



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

ปริญญา

คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

Classification of Structure Algebras

นามผู้วิจัย นางสาวสุภาวดี แก้วระหัน

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์อูษณีย์ สิริวัฒน์, วท.ค.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์สุรียา ณ หนองคาย, Dr.rer.nat.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ชีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

สิงสิงห์ มติวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

Classification of Structure Algebras

โดย

นางสาวสุภาวดี แก้วระหัน

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

พ.ศ. 2554

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สุภาวดี แก้วระหัน 2554: การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต ปริญาวิทยาศาสตร์
มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์อุษณีย์ สิริวัฒน์, วท.ค. 102 หน้า

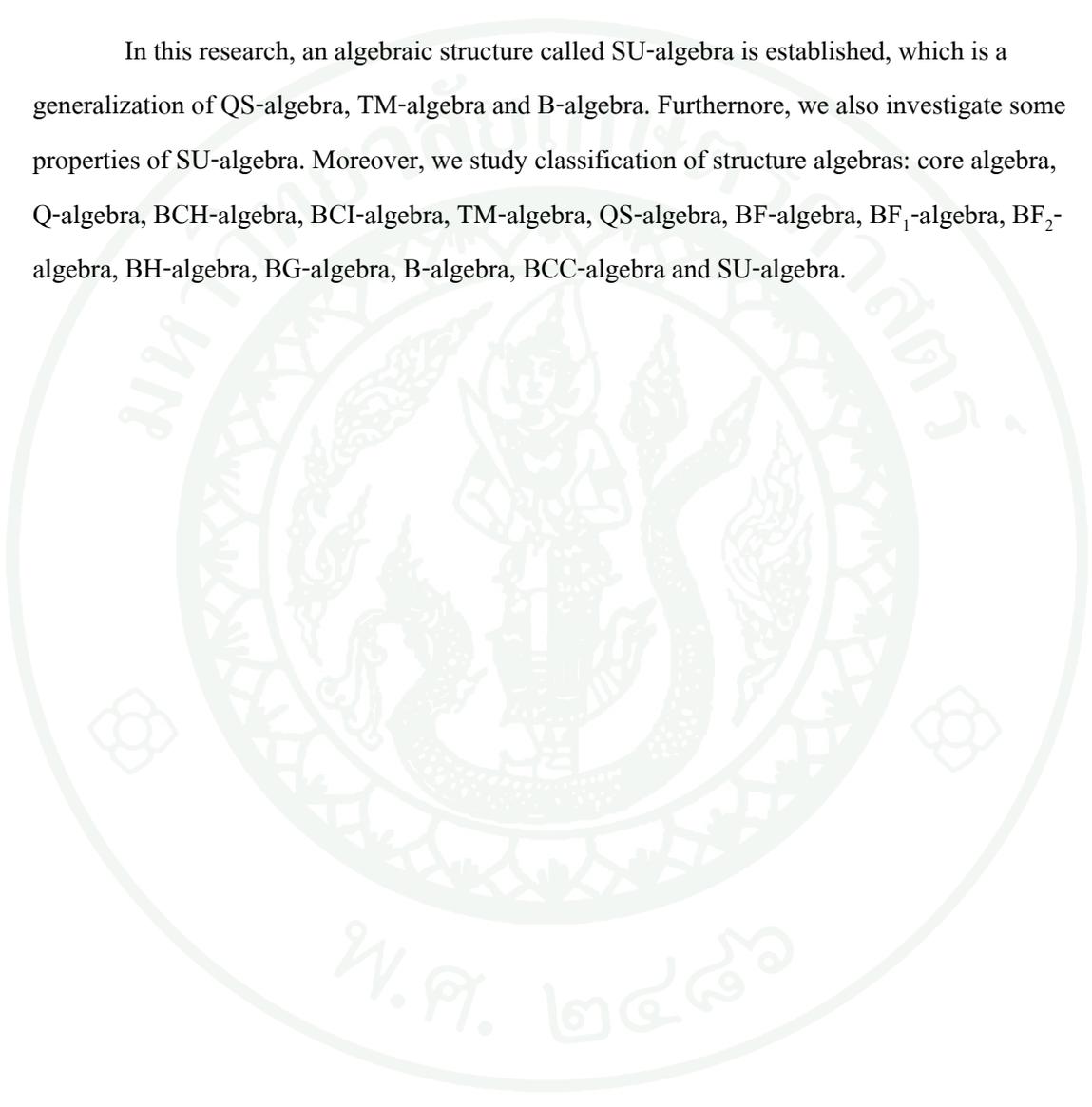
งานวิจัยนี้ได้สร้างโครงสร้างทางพีชคณิตโครงสร้างหนึ่งๆที่เรียกว่า SU-algebra ซึ่งเป็นนัย
ทั่วไปของ QS-algebra, TM-algebra และ B-algebra ยิ่งไปกว่านั้นเราได้ตรวจสอบสมบัติต่างๆของ
โครงสร้าง Su-algebra นอกจากนี้ได้ศึกษาการจำแนกโครงสร้างพีชคณิต core algebra, Q-algebra,
BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-
algebra, BG-algebra, B-algebra, BCC-algebra และ SU-algebra

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Supawadee Kaewrahn 2011: Classification of Structure Algebras. Master of Science (Mathematics), Major Field: Mathematics, Department of Mathematics. Thesis Advisor: Associate Professor Utsanee Leerawat, Ph.D. 102 pages.

In this research, an algebraic structure called SU-algebra is established, which is a generalization of QS-algebra, TM-algebra and B-algebra. Furthermore, we also investigate some properties of SU-algebra. Moreover, we study classification of structure algebras: core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra, BCC-algebra and SU-algebra.



Student's signature

Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อุษณีย์ ลีรัตน์ ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้เอาใจใส่ให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด รองศาสตราจารย์ วรรณิกา คงสาคร ประธานกรรมการสอบ และรองศาสตราจารย์วันดา ศรีแสงทอง ผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ ข้อคิดเห็น ตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งจนกระทั่งผู้วิจัยสามารถดำเนินการวิจัยได้สำเร็จสมบูรณ์ จึงกราบขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.)ที่สนับสนุนทุนการศึกษาในการศึกษาในระดับปริญญาโทนี้

ขอขอบคุณอาจารย์และเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนครอบครัวที่คอยช่วยเหลือสนับสนุนและให้กำลังใจตลอดเวลาในการศึกษา

ประโยชน์อันเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะพึงมีเพียงใด ขอมอบแต่คุณพ่อคุณแม่และคณาจารย์ทุกท่านที่ได้เมตตาอบรมสั่งสอนให้มีความรู้จนถึงปัจจุบัน

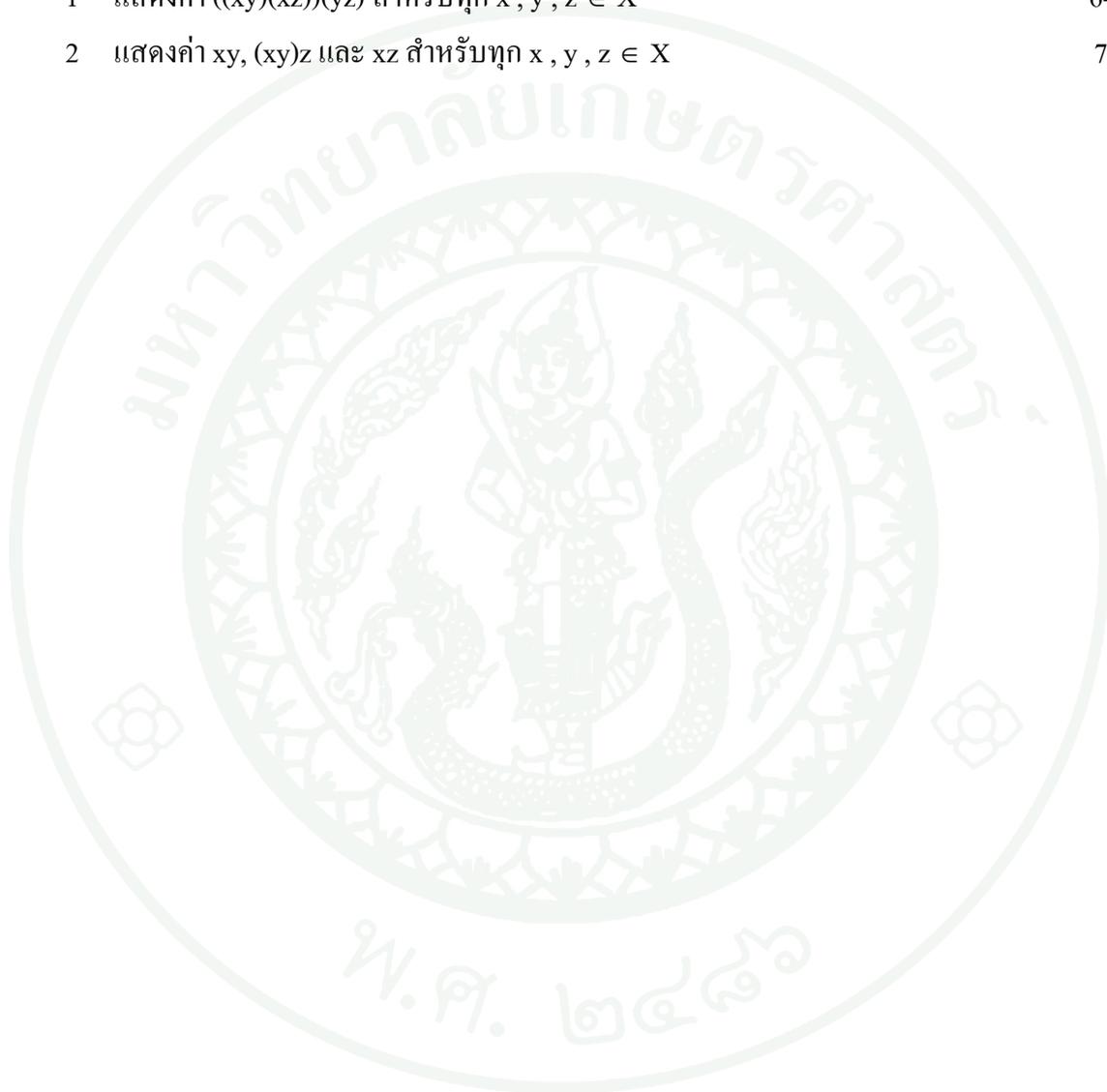
สุภาวดี แก้วระหัน
เมษายน 2554

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(4)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	4
การตรวจเอกสาร	5
วิธีการ	46
ผลการวิจัย	51
สรุป	94
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	101
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	102

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 แสดงค่า $((xy)(xz))(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$	64
2 แสดงค่า $xy, (xy)z$ และ xz สำหรับทุก $x, y, z \in X$	72



สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1 ความสัมพันธ์ระหว่าง ideal ต่างๆของ BCI-algebra และ BCK-algebra	23
2 ความสัมพันธ์ของ B-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BF-algebra, BG-algebra และ BH-algebra	36
3 ความสัมพันธ์ของ core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS- algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra และ BCC-algebra	62
4 ความสัมพันธ์ของ core-algebra, Qalgebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS- algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra, BCC-algebra และ SU-algebra	93

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

\in	แทนสมาชิกของ
\subset	แทนสับเซตของ
\cong	แทน isomorphic
$\bigcap_{i=1}^n A_i$	แทนอินเตอร์เซกชันของ A_i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$
$f: X \rightarrow Y$	แทน f เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก X ไปยัง Y

การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

Classification of Structure Algebras

คำนำ

การศึกษาพีชคณิตในสมัยเริ่มแรกจะศึกษาในแนวคิดที่ว่าพีชคณิตเป็นศาสตร์ของการหาผลเฉลยของสมการ ต่อมาแนวคิดนี้ได้ถูกขยายให้กว้างออกไปจนเป็นพีชคณิตรูปแบบใหม่โดยเน้นการศึกษาถึงโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะประกอบไปด้วยเซตๆหนึ่งและการดำเนินการบนเซตนั้นๆภายใต้เงื่อนไขต่างๆ ดังเช่น โครงสร้างพีชคณิตที่เป็นที่รู้จักกันดีคือ กรุป ริง และฟิลด์ เป็นต้น โดยที่แต่ละโครงสร้างมีลักษณะดังนี้

ระบบคณิตศาสตร์ $(G, *)$ เป็น กรุป (group) ถ้า G เป็นเซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. การดำเนินการ $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ นั่นคือ $a * (b * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุก $a, b, c \in G$
2. มีสมาชิก e ใน G ซึ่ง $a * e = a = e * a$ สำหรับทุก $a \in G$ และเราเรียก e ว่าเอกลักษณ์ (identity) ของ G ภายใต้ $*$
3. สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน G มีสมาชิก b ใน G ซึ่ง $a * b = e = b * a$

ระบบคณิตศาสตร์ $(R, +, \cdot)$ เป็น ริง (ring) ถ้า R เป็นเซตไม่ว่าง $+$ และ \cdot ต่างก็เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(R, +)$ เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group)
2. (R, \cdot) เป็นกึ่งกรุป (semigroup)
3. สำหรับทุก $a, b, c \in R$ จะได้

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{กฎการแจกแจงซ้าย (left distributive law)})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{กฎการแจกแจงขวา (right distributive law)})$$

ระบบคณิตศาสตร์ $(F, +, \cdot)$ เป็น ฟิลด์ (field) ถ้า F เป็นเซตไม่ว่าง $+$ และ \cdot ต่างก็เป็นการดำเนินการทวิภาค ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(F, +)$ เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group)

2. $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ เป็นกรุปสลับที่ (commutative group)

3. สำหรับทุก $a, b, c \in F$ จะได้

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{กฎการแจกแจงซ้าย (left distributive law)})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{กฎการแจกแจงขวา (right distributive law)})$$

กรุปริง และ ฟิวด์เป็นโครงสร้างพีชคณิตที่นักคณิตศาสตร์ได้ศึกษากันอย่างหลากหลาย และทราบว่าสมบัติต่าง ๆ มากมาย นอกจากนี้ยังมีโครงสร้างพีชคณิตอื่นๆ อีกที่นักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและค้นพบสมบัติต่างของโครงสร้างเหล่านั้น เช่น BCI-algebra, BCC-algebra, KU-algebra โดยที่แต่ละโครงสร้างมีนิยามดังนี้

BCI-algebra คือระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
2. $(x * (x * y)) * y = 0$
3. $x * x = 0$
4. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

BCC-algebra คือระบบคณิตศาสตร์ $(G, *, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ G ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x * y) * (z * y)) * (x * z) = 0$
2. $x * x = 0$
3. $0 * x = 0$
4. $x * 0 = x$
5. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

KU-algebra คือระบบคณิตศาสตร์ $(G, *, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ G ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(x * y) * ((y * z) * (x * z)) = 0$
2. $0 * x = x$

$$3. x * 0 = 0$$

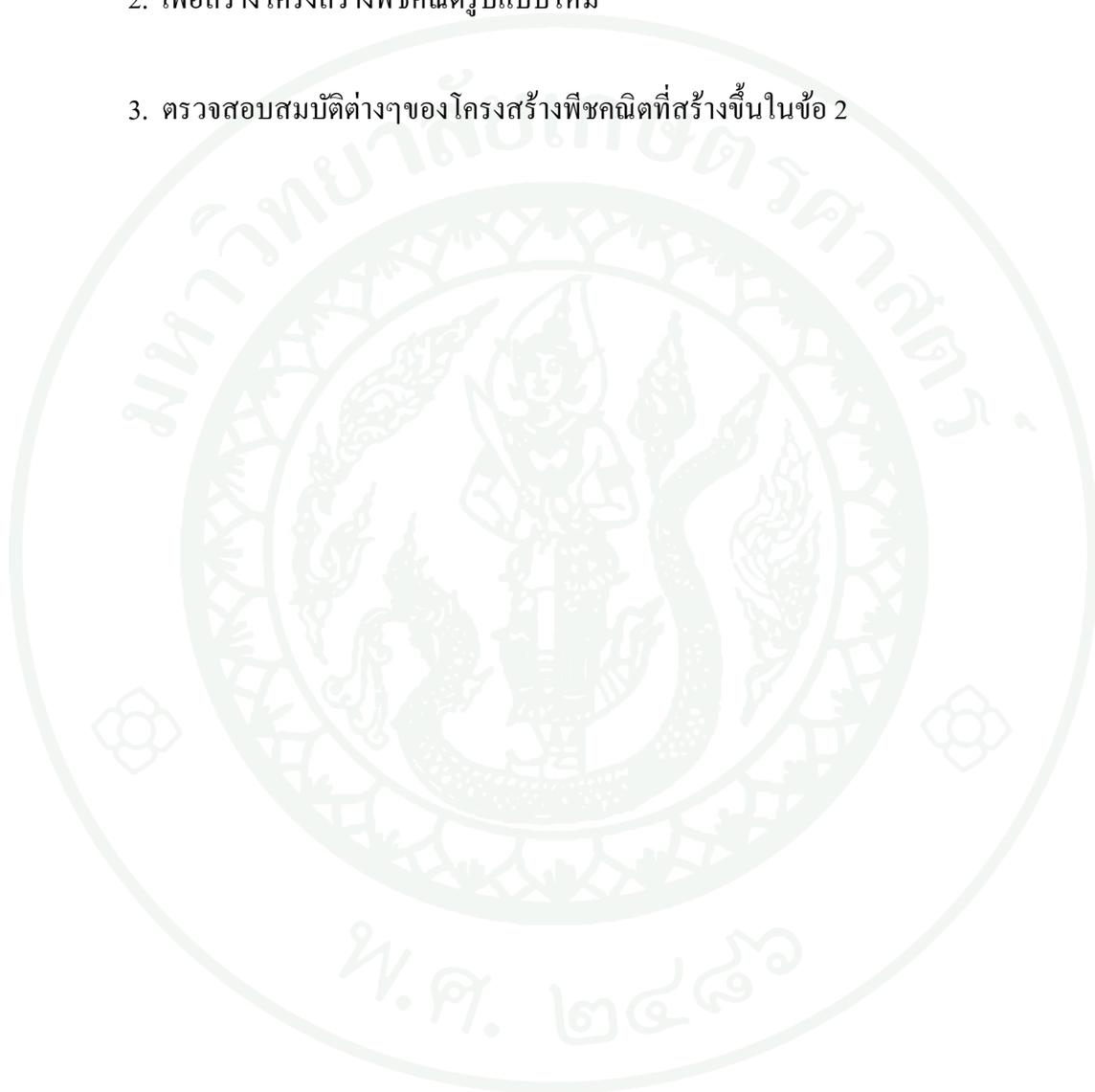
$$4. \text{ ถ้า } x * y = 0 \text{ และ } y * x = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ในงานวิจัยนี้ จะมุ่งศึกษาโครงสร้างพีชคณิตรูปแบบอื่นเช่น BCI-algebra, BCC-algebra, B-algebra, Q-algebra เป็นต้น เพื่อค้นหาสมบัติต่างๆที่มีอยู่แล้วและเกิดใหม่ อาศัยแนวคิดของโครงสร้างดังกล่าวนำไปสร้างโครงสร้างพีชคณิตรูปแบบใหม่ และตรวจสอบสมบัติต่างๆของโครงสร้างพีชคณิตที่สร้างขึ้นใหม่นี้ด้วย นอกจากนี้ยังค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ เพื่อจำแนกโครงสร้างพีชคณิตเหล่านั้นด้วย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการจำแนกโครงสร้างพีชคณิตรูปแบบอื่นๆ
2. เพื่อสร้างโครงสร้างพีชคณิตรูปแบบใหม่
3. ตรวจสอบสมบัติต่างๆของโครงสร้างพีชคณิตที่สร้างขึ้นในข้อ 2



การตรวจเอกสาร

การวิจัยครั้งนี้มีบทนิยาม ทฤษฎีบท ความรู้พื้นฐาน และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน
2. ผลงานของ Arai *at al.* (1966)
3. ผลงานของ Iseki (1966)
4. ผลงานของ Jun (1994)
5. ผลงานของ Dudek and Zhang (1998)
6. ผลงานของ Ahn and Kim (1999)
7. ผลงานของ Liu *at al.* (2000)
8. ผลงานของ Neggers and Kim (2002)
9. ผลงานของ Dar and Akram (2006)
10. ผลงานของ Walendziak (2007)
11. ผลงานของ Megalai and Tamilarasi (2010)

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆที่ไม่เป็นเซตว่าง เราจะกล่าวว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A ก็ต่อเมื่อ $*$: $A \times A \rightarrow A$ และถ้า $*$ $((a,b)) = c$ เราจะเขียนแทนด้วย $a * b = c$

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือสับเซตของ $A \times B$ ถ้า R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ $(a,b) \in R$ เราจะเขียนแทนด้วย aRb

โดเมนของ R จะเขียนแทนด้วย $\text{Dom}(R)$ คือเซตของสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a,b) \in R\}$$

พิสัยของ R เขียนแทนด้วย $\text{Im}(R)$ คือเซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a,b) \in R\}$$

เราสังเกตได้ว่า $\text{Dom}(R) \subseteq A$ และ $\text{Im}(R) \subseteq B$

ในกรณีที่ $A = B$ เราจะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า

1. R มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ก็ต่อเมื่อ aRa สำหรับทุก $a \in X$
2. R มีสมบัตินสมมาตร (symmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า aRb แล้ว bRa สำหรับทุก $a, b \in X$
3. R มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ก็ต่อเมื่อ ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc สำหรับทุก $a, b, c \in X$
4. X มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ aRb และ bRa แล้ว $a = b$ สำหรับทุก $a, b \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ แล้วจะได้ R มีความสัมพันธ์สมมูล (Equivalence) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ R มีสมบัติสะท้อน สมบัตินสมมาตรและสมบัติถ่ายทอดบน X

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บน X จะเรียก R ว่า partial order บน X ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัติปฏิสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด บน X

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ ถ้า R มีสมบัติ partial order บน X จะเรียก (X, R) ว่า partially ordered set

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า R เป็น congruence บน X ก็ต่อเมื่อ R สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X
2. ถ้า aRb และ uRv แล้ว $(au)R(bv)$ สำหรับทุก $a, b, u, v \in X$

บทนิยาม เรียก $(G, *)$ ว่า group ถ้า G ไม่เป็นเซตว่างและ $*$ เป็น operation บน G ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. สมบัติปิด

$$a * b \in G \text{ สำหรับทุก } a, b \in G$$
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a * (b * c) = (a * b) * c \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in G$$
3. มีเอกลักษณ์ (identity element) $e \in G$ ที่ว่า

$$a * e = a = e * a \text{ สำหรับทุก } a \in G$$
4. มีสมาชิกผกผัน (inverse element)

สำหรับแต่ละ $a \in G$ จะมี $b \in G$ ที่ $a * b = e = b * a$ และเรียก b ว่า สมาชิกผกผันของ a

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน G เป็น group แทน $(G,*)$ เป็น group

บทนิยาม ถ้า G เป็น group และ $a * b = b * a$ สำหรับทุก $a, b \in G$ แล้วจะเรียก G ว่า abelian group (หรือ commutative group)

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น group และให้ $f: G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(x * y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น group และให้ $f: G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

2. ผลงานของ Arai *et al.* (1966)

Arai *et al.* (1966) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของ BCI-algebra และสมบัติที่จะทำให้ระบบคณิตศาสตร์ $(X,*,0)$ เป็น BCI-algebra และ BCK-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X,*,0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X,*,0)$ ว่า BCI-algebra ถ้า $(X,*,0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$\text{BCI 1. } (x * y) * (x * z) \leq z * y$$

$$\text{BCI 2. } x * (x * y) \leq y$$

$$\text{BCI 3. } x \leq x$$

$$\text{BCI 4. } \text{ถ้า } x \leq y \text{ และ } y \leq x \text{ แล้ว } x = y$$

$$\text{BCI 5. } \text{ถ้า } x \leq 0 \text{ แล้ว } x = 0$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

นิยาม $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จาก BCI 5. จะได้ถ้า $x * 0 = 0$ แล้ว $x = 0$ และจะได้ $0 * x = 0 * 0 = 0$

ดังนั้น ถ้า $x * 0 = 0 * x = 0$ แล้ว $x = 0$

จาก BCI 1. จะได้ผลที่สำคัญดังนี้

(1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $z * y \leq z * x$ และถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ สำหรับทุก

$x, y, z \in X$

โดย (1) จะได้ ถ้า $x = y$ และ $y = z$ แล้ว $x = z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้ว่า BCI 2. $x * (x * y) \leq y$

สมมูลกับ (2) $(x * y) * z \leq (x * z) * y$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Arai *et al.* (1966)

ข้อสังเกต ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

1. $(x * y) * (x * z) \leq z * y$ ก็ต่อเมื่อ $(x * y) * (z * y) \leq x * z$
2. ถ้า $x * y \leq z$ แล้ว $x * z \leq y$
3. $(x * y) * z = (x * z) * y$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (3) $((x * y) * z) * (u * z) \leq (x * u) * y$
- (4) $((x * y) * z) * ((x * u) * y) \leq u * z$
- (5) $(x * y) * (z * u) \leq x * (z * (u * y))$
- (6) $(x * y) * (x * (z * (u * y))) \leq z * u$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Arai *et al.* (1966)

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า BCK-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 1. – BCI 4. และ BCI 6. $0 \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

โดย (2) และ BCI 6. จะได้ $0 \leq x$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \leq x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3. – BCI 5. และ (3) หรือ (4) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCI-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3., BCI 4., BCI 6. และ (3) หรือ (4) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCK-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3. – BCI 5. และ (5) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCI-algebra
4. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3., BCI 4., BCI 6. และ (5) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCK-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Arai *et al.* (1966)

3. ผลงานของ Iseki (1966)

Iseki (1966) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติที่จะทำให้ ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra และ BCK-algebra ดังนี้

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra จะได้ว่า

$$(i) (y * x) * (z * x) \leq y * z \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

$$(ii) (x * y) * (x * (z * (u * y))) \leq z * u \text{ สำหรับทุก } u, x, y, z \in X$$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 2. – BCI 5. และ (1) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCI-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 2. – BCI 4., BCI 6. และ (1) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCK-algebra

3. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3. – BCI 5. และ (2) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCI-algebra

4. ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ BCI 3., BCI 4., BCI 6. และ (2) แล้ว $(X, *, 0)$ จะเป็น BCK-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Iseki (1966)

4. ผลงานของ Jun (1994)

Jun (1994) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของ BCH-algebra , (r, l) system และความสัมพันธ์ระหว่าง BCI-algebra และ BCH-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า BCH-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$\text{BCH 1. } x \leq x$$

$$\text{BCH 2. } \text{ถ้า } x \leq y \text{ และ } y \leq x \text{ แล้ว } x = y$$

$$\text{BCH 3. } (x * y) * z = (x * z) * y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

$$\text{นิยาม } x \leq y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x * y = 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน X เป็น BCH-algebra แทน $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

ให้ X เป็น BCH-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุก $x, y \in X$

$$1. x * (x * y) \leq y$$

$$2. \text{ถ้า } x \leq 0 \text{ แล้ว } x = 0$$

$$3. x * 0 = 0$$

ถ้า X เป็น BCI-algebra แล้ว X เป็น BCH-algebra

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น groupoid ที่มีเอกลักษณ์ทางขวาเป็น 0 นั่นคือ $x * 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$ และให้ \leq เป็น partial order ที่นิยามโดย

1. $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

แล้วจะเรียก $(X, *, 0, \leq)$ ว่าเป็น (r, l) system

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra และ $(X, *, 0, \leq)$ เป็น (r, l) system สำหรับ $a \in X$ ให้ a_r หรือ a_l เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามโดย

$$a_r(x) = x * a \text{ หรือ } a_l(x) = a * x \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra หรือ BCH-algebra, $(X, *, 0, \leq)$ เป็น (r, l) system a_r และ a_l เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $a_r(0) = 0$ แล้ว $a = 0$ สำหรับทุก $a \in X$
2. $a_r a_l = 0$ สำหรับทุก $a \in X$
3. 0_r เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์จาก X ไปยัง X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun (1994)

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0, \leq)$ เป็น (r, l) system จะได้

1. X เป็น BCH-algebra ก็ต่อเมื่อ $(a * b)_l \leq b_r a_l$ สำหรับทุก $a, b \in X$
2. X เป็น BCI-algebra ก็ต่อเมื่อ $(a * b)_r (b_r a_l) = 0$ สำหรับทุก $a, b \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun (1994)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a_l \leq b_l$ สำหรับทุก $a, b \in X$ แล้วจะได้ว่า X เป็น BCI-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun (1994)

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0, \leq)$ เป็น (r, l) system จะได้ X เป็น BCI-algebra ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(a * b)_l \leq b_r a_l$ สำหรับทุก $a, b \in X$
2. ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a_l \leq b_l$ สำหรับทุก $a, b \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun (1994)

5. ผลงานของ Dudek and Zhang (1998)

Dudek and Zhang (1998) ได้นำเสนอแนวคิดใหม่ของ ideal ใน BCC-algebra และอธิบายการเชื่อมโยงระหว่าง ideal และ congruence ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(G, *, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ G จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(G, *, 0)$ ว่า BCC-algebra ถ้า $(G, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ (สำหรับ $x, y \in G$ เขียน xy แทน $x * y$)

$$\text{BCC 1. } ((xy)(zy))(xz) = 0$$

$$\text{BCC 2. } xx = 0$$

$$\text{BCC 3. } 0x = 0$$

$$\text{BCC 4. } x0 = x$$

$$\text{BCC 5. } \text{ถ้า } xy = 0 \text{ และ } yx = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน G เป็น BCC-algebra แทน $(G, *, 0)$ เป็น BCC-algebra

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก A ว่าเป็น BCC-ideal ของ G ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$1. 0 \in A$$

$$2. \text{ถ้า } (xy)z \in A \text{ และ } y \in A \text{ แล้ว } xz \in A \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in G$$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็น BCC-ideal ของ G กำหนดความสัมพันธ์ \sim บน G โดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy \in A$ และ $yx \in A$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra กำหนด ความสัมพันธ์ \leq บน G โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$

ข้อสังเกต (G, \leq) เป็น partially ordered set

ทฤษฎีบท ถ้า G เป็น BCC-algebra และ A เป็น BCC-ideal ของ G แล้วความสัมพันธ์ \sim เป็น congruence บน G

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น BCC-algebra และให้ $f : G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(xy) = f(x)f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

นิยาม kernel ของ homomorphism f คือเซต $\{x \in G \mid f(x) = 0\}$ หรือ $\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0\}$

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น BCC-algebra และ $f : G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

ทฤษฎีบท ให้ X, Y, Z เป็น BCC-algebra $f : X \rightarrow Y$ เป็น epimorphism และ $g : X \rightarrow Z$ เป็น homomorphism แล้วจะได้

1. quotient BCC-algebra $X/\ker(f)$ isomorphic กับ Y
2. ถ้า $\ker(f) \subseteq \ker(g)$ แล้วจะมี homomorphism $h : Y \rightarrow Z$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $h \circ g = f$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็น BCC-ideal ของ G จะเรียก A ว่า proper BCC-ideal ของ G ถ้า $A \neq G$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็น proper BCC-ideal ของ G จะเรียก A ว่า maximal BCC-ideal ของ G ถ้า $I \subsetneq A$ สำหรับทุก I เมื่อ I เป็น BCC-ideal ของ G และจะเรียก G ว่า BCC-simple ถ้า G ไม่มี proper BCC-ideal

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็น proper BCC-ideal ของ G แล้ว A จะเป็น maximal BCC-ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ G/A เป็น BCC-algebra และเป็น BCC-simple

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

6. ผลงานของ Ahn and Kim (1999)

Ahn and Kim (1999) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่างๆของ QS-algebra และ G-part ของ QS-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า Q-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $(x * y) * z = (x * z) * y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra จะได้ว่า $(x * (x * y)) * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า QS-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $(x * y) * z = (x * z) * y$
4. $(x * y) * (x * z) = z * y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน X เป็น QS-algebra แทน $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra นิยามความสัมพันธ์ \leq บน X โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ข้อสังเกต ถ้า X เป็น QS-algebra แล้ว X เป็น Q-algebra

ตัวอย่าง 1. ให้ $(Z, -, 0)$ เมื่อ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $-$ เป็นการลบในจำนวนเต็ม แล้วจะได้ว่า Z เป็นทั้ง Q-algebra และ QS-algebra

2. ให้ $(nZ, -, 0)$ เมื่อ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $-$ เป็นการลบในจำนวนเต็ม แล้วจะได้ว่า nZ เป็นทั้ง Q-algebra และ QS-algebra

3. ให้ $(R, -, 0)$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวน และ $-$ เป็นการลบในจำนวนจริง แล้วจะได้ว่า R เป็นทั้ง Q-algebra และ QS-algebra

4. ให้ $(C, -, 0)$ เมื่อ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $-$ เป็นการลบในจำนวนเต็ม แล้วจะได้ว่า C เป็นทั้ง Q-algebra และ QS-algebra

5. ให้ $X = \{0,1,2\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	0	0

แล้วจะได้ว่า X เป็นทั้ง Q-algebra และ QS-algebra แต่ไม่เป็น BCH-algebra BCI-algebra และ BCK-algebra

6. ให้ $X = \{0,1,2,\dots,w\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังนี้

$$x * y = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \leq y \\ w & \text{ถ้า } y < x \text{ และ } y \neq 0 \\ x & \text{ถ้า } y < x \text{ และ } y = 0 \end{cases}$$

เมื่อ \leq เป็น natural ordering บน X และ $x < y$ หมายถึง $x \leq y$ และ $x \neq y$ สำหรับทุก

$x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า X เป็น Q-algebra แต่ไม่เป็น QS-algebra เนื่องจาก

$$(2 * 1) * (2 * 0) = w * x = w \neq 0 = 0 * 1$$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น QS-algebra แล้วจะได้ว่าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $z * y \leq z * x$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
3. ถ้า $x * y \leq z$ แล้ว $x * z \leq y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
4. $(x * z) * (y * z) \leq x * y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
5. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x * z \leq y * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
6. $(0 * (0 * (0 * x))) = 0 * x$ สำหรับทุก $x \in X$
7. ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $0 * y = 0 * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
8. ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $y = z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
9. ถ้า $x * z = y * z$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น QS-algebra จะได้

1. ถ้า X สอดคล้องกับสมบัติ $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ X เป็น BCI-algebra
2. ถ้า X สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้
 - 1) $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
 - 2) $(x * y) * x = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ X เป็น BCK-algebra

3. ถ้า X สอดคล้องกับสมบัติ $x * (x * y) = x * y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ X เป็น trivial algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra แล้วเรียกเซต $B(X) = \{x \in X \mid 0 * x = 0\}$ ว่า p-radical ของ X และเรียก X ว่า p-semisimple ถ้า $B(X) = 0$

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra และ $S \subseteq X$ นิยาม $G(S) = \{x \in S \mid 0 * x = x\}$ และ ถ้า $S = X$ จะเรียก $G(X)$ ว่า G-part ของ X

ข้อสังเกต $G(X) \cap B(X) = \{0\}$

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra จะเรียก X ว่า medial QS-algebra ถ้า

$$(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u) \text{ สำหรับทุก } x, y, z, u \in X$$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น medial QS-algebra แล้วจะได้ $x * (x * y) = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น QS-algebra แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน สำหรับทุก

$$x, y, z, u \in X$$

1. $(x * z) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$
2. $x * (y * z) = (x * y) * (0 * z)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

บทนิยาม ให้ X และ Y เป็น QS-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ จะเรียก f ว่า homomorphism ถ้า

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

$$\text{นิยาม } \text{Hom}(X) = \{ f: X \rightarrow Y \mid f \text{ เป็น homomorphism} \}$$

ข้อสังเกต $\text{Hom}(X)$ เป็น medial QS-algebra ก็ต่อเมื่อ X เป็น medial QS-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า ideal ของ X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $x * y \in I$ และ $y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $x \in I$

เห็นได้ชัดว่า $\{0\}$ และ X เป็น ideal ของ X โดยที่ $\{0\}$ เรียกว่า zero ideal และ X เรียกว่า trivial ideal ถ้า I เป็น ideal ของ X และ $I \neq X$ แล้วจะเรียก I ว่า proper ideal ของ X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น medial QS-algebra แล้วจะได้ $G(X)$ เป็น ideal ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

บทนิยาม ให้ X เป็น QS-algebra จะเรียก X ว่า associative QS-algebra ถ้า $(x * y) * z = x * (y * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น associative QS-algebra จะได้

1. $x * y = y * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. $(G(X), *)$ เป็น abelian group

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Ahn and Kim (1999)

7. ผลงานของ Liu *et al.* (2000)

Liu *et al.* (2000) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของ q-ideal และ a-ideal ใน BCI-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า BCI-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
2. $(x * (x * y)) * y = 0$
3. $x * x = 0$
4. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

นิยาม $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ข้อสังเกต (X, \leq) เป็น partially ordered set

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน X เป็น BCI-algebra แทน $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

ให้ X เป็น BCI-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x * 0 = x$
2. $(x * y) * z = (x * z) * y$
3. $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$
4. $x * (x * (x * y)) = x * y$
5. $((x * z) * (y * z)) * (x * y) = 0$
6. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x * z \leq y * z$ และ $z * y \leq z * x$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า ideal ของ X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $x * y \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก S ว่า subalgebra ของ X ถ้า $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra ถ้า $(x * y) * z = x * (y * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้วจะเรียก X ว่า associative BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra ถ้า $(x * y) * z \leq x * (y * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้วจะเรียก X ว่า quasi -associative BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า q-ideal ของ X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $x * (y * z) \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x * z \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง ให้ $X = \{0, a, b\}$ เป็น BCI-algebra โดยที่ นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

จะได้ว่า $I = \{0, a\}$ เป็น q-ideal ของ X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น q-ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น ideal และเป็น subalgebra ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu at al. (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. I เป็น q-ideal ของ X
2. ถ้า $x * (0 * y) \in I$ แล้ว $x * y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. ถ้า $x * (y * z) \in I$ แล้ว $(x * y) * z \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu at al. (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra, A และ I เป็น ideal ของ X โดยที่ $I \subseteq A$ ถ้า I เป็น q-ideal ของ X แล้วจะได้ว่า A เป็น q-ideal ของ X ด้วย

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu at al. (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X ถ้า $x \in I$ และ $y \in X$ แล้ว $x * y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า I เป็น q-ideal ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu at al. (2000)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า a -ideal ของ X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $(x * z) * (0 * y) \in I$ และ $z \in I$ แล้ว $y * x \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง ให้ $X = \{0, a, b, c\}$ เป็น BCI-algebra โดยที่ นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

จะได้ว่า $I = \{0, a\}$ เป็น a -ideal ของ X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น a -ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น ideal และเป็น subalgebra ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu *at al.* (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. I เป็น a -ideal ของ X
2. ถ้า $(x * z) * (0 * y) \in I$ แล้ว $y * (x * z) \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
3. ถ้า $x * (0 * y) \in I$ แล้ว $y * x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu *at al.* (2000)

บทตั้ง ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น p -ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ ถ้า $0 * (0 * x) \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra จะได้

1. ถ้า I เป็น a -ideal ของ X แล้ว I เป็น p -ideal ของ X
2. ถ้า I เป็น a -ideal ของ X แล้ว I เป็น q -ideal ของ X
3. I เป็น a -ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ I เป็นทั้ง p -ideal และ q -ideal ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu et al. (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra, A และ I เป็น q -ideal ของ X โดยที่ $I \subseteq A$ ถ้า I เป็น a -ideal ของ X แล้วจะได้ว่า A เป็น a -ideal ของ X ด้วย

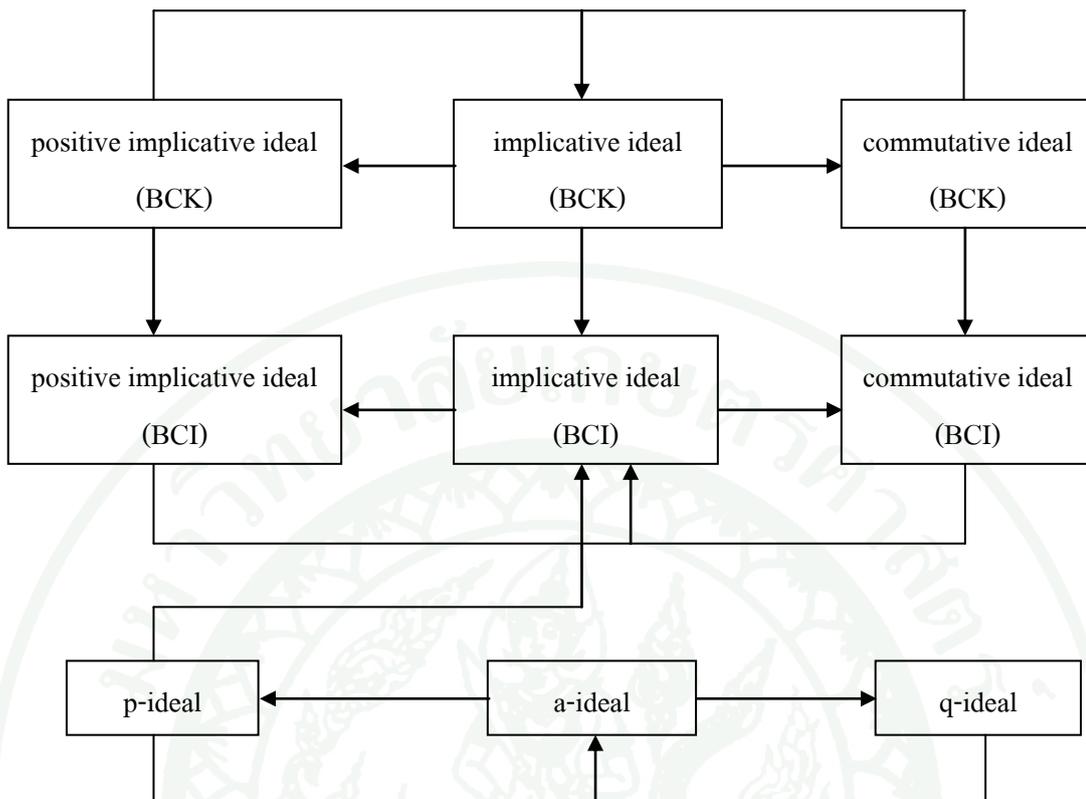
พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu et al. (2000)

บทตั้ง ให้ X เป็น BCK-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น implicative ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ I เป็นทั้ง commutative ideal และ positive implicative ideal ของ X

บทตั้ง ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น implicative ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ I เป็นทั้ง commutative ideal และ positive implicative ideal ของ X

บทตั้ง ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น p -ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น implicative ideal ของ X

สรุปความสัมพันธ์ของ ideal ต่างๆ ของ BCI-algebra และ BCK-algebra ได้ดังแผนภาพในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่าง ideal ต่างๆของ BCI-algebra และ BCK-algebra

บทตั้ง ให้ X เป็น BCI-algebra แล้วจะได้ว่า X เป็น associative BCI-algebra ก็ต่อเมื่อ $0 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. X เป็น associative BCI-algebra
2. I เป็น a-ideal ของ X
3. zero ideal ($\{0\}$) ของ X เป็น a-ideal ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu *at al.* (2000)

ให้ X เป็น BCI-algebra, I เป็น ideal ของ X และ \sim เป็น congruence บน X

นิยาม $C_x = \{y \in X \mid x \sim y\}$ เป็น equivalence class ที่บรรจุ x สำหรับทุก $x \in X$

นิยาม $X/I = \{C_x \mid x \in X\}$

นิยาม $*$ บน X/I โดย $C_x * C_y = C_{xy}$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า

1. I เป็น a-ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ X/I เป็น associative BCI-algebra
2. I เป็น q-ideal ของ X ก็ต่อเมื่อ X/I เป็น quasi-associative BCI-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu *at al.* (2000)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra I เป็น ideal ของ X และ $P(X) = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$ แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. X เป็น quasi-associative BCI-algebra
2. I เป็น q-ideal ของ X
3. zero ideal ของ X เป็น q-ideal ของ X
4. X/I เป็น quasi-associative BCI-algebra
5. $X/P(X)$ เป็น quasi-associative BCI-algebra
6. $X/P(X)$ เป็น associative BCI-algebra
7. $P(X)$ เป็น a-ideal ของ X
8. $P(X)$ เป็น q-ideal ของ X
9. ถ้า $I \subseteq P(X)$ แล้ว I เป็น q-ideal ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Liu *at al.* (2000)

8. ผลงานของ Neggers and Kim (2002)

Neggers and Kim (2002) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของ B-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า B-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง 1. ให้ $X = \{0,1,2\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

2. ให้ $X = \mathbb{R} - \{-n\}$ เมื่อ \mathbb{R} เป็นเซตของจำนวนจริง $n \in \mathbb{R}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ โดย

$$x * y = \frac{n(x-y)}{n+y}$$

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

3. ให้ $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2
5	5	3	4	2	1	0

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

ถ้าแทน $y = x$ ใน บทนิยาม B-algebra ข้อ 3 จะได้

$$(x * x) * z = x * (z * (0 * x)) \quad (a)$$

ถ้าแทน $z = x$ ใน (a) จะได้

$$0 * x = x * (x * (0 * x)) \quad (b)$$

จากบทนิยาม B-algebra ข้อ 1 และ (a) จะได้

$$0 = x * (0 * (0 * x)) \quad (c)$$

ข้อสังเกต สมบัติข้อ 1, 2 และ 3 ในบทนิยาม B-algebra เป็นอิสระต่อกัน

ให้ $X = \{0,1,2\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	0	1	0

แล้วจะได้ว่า $(X,*,0)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และข้อ 3 ในบทนิยาม B-algebra เป็นจริง แต่ข้อ 2 ไม่จริง เพราะว่า $2 * 0 = 0 \neq 2$

ให้ $X = \{0,1,2\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

แล้วจะได้ว่า $(X,*,0)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 และข้อ 3 ในบทนิยาม B-algebra เป็นจริง แต่ข้อ 1 ไม่จริง เพราะว่า $1 * 1 = 1 \neq 0$

ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	1
3	3	0	0	0

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 และข้อ 2 ในบทนิยาม B-algebra เป็นจริง แต่ข้อ 3 ไม่จริง เพราะว่า $(2 * 3) * 0 = 1 \neq 2 = 2 * (0 * (0 * 3))$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x * y = x * (0 * (0 * y))$
2. $(x * y) * (0 * y) = x$
3. ถ้า $x * z = y * z$ แล้ว $x = y$
4. $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$
5. ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $x = y$
6. ถ้า $0 * x = 0 * y$ แล้ว $x = y$
7. $0 * (0 * x) = x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Neggers and Kim (2002)

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra และ $g \in X$ นิยาม $g^n = g^{n-1} * (0 * g)$ เมื่อ $n \geq 1$ และ $g^0 = 1$ จะได้ $g^1 = g^0 * (0 * g) = 0 * (0 * g) = g$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra, $g \in X$ และ $m, n \geq 1$ จะได้

$$g^m * g^n = \begin{cases} g^{m-n} & \text{ถ้า } m \geq n \\ 0 * g^{n-m} & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Neggers and Kim (2002)

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra สำหรับทุก $a, b \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $(a * b) * b = a * b^2$
2. $(0 * b) * (a * b) = 0 * a$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Neggers and Kim (2002)

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra ถ้า $a * (0 * b) = b * (0 * a)$ สำหรับทุก $a, b \in X$ แล้วจะเรียก $(X, *, 0)$ ว่า commutative B-algebra

B-algebra ในตัวอย่าง 1 เป็น commutative B-algebra แต่ B-algebra ในตัวอย่าง 3 ไม่เป็น commutative B-algebra เพราะว่า $3 * (0 * 4) = 2 \neq 1 = 4 * (0 * 3)$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น commutative B-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้ เป็นจริง

1. $(0 * x) * (0 * y) = y * x$
2. $x * (x * y) = y$
3. ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $y = z$
4. $(0 * x) * (x * y) = y * x^2$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Neggers and Kim (2002)

9. ผลงานของ Dar and Akram (2006)

Dar and Akram (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ใน endomorphism ของ BCH-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า BCH-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$
3. $(x * y) * z = (x * z) * y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน X เป็น BCH-algebra แทน $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

ให้ X เป็น BCH-algebra สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

4. $x * 0 = x$
5. $x * 0 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
6. $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$
7. $(x * (x * y)) * y = 0$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก S ว่า BCH-subalgebra ของ X ถ้า $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra และ J เป็น BCH-subalgebra ของ X จะเรียก J ว่า BCH-ideal ของ X ถ้า $x * y \in J$ และ $x \in J$ แล้ว $y \in J$ สำหรับทุก $x, y \in J$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra และ $\phi: X \rightarrow X$ จะเรียก ϕ BCH-endomorphism ถ้า $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

$$\text{End}(X) = \{\phi: X \rightarrow X \mid \phi \text{ เป็น BCH - endomorphism}\}$$

$$\text{Ker}\phi = \{x \in X \mid \phi(x) = 0\} \text{ และ } \text{Im}\phi = \phi(X) = \{x \in X \mid \phi(x) = 0\}$$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra และ $\phi: X \rightarrow X$ โดยที่ ϕ เป็น BCH-endomorphism สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\phi(0) = 0$
2. $\phi(0 * x) = 0 * \phi(x)$
3. ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $\phi(x) * \phi(y) = 0$
4. ถ้า S เป็น BCH-subalgebra ของ X แล้ว $\phi(S)$ เป็น BCH-subalgebra ของ X ด้วย
5. ถ้า S เป็น BCH-ideal ของ X แล้ว $\phi(S)$ เป็น BCH-ideal ของ X ด้วย
6. $\text{Ker}\phi$ เป็น BCH-ideal ของ X สำหรับแต่ละ $\phi \in \text{End}(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra สำหรับแต่ละ $x \in X$ นิยาม $L_x(t) = x * t$ และ $R_x(t) = t * x$ สำหรับทุก $t \in X$

ให้ X เป็น BCH-algebra $L = \{L_x \mid x \in X\}$ และ $R = \{R_x \mid x \in X\}$ จะได้สมาชิกใน L และ R เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อ $L_x(t) = R_t(x)$ สำหรับทุก $x, t \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra และ \circ เป็นความสัมพันธ์ composition สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $R_y \circ L_0 = L_0 * y$
2. $R_x \circ R_y = R_y \circ R_x$
3. $L_0 \circ R_y = R_0 * y \circ L_0 = L_0 * (0 * y)$
4. $L_x \circ R_0 = L_x = R_0 \circ L_x$
5. $R_y \circ L_x = L_{x * y}$
6. $L_0 \circ L_x = L_0 * x \circ L_0$
7. $L_0 \circ (L_x \circ R_y) = L_0 * x \circ L_0 * (0 * y)$
8. $L_0 \circ (R_y \circ L_x) = (R_0 * y \circ L_0 * x) \circ L_0 = L_0 \circ L_{x * y}$
9. $L_0 \circ (L_y \circ L_x) = L_0^2 \circ L_{x * y}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra และ $L = \{L_x \mid x \in X\}$ จะได้ว่า L_0 เป็น BCH-endomorphism ของ X เพียงตัวเดียวใน L

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

ให้ X เป็น BCH-algebra และ n เป็นจำนวนเต็ม สำหรับทุก $x \in X$ นิยาม action บน L_0 ดังนี้

$$\begin{aligned}
0 * x &= 0^1 * x \\
0 * (0 * x) &= 0^2 * x \\
0 * (0 * (0 * x)) &= 0^3 * x \\
&\vdots \\
0 * (0 * (0 * \dots (n \text{ ตัว}) * x)) &= 0^n * x
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต ให้ X เป็น BCH-algebra และ k, l และ m เป็นจำนวนเต็ม สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้

1. $0 * (0^k * x) = 0^{k+1} * x$
2. $0^l * (0^m * x) = 0^{l+m} * x$
3. $(0^l * x) * (0^l * y) = 0^l * (x * y)$
4. $0^3 * x = 0 * x$

บทแทรก ให้ X เป็น BCH-algebra

1. L_0 เป็น periodic map ใน 2 รอบ
2. L_0^2 เป็น identity map ใน $L_0(X) = \{0 * x \mid x \in X\}$
3. L_0 เป็น epimorphism บน X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $0 * (x * y) = 0^2 * (y * x)$
2. $(0^2 * z) * (y * x) = 0^2 * (x * (y * z))$
3. $0 * (x * (x * y)) = 0 * y$
4. $0 * ((x * y) * (x * z)) = 0 * (z * y)$
5. $(0^2 * y) * x = (0 * (x * y))$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra จะได้ BCH-subalgebra $L_0(X) = \{0 * x \mid x \in X\}$ และ $L_0^2(X) = \{0 * (0 * x) \mid x \in X\}$ ของ X เป็น BCI-subalgebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

ให้ X เป็น BCH-algebra นิยาม ความสัมพันธ์ \sim ใน X โดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า ความสัมพันธ์ \sim ใน X มีสมบัติการสะท้อน (reflexive) และ สมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) แต่ไม่มีสมบัติการถ่ายทอด (transitive) ดังนั้นจึงนิยามความสัมพันธ์ \approx ใหม่โดยที่มีสมบัติสมมาตร (symmetric) และสมบัติ transitive closure ของ \sim ซึ่งนิยามความสัมพันธ์ \approx ใน X โดย $x \approx y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in \text{Ker} L_0$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ บทตั้งดังต่อไปนี้

บทตั้ง ให้ X เป็น BCH-algebra และความสัมพันธ์ \approx ใน X นิยามโดย $x \approx y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in \text{Ker} L_0$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า $x \approx y$ ก็ต่อเมื่อ $0 * x = 0 * y$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

บทแทรก ให้ X เป็น BCH-algebra ความสัมพันธ์ \approx ใน X นิยามโดย $x \approx y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in \text{Ker} L_0$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. ความสัมพันธ์ \approx ใน X มีสมบัติสมมาตร
2. ความสัมพันธ์ \approx ใน X มีสมบัติถ่ายทอด

บทนิยาม ให้ X เป็น BCH-algebra แล้ว ความสัมพันธ์ \sim ใน X และความสัมพันธ์ \approx ใน X จะเรียกว่า equivalence closure บน X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $\sim \subseteq \approx$
2. \approx เป็น equivalence relation

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra และ ความสัมพันธ์ \sim ใน X นิยามโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่ามี equivalence closure \approx ของ \sim บน X ที่นิยามโดย $x \approx y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in \text{Ker} L_0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCH-algebra และ L_0 เป็น BCH-epimorphism บน X แล้วจะได้

$$X / \text{Ker} L_0 \cong L_0(X)$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dar and Akram (2006)

10. ผลงานของ Walendziak (2007)

Walendziak (2007) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของ BF-algebra และ ideal ใน BF-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ ว่า B-algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

สำหรับทุก $x, y, z \in A$

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ ว่า BH-algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y \in A$

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ ว่า BG-algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $x = (x * y) * (0 * y)$

สำหรับทุก $x, y \in A$

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(A, *, 0)$ ว่า BF-algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * x = 0$
2. $x * 0 = x$
3. $0 * (x * y) = y * x$

สำหรับทุก $x, y \in A$

ตัวอย่าง 1. ให้ $A = (R, *, 0)$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน R สำหรับทุก $x, y \in R$ โดย

$$x * y = \begin{cases} x & \text{ถ้า } y = 0 \\ y & \text{ถ้า } x = 0 \\ 0 & \text{ถ้า อื่นๆ} \end{cases}$$

แล้วจะได้ว่า A เป็น BF-algebra

2. ให้ $A = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน A โดย $x * y = |x - y|$ สำหรับทุก $x, y \in A$ แล้วจะได้ว่า $(A, *, 0)$ เป็น BF-algebra

ทฤษฎีบท ให้ $(A, *, 0)$ เป็น BF-algebra สำหรับทุก $x, y \in A$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $0 * (0 * x) = x$
2. ถ้า $0 * x = 0 * y$ แล้ว $x = y$
3. ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $y * x = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ทฤษฎีบท ให้ $(A, *, 0)$ เป็น BF-algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ $(x * z) * (y * z) = x * y$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$ แล้ว $(A, *, 0)$ จะเป็น B-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

บทนิยาม ให้ $(A, *, 0)$ เป็น BF-algebra จะเรียก $(A, *, 0)$ ว่า BF_1 -algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ $x = (x * y) * (0 * y)$ สำหรับทุก $x, y \in A$ และจะเรียก $(A, *, 0)$ ว่า BF_2 -algebra ถ้า $(A, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$

ถ้า $(A, *, 0)$ เป็น B-algebra แล้ว $(A, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra และ BF_2 -algebra $(R, *, 0)$ ในตัวอย่าง 1 ไม่เป็น BF_1 -algebra เพราะว่า $(1 * 2) * (0 * 2) = 2 \neq 1$ $(A, *, 0)$ ในตัวอย่าง 2 เป็น BF_2 -algebra แต่ไม่เป็น BF_1 -algebra

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A จะได้ว่า

1. A เป็น BF_1 -algebra ก็ต่อเมื่อ A สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

- 1) $x * x = 0$
- 2) $0 * (x * y) = y * x$
- 3) $x = (x * y) * (0 * y)$

สำหรับทุก $x, y \in A$

2. A เป็น BF_2 -algebra ก็ต่อเมื่อ A สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

- 1) $x * 0 = x$
- 2) $0 * (x * y) = y * x$
- 3) $x * y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

สำหรับทุก $x, y \in A$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0)$ เป็น BF-algebra แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็น BF_1 -algebra
2. $x = (x * (0 * y)) * y$ สำหรับทุก $x, y \in A$
3. $x = y * ((0 * x) * (0 * y))$ สำหรับทุก $x, y \in A$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แล้วจะได้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. A เป็น BG-algebra
2. ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$
3. ถ้า $x * y = z * y$ แล้ว $x = z$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$
4. ถ้า $y * x = y * z$ แล้ว $x = z$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$

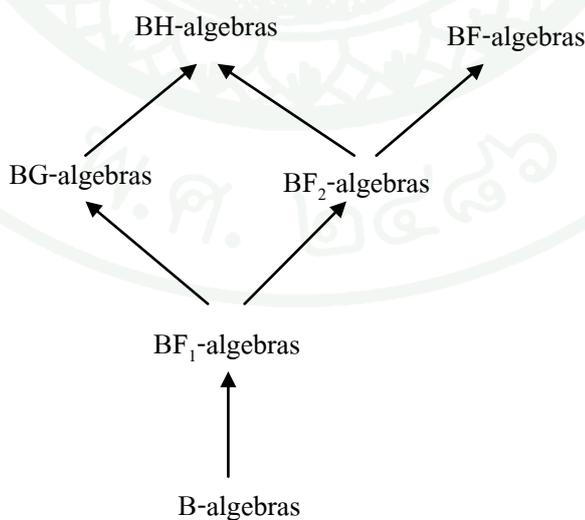
พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์ โดยที่ A เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย * เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ A

1. ถ้า A เป็น BF_1 -algebra แล้ว A เป็น BF_2 -algebra
2. ถ้า A เป็น BF_2 -algebra และสอดคล้องกับสมบัติ $x = (x * y) * (0 * y)$ สำหรับทุก $x, y \in A$ แล้ว A เป็น BF_1 -algebra
3. ถ้า A เป็น BF_1 -algebra แล้ว $(A, *)$ เป็น quasi-group

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

สรุปความสัมพันธ์ของโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ ได้ดังแผนภาพในภาพที่ 2 โดยที่ ถ้า X และ Y เป็น class ของโครงสร้างพีชคณิต แล้ว $X \rightarrow Y$ หมายถึง X เป็น subclass ของ Y



ภาพที่ 2 ความสัมพันธ์ของ B-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BF-algebra, BG-algebra และ BH-algebra

เพื่อความสะดวกต่อไปนี้จะเขียน A เป็น BF-algebra แทน $(A, *, 0)$ เป็น BF-algebra

บทนิยาม ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ A จะเรียก I ว่า ideal ของ A ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $x * y \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in A$

บทนิยาม ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น ideal ของ A แล้ว

1. เรียก I ว่า normal ideal ถ้า $x * y \in I$ แล้ว $(z * x) * (z * y) \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$
2. เรียก I ว่า proper ideal ถ้า $I \neq A$

เห็นได้ชัดว่า $\{0\}$ และ A เป็น ideal ของ A โดยที่ A เป็น normal ideal แต่ $\{0\}$ ไม่เป็น normal ideal

ตัวอย่าง ให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	0
2	2	3	0	2
3	3	0	2	0

จะได้ว่า A เป็น BF-algebra และ $I = \{0\}$ ไม่เป็น normal ideal ของ A เพราะ
 $1 * 3 = 0 \in I$ แต่ $(2 * 1) * (2 * 3) = 3 * 2 = 2 \notin I$

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น normal ideal ของ A แล้วจะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $x \in I$ แล้ว $0 * x \in I$
2. ถ้า $x * y \in I$ แล้ว $y * x \in I$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

บทนิยาม ให้ A เป็น BF-algebra และ N เป็นสับเซตไม่ว่างของ A จะเรียก N ว่า subalgebra ของ A ถ้า $x * y \in N$ สำหรับทุก $x, y \in N$

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น BF-algebra N เป็น subalgebra ของ A และ $x, y \in A$ แล้วจะได้
ถ้า $x * y \in N$ แล้ว $y * x \in N$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ตัวอย่าง ให้ $A = \{0,1,2,3\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	1
2	2	1	0	1
3	3	1	1	0

จะได้ว่า A เป็น BF-algebra

$N = \{0,1\}$ เป็น subalgebra ของ A แต่ไม่เป็น ideal ของ A

$I = \{0,2,3\}$ เป็น ideal ของ A แต่ไม่เป็น subalgebra ของ A

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น normal ideal ของ A จะได้ I เป็น subalgebra ของ A
ถ้า $x \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $x * (x * y) \in I$ สำหรับทุก $x, y \in A$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

บทนิยาม ให้ A เป็น B-algebra และ N เป็น subalgebra ของ A จะเรียก N ว่า normal subalgebra ถ้า
 $(x * a) * (y * b) \in N$ สำหรับทุก $x * y, a * b \in N$

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น B-algebra และ $N \subseteq A$ จะได้ N เป็น normal subalgebra ของ A ก็ต่อเมื่อ
 N เป็น normal ideal

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

บทนิยาม ให้ $A = (A, *, 0_A)$ และ $B = (B, *, 0_B)$ เป็น BF-algebra และ $\varphi: A \rightarrow B$ จะเรียก φ ว่า homomorphism จาก A ไป B ถ้า $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ สำหรับทุก $x, y \in A$

$$\text{นิยาม } \text{Ker}\varphi = \{ x \in X \mid \varphi(x) = 0_B \}$$

$$\text{เห็นได้ชัดว่า } \varphi(0_A) = 0_B \text{ เพราะว่า } \varphi(0_A) = \varphi(0_A * 0_A) = \varphi(0_A) * \varphi(0_A) = 0_B$$

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0_A)$ และ $B = (B, *, 0_B)$ เป็น BF-algebra และ $\varphi: A \rightarrow B$ เป็น homomorphism จาก A ไป B จะได้ $\text{Ker } \varphi$ เป็น ideal ของ A

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ตัวอย่าง ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ เป็น BF-algebra โดยนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	0

ให้ $\varphi: A \rightarrow A$ โดยนิยาม $\varphi(0) = 0$ และ $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$

เห็นได้ชัดว่า φ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0_A)$ และ $B = (B, *, 0_B)$ เป็น BF₂-algebra และ $\varphi: A \rightarrow B$ เป็น homomorphism จาก A ไป B จะได้

1. $\text{Ker } \varphi$ เป็น normal ideal ของ A
2. φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\text{Ker } \varphi = \{0_A\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

บทนิยาม ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น normal ideal ของ A จะได้ I เป็น subalgebra ของ A นิยาม $x \sim_1 y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in A$

ความสัมพันธ์ \sim_1 เป็นความสัมพันธ์สมมูลใน A

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น normal ideal ของ A จะได้ ความสัมพันธ์ \sim_1 เป็น congruence บน A

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ให้ A เป็น BF-algebra และ I เป็น normal ideal ของ A สำหรับแต่ละ $x \in A$ นิยาม $x/I = \{y \in A \mid x \sim_1 y\}$ เป็น congruence class ที่บรรจุ x

ข้อสังเกต $x \sim_1 y$ ก็ต่อเมื่อ $x/I = y/I$

นิยาม $A/I = \{x/I \mid x \in A\}$ และเรียก A/I ว่า quotient BF-algebra ของ A

นิยาม $x/I *' y/I = x * y/I$ สำหรับทุก $x, y \in A$

ข้อสังเกต $(A/I, *', 0/I)$ เป็น BF-algebra

Natural map φ_I เรียกว่า quotient map จาก A ไป A/I นิยามโดย

$$\varphi_I(x) = x/I \text{ สำหรับทุก } x \in A$$

จะได้ φ_I เป็น homomorphism จาก A ไป A/I และ $\text{Ker } \varphi_I = I$

ทฤษฎีบท ให้ $A = (A, *, 0_A)$ และ $B = (B, *, 0_B)$ เป็น BF_2 -algebra และ $\varphi: A \rightarrow B$ เป็น homomorphism จาก A ไป B จะได้ $A/\text{Ker } \varphi$ isomorphic กับ B

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

11. ผลงานของ Megalai and Tamilarasi (2010)

Megalai and Tamilarasi (2010) ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ของ TM-algebra และ classification ของ TM-algebra ดังนี้

บทนิยาม ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า TM-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x * 0 = x$
2. $(x * y) * (x * z) = z * y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

นิยามความสัมพันธ์ \leq บน X โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

3. $x * x = 0$
4. $(x * y) * x = 0 * y$
5. $x * (x * y) = y$
6. $(x * z) * (y * z) \leq x * y$
7. $(x * y) * z = (x * z) * y$
8. ถ้า $x * 0 = 0$ แล้ว $x = 0$
9. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x * z \leq y * z$ และ $z * y \leq z * x$
10. $x * (x * (x * y)) = x * y$
11. $0 * (x * y) = y * x = (0 * x) * (0 * y)$
12. $(x * (x * y)) * y = 0$
13. ถ้า $x * y = 0$ และ $y * x = 0$ แล้ว $x = y$

ตัวอย่าง ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

ต่อไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง TM-algebra กับ โครงสร้างพีชคณิตอื่นๆ

ทฤษฎีบท

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCK-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
4. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
5. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องสมบัติ $(x * y) * (x * z) = z * y$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra.
6. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $x * z = z$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น trivial algebra.

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Megalai and Tamilarasi (2010)

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า ideal ของ $(X, *, 0)$ ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in I$
2. ถ้า $x * y \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

สำหรับ ideal I ใดๆของ $(X, *, 0)$ ถ้า $y \in I$ และ $x \leq y$ แล้ว $x \in I$

ตัวอย่าง ให้ $X = \{0, a, b, c\}$ เป็น TM-algebra โดยที่ นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	a	b	c
0	0	0	c	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	c
c	c	c	b	0

จะได้ $I = \{0, a\}$ เป็น ideal ของ $(X, *, 0)$

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCK-algebra

1. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า positive implicative ถ้า

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

2. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า implicative ถ้า

$$x *(x * y) = y *(y * x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

1. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly positive implicative ถ้า

$$(x * y) * z = ((x * z) * z) * (y * z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

2. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly implicative ถ้า

$$(x * (y * x)) * (0 * (y * x)) = 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

3. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly commutative ถ้า

$$(x * (x * y)) * (0 * (x * y)) = y *(y * x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra จะได้ $(X, *, 0)$ เป็น weakly positive implicative ก็ต่อเมื่อ $x * y = ((x * y) * y) * (0 * y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

1. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly positive implicative ถ้า

$$x * y = ((x * y) * y) * (0 * y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

2. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly implicative ถ้า

$$(x * (y * x)) * (0 * (y * x)) = x \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

3. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า weakly commutative ถ้า

$$(x * (x * y)) * (0 * (x * y)) = y * (y * x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra จะได้ ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น weakly implicative แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น weakly positive implicative

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCK-algebra จะได้ ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น implicative แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น positive implicative

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

1. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า positive implicative ถ้า

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

2. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า implicative ถ้า

$$x * (y * x) = x \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra และ I เป็น ideal ของ $(X, *, 0)$ จะเรียก I ว่า implicative ideal ถ้า $(x * y) * z \in I$ และ $y * z \in I$ แล้ว $x * z \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra, I เป็น implicative ideal ของ $(X, *, 0)$ และ $G(x) = \{x \in X \mid 0 * x = x\}$ จะได้ $G(x) \subseteq I$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Megalai and Tamilarasi (2010)

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

1. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า 1-weakly positive implicative ถ้า

$$((x * y) * y) * (0 * y) = x * y \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

2. เรียก $(X, *, 0)$ ว่า 2-weakly positive implicative ถ้า

$$(x * (x * y)) * (0 * (x * y)) = x * y \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

1. สำหรับ $x \in X$ นิยาม $R_x : X \rightarrow X$ โดย $R_x(y) = y * x$ สำหรับทุก $y \in X$

และจะเรียก R_x ว่า right translation ของ X

2. สำหรับ $x \in X$ นิยาม $R'_x : X \rightarrow X$ โดย $R'_x(y) = x * y$ สำหรับทุก $y \in X$

และจะเรียก R'_x ว่า left translation ของ X

บทนิยาม ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

1. สำหรับ $x \in X$ นิยาม $T_x : X \rightarrow X$ โดย $T_x(y) = (y * x) * (0 * x)$ สำหรับทุก $y \in X$

และจะเรียก T_x ว่า weak right translation ของ X

2. สำหรับ $x \in X$ นิยาม $T'_x : X \rightarrow X$ โดย $T'_x(y) = (x * y) * (0 * y)$ สำหรับทุก $y \in X$

และจะเรียก T'_x ว่า weak left translation ของ X

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra และ \circ เป็น composition ของฟังก์ชัน จะได้

1. $(X, *, 0)$ เป็น 1-weakly positive implicative ของ $(X, *, 0)$ ก็ต่อเมื่อ $R_z = T_z \circ R_z$ สำหรับทุก $z \in X$
2. $(X, *, 0)$ เป็น 2-weakly positive implicative ของ $(X, *, 0)$ ก็ต่อเมื่อ $R'_z = T'_z \circ R'_z$ สำหรับทุก $z \in X$
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น 1-weakly positive implicative ของ $(X, *, 0)$ แล้ว $T_z = T_z \circ T_z = T_z^2$ สำหรับทุก $z \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Megalai and Tamilarasi (2010)

ทฤษฎีบท ให้ $(X, *, 0)$ เป็น 2-weakly positive implicative TM-algebra ถ้า $T'_z(y) \in G(x)$ และ $x \leq T'_z(y)$ แล้ว $T_x'^2 = T'_x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Megalai and Tamilarasi (2010)

วิธีการ

บทนิยาม 1 กำหนดให้ $(X, *, 0)$ เป็นระบบคณิตศาสตร์ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง 0 เป็นสมาชิกของ X และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค สำหรับสมาชิก x, y ใดๆของ X เขียน xy แทน $x * y$ แล้วจะเรียก ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า

1. Q-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$Q 1. \quad xx = 0$$

$$Q 2. \quad x0 = x$$

$$Q 3. \quad (xy)z = (xz)y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

2. BCH-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$BCH 1. \quad xx = 0$$

$$BCH 2. \quad (xy)z = (xz)y$$

$$BCH 3. \quad \text{ถ้า } xy = 0 \text{ และ } yx = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

3. BCI-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$BCI 1. \quad ((xy)(xz))(zy) = 0$$

$$BCI 2. \quad (x(xy))y = 0$$

$$BCI 3. \quad xx = 0$$

$$BCI 4. \quad \text{ถ้า } xy = 0 \text{ และ } yx = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

4. TM-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$TM 1. \quad x0 = x$$

$$TM 2. \quad (xy)(xz) = zy$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

5. QS-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$QS 1. \quad xx = 0$$

$$QS 2. \quad x0 = x$$

$$QS 3. \quad (xy)z = (xz)y$$

$$QS 4. \quad (xy)(xz) = zy$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

6. BH-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

BH 1. $xx = 0$

BH 2. $x0 = x$

BH 3. ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y \in X$

7. BG-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

BG 1. $xx = 0$

BG 2. $x0 = x$

BG 3. $x = (xy)(0y)$

สำหรับทุก $x, y \in X$

8. BF-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

BF 1. $xx = 0$

BF 2. $x0 = x$

BF 3. $0(xy) = yx$

สำหรับทุก $x, y \in X$

9. BF_1 -algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

BF_1 1. $xx = 0$

BF_1 2. $x0 = x$

BF_1 3. $0(xy) = yx$

BF_1 4. $x = (xy)(0y)$

สำหรับทุก $x, y \in X$

10. BF_2 -algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

BF_2 1. $xx = 0$

BF_2 2. $x0 = x$

BF_2 3. $0(xy) = yx$

BF_2 4. ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y \in X$

11. B-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

B 1. $xx = 0$

B 2. $x0 = x$

B 3. $(xy)z = x(z(0y))$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

12. BCC-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$\text{BCC 1. } ((xy)(zy))(xz) = 0$$

$$\text{BCC 2. } xx = 0$$

$$\text{BCC 3. } 0x = 0$$

$$\text{BCC 4. } x0 = x$$

$$\text{BCC 5. ถ้า } xy = 0 \text{ และ } yx = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท 2 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

$$1. (x(xy))y = 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

$$2. ถ้า } x0 = 0 \text{ แล้ว } x = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$3. x0 = x \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra และ $x, y \in X$

$$1. (x(xy))y = (xy)(xy) = 0$$

$$2. สมมติให้ } x0 = 0 \text{ จะได้ } 0x = (x0)x = (xx)0 = 00 = 0$$

ดังนั้นโดย BCH 3. จะได้ $x = 0$

$$3. (x0)x = (xx)(0) = 00 = 0$$

จากข้อ 1 จะได้ $(x(x0))0 = 0$ ดังนั้นโดยข้อ 2 จะได้ $x(x0) = 0$

ดังนั้นโดย BCH 3. จะได้ $x0 = x$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

$$1. x0 = x \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

$$2. (xy)z = (xz)y \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Arai et al. (1966)

บทนิยาม 4 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า ideal ของ X ถ้าสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$1. 0 \in I$$

2. ถ้า $xy \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 5 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $x(xy) = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
4. $0(xy) = yx = (0x)(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
5. ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Megalai and Tamilarasi (2010)

ทฤษฎีบท 6 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x(xy) = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra และ $x, y \in X$

1. จาก QS 4. จะได้ $(x0)(xy) = y0$
ดังนั้นโดย QS 2. จะได้ $x(xy) = y$
2. ให้ $xy = 0$ และจากข้อ 1 จะได้ $x = x(0) = x(xy) = y$

ทฤษฎีบท 7 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $0(0x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra และ $x, y \in X$

1. $0(0x) = (xx)(0x) = x$ (โดย BG 3.)
2. สมมติให้ $xy = 0$ จาก BG 3 จะได้ $x = (xy)(0y) = 0(0y) = y$

ทฤษฎีบท 8 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra จะได้ ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ทฤษฎีบท 9 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. $x = xy(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Neggers and Kim (2002)

Walendziak (2007) ได้แสดงความสัมพันธ์ของ B-algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BG-algebra และ BH-algebra ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 10

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
4. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra
5. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
6. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Walendziak (2007)

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแบ่งออกเป็น 3 ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

ตอนที่ 2 โครงสร้างของ SU-algebra

ตอนที่ 3 การจำแนกโครงสร้างของ SU-algebra

ตอนที่ 1 การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยาม core algebra และจำแนกโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ โดยแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างพีชคณิตดังต่อไปนี้ core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra และ BCC-algebra

บทนิยาม 1.1 ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย 0 เป็นสมาชิกของ X และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค สำหรับสมาชิก x, y ใดๆ ของ X เขียน xy แทน $x * y$ แล้วจะเรียก ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า core algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $xx = 0$
2. $x0 = x$

สำหรับทุก $x \in X$

ตัวอย่าง 1.2 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	2	0
2	2	0	0	3
3	3	0	0	0

จะได้ว่า X เป็น core algebra

บทแทรก 1.3

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra

ตัวอย่าง 1.4 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	3	0	2
1	1	0	0	0
2	2	2	0	3
3	3	3	1	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BH-algebra และ core algebra

ข้อสังเกต 1.5 จากตัวอย่าง 1.2 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra แต่ไม่เป็น BH-algebra เพราะ
 $1 * 3 = 0 = 3 * 1$ แต่ $1 \neq 3$ ดังนั้นบทกลับของบทแทรก 1.3 ข้อ 1 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น core algebra โดยที่ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
 ดังนั้นจากบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra

ตัวอย่าง 1.7 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	0
2	2	3	0	2
3	3	0	2	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BF-algebra และ core algebra

ข้อสังเกต 1.8 จากตัวอย่าง 1.2 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra แต่ไม่เป็น BF-algebra เพราะ
 $0 * (0 * 2) = 0 * 0 = 0 \neq 2 = 2 * 0$ ดังนั้นบทกลับของบทแทรก 1.3 ข้อ 2 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก
 $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น core algebra โดยที่ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$
 ดังนั้นจากบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra

ตัวอย่าง 1.10 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	1
3	3	3	3	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง Q-algebra และ core algebra

ข้อสังเกต 1.11 จากตัวอย่าง 1.2 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra แต่ไม่เป็น Q-algebra เพราะ
 $(1 * 2) * 3 = 2 * 3 = 3 \neq 0 = 0 * 2 = (1 * 3) * 2$ ดังนั้นบทกลับของบทแทรก 1.3 ข้อ 3 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.12 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก
 $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น core algebra โดยที่ $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
 ดังนั้นจากบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra

ทฤษฎีบท 1.13

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra
4. $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra ก็ต่อเมื่อ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

พิสูจน์

1. จะแสดงว่า ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
จาก BCH 1. (ในส่ววิธีกร) จะได้ Q 1. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 3 (ในส่ววิธีกร) จะได้ Q 2. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จาก BCH 2. (ในส่ววิธีกร) จะได้ Q 3. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
2. จะแสดงว่า ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra จากบทนิยาม 1 ข้อ 3 (ในส่ววิธีกร) เห็นได้ชัดว่า $(X, *, 0)$
เป็น BCH-algebra
3. จะแสดงว่า ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra
ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra และ $x, y, z \in X$
จาก TM 2. และ ทฤษฎีบท 5 ข้อ 1 (ในส่ววิธีกร) จะได้ $((xy)(xz))(zy) = 0$
ดังนั้น BCI 1. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จาก ทฤษฎีบท 5 ข้อ 1 และ ข้อ 2 (ในส่ววิธีกร) จะได้ $(x(xy))y = 0$
ดังนั้น BCI 2. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 1 (ในส่ววิธีกร) จะได้ BCI 3. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 5 (ในส่ววิธีกร) จะได้ BCI 4. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra
4. จะแสดงว่า $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra ก็ต่อเมื่อ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
 (\Rightarrow) ให้ $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra จากบทนิยาม 1 ข้อ 5 (ในส่ววิธีกร) เห็นได้ชัดว่า
 $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
 (\Leftarrow) ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
จากบทนิยาม 1 ข้อ 4 (ในส่ววิธีกร) จะได้ QS 2. และ QS 4. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง
จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 1 (ในส่ววิธีกร) จะได้ QS 1. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 3 (ในส่วนวิธีการ) จะได้ QS 3. (ในส่วนวิธีการ) เป็นจริง
นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra

ตัวอย่าง 1.14 ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BCH-algebra และ Q-algebra

ข้อสังเกต 1.15 จากตัวอย่าง 1.10 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra แต่ไม่เป็น BCH-algebra เพราะว่า
 $1 * 2 = 0 = 2 * 1$ แต่ $1 \neq 2$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 1 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.16 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$
สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra โดยที่ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
ดังนั้นจากบทนิยาม 1 ข้อ 1 (ในส่วนวิธีการ) จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

ตัวอย่าง 1.17 ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	0	3	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	3
3	3	3	2	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BCI-algebra และ BCH-algebra

ข้อสังเกต 1.18 จากตัวอย่าง 1.14 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra แต่ไม่เป็น BCI-algebra เพราะ $((2 * 3) * (2 * 1)) * (1 * 3) = (2 * 0) * 3 = 2 * 3 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 2 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.19 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $((xy)(xz))(zy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra โดยที่ $((xy)(xz))(zy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ดังนั้นจากบทนิยาม 1 ข้อ 2 และทฤษฎีบท 2 ข้อ 1 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

ตัวอย่าง 1.20 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง TM-algebra, QS-algebra และ BCI-algebra

ข้อสังเกต 1.21 จากตัวอย่าง 1.17 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra แต่ไม่เป็น TM-algebra เพราะ $(2 * 0) * (2 * 1) = 2 * 2 = 0 \neq 1 = (1 * 0)$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 3 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.22 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $x(xz) = z$ สำหรับทุก $x, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra และ $x, y, z \in X$ โดยที่ $x(xz) = z$

จากทฤษฎีบท 3 ข้อ 1 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ TM 1. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 3 ข้อ 2 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ $(xy)(xz) = (x(xz))y = zy$ (เพราะว่า $x(xz) = z$)

ดังนั้น TM 2. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

ตัวอย่าง 1.23 ให้ $X = \{0,1,2\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	2	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BG-algebra และ BH-Algebra

ข้อสังเกต 1.24 จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แต่ไม่เป็น BG-algebra เพราะว่า $(1 * 2) * (0 * 2) = 0 * 0 = 0 \neq 1$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 1 (ใน ส่วนวิธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.25 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $x = (xy)(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra โดยที่ $x = (xy)(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
 ดังนั้นจากบทนิยาม 1 ข้อ 6 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra

ตัวอย่าง 1.26 ให้ $X = \{0,1,2,3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	1
2	2	2	0	2
3	3	3	3	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BF_1 -algebra และ BG-Algebra

ข้อสังเกต 1.27 จากตัวอย่าง 1.23 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra แต่ไม่เป็น BF_1 -algebra เพราะว่า $0 * (1 * 2) = 0 * 1 = 1 \neq 2 = 2 * 1$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 2 (ใน ส่วนวิธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.28 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra โดยที่ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จากบทนิยาม 1 ข้อ 7 (ในส่วนตัวธีการ) จะได้ BF_1 1., BF_1 2. และ BF_1 4. (ในส่วนตัวธีการ)

เป็นจริง

ให้ $x, y \in X$ จะได้ $0(xy) = (xy)0 = xy = yx$

ดังนั้น BF_1 3. (ในส่วนตัวธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

ตัวอย่าง 1.29 ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BF_2 -algebra และ BH-Algebra

ข้อสังเกต 1.30 จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แต่ไม่เป็น BF_2 -algebra เพราะ $0 * (1 * 2) = 0 * 0 = 0 \neq 2 = 2 * 1$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 3 (ในส่วนตัวธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.31 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra โดยที่ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้นจากบทนิยาม 1 ข้อ 6 (ในส่วนตัวธีการ) จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

ข้อสังเกต 1.32 จากตัวอย่าง 1.7 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra แต่ไม่เป็น BF_2 -algebra เพราะ $1 * 3 = 0 = 3 * 1$ แต่ $1 \neq 3$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 4 (ในส่วนตัวธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.33 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra โดยที่ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ดังนั้นจากบทนิยาม 1 ข้อ 8 (ในส่วนตัวธีการ) จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

ข้อสังเกต 1.34 จากตัวอย่าง 1.29 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แต่ไม่เป็น BF_1 -algebra เพราะว่า $(2 * 1) * (0 * 1) = 1 * 1 = 0 \neq 2$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 5 (ในส่วนตัวธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.35 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra โดยที่ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ จากบทนิยาม 1 ข้อ 10 (ในส่วนตัวธีการ) จะได้ BF_1 1, BF_1 2, และ BF_1 3. (ในส่วนตัวธีการ) เป็นจริง
ให้ $x, y \in X$ จะได้ $(xy)(0y) = (x0)(yy) = x0 = x$
ดังนั้น BF_1 4. (ในส่วนตัวธีการ) เป็นจริง
นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

ตัวอย่าง 1.36 ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง B-algebra และ BF_1 -Algebra

ข้อสังเกต 1.37 จากตัวอย่าง 1.26 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แต่ไม่เป็น B-algebra เพราะว่า

$0 * (2 * (0 * 1)) = 0 * (2 * 1) = 0 * 2 = 2 \neq 1 = 1 * 2 = (0 * 1) * 2$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 10 ข้อ 6 (ใน ส่วนวิธีการ) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.38 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra โดยที่ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ จากบทนิยาม 1 ข้อ 9 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ B 1. และ B 2. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง ให้ $x, y, z \in X$ จะได้

$$\begin{aligned} x(z(0y)) &= ((xy)(0y))(z(0y)) && \text{(จาก } BF_1 \text{ 4. (ใน ส่วนวิธีการ))} \\ &= ((xy)z)((0y)(0y)) && \text{(จาก } (xy)(uv) = (xu)(yv) \text{)} \\ &= ((xy)z)0 && \text{(จาก } BF_1 \text{ 1. (ใน ส่วนวิธีการ))} \\ &= (xy)z && \text{(จาก } BF_1 \text{ 2. (ใน ส่วนวิธีการ))} \end{aligned}$$

ดังนั้น B 3. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

ทฤษฎีบท 1.39 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 1 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ BF_2 1. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

จากบทนิยาม 1 ข้อ 4 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ BF_2 2. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 4 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ BF_2 3. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 5 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ BF_2 4. (ใน ส่วนวิธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

ข้อสังเกต 1.40 จากตัวอย่าง 1.29 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แต่ไม่เป็น TM-algebra

เพราะว่า $(1 * 2) * (1 * 0) = 1 * 1 = 0 \neq 2 = 0 * 2$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 1.39 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.41 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra โดยที่ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$
จากบทนิยาม 1 ข้อ 10 (ในส่ววิธีการ) จะได้ TM 1. (ในส่ววิธีการ) เป็นจริง
ให้ $x, y, z \in X$ จะได้

$$\begin{aligned}yx &= 0(xy) && \text{(จาก } BF_2 \text{ 3. (ในส่ววิธีการ))} \\ &= (zz)(xy) && \text{(จาก } BF_2 \text{ 1. (ในส่ววิธีการ))} \\ &= (zx)(zy) && \text{(จาก } (xy)(uv) = (xu)(yv) \text{)}\end{aligned}$$

ดังนั้น TM 2. (ในส่ววิธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

ทฤษฎีบท 1.42 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra จากบทนิยาม 1 ข้อ 12 (ในส่ววิธีการ) เห็นได้ชัดว่า $(X, *, 0)$
เป็น BH-Algebra

ตัวอย่าง 1.43 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	3	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นทั้ง BCC-algebra และ BH-Algebra

ข้อสังเกต 1.44 จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แต่ไม่เป็น BCC-algebra
เพราะว่า $((1 * 2) * (3 * 2)) * (1 * 3) = (0 * 1) * 0 = 3 * 0 = 3 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท
1.42 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.45 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(zy) = (xz)y$ สำหรับทุก
 $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra โดยที่ $(xy)(zy) = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากบทนิยาม 1 ข้อ 6 (ในส่ววิธีการ) จะได้ BCC 2., BCC 4. และ BCC 5. (ในส่ววิธีการ) เป็นจริง

ให้ $x, y, z \in X$ จะได้

$$\begin{aligned} 0y &= (00)y && \text{(จาก BH 1. (ในส่ววิธีการ))} \\ &= (0y)(0y) && \text{(จาก } (xy)(zy) = (xz)y \text{)} \\ &= 0 && \text{(จาก BH 1. (ในส่ววิธีการ))} \end{aligned}$$

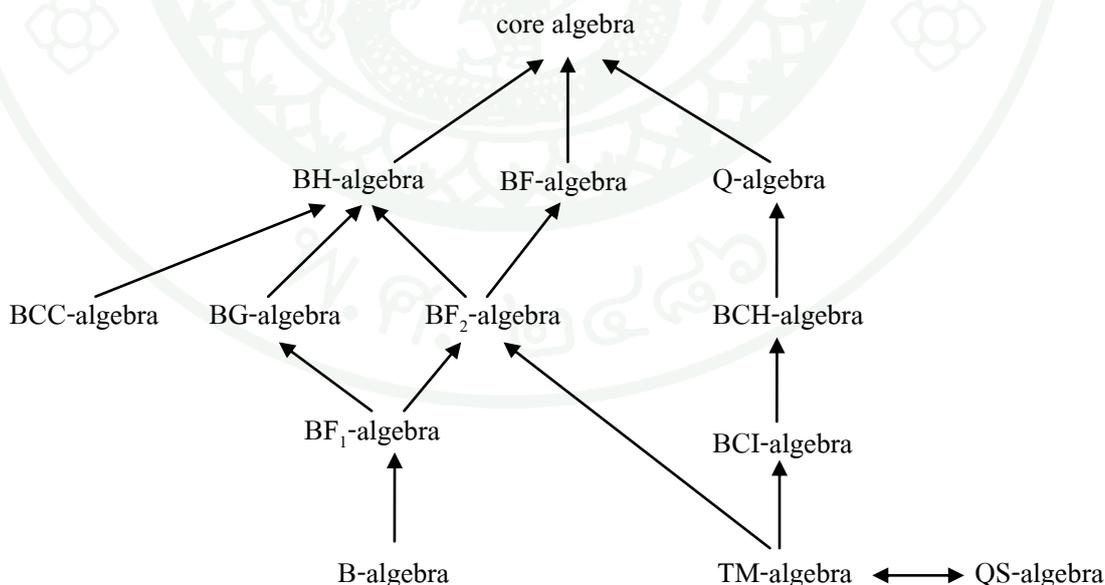
ดังนั้น BCC 3. (ในส่ววิธีการ) เป็นจริง

$$\begin{aligned} ((xy)(zy))(xz) &= ((xz)y)(xz) && \text{(จาก } (xy)(zy) = (xz)y \text{)} \\ &= ((xz)(xz))(y(xz)) && \text{(จาก } (xy)(zy) = (xz)y \text{)} \\ &= 0(y(xz)) && \text{(จาก BH 1. (ในส่ววิธีการ))} \\ &= 0 && \text{(จาก BCC 3. (ในส่ววิธีการ))} \end{aligned}$$

ดังนั้น BCC 1. (ในส่ววิธีการ) เป็นจริง

นั่นคือ $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra

สรุปความสัมพันธ์ของโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ ได้ดังแผนภาพในภาพที่ 3 โดยที่ ถ้า X และ Y เป็น class ของโครงสร้างพีชคณิต แล้ว $X \rightarrow Y$ หมายถึง X เป็น subclass ของ Y



ภาพที่ 3 ความสัมพันธ์ของ core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF₁-algebra, BF₂-algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra และ

ตอนที่ 2 โครงสร้างของ SU-algebra

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยามโครงสร้างของ SU-algebra และแสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.1 ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย 0 เป็นสมาชิกของ X และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค สำหรับสมาชิก x, y ใดๆของ X เขียน xy แทน $x * y$ แล้วจะเรียก ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ ว่า SU-algebra ถ้า $(X, *, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(yz) = 0$
2. $x0 = x$
3. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จะแสดงว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 และ 3 เห็นได้ชัด ส่วนข้อ 1 สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่า $((xy)(xz))(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

x	y	z	xy	xz	$(xy)(xz)$	yz	$((xy)(xz))(yz)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	2	0	2	2	2	0
0	0	3	0	3	3	3	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	2	1	2	3	3	0
0	1	3	1	3	2	2	0
0	2	0	2	0	2	2	0
0	2	1	2	1	3	3	0
0	2	2	2	2	0	0	0
0	2	3	2	3	1	1	0
0	3	0	3	0	3	3	0
0	3	1	3	1	2	2	0
0	3	2	3	2	1	1	0
0	3	3	3	3	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	2	1	3	2	2	0
1	0	3	1	2	3	3	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	2	0	3	3	3	0
1	1	3	0	2	2	2	0
1	2	0	3	1	2	2	0
1	2	1	3	0	3	3	0
1	2	2	3	3	0	0	0
1	2	3	3	2	1	1	0

ตารางที่ 1 (ต่อ)

x	y	z	xy	xz	(xy)(xz)	yz	((xy)(xz))(yz)
1	3	0	2	1	3	3	0
1	3	1	2	0	2	2	0
1	3	2	2	3	1	1	0
1	3	3	2	2	0	0	0
2	0	0	2	2	0	0	0
2	0	1	2	3	1	1	0
2	0	2	2	0	2	2	0
2	0	3	2	1	3	3	0
2	1	0	3	2	1	1	0
2	1	1	3	3	0	0	0
2	1	2	3	0	3	3	0
2	1	3	3	1	2	2	0
2	2	0	0	2	2	2	0
2	2	1	0	3	3	3	0
2	2	2	0	0	0	0	0
2	2	3	0	1	1	1	0
2	3	0	1	2	3	3	0
2	3	1	1	3	2	2	0
2	3	2	1	0	1	1	0
2	3	3	1	1	0	0	0
3	0	0	3	3	0	0	0
3	0	1	3	2	1	1	0
3	0	2	3	1	2	2	0
3	0	3	3	0	3	3	0
3	1	0	2	3	1	1	0
3	1	1	2	2	0	0	0
3	1	2	2	1	3	3	0
3	1	3	2	0	2	2	0

ตารางที่ 1 (ต่อ)

x	y	z	xy	xz	(xy)(xz)	yz	((xy)(xz))(yz)
3	2	0	1	3	2	2	0
3	2	1	1	2	3	3	0
3	2	2	1	1	0	0	0
3	2	3	1	0	1	1	0
3	3	0	0	3	3	3	0
3	3	1	0	2	2	2	0
3	3	2	0	1	1	1	0
3	3	3	0	0	0	0	0

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า $((xy)(xz))(yz) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $0x = x$ สำหรับทุก $x \in X$
4. $((xy)x)y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$
5. $((xz)(yz))(xy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
6. $xy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $(xz)(yz) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
7. $xy = x$ ก็ต่อเมื่อ $y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

1. จะแสดงว่า $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x \in X$

เนื่องจาก $xx = (xx)0 = ((x0)(x0))(00) = 0$

ดังนั้น $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

2. จะแสดงว่า $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $x, y \in X$

เนื่องจาก $(xy)(yx) = ((xy)0)(yx) = ((xy)(xx))(yx) = 0$

ดังนั้น $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3. จะแสดงว่า $0x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x \in X$

เนื่องจาก $0x = x0 = x$

ดังนั้น $0x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

4. จะแสดงว่า $((xy)x)y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $x, y \in X$

เนื่องจาก $0 = ((xy)(x0))(y0) = ((xy)x)y$

ดังนั้น $((xy)x)y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

5. จะแสดงว่า $((xz)(yz))(xy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $0 = ((zx)(zy))(xy) = ((xz)(yz))(xy)$ เพราะว่า $zx = xz$ และ $zy = yz$

ดังนั้น $((xz)(yz))(xy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

6. จะแสดงว่า $xy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $(xz)(yz) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

(\Rightarrow) สมมติให้ $xy = 0$ ดังนั้น $x = y$

จะได้ $(xz)(yz) = ((xz)(xz)) = 0$

ดังนั้นถ้า $xy = 0$ แล้ว $(xz)(yz) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(\Leftarrow) สมมติให้ $(xz)(yz) = 0$

เนื่องจาก $0 = ((zx)(zy))(xy) = ((xz)(yz))(xy) = (0)(xy) = xy$

ดังนั้น ถ้า $(xz)(yz) = 0$ แล้ว $xy = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

7. จะแสดงว่า $xy = x$ ก็ต่อเมื่อ $y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ให้ $x, y \in X$

(\Rightarrow) สมมติให้ $xy = x$

เนื่องจาก $0 = ((xy)x)y = (xx)y = (0)y = y$

ดังนั้นถ้า $xy = x$ แล้ว $y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

(\Leftarrow) สมมติให้ $y = 0$

เนื่องจาก $0 = ((xy)x)y = ((xy)x)0 = (xy)x =$

ดังนั้น $xy = x$

นั่นคือ ถ้า $y = 0$ แล้ว $xy = x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.4 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra นิยามความสัมพันธ์ \leq บน X โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว (X, \leq) เป็น partially ordered set

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $x \leq x$

นั่นคือ \leq มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น $xy = 0$ และ $yx = 0$

โดยบทนิยาม 2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า $x = y$

นั่นคือ \leq มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ดังนั้น $xy = 0$ และ $yz = 0$

จะได้ $x = y = z$ ดังนั้น $xz = 0$

ฉะนั้น $x \leq z$

จะได้ว่า \leq มีสมบัติถ่ายทอด

จาก (1)-(3) จะได้ว่า \leq เป็น partially ordered set บน X

ข้อสังเกต 2.6 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้ $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $y \leq x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $xz \leq yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

1. จะแสดงว่า $x \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x \in X$

(\Rightarrow) สมมติให้ $x \leq 0$ จะได้ $x = x0 = 0$

ดังนั้น ถ้า $x \leq 0$ แล้ว $x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(\Leftarrow) สมมติให้ $x = 0$ จะได้ $x0 = xx = 0$

ดังนั้น $x \leq 0$

นั่นคือ ถ้า $x = 0$ แล้ว $x \leq 0$ สำหรับทุก $x \in X$

2. จะแสดงว่า ถ้า $x \leq y$ แล้ว $xz \leq yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$ และ $x \leq y$ จะได้ $xy = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 6 จะได้ $(xz)(yz) = 0$

ดังนั้น $xz \leq yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

2. $x(yz) = z(yx)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

3. $(xy)z = x(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

1. จะแสดงว่า $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z, u \in X$

เนื่องจาก $((xy)(xz))(yz) = 0$

ดังนั้น $(xy)(xz) \leq yz$

โดยทฤษฎีบท 2.7 ข้อ 2 จะได้

$$((xy)(xz))u \leq (yz)u$$

โดยข้อสังเกต 2.6 จะได้

$$(yz)u \leq ((xy)(xz))u$$

แทน x ด้วย xu , แทน z ด้วย xz , แทน u ด้วย $((xu)y)zu$ จะได้

$$\begin{aligned} (y(xz))(((xu)y)zu) &\leq (((xu)y)((xu)(xz)))((xu)y)zu \\ &\leq ((xu)(xz))(zu) \quad (\text{โดยบทนิยาม 2.1 ข้อ 1 และบทนิยาม 2.4}) \\ &= 0 \quad (\text{เพราะว่า } zu = uz \text{ และบทนิยาม 2.1 ข้อ 1}) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.7 ข้อ 1 จะได้

$$(y(xz))(((xu)y)zu) = 0$$

ดังนั้น $y(xz) \leq ((xu)y)zu$

โดยข้อสังเกต 2.6 จะได้

$$((xu)y)zu \leq y(xz)$$

แทน u ด้วย z และ แทน z ด้วย xy จะได้

$$((xz)y)((xy)z) \leq y(x(xy)) = (x(xy))y = ((xy)x)y = 0$$

โดยทฤษฎีบท 2.7 ข้อ 1 จะได้ว่า

$$((xz)y)((xy)z) = 0$$

ดังนั้น $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

2. จะแสดงว่า $x(yz) = z(yx)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $x(yz) = (yz)x = (yx)z = z(yx)$

ดังนั้น $x(yz) = z(yx)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

3. จะแสดงว่า $(xy)z = x(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $(xy)z = (yx)z = (yz)x = x(yz)$

ดังนั้น $(xy)z = x(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้ว่า ถ้า $xz = yz$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็น SU-algebra และ $x, y, z \in X$ โดยที่ $xz = yz$

จะได้

$$(xz)z = (yz)z$$

$$x(zz) = y(zz) \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 3})$$

$$x0 = y0 \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 1})$$

ดังนั้น

$$x = y$$

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ $a \in X$ ถ้า $ax = x$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว $a = x$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ $a \in X$

สมมติให้ $ax = x$ สำหรับทุก $x \in X$

เนื่องจาก $ax = x = 0x$

โดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า $a = 0$

ทฤษฎีบท 2.11 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *)$ เป็น commutative group

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ $x, y, z \in X$

- (1) โดยทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 3 จะได้ $(xy)z = x(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
- (2) จะมี $0 \in X$ ซึ่ง $0x = x = x0$ สำหรับทุก $x \in X$
- (3) สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $xx = 0$
- (4) โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 2 จะได้ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$
- ดังนั้น สรุปได้ว่า $(X, *)$ เป็น commutative group

บทนิยาม 2.12 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า ideal ของ X ถ้า

1. $0 \in I$
2. ถ้า $(xy)z \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $xz \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่างที่ 2.13 ให้ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยาม การดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.2 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ให้ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{0, 1, 2\}$

ต่อไปจะสร้างตารางเพื่อตรวจสอบว่า A และ B เป็น ideal ของ X หรือไม่

ตารางที่ 2 แสดงค่า xy , $(xy)z$ และ xz สำหรับทุก $x, y, z \in X$

x	y	z	xy	(xy)z	xz
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	2	0	2	2
0	0	3	0	3	3
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	2	1	3	3
1	0	3	1	2	2
2	0	0	2	2	2
2	0	1	2	3	3
2	0	2	2	0	0
2	0	3	2	1	1
3	0	0	3	3	3
3	0	1	3	2	2
3	0	2	3	1	1
3	0	3	3	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	2	1	3	2
0	1	3	1	2	3
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0
1	1	2	0	2	3
1	1	3	0	3	2
2	1	0	3	3	2
2	1	1	3	2	3
2	1	2	3	1	0
2	1	3	3	0	1

ตารางที่ 2 (ต่อ)

x	y	z	xy	(xy)z	xz
3	1	0	2	2	3
3	1	1	2	3	2
3	1	2	2	0	1
3	1	3	2	1	0
0	2	0	2	2	0
0	2	1	2	3	1
0	2	2	2	0	2
0	2	3	2	1	3
1	2	0	3	3	1
1	2	1	3	2	0
1	2	2	3	1	3
1	2	3	3	0	2
2	2	0	0	0	2
2	2	1	0	1	3
2	2	2	0	2	0
2	2	3	0	3	1
3	2	0	1	1	3
3	2	1	1	0	2
3	2	2	1	3	1
3	3	3	1	2	0

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่า $(xy)z \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xz \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$ ดังนั้น A เป็น ideal ของ X แต่ B ไม่เป็น ideal ของ X เพราะ $(1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 2 \in B$ แต่ $1 * 2 = 3 \notin B$

ทฤษฎีบท 2.14 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า ถ้า $xy \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $xy \in I$ และ $y \in I$

จาก $(xy)0 = xy \in I$ และ $y \in I$ จะได้ว่า $x = x0 \in I$

ทฤษฎีบท 2.15 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า I เป็น ideal ของ BCI-algebra X

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X

เนื่องจาก I เป็น ideal ดังนั้น $0 \in I$

ให้ $xy \in I$ และ $y \in I$

โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $x \in I$

ดังนั้น I เป็น ideal ของ BCI-algebra X

ทฤษฎีบท 2.16 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ A_i เป็น ideal ของ X เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้ว

$\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็น ideal ของ X

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ A_i เป็น ideal ของ X เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

เนื่องจาก A_i เป็น ideal จะได้ $0 \in A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้น $0 \in \bigcap_{i=1}^n A_i$

ให้ $(xy)z \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ และ $y \in \bigcap_{i=1}^n A_i$

จะได้ $(xy)z \in A_i$ และ $y \in A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

เนื่องจาก A_i เป็น ideal จะได้ $xz \in A_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้น $xz \in \bigcap_{i=1}^n A_i$

นั่นคือ $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็น ideal ของ X

บทนิยาม 2.17 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ X แล้วจะเรียก S ว่า SU-subalgebra ถ้า $xy \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

ทฤษฎีบท 2.18 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้ว I เป็น SU-subalgebra ของ X

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X

ให้ $x, y \in I$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4 จะได้ $((xy)x)y = 0 \in I$

เนื่องจาก I เป็น ideal และ $x \in I$ โดยบทนิยาม 2.12 จะได้ว่า $(xy)y \in I$

และเนื่องจาก I เป็น ideal และ $y \in I$ โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $xy \in I$

บทนิยาม 2.19 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X กำหนดความสัมพันธ์ \sim บน X นิยามโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy \in I$

ทฤษฎีบท 2.20 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้ว ความสัมพันธ์ \sim เป็น congruence บน X

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า \sim มีสมบัติสะท้อนและสมมาตร

ให้ $x, y, z \in X$ โดยที่ $x \sim y$ และ $y \sim z$

ดังนั้น $xy \in I$ และ $yz \in I$

เนื่องจาก $((xz)(xy))(zy) = 0 \in I$ และ I เป็น ideal โดยบทนิยาม 2.12 จะได้ว่า

$(xz)(yz) = (xz)(zy) \in I$ และโดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $xz \in I$

ดังนั้น $x \sim z$

นั่นคือ \sim เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ให้ $x, y, u, v \in X$ โดยที่ $x \sim u$ และ $y \sim v$

จะได้ว่า $xu \in I$ และ $yv \in I$ ดังนั้น $ux \in I$ และ $vy \in I$

เนื่องจาก $((xy)(xv))(yv) = 0 \in I$ และ $yv \in I$ โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $(xy)(xv) \in I$

ดังนั้น $xy \sim xv$

เนื่องจาก $((uv)(ux))(vx) = 0 \in I$ และ $ux \in I$ โดยบทนิยาม 2.12 จะได้ว่า $(uv)(vx) \in I$

เนื่องจาก $vx = xv$ จะได้ว่า $(uv)(vx) = (uv)(xv)$ ดังนั้น $(uv)(xv) \in I$

ดังนั้น $xv \sim uv$

นั่นคือ $xy \sim uv$

ดังนั้น \sim เป็น congruence บน X

ต่อไปจะนิยาม equivalence class และ quotient SU-algebra

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, I เป็น ideal ของ X และ \sim เป็น congruence บน X

สำหรับ $x \in X$ นิยาม $[x]_I = \{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid xy \in I\}$ เป็น equivalence class ที่บรรจุ x และเรียก x ว่าตัวแทนของเซต $[x]_I$

ตัวอย่าง 2.21 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra โดยที่ $X = \{0, 1, 2, 3\}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ ดังตาราง

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

จากตัวอย่าง 2.13 จะได้ $I = \{0, 1\}$ เป็น ideal ของ X

ดังนั้น $[0]_I = \{0, 1\}$, $[1]_I = \{0, 1\}$, $[2]_I = \{2, 3\}$, $[3]_I = \{2, 3\}$

ข้อสังเกต 2.22 เนื่องจาก $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ ดังนั้น $x \sim x$ นั่นคือ $x \in [x]_I$ สำหรับทุก $x \in X$

ข้อสังเกต 2.23 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, I เป็น ideal ของ X และ \sim เป็น congruence บน X จะได้ว่า $[0]_I = \{x \in X \mid 0 \sim x\}$ เป็น ideal ของ X เพราะว่า $x = 0x \in I$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X นิยาม quotient SU-algebra โดย $X/I = \{[x]_I \mid x \in X\}$ และนิยาม $*$ บน X/I โดย $[x]_I [y]_I = [xy]_I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.24 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, I เป็น ideal ของ X และ \sim เป็น congruence บน X สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า $[x]_I = [y]_I$ ก็ต่อเมื่อ $x \sim y$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in X$

$$(\Rightarrow) \text{ ให้ } [x]_I = [y]_I$$

เนื่องจาก $y \in [y]_I$ จะได้ว่า $y \in [x]_I$

ดังนั้น $x \sim y$

$$(\Leftarrow) \text{ ให้ } x \sim y \text{ ดังนั้น } y \sim x$$

ให้ $z \in [x]_I$ จะได้ว่า $x \sim z$

ดังนั้น $y \sim z$

นั่นคือ $z \in [y]_I$

ให้ $w \in [y]_I$ จะได้ว่า $y \sim w$

ดังนั้น $x \sim w$

นั่นคือ $w \in [x]_I$

สรุปได้ว่า $[x]_I = [y]_I$

ทฤษฎีบท 2.25 $(X/I, *, [0]_I)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $[x]_I, [y]_I, [z]_I \in X/I$

$$(1) \quad \begin{aligned} (([x]_I [y]_I) ([x]_I [z]_I)) ([y]_I [z]_I) &= ([xy]_I [xz]_I) [yz]_I \\ &= [((xy)(xz)(yz))]_I \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x, y, z \in X$ จะได้ว่า $[((xy)(xz)(yz))]_I = [0]_I$

นั่นคือ $(([x]_I [y]_I) ([x]_I [z]_I)) ([y]_I [z]_I) = [0]_I$

$$(2) \quad [x]_I [0]_I = [x0]_I = [x]_I$$

$$(3) \quad \text{ให้ } [x]_I [y]_I = [0]_I$$

ดังนั้น $[xy]_I = [0]_I$

เนื่องจาก $xy \in [xy]_I$

ดังนั้น $xy \in [0]_I$ เนื่องจาก $[0]_I$ เป็น ideal จะได้ว่า $x \sim y$

ฉะนั้น $[x]_I = [y]_I$

จาก (1) – (3) จะได้ว่า $(X/I, *, [0]_I)$ เป็น SU-algebra

บทนิยาม 2.26 ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และให้ $f: X \rightarrow Y$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(xy) = f(x)f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นิยาม kernel ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{x \in X \mid f(x) = 0_y\}$ หรือ $\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0_y\}$

นิยาม image ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ หรือ $f(Y) = \text{Im}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$

บทนิยาม 2.27 ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ เป็น homomorphism จะกล่าวได้ว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง Y
3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก X ไปทั่วถึง Y

บทนิยาม 2.28 ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra จะกล่าวได้ว่า X isomorphic กับ Y เขียนแทนด้วย $X \cong Y$ ถ้ามี $f: X \rightarrow Y$ เป็น isomorphism

ทฤษฎีบท 2.29 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, I เป็น ideal ของ X และ $f: X \rightarrow X/I$ นิยามโดย $f(x) = [x]_I$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้วจะได้ว่า f เป็น epimorphism

พิสูจน์ ให้ $f: X \rightarrow X/I$ นิยามโดย $f(x) = [x]_I$ สำหรับทุก $x \in X$

(1) ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x = y$

ดังนั้น $[x]_I = [y]_I$

แล้วจะได้ว่า $f(x) = f(y)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

(2) ให้ $[x]_I \in X/I$ ดังนั้น $f(x) = [x]_I$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(3) เนื่องจาก $f(xy) = [xy]_I = [x]_I [y]_I = f(x)f(y)$

ดังนั้น f เป็น homomorphism บน X

จาก(1) – (3) สรุปได้ว่า f เป็น epimorphism บน X

ทฤษฎีบท 2.30 ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ เป็น homomorphism จะได้ว่า

1. $f(0_x) = 0_y$
2. $\text{Im}(f)$ เป็น SU-subalgebra
3. $\text{Ker}(f) = \{0_x\}$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

4. $\text{Ker}(f)$ เป็น ideal ของ X

พิสูจน์

1. จะแสดงว่า $f(0_x) = 0_y$

ให้ $x \in X$ ดังนั้น $f(x) \in Y$

จะได้ $0_y f(x) = f(x) = f(0_x x) = f(0_x) f(x)$

โดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้ $0_y = f(0_x)$

2. จะแสดงว่า $\text{Im}(f)$ เป็น SU-subalgebra

ให้ $a, b \in \text{Im}(f)$

ดังนั้น จะมี $x, y \in X$ ที่ทำให้ $f(x) = a$ และ $f(y) = b$

จะได้ $ab = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{Im}(f)$

นั่นคือ $\text{Im}(f)$ เป็น SU-subalgebra

3. จะแสดงว่า $\text{Ker}(f) = \{0_x\}$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เห็นได้ชัดว่า $\text{Ker}(f) = \{0_x\}$

ในทางกลับกันให้ $\text{Ker}(f) = \{0_x\}$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $f(x) = f(y)$

จะได้ $f(xy) = f(x)f(y) = 0_y$

ดังนั้น $xy \in \text{Ker}(f) = \{0_x\}$

ดังนั้น $x = y$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

4. จะแสดงว่า $\text{Ker}(f)$ เป็น ideal ของ X

โดย ข้อ 1 จะได้ว่า $f(0_x) = 0_y$ ดังนั้น $0_x \in \text{Ker}(f)$

ให้ $x, y, z \in X$ โดยที่ $(xy)z \in \text{Ker}(f)$ และ $y \in \text{Ker}(f)$

ดังนั้น $f((xy)z) = 0$ และ $f(y) = 0$

เนื่องจาก f เป็น homomorphism

จะได้ว่า $f((xy)z) = f(xy)f(z) = (f(x)f(y))f(z)$

เนื่องจาก $f((xy)z) = 0$ และ $f(y) = 0$

จะได้ว่า $0 = (f(x)0)f(z) = f(x)f(z) = f(xz)$

ดังนั้น $xz \in \text{Ker}(f)$

นั่นคือ $\text{Ker}(f)$ เป็น ideal ของ X

ทฤษฎีบท 2.31 ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ เป็น homomorphism จะได้ว่า $X/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$ และถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง Y แล้ว $X/\text{Ker}(f) \cong Y$

พิสูจน์ ให้ $g: X/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ ซึ่งนิยามโดย $g([x]_{\text{Ker}(f)}) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

(1) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชัน

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $[x]_{\text{Ker}(f)} = [y]_{\text{Ker}(f)}$

จะได้ว่า $x \sim y$ ดังนั้น $xy \in \text{Ker}(f)$

นั่นคือ $f(xy) = 0$

เนื่องจาก $f(x)f(y) = f(xy) = 0$

ดังนั้น $f(x) = f(y)$

เพราะฉะนั้น $g([x]_{\text{Ker}(f)}) = f(x) = f(y) = g([y]_{\text{Ker}(f)})$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชัน

(2) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $g([x]_{\text{Ker}(f)}) = g([y]_{\text{Ker}(f)})$

ดังนั้น $f(x) = f(y)$

จะได้ว่า $0 = f(x)f(y) = f(xy)$

ดังนั้น $xy \in \text{Ker}(f)$

เนื่องจาก $\text{ker}(f)$ เป็น ideal จะได้ว่า $x \sim y$

ดังนั้น $[x]_{\text{Ker}(f)} = [y]_{\text{Ker}(f)}$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชัน 1-1

(3) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $f(x) \in \text{Im}(f)$

เนื่องจาก $g([x]_{\text{Ker}(f)}) = f(x)$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

(4) จะแสดงว่า g เป็น homomorphism

ให้ $x, y \in X$

$$\begin{aligned} g([x]_{\text{Ker}(f)} [y]_{\text{Ker}(f)}) &= g([xy]_{\text{Ker}(f)}) \\ &= f(xy) \\ &= f(x)f(y) \\ &= g([x]_{\text{Ker}(f)})g([y]_{\text{Ker}(f)}) \end{aligned}$$

นั่นคือ g เป็น homomorphism

จาก(1) – (4) สรุปได้ว่า $X/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$

และให้ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง Y จะได้ว่า $\text{Im}(f) = Y$

ดังนั้น $X/\text{Ker}(f) \cong Y$

ทฤษฎีบท 2.32 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, H และ K เป็น ideal ของ X โดยที่ $K \subseteq H$ จะได้ว่า $(X/K)/(H/K) \cong X/H$

พิสูจน์ ให้ $g: X/K \rightarrow X/H$ ซึ่งนิยามโดย $g([x]_K) = [x]_H$ สำหรับทุก $x \in X$

(1) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชัน

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $[x]_K = [y]_K$

จะได้ว่า $x \sim y$ เนื่องจาก K เป็น ideal จะได้ $xy \in K$

เนื่องจาก $K \subseteq H$ จะได้ $xy \in H$

ดังนั้น $g([x]_K) = [x]_H = [y]_H = g([y]_K)$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชัน

(2) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $[x]_H \in X/H$

เนื่องจาก $g([x]_K) = [x]_H$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

(3) จะแสดงว่า g เป็น homomorphism

ให้ $x, y \in X$

$$\begin{aligned} g([x]_K [y]_K) &= g([xy]_K) \\ &= [xy]_H \\ &= [x]_H [y]_H \\ &= g([x]_K) g([y]_K) \end{aligned}$$

นั่นคือ g เป็น homomorphism

(4) จะแสดงว่า $\text{Ker}(g) = H/K$

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(g) &= \{[x]_K \mid g([x]_K) = [0]_H\} \\
&= \{[x]_K \mid [x]_H = [0]_H\} \\
&= \{[x]_K \mid x \sim 0\} \\
&= \{[x]_K \mid x = x0 \in H\} \\
&= H/K
\end{aligned}$$

จาก(1) – (4) และโดยทฤษฎีบท 2.31 สรุปได้ว่า $(X/K)/(H/K) \cong X/H$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, A และ B เป็น subset ของ X นิยาม AB โดย $AB = \{xy \in X \mid x \in A, y \in B\}$

ทฤษฎีบท 2.33 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, A และ B เป็น subset ของ X จะได้ว่า AB เป็น SU-subalgebra ของ X

พิสูจน์ ให้ $a \in AB$ โดยนิยามของ AB จะได้ว่า $a = xy$ สำหรับบาง $x \in A, y \in B$
 เนื่องจาก $A, B \subseteq X$ ดังนั้น $x, y \in X$

จะได้ $a = xy \in X$

ดังนั้น $AB \subseteq X$

ให้ $m, n \in AB$ โดยที่ $m = a_1 b_1, n = a_2 b_2$ สำหรับบาง $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } mn &= (a_1 b_1)(a_2 b_2) \\
&= (a_1 (a_2 b_2))b_1 && \text{(โดยทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 1)} \\
&= (b_2 (a_2 a_1))b_1 && \text{(โดยทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 2)} \\
&= (b_2 b_1)(a_2 a_1) && \text{(โดยทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 1)} \\
&= (a_2 a_1)(b_2 b_1) && \text{(โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 2)}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_2 a_1 \in A$ และ $b_2 b_1 \in B$

ดังนั้น $mn = (a_2 a_1)(b_2 b_1) \in AB$

สรุปได้ว่า AB เป็น SU-subalgebra ของ X

ข้อสังเกต 2.34 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, H และ N เป็น ideal ของ X จะได้ว่า N เป็น ideal ของ HN

ทฤษฎีบท 2.35 ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, H และ N เป็น ideal ของ X จะได้ว่า
 $H/(H \cap N) \cong HN/N$

พิสูจน์ ให้ $g: H \rightarrow HN/N$ ซึ่งนิยามโดย $g(x) = [x]_N$ สำหรับทุก $x \in H$

(1) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชัน

ให้ $x, y \in H$ โดยที่ $x = y$

ดังนั้น $[x]_N = [y]_N$

แล้วจะได้ว่า $g(x) = g(y)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

(2) จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $[x]_N \in HN/N$ ดังนั้น $f(x) = [x]_N$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(3) จะแสดงว่า g เป็น homomorphism

ให้ $x, y \in H$

เนื่องจาก $g(xy) = [xy]_N = [x]_N [y]_N = g(x)g(y)$

ดังนั้น f เป็น homomorphism บน X

(4) จะแสดงว่า $\text{Ker}(g) = H \cap N$

ให้ $x \in \text{Ker}(g)$ จะได้ $f(x) = [0]_N$

เนื่องจาก $f(x) = [x]_N$ ดังนั้น $[x]_N = [0]_N$ นั่นคือ $x \sim 0$

เนื่องจาก N เป็น ideal จะได้ $x = x0 \in N$

และเนื่องจาก $\text{Ker}(g) \subseteq H$ ดังนั้น $x \in H$

ดังนั้น $x \in H \cap N$

นั่นคือ $\text{Ker}(g) \subseteq H \cap N$

ให้ $x \in H \cap N$ จะได้ $x \in H$ และ $x \in N$

เนื่องจาก $f(x) = [x]_N = [0]_N$

ดังนั้น $x \in \text{Ker}(g)$

นั่นคือ $H \cap N \subseteq \text{Ker}(g)$

สรุปได้ว่า $\text{Ker}(g) = H \cap N$

จาก(1) – (4) และโดยทฤษฎีบท 2.31 สรุปได้ว่า $H/(H \cap N) \cong HN/N$

ตอนที่ 3 การจำแนกโครงสร้างของ SU-algebra

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงจำแนกโครงสร้างของ SU-algebra โดยแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของ SU-algebra กับ โครงสร้างพีชคณิตดังต่อไปนี้ core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF_1 -algebra, BF_2 -algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra และ BCC-algebra

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ $x, y, z \in X$

จากทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 1 จะได้ QS 1. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

จากบทนิยาม 2.1 ข้อ 2 จะได้ QS 2. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 1 จะได้ QS 3. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

จากบทนิยาม 2.1 ข้อ 1 จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$

ดังนั้น $(xy)(xz) = yz = zy$ นั่นคือ QS 4. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra

ข้อสังเกต 3.2 จากตัวอย่าง 1.20 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่า $((2 * 0) * (2 * 1)) * (0 * 1) = (2 * 1) * 2 = 1 * 2 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.1 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra โดยที่ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และให้ $x, y, z \in X$

จาก QS 4. (ในส่ววิธีกร) จะได้ $(xy)(xz) = zy = yz$

ดังนั้น $((xy)(xz))(yz) = 0$ นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จาก QS 2. (ในส่ววิธีกร) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 6 ข้อ 2 (ในส่ววิธีกร) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 4 และ ทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

ข้อสังเกต 3.5 จากตัวอย่าง 1.20 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่า
 $((0 * 1) * (0 * 2)) * (1 * 2) = (2 * 1) * 2 = 1 * 2 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.4 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.6 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra โดยที่ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และให้ $x, y, z \in X$
 จาก TM 2. (ในส่วนวิธีการ) จะได้ $(xy)(xz) = zy = yz$
 ดังนั้น $((xy)(xz))(yz) = 0$ นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง
 จาก TM 1. (ในส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
 สมมติให้ $xy = 0$ จะได้ $yx = 0$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 5 ข้อ 5 (ในส่วนวิธีการ) จะได้ $x = y$
 นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง
 ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 3 และทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า
 $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

ข้อสังเกต 3.8 จากตัวอย่าง 1.17 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่า
 $((1 * 2) * (1 * 3)) * (2 * 3) = (3 * 2) * 3 = 2 * 3 = 3 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.7 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.9 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra โดยที่ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และให้ $x, y, z \in X$
 จะได้ $((xy)(xz))(yz) = ((xy)(xz))(zy) = 0$ (จาก BCI 1. (ในส่วนวิธีการ))
 นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 3 ข้อ 1 (ในส่ววิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
 สมมติให้ $xy = 0$ จะได้ $yx = 0$ ดังนั้น จาก BCH 4. (ในส่ววิธีการ) จะได้ $x = y$
 นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง
 ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.10 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า
 $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra

ข้อสังเกต 3.11 จากตัวอย่าง 1.14 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra
 เพราะว่า $((1 * 0) * (1 * 2)) * (0 * 2) = (1 * 3) * 0 = 3 * 0 = 3 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท
 3.10 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.12 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(yz) = xz$ สำหรับทุก
 $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra และ $x, y, z \in X$ โดยที่ $(xy)(yz) = xz$
 เนื่องจาก $(xy)(yz) = xz$ จะได้ $((xy)(yz))(xz) = 0$ (จาก BCH 1. (ในส่ววิธีการ))
 จาก BCH 2. (ในส่ววิธีการ) จะได้ $((xy)(xz))(yz) = ((xy)(yz))(xz) = 0$
 นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง
 จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 3 (ในส่ววิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
 สมมติให้ $xy = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} yx &= (yx)0 && \text{(จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 3 (ในส่ววิธีการ))} \\ &= (yx)(xy) && \text{(จาก } xy = 0) \\ &= yy && \text{(จาก } (xy)(yz) = xz \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X) \\ &= 0 && \text{(จาก BCH 1. (ในส่ววิธีการ))} \end{aligned}$$

ดังนั้น จาก BCH 3. (ในส่ววิธีการ) จะได้ $x = y$

นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.13 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 1 และทฤษฎีบท 3.10 จะได้ว่า
 $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra

ข้อสังเกต 3.14 จากตัวอย่าง 1.10 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่า
 $((1 * 0) * (1 * 2)) * (0 * 2) = (1 * 0) * 0 = 1 * 0 = 1 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.13 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.15 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(xy)(yz) = xz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
2. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra โดยที่ $(xy)(yz) = xz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

และถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

เห็นได้ชัดว่า บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $(xy)(yz) = xz$ จะได้ $((xy)(yz))(xz) = 0$ (จาก Q 1. (ใน ส่วนวิธีการ))

จาก Q 3. (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ $((xy)(xz))(yz) = ((xy)(yz))(xz) = 0$

นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จาก Q 2. (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.16 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากบทแทรก 1.3 ข้อ 3 และทฤษฎีบท 3.13 จะได้ว่า

$(X, *, 0)$ เป็น core algebra

ข้อสังเกต 3.17 จากตัวอย่าง 1.2 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่า
 $2 * 1 = 0$ แต่ $2 \neq 1$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.16 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.18 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
2. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น core algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

และถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

เห็นได้ชัดว่า บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จากบทนิยาม 1.1 ข้อ 1)

ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จากบทนิยาม 1.1 ข้อ 2 จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.19 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ $x, y, z \in X$

จากทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 1 จะได้ B 1. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

จากบทนิยาม 2.1 ข้อ 2 จะได้ B 2. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

$$x(z(0y)) = x(z0) \quad (\text{โดย ทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3})$$

$$= (xz)y \quad (\text{โดย ทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 3})$$

$$= (xy)z \quad (\text{โดย ทฤษฎีบท 2.8 ข้อ 1})$$

นั่นคือ B 3. (ในส่ววิธีกร) เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra

ข้อสังเกต 3.20 จากตัวอย่าง 1.36 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะ

$((2 * 0) * (2 * 1)) * (0 * 1) = (2 * 1) * 3 = 1 * 3 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.19 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.21 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(yz)(zx) = xy$ สำหรับทุก

$x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra และ $x, y, z \in X$ โดยที่ $(yz)(zx) = xy$

$$\begin{aligned} ((xy)(xz))(yz) &= (xy)((yz)(0(xz))) && \text{(โดย B 3. (ในส่วนวิธีการ))} \\ &= (xy)((yz)(zx)) && \text{(โดยทฤษฎีบท 9 ข้อ 1 (ในส่วนวิธีการ))} \\ &= (xy)(xy) && \text{(เพราะว่า } (yz)(zx) = xy \text{)} \\ &= 0 && \text{(โดย B 1. (ในส่วนวิธีการ))} \end{aligned}$$

นั่นคือ บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จาก B 2. (ในส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 9 ข้อ 2 (ในส่วนวิธีการ) จะได้ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.22 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 10 ข้อ 6 (ในส่วนวิธีการ) และทฤษฎีบท 3.21 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra

ข้อสังเกต 3.23 จากตัวอย่าง 1.26 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะ
 $((1 * 2) * (1 * 3)) * (2 * 3) = (1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.22 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.24 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
 ให้ $x, y, z \in X$
 เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จาก BF_1 1. (ในส่วนวิธีการ))
 ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง
 จาก BF_1 2. (ในส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
 จากทฤษฎีบท 8 (ในส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง
 ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.25 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 10 ข้อ 5 (ในส่วนวิธีการ) และทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra

ข้อสังเกต 3.26 จากตัวอย่าง 1.29 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะ
 $((1 * 2) * (1 * 0)) * (2 * 0) = (1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.25 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.27 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จาก BF_2 1. (ในส่วนวิธีการ))

ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จาก BF_2 2. (ในส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

สมมติให้ $xy = 0$ จะได้

$$yx = 0(xy) \quad (\text{จาก } BF_2 \text{ 3 (ในส่วนวิธีการ)})$$

$$= 00 \quad (\text{จาก } xy = 0)$$

$$= 0 \quad (\text{จาก } BF_2 \text{ 1 (ในส่วนวิธีการ)})$$

ดังนั้น จาก BF_2 4. (ในส่วนวิธีการ) จะได้ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.28 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 10 ข้อ 4 (ในส่วนวิธีการ) และทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra

ข้อสังเกต 3.29 จากตัวอย่าง 1.7 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะ
 $3 * 1 = 0$ แต่ $3 \neq 1$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.28 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.30 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ

1. $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

2. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และ
ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
เห็นได้ชัดว่าบทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง
ให้ $x, y, z \in X$
เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จาก BF 1. (ใน ส่วนวิธีการ))
ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง
จาก BF 2. (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.31 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 10 ข้อ 2 (ใน ส่วนวิธีการ) และทฤษฎีบท 3.22
จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra

ข้อสังเกต 3.32 จากตัวอย่าง 1.23 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะ
 $((1 * 2) * (1 * 0)) * (2 * 0) = (1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 2 \neq 0$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.31 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.33 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก
 $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
ให้ $x, y, z \in X$
เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จาก BG 1. (ใน ส่วนวิธีการ))
ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง
จาก BG 2. (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง
จากทฤษฎีบท 7 ข้อ 2 (ใน ส่วนวิธีการ) จะได้ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง
ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ทฤษฎีบท 3.34 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จากทฤษฎีบท 10 ข้อ 1 (ในส่ววิธีกร) และ ทฤษฎีบท 3.31 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra

ข้อสังเกต 3.35 จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แต่ไม่เป็น SU-algebra เพราะว่ $1 * 2 = 0$ แต่ $1 \neq 2$ ดังนั้นบทกลับของทฤษฎีบท 3.34 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 3.36 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

พิสูจน์ ให้ $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra โดยที่ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

เนื่องจาก $(xy)(xz) = yz$ จะได้ว่า $((xy)(xz))(yz) = 0$ (จาก BH 1. (ในส่ววิธีกร))

ดังนั้น บทนิยาม 2.1 ข้อ 1 เป็นจริง

จาก BH 2. (ในส่ววิธีกร) จะได้บทนิยาม 2.1 ข้อ 2 เป็นจริง

สมมติให้ $xy = 0$ จะได้ว่า

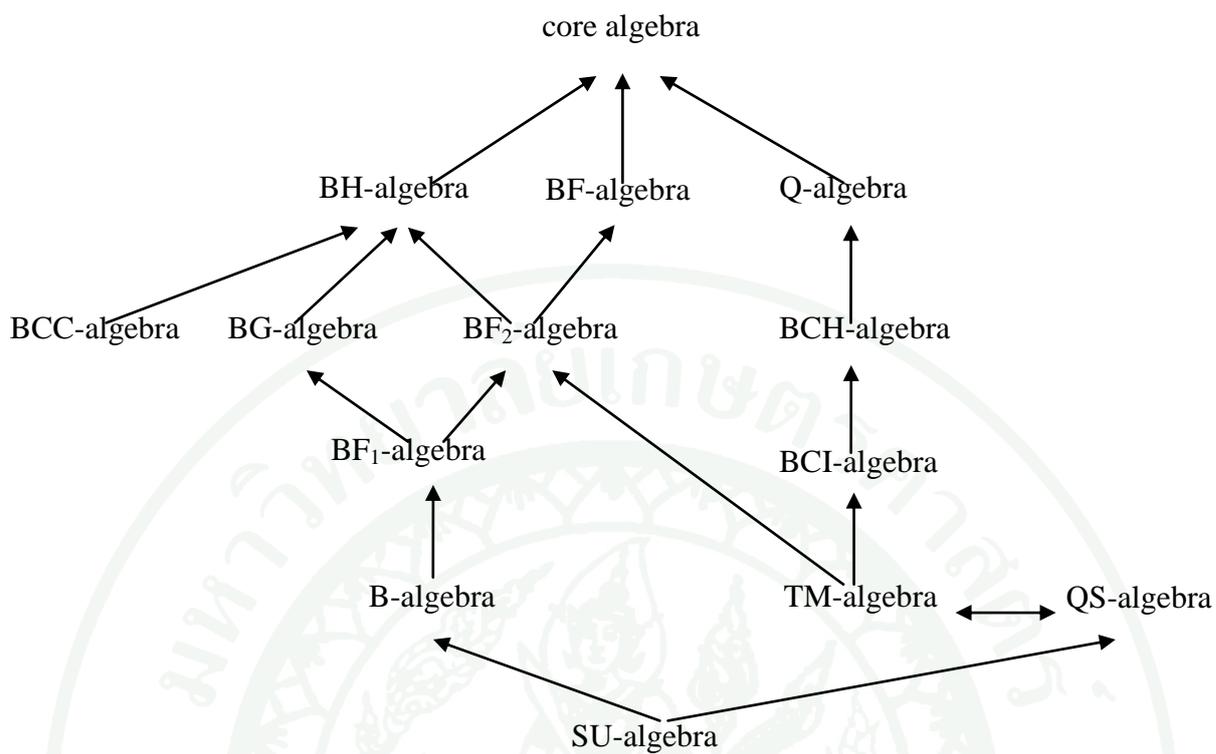
$$\begin{aligned} yx &= (yx)0 && \text{(จาก BH 2 (ในส่ววิธีกร))} \\ &= (yx)(yy) && \text{(จาก BH 1 (ในส่ววิธีกร))} \\ &= xy && \text{(จาก } (xy)(xz) = yz \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X) \\ &= 0 && \text{(จาก } xy = 0) \end{aligned}$$

ดังนั้น จาก BH 3. (ในส่ววิธีกร) จะได้ บทนิยาม 2.1 ข้อ 3 เป็นจริง

ดังนั้น $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

ข้อสังเกต 3.37 ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra โดยที่ X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัวแล้ว $(X, *, 0)$ ไม่เป็น BCC-algebra เพราะว่ จากทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า $0x = x$ สำหรับทุก $x \in X$ ดังนั้น BCC 3. ไม่จริง

สรุปความสัมพันธ์ของโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ ได้ดั่งแผนภาพในภาพที่ 4 โดยที่ ถ้า X และ Y เป็น class ของโครงสร้างพีชคณิตแล้ว $X \rightarrow Y$ หมายถึง X เป็น subclass ของ Y



ภาพที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่าง core algebra, Q-algebra, BCH-algebra, BCI-algebra, TM-algebra, QS-algebra, BF-algebra, BF₁-algebra, BF₂-algebra, BH-algebra, BG-algebra, B-algebra, BCC-algebra และ SU-algebra

สรุป

จากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การจำแนกโครงสร้างพีชคณิต

โครงสร้างพีชคณิต core algebra หมายถึง ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $xx = 0$
2. $x0 = x$

สำหรับทุก $x \in X$

สรุปการจำแนกโครงสร้างพีชคณิตต่างๆ ได้ดังนี้

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
4. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra
5. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
6. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
7. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
8. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
9. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
10. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $((xy)(xz))(zy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra
11. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra

12. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $x(xz) = z$ สำหรับทุก $x, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
13. $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra ก็ต่อเมื่อ $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
14. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
15. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $x = (xy)(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra
16. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra
17. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra
18. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
19. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $0(xy) = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
20. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra
21. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ ถ้า $xy = 0$ และ $yx = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
22. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
23. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra
24. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra
25. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra
26. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
27. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra
28. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
29. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(zy) = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCC-algebra

2. โครงสร้างของ SU-algebra

โครงสร้างพีชคณิต SU-algebra หมายถึง ระบบคณิตศาสตร์ $(X, *, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค และ 0 เป็นสมาชิกของ X ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(yz) = 0$
2. $x0 = x$
3. ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra นิยามความสัมพันธ์ \leq บน X โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ แล้ว $(X; \leq)$ เป็น partially ordered set

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra จะได้ว่า

1. $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $0x = x$ สำหรับทุก $x \in X$
4. $((xy)x)y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$
5. $((xz)(yz))(xy) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
6. $xy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $(xz)(yz) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
7. $xy = x$ ก็ต่อเมื่อ $y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$
8. $x \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
9. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $xz \leq yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
10. $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
11. $x(yz) = z(yx)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
12. $(xy)z = x(yz)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
13. ถ้า $xz = yz$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
14. ถ้า $ax = x$ แล้ว $a = x$ สำหรับทุก $a, x \in X$
15. $(X, *)$ เป็น commutative group

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก I ว่า SU-subalgebra ถ้า $xy \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$ และจะเรียก I ว่า ideal ของ X ถ้า $0 \in I$ และถ้า $(xy)z \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $xz \in I$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ถ้า A_i เป็น ideal ของ X เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้ว $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็น ideal ของ X

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $xy \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. I เป็น ideal ของ BCI-algebra X
3. I เป็น SU-subalgebra ของ X

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ I เป็น ideal ของ X กำหนดความสัมพันธ์ \sim บน X นิยามโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy \in I$ แล้วความสัมพันธ์ \sim เป็น congruence บน X

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra, I เป็น ideal ของ X และ \sim เป็น congruence บน X สำหรับ $x \in X$ นิยาม $[x]_I = \{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid xy \in I\}$ เป็น equivalence class ที่บรรจุ x และเรียก x ว่าตัวแทนเซต $[x]_I$ นิยาม $X/I = \{[x]_I \mid x \in X\}$ และนิยาม $*$ บน X/I โดย $[x]_I [y]_I = [xy]_I$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า

1. $[x]_I = [y]_I$ ก็ต่อเมื่อ $x \sim y$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. $(X/I, *, [0]_I)$ เป็น SU-algebra

ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และให้ $f: X \rightarrow Y$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(xy) = f(x)f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
Kernel ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ หรือ $\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$
Image ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ หรือ $f(Y) = \text{Im}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$

ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง Y

3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก X ไปทั่วถึง Y
4. X isomorphic กับ Y เขียนแทนด้วย $X \cong Y$ ถ้ามี $f: X \rightarrow Y$ เป็น isomorphism

ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra I เป็น ideal ของ X และ $f: X \rightarrow X/I$ นิยามโดย $f(x) = [x]_I$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้วจะได้ว่า f เป็น epimorphism

ให้ $(X, *, 0_x)$ และ $(Y, *, 0_y)$ เป็น SU-algebra และ $f: X \rightarrow Y$ เป็น homomorphism จะได้ว่า

1. $f(0_x) = 0_y$
2. $\text{Im}(f)$ เป็น SU-subalgebra
3. $\text{Ker}(f) = \{0_x\}$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1
4. $\text{Ker}(f)$ เป็น ideal ของ X
5. $X/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$
6. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง Y แล้ว $X/\text{Ker}(f) \cong Y$

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ A, B เป็น subset ของ X นิยาม $AB = \{xy \in X \mid x \in A, y \in B\}$ แล้วจะได้ AB เป็น SU-subalgebra ของ X

ให้ $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra และ H, N เป็น ideal ของ X จะได้ว่า

1. นิยาม $HN = \{xy \in X \mid x \in H, y \in N\}$ แล้วจะได้ HN เป็น SU-subalgebra ของ X
2. N เป็น ideal ของ HN
3. $(X/N)/(H/N) \cong X/H$
4. $H/(H \cap N) \cong HN/N$

4. การจำแนกโครงสร้างของ SU-algebra

สรุปการจำแนกโครงสร้างของ SU-algebra ได้ดังนี้

1. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra
2. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น QS-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
3. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra

4. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น TM-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
5. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra
6. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCI-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $xy = yx$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
7. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra
8. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BCH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(yz) = xz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
9. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra
10. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น Q-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(yz) = xz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
11. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น core algebra
12. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น core algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
13. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra
14. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น B-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(yz)(zx) = xy$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
15. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra
16. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_1 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
17. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra
18. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF_2 -algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
19. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra
20. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BF-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
21. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra
22. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BG-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra
23. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra
24. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น BH-algebra ที่สอดคล้องกับสมบัติ $(xy)(xz) = yz$ สำหรับทุก

$x, y, z \in X$ แล้ว $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra

25. ถ้า $(X, *, 0)$ เป็น SU-algebra โดยที่ X มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัวแล้ว $(X, *, 0)$ ไม่เป็น BCC-algebra



เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- Ahn, S.S. and H.S. Kim. 1999. On QS-algrbras. **Journal of the Chungcheong Mathematical Society.** 12: 33-41
- Aral, Y., K. Iseki and S. Tanaka. 1966. Characterizations of BCI , BCK algebras. **M.J.A.** 42 : 105-107.
- Dar, K.H., and M. Akram. 2006. On endomorphisms of BCH-algebras. **Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.** 33: 227-234
- Dudek, W.A. and X. Zha ng. 1998. On ideals and congruences in BCC-algebras. **Czechoslovak Math. Journal.** 48(123): 21-29.
- Iseki, K. 1966. An algebra related with a propositional calculus. **M.J.A.** 42: 26-29.
- Jun, Y.B. Characterizations of BCI/BCH-algebras. **Indian Journal pure apply Math.** 25(4): 361-363
- Liu, Y.L., J. Meng, X.H. Zhang and Z.C. Yue. 2000. q-ideal and a ideal in BCI-algrbras. **Southeast Asian Bulletin of Mathematics.** 24: 243-253
- Megalai, K. and A.Tamilarasi. 2010. Classsification of TM-algebra. **CASCT.** : 11-16
- Neggers, J. and H.S. Kim. 2002. On B-algrbras. **MATEMATIQKI VESNIK.** 54: 21-29

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ	นางสาวสุภาวดี แก้วระหัน
เกิดวันที่	27 กุมภาพันธ์ 2525
สถานที่เกิด	จังหวัดนครราชสีมา
ประวัติการศึกษา	วท. บ. คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ตำแหน่งปัจจุบัน	ครู คศ.1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนเมืองคง ต. เมืองคง อ. คง จ. นครราชสีมา 30260
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนโครงการส่งเสริมการผลิตครูผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์(สควค.) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)