

## อุปกรณ์และวิธีการ

ในการศึกษาครั้งนี้ใช้อุปกรณ์คือเครื่องคอมพิวเตอร์และโปรแกรม MATLAB7 ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในกระบวนการถดถอยบนตัวเอง โดยทำการพิจารณาค่าสังเกตเมื่อเป็นค่าเดี่ยว เมื่อมีค่าเป็นช่วง และเมื่อค่าสังเกตอยู่ในเทอมของตรีโกณมิติ

### การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวเองบนถดถอยบนตัวเอง

#### 1. กรณีค่าสังเกตเป็นค่าเดี่ยว

เมื่อค่าสังเกตเป็นค่าเดี่ยวทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ สามวิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least Squares) วิธีของ Yule-Walker และวิธีกำลังสองน้อยสุดที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนลด (Discounted Least Squares) มีรายละเอียดดังนี้

##### 1.1 วิธีกำลังสองน้อยสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดอาศัยหลักการของการหาค่าที่เหมาะสมมีรายละเอียดดังนี้

1.1.1 ถ้ากระบวนการถดถอยบนตัวเอง ใช้สัญลักษณ์เป็น AR(p) และตัวแบบที่ใช้พยากรณ์คือ สมการ  $x_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p}$  และ เมตริกซ์  $X_T$  มีขนาด  $(p+1) \times (T-p+1)$  เป็นเมตริกซ์ของค่าสังเกตในอดีตจนถึงเวลา T แสดงได้ดังนี้

$$X(T) = \begin{bmatrix} 1 & x_T & x_{T-1} & \cdots & x_{T-p+1} \\ 1 & x_{T-1} & x_{T-2} & \cdots & x_{T-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนการคำนวณหาค่าของพารามิเตอร์ในเวกเตอร์  $x_T$

1.1.1.1 คำนวณหาเมตริกซ์  $A_T = X_T' X_T$

1.1.1.2 หาค่าของเวกเตอร์  $x_T$  ด้วยวิธี

1.1.1.2.1 วิธีหาเมตริกซ์ผกผัน (วิธี LS-IN-X) จะหาคำตอบของระบบสมการได้จากการหาเมตริกซ์ผกผัน ( $A^{-1}$ ) ดังในสมการที่ (10) การหาเมตริกซ์ผกผันใช้คำสั่งใน MATLAB หรือ

1.1.1.2.2 วิธีการแยกแบบ คิว อาร์ (วิธี LS-QR-X) จะหาคำตอบของระบบสมการได้จากการหาเมตริกซ์  $Q, R$  ดังในสมการที่ (11) การหาเมตริกซ์  $Q$  และ  $R$  ใช้คำสั่งใน MATLAB

1.1.1.3 การปรับปรุงเมตริกซ์เมื่อมีการเลื่อนเวลาสิ้นสุดของค่าสังเกต

ขั้นตอนการคำนวณหาเมตริกซ์ปรับปรุง

1.1.1.3.1 การปรับปรุงเมตริกซ์ผกผัน ใช้วิธีของ Sherman-Morrison-Woolbury ในการปรับเมตริกซ์ผกผัน  $A_T^{-1}$  ไปเป็น  $A_{T+1}^{-1}$

เมื่อ  $A_{T+1} = A_T + u_{t+1}v'_{t+1}$  ดังในสมการที่ (20) โดยที่เมตริกซ์  $u_{t+1}v'_{t+1}$  เป็นดังนี้

$$u_{T+1} = v_{T+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_T \\ \vdots \\ x_{T-p+1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

1.1.1.3.2 การปรับปรุงเมตริกซ์ คิว และ เมตริกซ์ อาร์ ใช้วิธีการปรับปรุงเมตริกซ์ (Golub, 1996)  $A_{T+1} = A_T + u_{t+1}v'_{t+1} = Q_T R_T + u_{T+1}v'_{T+1} = Q_{T+1} R_{T+1}$  ดังในสมการที่ (21) ถึง (26) โดยที่เมตริกซ์  $u_{t+1}v'_{t+1}$  มีรูปแบบเหมือนในสมการที่ (32) การปรับปรุงเมตริกซ์  $Q$  และ  $R$  ใช้คำสั่งใน MATLAB

1.1.2 ถ้ากระบวนการถดถอยบนตัวเองไม่รู้ค่าเฉลี่ยของกระบวนการ และประมาณด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยตัวแบบในการพยากรณ์เป็นสมการ  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p}$  (วิธี LS-IN-Y หรือ วิธี LS-QR-Y) จะทำให้ลดแถวที่ 1 และ คอลัมน์ที่ 1 ของเมตริกซ์  $A$  ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุด เมื่อมีค่าสังเกตที่  $T+1$  เข้ามา ทำให้  $\bar{x}_t$  เปลี่ยนไปเป็น  $\bar{x}_{t+1}$  และ  $A_T$  เปลี่ยนไปเป็น  $A_{T,\nabla}$  เมื่อ  $\nabla = \bar{x}_T - \bar{x}_{T+1}$

$$A_{T,\nabla} = A_T + \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-1}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-2}\nabla) + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-2}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-2}\nabla)^2 + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-2}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-2}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนในรูป

$$A_{T,\nabla} = A_T + u_{T+1,\nabla} v'_{T+1,\nabla}$$

โดยที่

$$u_{T+1,\nabla} v'_{T+1,\nabla} = \sum_{i=1}^p u_{T+1,\nabla,i} v'_{T+1,\nabla,i}$$

ที่เขียนอยู่ในรูป

$$u_{T+1,\nabla} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-1}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-2}\nabla) + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-2}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-2}\nabla)^2 + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-2}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) & \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-2}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) & \cdots & \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$u_{T+1,\nabla,i=1} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-1}\nabla) + \nabla^2) \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-2}\nabla) + \nabla^2) \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots$$

$$u_{T+1,\nabla,i=p} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-1}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \sum_{t=p+1}^T ((y_{t-2}\nabla) + (y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T ((2y_{t-p}\nabla) + \nabla^2) \end{bmatrix}$$

และ

$$v_{T+1,\nabla} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$v_{T+1,\nabla,i=1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots v_{T+1,\nabla,i=p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

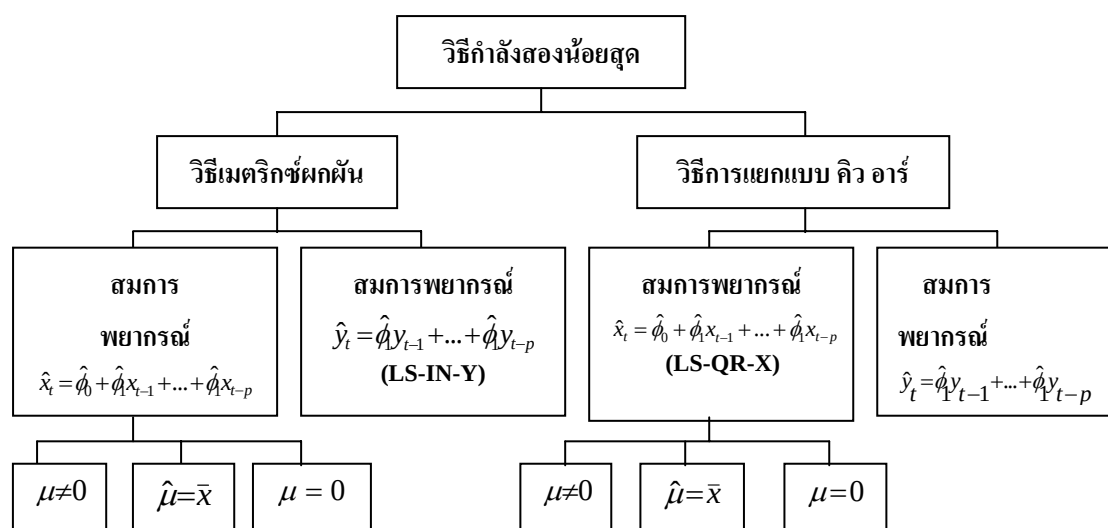
ส่วนค่าสังเกตที่เข้าใหม่คือ  $u_{T+1}v'_{T+1}$  โดยที่

$$u_{T+1} = v_{T+1} = \begin{bmatrix} y_T \\ y_{T-1} \\ \vdots \\ y_{T-p+1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ขั้นตอนการคำนวณหาเมตริกซ์  $A_{T+1}$  จากเมตริกซ์  $A_T$  จะเหมือนเดิม แต่เวลาที่ปรับปรุงเมตริกซ์เมื่อมีการเลื่อนเวลาสิ้นสุดของค่า สังเกตจะได้  $A_{T+1} = A_T + \sum_{i=1}^{n+1} u_{i,T+1}v'_{i,T+1}$

เมื่อ  $n$  คือ จำนวนคอลัมน์ในเมทริกซ์  $A_{T+1}$  ดังนั้นเวลาปรับปรุงเมทริกซ์ในแต่ละวิธีเมื่อมีการเลื่อนเวลาสิ้นสุดของค่าสังเกตจะทำ  $n+1$  ครั้ง และ  $u_{i,T+1}$  เมื่อ  $i = 1, \dots, n$  เป็นเวกเตอร์ที่  $i$  ที่ปรับค่าของสมาชิกใน  $A_T$  ที่เกิดจากการเปลี่ยนค่า  $\bar{x}$  เมื่อมีค่าสังเกตค่าใหม่เข้ามา และเมื่อ  $i = n+1$  เมทริกซ์  $u_{i,T+1}v'_{i,T+1}$  คือค่าสังเกตค่าใหม่ที่เข้ามาใน  $A_T$

ถ้ากระบวนการถดถอยบนตัวเองทราบค่าเฉลี่ยของกระบวนการ ( $\mu$ ) คือ  $\mu = 0$  และ  $\mu \neq 0$  ในสมการ  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_1 y_{t-p}$  (วิธี LS-IN-Y หรือ วิธี LS-QR-Y) นั้นจะปรับปรุงเมทริกซ์ 1 ครั้ง เมื่อมีการเลื่อนเวลาสิ้นสุดของค่าสังเกตด้วยเมทริกซ์  $u_{i,T+1}v'_{i,T+1}$  ซึ่งเป็นค่าสังเกตค่าใหม่ที่เข้ามาใน  $A_T$  ดังในสมการ (33) แผนผังวิธีการทำแสดงได้ดังในภาพที่ 2 ซึ่งในลำดับสุดท้ายของแผนผังไม่ได้แสดงครบทุกวิธีที่ทำ



ภาพที่ 1 แผนผังวิธีทำของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดของข้อมูลเดี่ยว

ตารางที่ 2 สัญลักษณ์ที่ใช้แทนชื่อวิธีการ

| สัญลักษณ์ | ชื่อวิธีการ                                                                                                        |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| LS        | วิธีกำลังสองน้อยสุด                                                                                                |
| YW        | วิธีของ Yule-Walker                                                                                                |
| DLS       | วิธีกำลังสองน้อยสุดที่มีการถ่วงน้ำหนักแบบมีส่วนลด                                                                  |
| IN        | วิธีเมตริกซ์ผกผัน                                                                                                  |
| QR        | วิธีการแยกแบบ คิว อาร์                                                                                             |
| DL        | วิธี recursion ของ Durbin-Levinson                                                                                 |
| DS        | วิธีปรับเรียบโดยตรง                                                                                                |
| X         | วิธีการพยากรณ์โดยใช้สมการ $\hat{x}_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p}$         |
| Y         | วิธีการพยากรณ์โดยใช้สมการ $\hat{y}_t = \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p}$ |