

ในการศึกษาครั้งนี้เน้นที่ขั้นตอนที่สามคือการหาค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ โดยมีข้อสมมติว่าทราบตัวแบบที่เหมาะสมกับข้อมูลแล้ว ดังนั้นจะเริ่มค้นหาพารามิเตอร์โดยจะทำการจัดให้อยู่ในระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

การหาค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ

1. วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least Squares) ในปี ค.ศ. 1794 Carl Friedrich Gauss ได้พัฒนาวิธีกำลังสองน้อยสุดในการแก้ปัญหาทางดาราศาสตร์ (Hammerlin, 1991) ซึ่งวิธีการของ Gauss ภายหลังได้พัฒนาไปใช้ในวิธีการกำหนดตัวแบบ (fitting method) อย่างกว้างขวาง

เมื่อตัวแบบที่ใช้ พยากรณ์เป็นดังในสมการที่ (2) โดยใช้หลักการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดคือให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน (error)} \quad \varepsilon_t = x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p}) \quad (4)$$

$$\text{ถ้าให้} \quad l = \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p})]^2$$

ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$\frac{\partial l}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p})]^2}{\partial \phi_i} = 0$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \phi_0} &= -2 \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p})] = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \phi_1} &= -2 \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p})] x_{t-1} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial l}{\partial \phi_p} &= -2 \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p})] x_{t-p} = 0 \end{aligned}$$

หรือก็คือ

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=p+1}^T (\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p}) &= \sum_{t=p+1}^T x_t \\
 \sum_{t=p+1}^T (\phi_0 x_{t-1} + \phi_1 x_{t-1}^2 + \phi_2 x_{t-2} x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} x_{t-1}) &= \sum_{t=p+1}^T x_t x_{t-1} \\
 \vdots & \\
 \sum_{t=p+1}^T (\phi_0 x_{t-p} + \phi_1 x_{t-1} x_{t-p} + \phi_2 x_{t-2} x_{t-p} + \dots + \phi_p x_{t-p}^2) &= \sum_{t=p+1}^T x_{t-p}
 \end{aligned}$$

ที่เวลา $t = T$ จะสามารถจัดระบบสมการข้างบนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $A_T \ddot{x}_T = b_T$ เมื่อ A_T เป็นเมทริกซ์ของค่าสังเกตขนาด $(p+1) \times (p+1)$ ส่วน $\ddot{x}_T$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ขนาด $(p+1) \times 1$ และ b_T เป็นเวกเตอร์ของค่าสังเกตขนาด $(p+1) \times 1$ ที่แสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T 1 & \sum_{t=p+1}^T x_{t-1} & \dots & \sum_{t=p+1}^T x_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^T x_{t-1} & \sum_{t=p+1}^T x_{t-1}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^T x_{t-1} x_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T x_{t-p} & \sum_{t=p+1}^T x_{t-1} x_{t-p} & \dots & \sum_{t=p+1}^T x_{t-p}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T x_t \\ \sum_{t=p+1}^T x_t x_{t-1} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T x_t x_{t-p} \end{bmatrix} \quad (5)$$

เมื่อ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ ถ้าให้ $y_t = x_t - \bar{x}$ อาจเขียนตัวแบบได้ใหม่เป็น

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (6)$$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถจัดสมการข้างบนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $A_T \ddot{x}_T = b_T$ เมื่อ A_T เป็นเมทริกซ์ของค่าสังเกตขนาด $(p \times p)$ ส่วน $\ddot{x}_T$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ขนาด $(p \times 1)$ และ b_T เป็นเวกเตอร์ของค่าสังเกตขนาด $(p \times 1)$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T y_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^T y_{t-1}y_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T y_{t-1}y_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^T y_{t-1}y_{t-2} & \sum_{t=p+1}^T y_{t-2}^2 & \cdots & \sum_{t=p+1}^T y_{t-2}y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T y_{t-1}y_{t-p} & \sum_{t=p+1}^T y_{t-2}y_{t-p} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T y_{t-p}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^T y_t y_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^T y_t y_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T y_t y_{t-p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

หลังจากนี้แล้วจะทำการหาคำตอบจากระบบสมการเชิงเส้น $A\hat{x} = b$ ด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งทำได้หลายวิธี

2. วิธีของ Yule-Walker ได้จากสมการ (5) สามารถจัดในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

จะหาฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง (autocorrelation function) ที่มีอันดับ (order) 'k' หรือ ρ_k โดยใช้ Y_{t-k} คุณสมบัติสมการข้างบนจะได้ดังนี้ (Janacek, 1993)

$$Y_t Y_{t-k} = \phi_1 Y_{t-1} Y_{t-k} + \phi_2 Y_{t-2} Y_{t-k} + \dots + \phi_p Y_{t-p} Y_{t-k} + \varepsilon_t Y_{t-k}$$

แล้วหาค่าคาดคะเน $E(Y_t Y_{t-k}) = \gamma_k$ จะได้

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t Y_{t-k}) \quad (8)$$

ซึ่ง $E(\varepsilon_t Y_{t-k}) = 0$ และสหสัมพันธ์ในตัวเองที่มีอันดับ = 0 คือค่าความแปรปรวนที่แสดงได้เป็น $\gamma_0 = E(Y_t Y_t) = V(Y_t) = \sigma_Y^2$ ถ้าเอาค่าความแปรปรวนหารสมการ (8) จะได้

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

ถ้า $k=1, 2, \dots, p$ จะได้ระบบสมการเป็น

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \rho_0
\end{aligned}$$

จะสามารถเขียนระบบสมการข้างบนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

นี่ก็คือระบบสมการเชิงเส้น $A_T \ddot{x}_T = b_T$ เมื่อ A_T เป็นเมทริกซ์ของค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองที่มีขนาด $(p \times p)$ ส่วน $\ddot{x}_T$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ขนาด $(p \times 1)$ และ b_T เป็นเวกเตอร์ของค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองที่มีขนาด $(p \times 1)$

การหาค่าของเวกเตอร์ $\ddot{x}_T$ จากวิธีของ Yule-Walker ทำได้หลายวิธี แต่ที่นิยมกันคือวิธี recursion ของ Durbin-Levinson

การแก้สมการเพื่อหาค่าพารามิเตอร์และปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์

วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการถดถอยบนตัวเองจากระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดจะอาศัยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คือ วิธีหาเมทริกซ์ผกผัน และวิธีการแยกแบบ คิว อาร์ แต่ในสมการของ Yule-Walker นั้น วิธีหาคำตอบจากสมการของ Yule-Walker นิยมทำด้วยวิธี recursion ของ Durbin-Levinson จะอาศัยวิธีการทางสถิติ คือ การหาค่าคาดหมาย นอกจากนี้วิธีหาคำตอบจากสมการของ Yule-Walker ก็ยังสามารถใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คือ วิธีเมทริกซ์ผกผัน และวิธีการแยกแบบ คิว อาร์ ได้ด้วย

1. การแก้สมการเพื่อหาค่าของเวกเตอร์ $\ddot{x}_T$

1.1 วิธีเมทริกซ์ผกผัน

จากระบบสมการ $A_T \ddot{x}_T = b_T$

จะหาคำตอบของระบบสมการได้จากการหาเมตริกซ์ผกผันดังนี้

$$A_T^{-1} A_T \ddot{x}_T = A_T^{-1} b_T \quad (10)$$

จะหาค่าของเวกเตอร์ $\ddot{x}_T$ ได้ $\ddot{x}_T = A_T^{-1} b_T$

1.2 วิธีการแยกแบบ คิว อาร์

จะหาคำตอบของระบบสมการได้จากการแยกเมตริกซ์เป็น เมตริกซ์ คิว และ อาร์

$$A_T = Q_T R_T$$

เมื่อ Q เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix) ซึ่ง $Q_T' = Q_T^{-1}$ และ R_T คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix)

$$Q_T^{-1} Q_T R_T \ddot{x}_T = Q_T^{-1} b_T \quad (11)$$

จะหาค่าของเวกเตอร์ $\ddot{x}_T$ ได้โดยการแทนค่าแบบย้อนกลับจากสมการข้างบนคือ

$$R_T \ddot{x}_T = Q_T^{-1} b_T$$

1.3 วิธี recursion ของ Durbin-Levinson

สมการ Yule-Walker ที่อันดับ 'p' เป็นดังในสมการที่ (6) มีวิธีหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่งคือวิธี recursion ของ Durbin-Levinson ถ้าเขียนสมการที่ (9) ใหม่ (Janacek, 1993) ในรูปเมตริกซ์เป็น

$$R_p \phi_p = \rho_p$$

จากสมการที่ (9) สมมติว่า ณ ขั้นตอนที่ k ระบบสมการมี k มิติ ดังนี้

$$(12) \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 & \rho_1 \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,k} \\ \phi_{2,k} \\ \phi_{3,k} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k} \\ \phi_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

หรือเขียนเป็น $R_k \phi_k = \rho_k$ ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ จะขึ้นกับ k และต้องมีตัวห้อย (subscript) k เป็นตัวที่สอง ถ้าไม่ต้องการเขียนสมการสุดท้ายของระบบสมการที่ (12) จะสามารถนำสมการสุดท้ายทางขวามาลบออกจากสมการด้านซ้ายซึ่งได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,k} \\ \phi_{2,k} \\ \phi_{3,k} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} - \phi_{k,k} \begin{bmatrix} \rho_{k-1} \\ \rho_{k-2} \\ \rho_{k-3} \\ \vdots \\ \rho_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

จากสมการที่ (13) ให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \phi_{1,k} \\ \phi_{2,k} \\ \phi_{3,k} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \rho_{k-1} \\ \rho_{k-2} \\ \rho_{k-3} \\ \vdots \\ \rho_1 \end{bmatrix}$$

ถ้าเปลี่ยนจากขั้นตอนที่ k เป็นขั้นตอนที่ $k-1$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,k-1} \\ \phi_{2,k-1} \\ \phi_{3,k-1} \\ \vdots \\ \phi_{k-1,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

สมการที่ (14) ก็เหมือนกับสมการที่ (12) เพียงแต่เป็นขั้นตอนที่ $k-1$ แทนที่จะเป็นขั้นตอนที่ k

