ดังในสมการที่ (42)
5. พยากรณ์ไปหนึ่งช่วงเวลาล่วงหน้า
6. หาค่าเศษส่วนเหลือ $r_{T+1} = x_{T+1} - \hat{x}_{T+1}$
7. หาค่า h_T
8. หาค่า L_T
9. หาค่า $\hat{\phi}_{T+1}$ ดังในสมการที่ (47) แล้ววนกลับไปทำขั้นตอนที่ 5

วิธีนี้ไม่ต้องทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (μ) ก็สามารถพยากรณ์ได้ ส่วนอีกวิธีหนึ่งต้องทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ คือวิธีที่จะกล่าวต่อไป

1.3.2 ถ้ากระบวนการถดถอยบนตัวเอง ใช้สัญลักษณ์เป็น AR(p) และตัวแบบที่ใช้พยากรณ์เป็นดังในสมการที่ (5) ทำให้อนุกรมเวลา (x_t) ในสมการที่ (34) เปลี่ยนเป็นอนุกรมเวลา (y_t) เมื่อ $y = x - \mu_x$ ดังนี้

$$Y(T) = \begin{bmatrix} y_T & y_{T-1} & \cdots & y_{T-p+1} \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

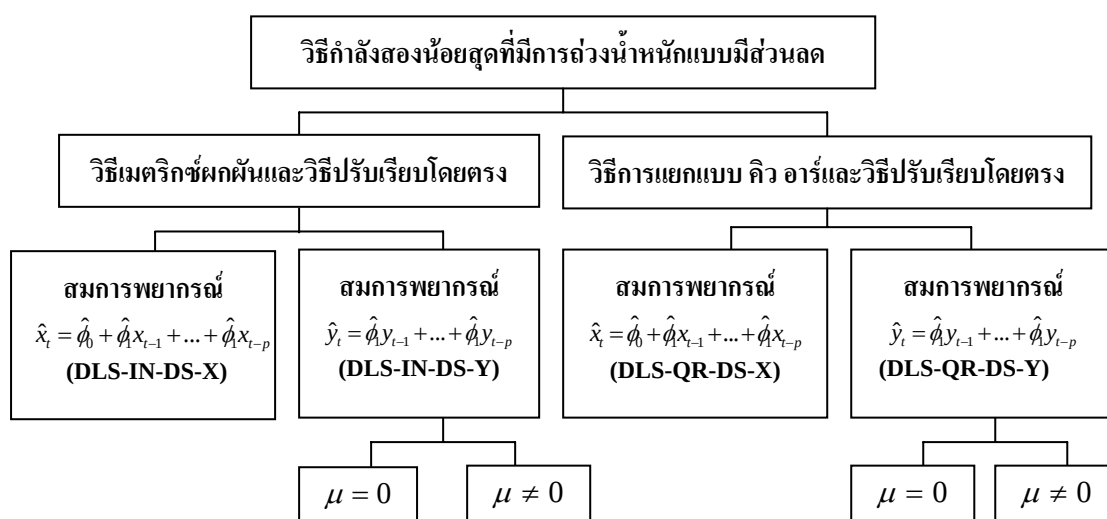
ซึ่งทรานซีชันเมตริกซ์ (L) ของตัวแบบถดถอยบนตัวเองในสมการที่ (45) เปลี่ยนไปเป็น

$$L = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมตริกซ์ L ในสมการที่ (49) ลดลงหนึ่งคอลัมน์ เมื่อเทียบกับ เมตริกซ์ L ในสมการที่ (45) โดยพิจารณากระบวนการถดถอยบนตัวเองเมื่อทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ คือ $\mu = 0$ และ $\mu \neq 0$

ส่วนในกรณีที่ไมทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (μ) ก็ใช้การประมาณ $\hat{\mu} = \bar{x}$ โดยที่ขั้นตอนการคำนวณก็เหมือนกับขั้นตอนการคำนวณค่าพารามิเตอร์ในเวกเตอร์ $\hat{\theta}_T$ ในสมการที่ (47)

ในทุกๆวิธีทำพยากรณ์จากข้อมูลที่สร้างขึ้น โดยสร้างกระบวนการถดถอยบนตัวเองที่เป็นค่าเดี่ยวในลำดับต่างๆ คือ AR(5) AR(12) AR(20) และ AR(30) โดยการพยากรณ์ เริ่มที่ค่าสังเกตที่ 15,001 ทำการพยากรณ์ล่วงหน้าหนึ่งช่วงเวลาดิติดต่อกัน 1,000 5,000 10,000 15,000 20,000 และ 25,000 ครั้ง ตามลำดับ ส่วนข้อมูลจริงนั้นมีสองชุดคือเป็นข้อมูลของระดับน้ำในแม่น้ำที่น้ำเขื่อนแห่งหนึ่งที่วัดทุก 15 นาทีซึ่งมีจำนวน 40,000 ค่า ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีสเตรชั่นนารีที่มีค่าเฉลี่ยกระบวนการไม่เป็นศูนย์ และกระบวนการมีลำดับเป็น 5 โดยการพยากรณ์ เริ่มที่ค่าสังเกตที่ 15,001 ทำการพยากรณ์ล่วงหน้าหนึ่งช่วงเวลาดิติดต่อกัน 1,000 5,000 10,000 15,000 20,000 และ 25,000 ครั้ง เช่นเดียวกับข้อมูลที่สร้างขึ้น และข้อมูลอีกชุดหนึ่งเป็นราคาปิดของหุ้นบริษัทแห่งหนึ่งทุกๆวันที่ตลาดหุ้นเปิดทำการ มีจำนวน 2,190 ค่า ซึ่งข้อมูลมีแนวโน้ม จึงนำค่าแนวโน้มออกได้ข้อมูลที่สเตรชั่นนารีที่กระบวนการมีลำดับเป็นหนึ่งโดยการพยากรณ์ เริ่มที่ค่าสังเกตที่ 190 ทำการพยากรณ์ล่วงหน้าหนึ่งช่วงเวลาดิติดต่อกัน 1,000 และ 2,000 ครั้ง แผนผังวิธีการทำแสดงได้ดังในภาพที่ 3



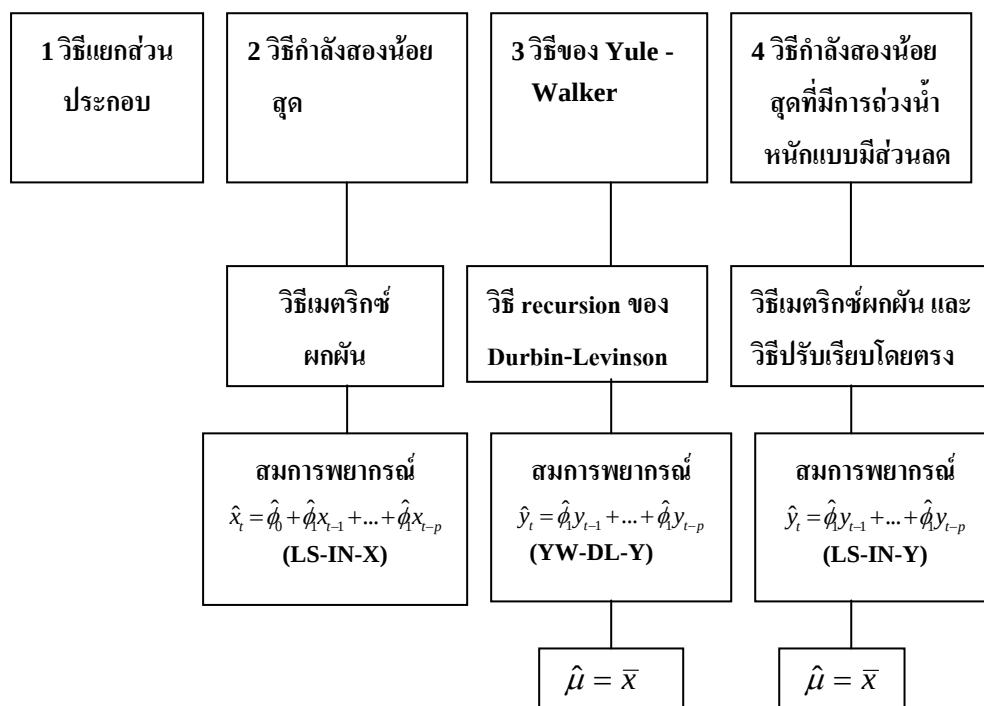
ภาพที่ 3 แผนผังวิธีทำของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนักสองน้อยสุดที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนตัวของข้อมูลเดี่ยว

2. กรณีค่าสังเกตเป็นอนุกรมเวลาที่มีวัฏจักร

การประยุกต์ใช้ตัวแบบถดถอยบนตัวเองกับอนุกรมเวลาที่มีวัฏจักร เมื่ออนุกรมเวลามีเทอมของตรีโกณมิติ จะสามารถนำตัวแบบถดถอยบนตัวเองที่มีลำดับ สูงๆมาใช้พยากรณ์ได้ โดยเปรียบเทียบกับวิธีแยกส่วนประกอบ (decomposition) ดังนี้

1. ทำการพยากรณ์โดยใช้วิธีแยกส่วนประกอบในโปรแกรม Minitab

2. เปรียบเทียบกับสามวิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยสุด ร่วมกับวิธีเมตริกซ์ผกผัน วิธีของ Yule-Walker ร่วมกับวิธีrecursion ของ Durbin-Levinson และวิธีกำลังสองน้อยสุดที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนลด โดยวิธีการทำเช่นเดียวกับกรณีข้อมูลเป็นค่าเดี่ยว กรณีไม่ทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ เนื่องจากวิธีประมาณค่าทั้งสามวิธีใช้เวลาในการดำเนินการน้อย



ภาพที่ 4 แผนผังวิธีทำในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ตัวแบบถดถอยบนตัวเองกับอนุกรมเวลาที่มีวัฏจักร