

จากสมการที่ (14) ให้

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \phi_{1,k-1} \\ \phi_{2,k-1} \\ \phi_{3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

กลับ (reversing) ระบบสมการจากบนลงล่างและจากซ้ายไปขวาจะได้สมการที่ (14) เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k-1,k-1} \\ \phi_{k-2,k-1} \\ \phi_{k-3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{1,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{k-1} \\ \rho_{k-2} \\ \rho_{k-3} \\ \vdots \\ \rho_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

และจากสมการที่ (15) ถ้าให้

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \phi_{k-1,k-1} \\ \phi_{k-2,k-1} \\ \phi_{k-3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{1,k-1} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 * A_2 &= B - \phi_{k,k} C \\ &= B_1 * B_2 - \phi_{k,k} (C_1 * C_2) \end{aligned}$$

ใช้สมการที่ (14) และที่ (15) แทนค่าเวกเตอร์ ρ ลงในสมการที่ (13) จะได้

$$R_{k-1} \begin{bmatrix} \phi_{1,k} \\ \phi_{2,k} \\ \phi_{3,k} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k} \end{bmatrix} = R_{k-1} \begin{bmatrix} \phi_{1,k-1} \\ \phi_{2,k-1} \\ \phi_{3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k-1} \end{bmatrix} - \phi_{k,k} R_{k-1} \begin{bmatrix} \phi_{k-1,k-1} \\ \phi_{k-2,k-1} \\ \phi_{k-3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{1,k-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ถ้า R_{k-1} เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) จะมี R_{k-1}^{-1} ที่เมื่อนำมาคูณเข้าข้างหน้าของ R_{k-1} จะหากรู่มของสมการที่แสดงค่า $\phi_{i,k}$ ($i=1,2,\dots,k$) ในเทอมของ $\phi_{i,k-1}$ และ $\phi_{k,k}$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,k} \\ \phi_{2,k} \\ \phi_{3,k} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,k-1} \\ \phi_{2,k-1} \\ \phi_{3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k-1} \end{bmatrix} - \phi_{k,k} \begin{bmatrix} \phi_{k-1,k-1} \\ \phi_{k-2,k-1} \\ \phi_{k-3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{1,k-1} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi_{1,k} &= \phi_{1,k-1} - \phi_{k,k} \phi_{k-1,k-1} \\ \phi_{2,k} &= \phi_{2,k-1} - \phi_{k,k} \phi_{k-2,k-1} \\ \phi_{3,k} &= \phi_{3,k-1} - \phi_{k,k} \phi_{k-3,k-1} \\ &\vdots \\ \phi_{k-2,k} &= \phi_{k-2,k-1} - \phi_{k,k} \phi_{2,k-1} \\ \phi_{k-1,k} &= \phi_{k-1,k-1} - \phi_{k,k} \phi_{1,k-1} \end{aligned} \quad (17)$$

จากข้อสมมติ $\phi_{i,k-1}$ ได้ถูกคำนวณแล้วจากขั้นตอนที่ $k-1$ ดังนั้นปัญหาคือ $\phi_{k,k}$ ซึ่งเป็นสมการสุดท้ายในระบบสมการ (12) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho_{k-1}\phi_{1,k} + \rho_{k-2}\phi_{2,k} + \dots + \rho_1\phi_{k-1,k} + \phi_{k,k} = \rho_k \quad (18)$$

ซึ่งทำให้สามารถแสดงค่า $\phi_{k,k}$ ในเทอมของ $\phi_{i,k-1}$ ดังนั้นโดยการใช้สมการ (17) แทนค่าลงใน $\phi_{1,k}, \phi_{2,k}, \dots, \phi_{k-1,k}$ ของสมการ (18) จะสามารถหา $\phi_{k,k}$ แสดงในเทอมของ $\phi_{i,k-1}$ ดังนี้

$$\rho_{k-1}\phi_{1,k} + \rho_{k-2}\phi_{2,k} + \dots + \rho_1\phi_{k-1,k} + \phi_{k,k} = \rho_k$$

$$\phi_{k,k} = \rho_k - \rho_{k-1}\phi_{1,k} - \rho_{k-2}\phi_{2,k} - \dots - \rho_1\phi_{k-1,k}$$

แทนค่า (17) ลงใน (18) จะได้

$$\phi_{k,k} = \rho_k - \rho_{k-1}(\phi_{1,k-1} - \phi_{k,k}\phi_{k-1,k-1}) - \rho_{k-2}(\phi_{2,k-1} - \phi_{k,k}\phi_{k-2,k-1}) - \dots - \rho_1(\phi_{k-1,k-1} - \phi_{k,k}\phi_{1,k-1})$$

$$\phi_{k,k} = \rho_k - \rho_{k-1}\phi_{1,k-1} + \rho_{k-1}\phi_{k,k}\phi_{k-1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{2,k-1} + \rho_{k-2}\phi_{k,k}\phi_{k-2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{k-1,k-1} + \rho_1\phi_{k,k}\phi_{1,k-1})$$

จากการย้ายข้างจะได้

$$\phi_{k,k} - \rho_{k-1}\phi_{k,k}\phi_{k-1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{k,k}\phi_{k-2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{k,k}\phi_{1,k-1} = \rho_k - \rho_{k-1}\phi_{1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{k-1,k-1}$$

หรือ $\phi_{k,k}(1 - \rho_{k-1}\phi_{k-1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{k-2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{1,k-1}) = \rho_k - \rho_{k-1}\phi_{1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{k-1,k-1}$

จัดรูปใหม่เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ได้เป็น

$$\phi_{k,k} = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}\phi_{1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{k-1,k-1}}{1 - \rho_{k-1}\phi_{k-1,k-1} - \rho_{k-2}\phi_{k-2,k-1} - \dots - \rho_1\phi_{1,k-1}} \quad (19)$$

2. การปรับปรุงเมตริกซ์เมื่อมีการเลื่อนเวลาสิ้นสุดของค่าสังเกต ใช้หลักการ rank one update ดังนี้

2.1 การปรับปรุงเมตริกซ์ผกผัน ใช้วิธีของ Sherman-Morrison-Woolbury (Golub, 1996) ในการปรับเมตริกซ์ผกผัน A_T^{-1} ไปเป็น A_{T+1}^{-1} เมื่อ $A_{T+1} = A_T + u_{t+1}v'_{T+1}$

$$A_{T+1}^{-1} = A_T^{-1} - \left(\frac{A_T^{-1}u_{T+1}v'_{T+1}A_T^{-1}}{1 + v'_{T+1}A_T^{-1}u_{T+1}} \right) \quad (20)$$

2.2 การปรับปรุงเมตริกซ์ คิว และ เมตริกซ์ อาร์ ใช้วิธี rank one update ของ Householder ดังนี้

ถ้า $A_{T+1} = A_T + u_{t+1}v'_{T+1} = Q_T R_T + u_{t+1}v'_{T+1} = Q_T (R_T + w_{T+1}v'_{T+1})$

และ

$$w_{T+1} = Q_T' u_{T+1} \quad (21)$$

หาเมตริกซ์ rotations $J'_{n-1}, \dots, J_2 J_1$ จาก

$$J'_1 \dots J'_{n-1} w_{T+1} = \pm \|w_{T+1}\|_2 e_1 \quad (22)$$

เมตริกซ์ rotations J_k หมุนระนาบที่ k และ $k+1$ ซึ่งเมตริกซ์ rotations จะนำมากระทำที่ R_T จะได้ (H_T) ดังนี้

$$H_T = J'_1 \dots J'_{n-1} R_T \quad (23)$$

เมื่อ H_T คือเมตริกซ์ upper Hessenberg และหา H_{T+1} จาก

$$(J'_1 \dots J'_{n-1})(R_T + w_{T+1} v'_{T+1}) = H_T \pm \|w_{T+1}\|_2 e_1 v'_{T+1} = H_{T+1} \quad (24)$$

จากนั้นหาเมตริกซ์ rotations $G_k, k=1:n-1$ จาก

$$G'_{n-1} \dots G'_1 H_{T+1} = R_{T+1} \quad (25)$$

และจะได้ Q_{T+1} จากการนำเมตริกซ์ rotations G_k มากระทำกับ Q_T

$$Q_{T+1} = Q_T J_{n-1} \dots J_1 G_1 \dots G_{n-1} \quad (26)$$

วิธีตรวจสอบเพื่อวินิจฉัยผลการพยากรณ์

1. เกี่ยวกับค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

1.1 การตรวจสอบค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของค่าคลาดเคลื่อน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ใช้ในการพยากรณ์ทำดังนี้

1.1.1 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสหสัมพันธ์ในตัวเองของข้อมูล

โดยมีสมมติฐานที่ใช้ คือ

H_0 : ค่าความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเดียวกันไม่มีสหสัมพันธ์ในตัวเอง

H_1 : ค่าความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเดียวกันมีสหสัมพันธ์ในตัวเอง

สถิติที่ใช้ทดสอบคือ สถิติ $\tilde{Q}$ โดยที่

$$\tilde{Q} = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{r_e^2(k)}{(n-k)} \quad (28)$$