



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (ฟิสิกส์)

ปริญญา

ฟิสิกส์ สาขา ฟิสิกส์
สาขา ภาควิชา

เรื่อง แบบจำลองแบบไม่ต่อเนื่องสำหรับการสังเคราะห์เสียงดิจิทัลของเครื่องสายโดยวิธีการ
แปลงเชิงฟังก์ชัน

Discrete Model for Digital Sound Synthesis of String Instruments by Using the
Functional Transformation Method

นามผู้วิจัย นายมานิชญ์ กาญจนเพ็ญ

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรศักดิ์ เชียงกา, Dr.rer.nat)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ, วท.ด.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์วิวัฒน์ วงศ์ก่อเกื้อ, วท.ด.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา ชีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ _____ เดือน _____ พ.ศ. _____

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

แบบจำลองแบบไม่ต่อเนื่องสำหรับการสังเคราะห์เสียงดิจิทัลของเครื่องสายโดยวิธีการ
แปลงเชิงฟังก์ชัน

Discrete Model for Digital Sound Synthesis of String Instruments by Using the
Functional Transformation Method

โดย

นายมานิชญ์ กาญจนเพ็ญ

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อขอความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (ฟิสิกส์)

พ.ศ. 2555

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

มาโนชญ์ กาญจนเพ็ญ 2555: แบบจำลองแบบไม่ต่อเนื่องสำหรับการสังเคราะห์เสียง
ดิจิทัลของเครื่องสายโดยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
(ฟิสิกส์) สาขาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก:
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรศักดิ์ เชียงกา, Dr.rer.nat. 42 หน้า

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชันในการหาผลเฉลยของ
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายการสั่นของสายกีตาร์ ฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติสามารถหาได้โดย
การแปลงรูปที่เหมาะสมที่ขึ้นกับเวลาและปริภูมิของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับ
เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต การสั่นของสายกีตาร์บี ที่รวมฟังก์ชันของแรงกระตุ้น
สามารถหาค่าและแสดงออกมาในลักษณะของภาพเคลื่อนไหว การสังเคราะห์เสียงสามารถหาได้
จากการแปลงรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไปสู่ตัวกรองดิจิทัลลำดับต่ำที่มีการวนรอบสัญญาณ ด้วย
วิธีการแปลงแอนะล็อกไปสู่ความไม่ต่อเนื่อง ซึ่งพบว่าขั้นตอนวิธีที่ใช้เหมาะสมกับการ
ประมวลผลแบบทันทีของการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล และข้อดีของวิธีการนี้คือ ได้คำตอบที่
ถูกต้องแม่นยำและมีความเสถียรสำหรับระบบที่ใช้ในการคำนวณและประมวลผล

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Manorth Kanjanapen 2012: Discrete Model for Digital Sound Synthesis of String Instruments by Using the Functional Transformation Method. Master of Science (Physics), Major Field: Physics, Department of Physics. Thesis Advisor: Assistant Professor Surasak Chiangga, Dr.rer.nat. 42 pages.

This thesis studies the application of the functional transformation to solve the partial differential equation (PDE) describing the vibration of guitar string. A multidimensional transfer function was obtained by suitable transformation with respect to time and space on the PDE for the corresponding initial-boundary value. The transverse vibration of guitar string B which takes the excitation function into account was demonstrated and illustrated as an animation. The sound synthesis was generated by transformation of the PDE to a low order recursive digital filter with well-known continuous-to-discrete transformations. It is found that our algorithms were suitable for real-time implementation on digital signal processing and has the advantage of exact solutions with stable, computationally effective systems.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ให้ข้อคิด แนวทาง คำปรึกษาและ
ความรู้ในด้านการค้นคว้าวิจัย ตลอดจนการตรวจสอบแก้ไขวิทยานิพนธ์นี้จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์
ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขและตรวจสอบวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบพระคุณบัณฑิตวิทยาลัย ที่ได้ให้ความกรุณาตรวจสอบวิทยานิพนธ์ให้มีความ
สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ท้ายที่สุดนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจสำคัญ และให้ความช่วยเหลือในทุกๆ
ด้านจนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

มาโนชญ์ กาญจนเพ็ญ
เมษายน 2555

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	4
อุปกรณ์และวิธีการ	24
ผลและวิจารณ์	27
สรุปและข้อเสนอแนะ	38
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	39
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	42

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	พารามิเตอร์ทางกายภาพของสายกีตาร์ในลอนสาย B	9



สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	แผนภาพแสดงวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน	25
2	แผนภาพแสดงโครงสร้างของตัวกรองดิจิทัล	26
3	กราฟแสดงตำแหน่งโพลเมื่อ $\mu = 1$	27
4	แผนภาพแสดงการกระตุ้นระบบเพื่อดูผลตอบสนอง	28
5	แผนภาพแสดงระบบเมื่อมีสัญญาณขาเข้าเป็น $\frac{1}{s}$	28
6	กราฟแสดงผลตอบสนองในเชิงเวลาของระบบเมื่อ $\omega_1 = 1.5519 \times 10^3 \text{ rad/sec}$	29
7	กราฟแสดงผลตอบสนองของระบบแบบเสถียรวิกฤติของระบบอันดับสอง	31
8	กราฟแสดงผลตอบสนองในเชิงเวลาของระบบ	32
9	กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความถี่การสั่นที่ฮาร์โมนิกต่าง ๆ	32
10	กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียง เมื่อไม่มีความหน่วงและความแข็งตั้งเป็นศูนย์	33
11	กราฟแสดงระบบเสถียร	34
12	กราฟแสดงการตอบสนองแบบถูกหน่วงของระบบ	34
13	กราฟแสดงการสั่นของสายกีตาร์ที่เวลา 1 ถึง 5 วินาที	35
14	กราฟแสดงผลการตอบสนองอิมพัลส์แบบไม่ต่อเนื่อง	35
15	กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียง เมื่อสายมีค่าความหน่วงและความแข็งตั้ง	
	กราฟแสดงตำแหน่งโพล $s_{\infty\mu}$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน $\bar{G}(\mu, s)$	36
16	กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียงเมื่อป้อนแรง (a) exponential curves	37
17	และ (b) S-shape	37

แบบจำลองแบบไม่ต่อเนื่องสำหรับการสังเคราะห์เสียงดิจิทัลของเครื่องสายโดยวิธีการ แปลงเชิงฟังก์ชัน

Discrete Model for Digital Sound Synthesis of String Instruments by Using the Functional Transformation Method

คำนำ

หลังจากที่ได้มีการพัฒนาการถอดรหัสของเสียงพูดและสัญญาณเสียงต่าง ๆ กระบวนการออกแบบการสังเคราะห์เสียงเครื่องดนตรีได้มีความสำคัญมากขึ้น และถูกนำมาใช้กับเครื่องดนตรีแบบดิจิทัลรวมถึงโปรแกรมที่ใช้ทำงานด้วยคอมพิวเตอร์ วิธีการสังเคราะห์เสียงของเครื่องดนตรีโดยอาศัยแบบจำลองทางฟิสิกส์ เป็นวิธีการใหม่ซึ่งทำให้เข้าใจการทำงานของเครื่องดนตรีชั้นนั้นได้ดียิ่งขึ้น กระบวนการสังเคราะห์เสียงเริ่มจากหลักการพื้นฐานทางฟิสิกส์สู่แบบจำลองการเกิดเสียงโดยอาศัยกลไกของเครื่องดนตรีและนำไปสู่การผลิตเสียงด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์หรือฮาร์ดแวร์ที่ใช้เพื่อการประมวลผลสัญญาณ จากแบบจำลองของการสั่นซึ่งโครงสร้างทั้งหมดจะอยู่ในรูปคณิตศาสตร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation, PDF) ประกอบไปด้วยอนุพันธ์ที่สัมพันธ์กับเวลาและตำแหน่ง โดยส่วนใหญ่แล้วผลเฉลยที่ได้จะไม่ใช่คำตอบที่จำเพาะเจาะจง การหาคำตอบโดยการประมาณค่าสำหรับแบบจำลองดังกล่าวสามารถนำไปคำนวณได้ในหลายวิธีการ วิธีการ เช่น วิธีการเชิงตัวเลข เป็นต้น วิธีการหนึ่งที่นิยมใช้ก่อนหน้านี้นี้คือการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ซึ่งแทนที่ตัวแปรของอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันแตกต่าง โดยที่ฟังก์ชันเหล่านี้จะอยู่ในรูปไม่ต่อเนื่องซึ่งสามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้นด้วยการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ ปัญหาของวิธีการนี้ที่เห็นได้ชัดคือ ช่วงห่างระหว่างขั้นของการเปลี่ยนแปลงต้องมีขนาดเล็กมากๆ เพื่อที่จะให้ได้คำตอบที่รวดเร็ว หากแบบจำลองนั้นมีมากกว่าหนึ่งมิติ ขนาดของช่วงห่างระหว่างขั้นของการเปลี่ยนแปลงมีขนาดใหญ่มาก ที่ความถี่สูงจะส่งผลกระทบต่อให้เกิดความผิดเพี้ยนและอัลกอริทึมจะมีความไม่เสถียร การประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องจึงไม่เหมาะสมเพราะจะทำให้เกิดการเปลี่ยนค่าความถี่เจาะจงอย่างต่อเนื่องของระบบ ปัญหาดังกล่าวสามารถเลี่ยงได้ด้วยวิธีท่อนำคลื่นดิจิทัล (Digital Waveguide) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมมากในการสังเคราะห์เสียง โดยอาศัยหลักการทางฟิสิกส์ของท่อนำคลื่นมานำเสนอรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการคลื่นอย่างง่ายซึ่งทำให้ได้ผล

เฉลี่ยที่อธิบายได้ด้วยคลื่นเคลื่อนที่ไปข้างหน้าและย้อนกลับ โดยคลื่นเหล่านี้สามารถแสดงได้ชัดเจนขึ้นด้วยเส้นห่วงสัญญาณ โดยพฤติกรรมทางฟิสิกส์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะประมาณได้โดยการป้อนสัญญาณย้อนกลับของเส้นห่วงสัญญาณไปที่ฟังก์ชันของระบบหรือฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งวิธีการนี้ประหยัดเวลาในการประมวลผลอย่างมากและยังใช้ได้กับสมการทางฟิสิกส์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่ก็ยังมีข้อเสียอยู่ที่ตัวแปรที่ไม่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นในฟังก์ชันของระบบ และแบบจำลองของวิธีนี้ยังง่ายเกินไปในการกำหนดค่าสำหรับตัวแปรที่จำเป็นที่ใช้ในการวนรอบของตัวกรองสัญญาณ แต่ทั้งนี้ก็แสดงให้เห็นถึงความสามารถของมนุษย์ในการออกแบบเสียงจากสมการทางคณิตศาสตร์ โดยทำให้ระบบทั้งหมดอยู่ในแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

งานวิทยานิพนธ์นี้จะทำการศึกษาวิจัยการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายการสั่นของสายกีตาร์ ด้วยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน โดยจะเปลี่ยนตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ และนำผลที่เกิดขึ้นนี้อธิบายได้ด้วยแบบจำลองดิจิทัล ซึ่งสามารถนำไปสังเคราะห์เสียง อีกทั้งยังไปประยุกต์ใช้ในงานคอมพิวเตอร์ดนตรีได้อีกด้วย

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษากระบวนการสังเคราะห์เสียงของเครื่องดนตรีประเภทเครื่องสาย
2. เพื่อหาแบบจำลองการสังเคราะห์เสียงที่ใช้อธิบายกระบวนการเกิดเสียงจากการสั่นของสาย
3. เพื่อคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของการสั่นของสาย การเคลื่อนไหว และทำการสังเคราะห์เสียงแบบจำลองโดยใช้โปรแกรม MATLAB

ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาการสังเคราะห์เสียงของเครื่องดนตรีประเภทเครื่องสาย โดยใช้แบบจำลองทางฟิสิกส์ด้วยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน ตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นสายกีตาร์คลาสสิกสาย B โดยสมการ PDE ที่ใช้มีลักษณะของความเป็นเชิงเส้น เพื่อศึกษาการสั่นไหวของสาย แรงที่ใช้ในการกระตุ้นมีลักษณะเป็นอิมพัลส์ฟังก์ชัน ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา เพื่อเปรียบเทียบเสียงที่สังเคราะห์ได้กับพฤติกรรมของการสั่น รวมทั้งเปรียบเทียบผลที่ได้กับสิ่งที่เกิดขึ้นจากเครื่องดนตรีจริง

การตรวจเอกสาร

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสังเคราะห์เสียงด้วยแบบจำลองทางฟิสิกส์

Karplus and Strong (1983) ศึกษาอัลกอริทึมที่ใช้เป็นพื้นฐานในงานคอมพิวเตอร์ดนตรีซึ่งต่อมาได้รับความนิยมมากและเป็นแบบจำลองทางฟิสิกส์ที่ง่ายต่อการศึกษาโดยใช้หลักการของตัวกรองสัญญาณ เริ่มด้วยการป้อนคลื่นข้อมูลเช่น คลื่นชนิดสุ่มตัวเลข จากนั้นทำการคำนวณโดยใช้การหน่วงสัญญาณหนึ่งครั้งในการวนรอบพร้อมกับตัวกรองสัญญาณ โดยเริ่มต้นอัลกอริทึมมีการวนรอบที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนหรือฟังก์ชันระบบเป็น $H(z) = 0.5(1 + z^{-1})$ และทำงานร่วมกับตัวกรองผ่านต่ำ ตัวกรองจะทำการกำจัดความถี่สูงในการวนรอบได้เร็วกว่าความถี่ต่ำ ซึ่งเหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นจริงกับการดีคของสายกีตาร์ โดยเสียงใหม่ที่ได้จะป้อนกลับคืนเป็นสัญญาณขาเข้าไปที่เส้นหน่วงสัญญาณ ค่าความถี่ที่ต้องการสามารถปรับเปลี่ยนได้ง่ายโดยการเปลี่ยนจำนวนตัวซັกสัญญาณหรือความยาวของเส้นหน่วงสัญญาณ ด้วยอัลกอริทึมที่เรียบง่าย แต่สามารถนำไปสังเคราะห์เสียงได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยใช้คอมพิวเตอร์และระบบประมวลผลในยุคก่อนปี 1980

Smith (1992) ศึกษาวิธีการสังเคราะห์เสียงโดยวิธี ท่อนำคลื่นดิจิทัล (Digital Waveguide) เริ่มจากการหาคำตอบสมการคลื่นด้วยการทำให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของคลื่นเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ (d'Alembert solution) มาจำลองในลักษณะเดียวกับท่อนำคลื่น ซึ่งผลลัพธ์ทางฟิสิกส์ที่ได้เกิดจากการรวมกันของคลื่นเคลื่อนที่เหล่านี้ ในกรณีที่ไม่มีการสูญเสีย คลื่นที่เคลื่อนที่ในระหว่างสองจุดในตัวกลางสามารถสร้างแบบจำลองได้ง่ายมากเพียงแค่ใช้เส้นหน่วงเวลาดิจิทัลซึ่งเสมือนกับการเกิดคลื่นในท่อนำคลื่นแบบปกติเพียงแต่นำมาอยู่ในแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ส่วนในกรณีทั่วไปที่ความสูญเสียมีความเกี่ยวเนื่องกับความถี่และการแพร่กระจาย ในระบบแบบต่อเนื่องและไม่ขึ้นกับเวลานั้นสามารถทำได้โดยการกำหนดค่าตัวแปรความสูญเสียที่จุดของเส้นหน่วงเวลาดิจิทัล วิธีการสังเคราะห์เสียงวิธีนี้สามารถใช้ได้กับเครื่องดนตรีที่เป็นเครื่องสายและเครื่องเป่า เหมือนกับเป็นการนำแบบจำลองของ Karplus-Strong มาขยายและอธิบายในเชิงฟิสิกส์มากขึ้น ส่วนในกรณีที่มีการกระจายของคลื่นในหลายทิศทางก็สามารถทำได้โดยการทำให้เกิดจุดรวมของเส้นหน่วงเวลาดิจิทัลในทิศทางต่างๆ ซึ่งเป็นข้อดีเมื่อมีการนำอัลกอริทึมนี้มาประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสังเคราะห์เสียงด้วยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

Rabenstein (1998) ได้ศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชันถ่ายโอนหนึ่งมิติที่ใช้อธิบายระบบกายภาพหลายมิติที่ประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

Rabenstein (1998) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองฟังก์ชันถ่ายโอนที่ต่อเนื่องทางเวลาที่อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและระบบหลายมิติที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ของระบบที่ไม่ต่อเนื่องนี้สามารถอธิบายได้ด้วยพื้นฐานการประมวลผลสัญญาณและการวนรอบของสัญญาณที่แน่นอน

Rabenstein (1998) ได้ศึกษาฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติที่เป็นแบบจำลองของอินพุตและเอาต์พุตสำหรับปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว เช่น เวลาและปริภูมิเป็นต้น ซึ่งสามารถแสดงผลที่เกิดจากเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขขอบเขต และฟังก์ชันที่เข้ามากระตุ้นระบบ โดยผลลัพธ์จะเป็นเอาต์พุตของสัญญาณที่แยกกัน ซึ่งแสดงให้เห็นข้อดีของวิธีการนี้คือ เหมาะกับการประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ มีความเสถียรของระบบ และสามารถใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขได้อย่างแม่นยำโดยปราศจากความผิดพลาดจากการปิดเศษของการประมาณค่า โดยได้เพิ่มเติมการศึกษาปัญหาทางฟิสิกส์ที่มีตัวดำเนินการอนุพันธ์แบบไม่มีความผูกพันในตัวเอง (non self-adjoint)

Rabenstein (1998) ได้ศึกษาการแปลงสัญญาณแอนะล็อกไปเป็นสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องของการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลไปสู่แบบจำลองแบบไม่ต่อเนื่อง และทำการเปรียบเทียบข้อดีของการประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ด้วยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชันเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method; FEM)

Trautmann and Rabenstein (1999) ได้ศึกษาการแปลงแบบสตูร์ม-ลิอูวิลล์สำหรับการหาผลเฉลยเวกเตอร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไปสู่ฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติ โดยยกตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของระบบส่งโทรเลขที่มีการกระจายของแรงดันไปตามสายส่งไฟฟ้า

Trautmann and Rabenstein (1999) ได้ศึกษาการสังเคราะห์เสียงดิจิทัลของการสั่นของเครื่องดนตรีประเภทเครื่องสายโดยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

Trautmann and Rabenstein (2000) ได้ศึกษาการสังเคราะห์เสียงเครื่องสายโดยวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน ด้วยแบบจำลองการสั่นของสายที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งเกิดจากเอาท์พุทที่ขึ้นอยู่กับ การความตึงของสาย

Trautmann and Rabenstein (2002) ได้ศึกษาการสังเคราะห์เสียงกีตาร์เบสโดยมีหลักสำคัญในการศึกษาความเสถียรของระบบสำหรับการสังเคราะห์เสียงในลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นถูกนำเสนอในลักษณะของแรงที่มากระทำต่อสายกีตาร์เบส ซึ่งคือการกระทำต่อกันระหว่างสายกับเฟร็ต (fret) ในลักษณะเทคนิคการเล่นที่เรียกว่าการตบเบส (slap bass)

Rabenstein and Trautmann (2002) ได้ศึกษาการประยุกต์ทฤษฎีความต่อเนื่องหลายมิติกับระบบที่ไม่ต่อเนื่องที่อธิบายการสังเคราะห์เสียงดนตรีจากแบบจำลองกายภาพของเครื่องดนตรีจริง ได้เปรียบเทียบให้เห็นข้อดีของวิธีการสังเคราะห์เสียงวิธีนี้เมื่อเทียบกับวิธีอื่น

Trautmann and Rabenstein (2003) ได้ศึกษาวิธีการสังเคราะห์เสียงโดยมีหลักสำคัญคือการแปลงรูปฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์โดยการประยุกต์การแปลงรูปอินทิกรัลสองแบบเพื่อหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ใช้การแปลงลาปลาซ ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเวลาและการแปลงแบบสตูร์ม-ลิอูวิลล์ เพื่อแปลงรูปในเทอมของตำแหน่ง สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติที่ได้จะนำมาประยุกต์ใช้กับตัวกรองดิจิทัล ในระบบเชิงเส้นผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปอันดับสอง โดยมีการต่อกันในแบบขนาน วิธีการนี้ยังนำไปใช้กับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้อีกด้วย ข้อดีของวิธีการนี้สามารถนำไปสร้างแบบจำลองการสั่นของเครื่องสายและการสั่นของหนังกลองโดยไม่เกิดความคลาดเคลื่อนจากกระบวนการวัดค่าทางฟิสิกส์

Trautmann and Rabenstein (2004) ได้ศึกษาการจำลองแบบหลายอัตราส่วนของการสั่นของสายรวมถึงการกระทำต่อกันระหว่างสายกับเฟร็ตที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

Rabenstein and Müller (2008) ได้ศึกษาการสังเคราะห์เสียงจิตพิสัยของการสั่นของสายด้วยหลักการทางฟิสิกส์และจิตสวนศาสตร์ (Psychoacoustic) ที่เกี่ยวกับประสาทสัมผัสของมนุษย์ด้านการได้ยิน

Rabenstein (2010) ได้ศึกษาแบบจำลองทางฟิสิกส์และแบบจำลองขั้นตอนวิธีของเครื่องดนตรีระฆังราว (Tubular Bells) โดยเครื่องดนตรีชนิดนี้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อเลียนเสียงระฆังจริงๆ ทำด้วยท่อโลหะแขวนเรียงตามลำดับเสียงต่ำไปยังเสียงสูง ซึ่งมีทรงเรขาคณิตที่ง่ายต่อการจำลองการสั่นของโครงสร้างในลักษณะสามมิติ สามารถสร้างแบบจำลองในลักษณะของแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีความต่างกันของเงื่อนไขขอบเขตเอกพันธ์

บทนำ

ฟิสิกส์ของการสังเคราะห์เสียงอยู่บนเส้นแบ่งระหว่างอะคูสติกและการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล กระบวนการสังเคราะห์เสียงโดยใช้แบบจำลองทางฟิสิกส์มีสองขั้นตอนหลักคือ อันดับแรกคือการเข้าใจลักษณะการทำงานของเครื่องดนตรีจริง และการสร้างแบบจำลองของส่วนต่าง ๆ ที่ใช้อธิบายลักษณะทางกายภาพให้ถูกต้องตามสิ่งที่เกิดขึ้นจริง ขั้นตอนที่สองคือการนำแบบจำลองที่ได้นี้ไปใช้บนคอมพิวเตอร์หรือฮาร์ดแวร์ ซึ่งหมายความว่ามีการกำหนดความไม่ต่อเนื่อง (discretization) ในส่วนของเวลาและระยะพื้นที่ ของสมการต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งบ่อยครั้งการทำให้เข้าใจง่าย (simplifications) บางอย่างมีความจำเป็นเนื่องจากข้อจำกัดของการประมวลผลและแหล่งข้อมูล

เทคนิคการสังเคราะห์เสียงโดยใช้แบบจำลองทางฟิสิกส์

วิธีการสังเคราะห์เสียงสามารถแบ่งได้หลายวิธี ในที่นี้เราแบ่งออกเป็นสามกลุ่ม คือ

กลุ่มแรกคือกลุ่มที่ใช้วิธีนามธรรม โดยมีขั้นตอนวิธีการที่แตกต่างกันในการนำมาซึ่งการสังเคราะห์เสียง ตัวอย่างเช่น การกล้ำความถี่ (frequency modulation ; FM) ในปี ค.ศ.1973 โดย Chowning และการตัดแต่งรูปคลื่น (wave shaping)) ในปี ค.ศ.1979 โดย Le Brun และ Arfib การสร้างเครื่องดนตรีจริงด้วยวิธีการเหล่านี้มีความซับซ้อนตามความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางเทคนิคและเครื่องดนตรีจริงซึ่งไม่ย่นย่อในการจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการตายตัว

กลุ่มที่สอง คือกลุ่มที่ใช้วิธีการสร้างแบบจำลองสัญญาณ เป็นหนึ่งในแบบจำลองที่ใช้ในการสังเคราะห์เสียงเครื่องดนตรี วิธีการนี้จะมีการป้อนสัญญาณหรือชุดของรูปแบบคลื่นไปในแบบจำลอง โดยอาศัยเครื่องมือและฟิสิกส์ของกลไกการสร้างเสียงซึ่งจะไม่ขอก้าวถึงใน

รายละเอียด ตัวอย่างการสังเคราะห์โดยใช้วิธีการนี้ เช่น การกล้ำแบบรหัสพัลส์ (Pulse Code Modulation ; PCM) ในปี ค.ศ.1995 โดย Roads และการสังเคราะห์แบบจำลองเชิงสเปกตรัม (Spectral Modeling Synthesis ; SMS) ในปี ค.ศ.1990 โดย Serra และ Smith

กลุ่มที่สาม คือกลุ่มที่ใช้แบบจำลองทางฟิสิกส์เป็นวิธีการสร้างเสียงของเครื่องดนตรีด้วยแบบจำลองพฤติกรรมทางกายภาพของเครื่องดนตรีนั้นๆ ซึ่งโดยปกติแล้วระบบทางฟิสิกส์ เช่น สายไวโอลิน หรือ หนักลอง สามารถอธิบายด้วยชุดสมการความแตกต่างและฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อเครื่องดนตรีได้รับการกระตุ้น เช่น การดีด การสี เป็นต้น สมการความแตกต่างสามารถหาผลเฉลยหรือคำตอบในรูปทั่วไป ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับอินพุทในรูปแบบต่างๆ และให้อาต์พุทของแบบจำลองมีความใกล้เคียงกับอาต์พุทที่ออกมาจากเครื่องดนตรีจริง วิธีการหนึ่งที่รู้จักกันดีในงานประเภทนี้คือ การสังเคราะห์ที่นำคลื่นแบบดิจิทัล (digital waveguide synthesis) ในปี ค.ศ.1992 โดย Smith ซึ่งมีประสิทธิภาพสำหรับแบบจำลองการสั่นของสายในหนึ่งมิติ โดยขึ้นอยู่กับผลเฉลยของสมการคลื่น และยังมีแบบจำลองทางฟิสิกส์อื่นที่น่าสนใจในนำเสนอ ในปี ค.ศ.2006 โดย Välimäki

ทั้งสองวิธีหลังมีทั้งข้อดีและข้อเสียในตัวเอง วิธีการสังเคราะห์โดยอาศัยระบบสัญญาณสามารถรับรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพและเสียงที่สร้างขึ้น โดยส่วนใหญ่มักถูกต้องกับแบบจำลองที่ตอบสนองกับเครื่องดนตรีเมื่อได้รับการกระตุ้น วิธีการนี้สามารถใช้เมื่อการกระตุ้นมีค่าเกือบเป็นค่าคงที่ หรือ เครื่องดนตรีมีความเป็นเชิงเส้นเหมาะสำหรับการประมาณค่า ประโยชน์ที่ดีที่สุดของวิธีการนี้คือการใช้พารามิเตอร์ที่ง่ายต่อการประมาณค่าและ โครงสร้างของแบบจำลองอันเดียวกันสามารถนำไปใช้กับเครื่องดนตรีต่างชนิดกันได้

แบบจำลองทางกายภาพ

ในส่วนนี้เป็นการอธิบายแบบจำลองทางกายภาพการสั่นในแนวขวางของสายกีตาร์ซึ่งใช้ตลอดในงานวิจัยนี้ โดยการนำเสนอจะถูกจำกัดในหนึ่งมิติซึ่งเพียงพอสำหรับการสร้างแบบจำลองการสั่นของสายและเครื่องดนตรีประเภทเครื่องเป่า นอกจากนี้ยังเหมาะสมกับการทำให้เข้าใจง่าย ทั้งนี้สายกีตาร์กำหนดว่ามีความยืดหยุ่นและอยู่ในรูปสมการเอกพันธ์ การกระตุ้นเพียงเล็กน้อยของสายไม่มีผลต่อการเปลี่ยนของพื้นที่หน้าตัดหรือแรงดึงของสายเพื่อที่จะให้สายประพุดิตัวใน

ลักษณะเชิงเส้น ทั้งนี้ความเร็วของพื้นผิวไม่ควรส่งผลต่อความเข้มของความเค้น แบบจำลองทางกายภาพสามารถหาผลเฉลยได้จากพื้นฐานทฤษฎีของความยืดหยุ่น โดยอยู่ในรูป PDE

แบบจำลองของสายกีตาร์

พิจารณาสายกีตาร์ที่มีความยาว l โดยปลายทั้งสองข้างถูกตรึงไว้ โดยมีระยะการโก่งตัว $y(x,t)$ ขึ้นอยู่กับพิกัดของระยะ x เมื่อ $0 < x < l$ และพิกัดทางเวลา t สายกีตาร์ถูกกระตุ้นด้วยแรงต่อหน่วยความยาว $f_e(x,t)$ ผลลัพธ์การเคลื่อนที่ของสายกีตาร์อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE)

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - T_s \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t \partial x^2} = f_e(x,t) \quad (1)$$

ในเทอมแรกของสมการด้านซ้ายมือคือแรงเฉื่อยของมวลของระบบที่เกิดจากมวลของสายกีตาร์ เทอมที่สองเป็นลักษณะของแรงแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดสายกีตาร์ เทอมที่สามเป็นลักษณะการเคลื่อนที่คล้ายคลื่น (wave-like motion) ด้วยแรงตึง T_s ส่วนเทอมที่สี่และห้าแสดงอัตราการสูญเสีย โดยอัตราการสูญเสียมีทั้งขึ้นอยู่กับความถี่และไม่ขึ้นอยู่กับความถี่ ในกรณีที่ไม่ขึ้นกับความถี่ค่าการสูญเสียอาจเกิดจากคุณสมบัติทางกายภาพ รูปทรงของสายกีตาร์ หรือการสูญเสียในอากาศ เป็นต้น

โดยสมการ PDE นี้สามารถลดรูปเป็นสมการคลื่น ($m \partial^2 y / \partial t^2 - T_s \partial^2 y / \partial x^2 = 0$) ถ้าสายกีตาร์ไม่มีความแข็งตึง ($E = 0$) และไม่มีการสูญเสีย ($d_1 = 0, d_3 = 0$) ผลเฉลยของสมการที่ 1 สามารถแสดงในรูปคู่ของคลื่นเคลื่อนที่ อย่างไรก็ตามเมื่อความแข็งตึงมีค่าไม่เป็นศูนย์ สมการจะติดเทอมลำดับสี่ ($EI \partial^4 y / \partial x^4$) กรณีนี้จะถูกจำแนกออกมา เพราะผลเฉลยของคลื่นเคลื่อนที่ไม่สามารถนำมาใช้ได้ ตัวแปรค่าความหน่วง d_1 และ d_3 ได้มาจากแบบจำลองที่ไม่เพียงแต่แสดงถึงการสูญเสียที่เกิดจากอากาศเท่านั้นแต่ยังรวมไปถึงวัสดุของสายกีตาร์และการสั่นพ้องในตัวของกีตาร์ด้วย

สมการ PDE นี้จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ทางฟิสิกส์ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 จากการที่สายโดนตรึงที่ปลายทั้งสองข้าง ระยะการโก่งตัวและความโค้งมีค่าเป็นศูนย์ที่ $x = 0, l$ ซึ่งต้องการ

เงื่อนไขเริ่มต้นสองเงื่อนไข จากสมการที่ 1 ที่มีอนุพันธ์ทางเวลาลำดับสอง ระบุรายละเอียดระยะเวลาการโก่งตัวเริ่มต้น $y(x,0)$ และความเร็วเริ่มต้น $\dot{y}(x,0)$ ที่ $t=0$ โดยสัญลักษณ์จุดด้านบนบนแสดงถึงอนุพันธ์ทางเวลา $\dot{y}(x,t) = \partial y / \partial t$ เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ เราพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเอกพันธ์

$$f_i \{y(x,t)\} = \begin{pmatrix} y(x,0) \\ \dot{y}(x,0) \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

โหมคการสั้นของสายไม่สามารถหาได้จาก PDE เพียงอย่างเดียวหากแต่อาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ $x=0$ และ $x=l$ ในการหาผลเฉลยต้องใช้เงื่อนไขขอบเขตสี่เงื่อนไข เนื่องจากสมการ 1 มีลำดับสูงสุดของอนุพันธ์ของระยะพื้นที่เป็นสี่ จากการที่เครื่องดนตรีชนิดเครื่องสายจะถูกตรึงที่ปลายทั้งสองข้าง ดังนั้นระยะโก่งตัว y และความเบ้ y'' ที่แต่ละจุดเป็นศูนย์

$$f_b \{y(x,t)\} = \begin{pmatrix} y(x,t) \\ y''(x,t) \end{pmatrix} = 0 \text{ เมื่อ } x=0, l \quad (3)$$

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ทางกายภาพของสายกีตาร์ในล่อนสาย B

m	มวลต่อหน่วยความยาว	$0.5914 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}$
E	มอดุลัสของยัง	5.4 GPa
l	ความยาว	0.65 m
I	โมเมนต์ความเฉื่อย	0.171 mm^4
d_1	ความถี่ที่ไม่ขึ้นอยู่กับการหน่วง	$8 \cdot 10^{-5} \text{ kg / (ms)}$
d_3	ความถี่ที่ขึ้นอยู่กับการหน่วง	$-1.4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m/s}$
T_s	ความตึงของสาย	60.97 N

จัดรูปแบบพารามิเตอร์ให้เป็นรูปแบบบรรทัดฐาน เช่นสัมประสิทธิ์สูงสุดของอนุพันธ์ทางเวลาให้อยู่ด้วยกัน

$$\ddot{y}(x,t) + a_{10}\dot{y}(x,t) + a_{04}y^{(4)}(x,t) + a_{02}y''(x,t) + a_{12}\dot{y}''(x,t) = b_0 f_e(x,t) \quad (4)$$

กำหนดสัญกรณ์ให้ง่ายขึ้นและแสดงการบังคับใช้กับปัญหาทางฟิสิกส์ต่อไป ทำการกำหนดสัญกรณ์ดำเนินการ โดยให้สัมประสิทธิ์ a_{ij} แสดงค่าคงที่สำหรับการดำเนินการที่ต่างกัน ของอนุพันธ์ทางเวลา i th และอนุพันธ์ของระยะตำแหน่ง j

$$a_{10} = \frac{d_1}{m}, a_{04} = \frac{EI}{m}, a_{02} = -\frac{T_s}{m}, a_{12} = \frac{d_3}{m}, b_0 = \frac{1}{m} \quad (5)$$

วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

ขั้นตอนทั่วไปสำหรับการหาแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาสำหรับการสั้นของสายที่อธิบายด้วย PDE (4) นั้น มีความใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่ต่อเนื่องของเครือข่ายไฟฟ้าหรือปรากฏการณ์ทางกายภาพอื่น ๆ ที่อธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ในขั้นแรกการแปลงที่เหมาะสมจะถูกนำไปใช้กับสมการความแตกต่างเช่น จากระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาถูกแสดงด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน และจากฟังก์ชันถ่ายโอนนี้จะกลายเป็นแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาด้วยวิธีการแปลงที่เหมาะสมของแอนะลอกไปสู่ระบบที่ไม่ต่อเนื่อง

สำหรับระบบหลายมิติเป็นไปตามสมการ (4) ต้องการการแปลงสองชนิดที่ต่างกัน คือการแปลงเทียบกับเวลาที่นำมาแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและอีกอย่างหนึ่งคือการแปลงเชิงปริภูมิซึ่งนำมาแก้ปัญหาค่าขอบเขต วิธีการนี้เรียกว่าวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน (functional transformation method; FTM) โดยมีหลักการดังนี้

ภาพที่ 1 แสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหามีเงื่อนไขเริ่มต้น-ขอบเขตด้วย FTM โดยมีจุดเริ่มต้นที่เงื่อนไขปัญหาทางกายภาพในรูปของ PDE ที่ประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions; IC) และเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions; BC) ประยุกต์ด้วยการแปลงลาปลาซ (L) เพื่อกำจัดอนุพันธ์ทางเวลาและนำเงื่อนไขเริ่มต้นมาพิจารณา ผลที่ได้คือค่าขอบเขตสำหรับตัวแปรเชิงปริภูมิของปัญหาที่กำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์ (ordinary differential equation; ODE) และเงื่อนไขขอบเขต ในทำนองเดียวกัน การแปลงเชิงปริภูมิ (T) ทำการกำจัดอนุพันธ์ย่อยออกและพิจารณาในส่วนที่เป็นเงื่อนไขขอบเขต จะได้ผลลัพธ์เป็นสมการพีชคณิต จากนั้นจัดรูปสมการพีชคณิตในอยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติ (multidimensional transfer function model; MD

TFM) เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ไม่ต่อเนื่องในเทอมของแบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติ (discrete multidimensional transfer function model; d MD TFM) การแปลงแอนะล็อกไปสู่ระบบที่ไม่ต่อเนื่องแบบคลาสสิกสามารถนำมาใช้ การแปลงผกผันกับตัวแปรเชิงปริภูมิ (T^{-1}) และตัวแปรที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา การแปลงซีพกผัน (Z^{-1}) คือผลที่ได้ในระบบที่ไม่ต่อเนื่องซึ่งเหมาะสมสำหรับการประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์

การแปลงสำหรับตัวแปรเชิงเวลา

สิ่งแรกคือการเปลี่ยนสมการ PDE (4) ไปเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยการแปลงลาปลาซ L กับตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับเวลา

$$Y(x, s) = L\{y(x, t)\} = \int_0^{\infty} y(x, t) e^{-st} dt \quad (6)$$

ตัวแปรความถี่เชิงเวลากำหนดเป็น s ให้ผลลัพธ์เป็น

$$(s^2 + a_{10}s)Y(x, s) + L\{Y(x, s)\} = b_0 F_e(x, s) \quad (7)$$

ซึ่งอนุพันธ์เชิงพื้นที่ที่ได้ถูกรวมอยู่ในตัวดำเนินการหาอนุพันธ์เชิงพื้นที่ L

$$L\{Y(x, s)\} = a_{04}Y^{(4)}(x, s) + (a_{02} + a_{12}s)Y''(x, s) \quad (8)$$

การแปลงลาปลาซได้แปลงเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (3) ให้อยู่ในรูป

$$f_b\{Y(x, s)\} = 0 \text{ เมื่อ } x = 0, l \quad (9)$$

สมการ (7,9) เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นกับค่าขอบเขตโดยเกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงปริภูมิ x

การแปลงสำหรับตัวแปรเชิงปริภูมิ

ในส่วนนี้เป็นการแปลงปัญหาค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเชิงปริภูมิ เนื่องจากปัญหานี้ไม่มีรูปแบบการแปลงอย่างตรงตัวเหมือนการแปลงลาปลาซ การแปลงเชิงพื้นที่ T จะถูกกำหนดด้วยการแปลงเคอร์เนล สตูร์ม-ลีอูวิลล์ โดยมีการปรับให้เข้ากับปัญหาค่าขอบเขตเพื่อให้ได้ผลเฉลยซึ่งเรียกว่า ปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville problem) จากนั้นไปจะเรียกว่าการแปลงสตูร์ม-ลีอูวิลล์ โดยมีรูปแบบดังนี้

$$T\{Y(x, s)\} = \bar{Y}(\mu, s) = \int_0^l K(\mu, x)Y(x, s)dx \quad (10)$$

การแปลงเคอร์เนล $K(\mu, x)$ โดยที่ $\mu \in \mathbb{Z}$ เป็นการแปลงสตูร์ม-ลีอูวิลล์ของ $L\{Y(x, s)\}$ ซึ่งคือผลคูณของ $T\{Y(x, s)\}$

$$T\{L\{Y(x, s)\}\} = \beta_\mu^4 \bar{Y}(\mu, s) \quad (11)$$

เมื่อเคอร์เนลตอบรับกับสมการ (11) จากการทำการประยุกต์การแปลงสตูร์ม-ลีอูวิลล์มีผลทำให้สมการ (7) มีลักษณะดังนี้

$$(s^2 + a_{10}s)\bar{Y}(\mu, s) + \beta_\mu^4 \bar{Y}(\mu, s) = b_0 \bar{F}_e(\mu, s) \quad (12)$$

สมการพีชคณิตที่ได้ทำให้ง่ายต่อการหาคำตอบของ $\bar{Y}(\mu, s)$ โดยจัดให้อยู่ในรูป

$$\bar{Y}(\mu, s) = \bar{G}(\mu, s)\bar{F}_e(\mu, s) \quad (13)$$

เมื่อ

$$\bar{G}(\mu, s) = \frac{b_0}{s^2 + a_{10}s + \beta_\mu^4} \quad (14)$$

ซึ่งคือฟังก์ชันถ่ายโอนแสดงความสัมพันธ์เชิงพื้นที่และเวลา โดยจะเปลี่ยนการแปลง $\bar{F}_e(\mu, s)$ ซึ่งเป็นแรงกระตุ้นเปลี่ยนไปเป็นการแปลงของ $\bar{Y}(\mu, s)$ ซึ่งคือระยะ โกงตัวของสาย กีตาร์

การคำนวณหาเคอร์เนลของการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์

คุณสมบัติเคอร์เนลของการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาค่า ขอบเขตแบบเฉพาะนี้ได้ ขึ้นอยู่กับรูปแบบของตัวดำเนินการเชิงพื้นที่ L และตัวดำเนินการ ขอบเขต f_b เคอร์เนลคำนวณได้จากปัญหาค่าขอบเขต สำหรับ $Y(x, s)$ ที่เมื่อเปลี่ยนรูปเป็น สมการพีชคณิต และเมื่อมีการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ เป็น $\bar{Y}(\mu, s)$ ทฤษฎีทั่วไปสำหรับการคำนวณ มีความซับซ้อนพอสมควรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของตัวดำเนินการในรูปฟังก์ชันเชิงปริภูมิ

สามารถแสดงตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์พื้นที่จากสมการ (8) ในแบบผูกพันในตัว (self-adjoint) ดังนี้

$$\int_0^l K(\mu, x)L\{Y(x, s)\} dx = \int_0^l L\{K(\mu, x)\}Y(x, s) dx \quad (15)$$

ตอนนี้เคอร์เนลสามารถหาได้จากการแก้ปัญหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของตัว ดำเนินการเชิงอนุพันธ์พื้นที่ L และเงื่อนไขขอบเขต f_b

$$L\{K(\mu, x)\} = \beta_\mu^4 K(\mu, x) \quad (16)$$

$$f_b\{K(\mu, x)\} = 0 \quad (17)$$

จากสมการ (15-17) จะได้

$$T\{L\{Y(x, s)\}\} = \beta_\mu^4 T\{Y(x, s)\} \quad (18)$$

จากสมการการสั่นของสายกีตาร์สมการที่ (1) แทนด้วยสมการที่ (11) ทำให้สามารถหาค่า ได้ดังนี้

$$K(\mu, x) = \sin \gamma_\mu x \quad \text{เมื่อ } \gamma_\mu = \mu \frac{\pi}{l} \quad (19)$$

การแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์สำหรับอนุพันธ์เชิงพื้นที่ $Y(x, s)$ ทำได้โดยการหาปริพันธ์แบบแยกส่วน (integration by parts) ดังนี้

$$T\{Y''(x, s)\} = \int_0^l Y''(x, s) K(\mu, x) dx \quad (20)$$

$$T\{Y''(x, s)\} = [Y'(x, s)K(\mu, x) - Y(x, s)K'(\mu, x)]_0^l + \int_0^l Y(x, s)K''(\mu, x) dx \quad (21)$$

เมื่อ $Y(x, s)$ และ $K(\mu, x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเอกพันธ์จากสมการที่ (3) มีผลทำให้เทอมในวงเล็บใหญ่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$K''(\mu, x) = -\gamma_\mu^2 K(\mu, x) \quad (22)$$

ทำการเปลี่ยนเทอมปริพันธ์ให้เข้ากับการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ จะได้

$$T\{Y''(x, s)\} = -\gamma_\mu^2 \bar{Y}(\mu, s) \quad (23)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$T\{Y^{(4)}(x, s)\} = \int_0^l Y^{(4)}(x, s) K(\mu, x) dx \quad (24)$$

$$T\{Y^{(4)}(x, s)\} = [Y'''K - Y''K' + Y'K'' - YK''']_0^l + \int_0^l Y(x, s)K^{(4)}(\mu, x) dx \quad (25)$$

เทอมในวงเล็บใหญ่เป็นศูนย์เช่นเดียวกับกรณีข้างต้น

$$K^{(4)}(\mu, x) = \gamma_\mu^4 K(\mu, x) \quad (26)$$

ดังนั้น

$$T\{Y^{(4)}(x,s)\} = \gamma_\mu^4 \bar{Y}(\mu,s) \quad (27)$$

นำคำตอบ $L\{Y(x,s)\}$ ไปแทนในสมการที่ (8) เพื่อหาผลเฉลยของสมการที่ (11) จะได้

$$\beta_\mu^4 = a_{04}\gamma_\mu^4 - (a_{02} + a_{12}s)\gamma_\mu^2 \quad (28)$$

คุณสมบัติเชิงพื้นที่และเวลาของฟังก์ชันถ่ายโอน

ตอนนี้คุณสมบัติเชิงพื้นที่และเวลาของฟังก์ชันถ่ายโอน $\bar{G}(\mu,s)$ สามารถหาได้ครบถ้วนตอนสุดท้ายคือการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางกายภาพของสายกีตาร์และความถี่ที่ได้ในท้ายที่สุดฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการที่ (14) สามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{G}(\mu,s) = \frac{b_0}{\bar{P}(\mu,s)} \quad (29)$$

ตัวส่วนที่ถูกกำหนดโดย $\bar{P}(\mu,s)$ สามารถเขียนในรูปแบบต่างๆ ได้ ดังนี้

$$\bar{P}(\mu,s) = s^2 + a_{10}s + \beta_\mu^4 = s^2 + c_1(\mu)s + c_0(\mu) = (s - \sigma_\mu)^2 + \omega_\mu^2 \quad (30)$$

เมื่อ

$$c_1(\mu) = a_{10} - a_{12}\gamma_\mu^2 = \frac{d_1}{m} - \frac{d_3}{m}\gamma_\mu^2 \quad (31)$$

$$c_0(\mu) = a_{04}\gamma_\mu^4 - a_{02}\gamma_\mu^2 = \frac{EI}{m}\gamma_\mu^4 + \frac{T_s}{m}\gamma_\mu^2 \quad (32)$$

$$\sigma_\mu = -\frac{1}{2}c_1(\mu) \quad (33)$$

$$\omega_\mu^2 = c_0(\mu) - \frac{1}{4}c_1^2(\mu) \quad (34)$$

ท้ายสุดจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในรูป

$$\bar{G}(\mu, s) = A_\mu \frac{\omega_\mu}{(s - \sigma_\mu)^2 + \omega_\mu^2} \quad \text{เมื่อ } A_\mu = \frac{b_0}{\omega_\mu} \quad (35)$$

คุณสมบัติที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนข้างต้น เป็นรูปแบบที่มีความชัดเจนมากโดยเฉพาะในโดเมนของเวลา ซึ่งจะสอดคล้องกันกับการตอบสนองอิมพัลส์ที่เกิดขึ้นจากการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\bar{g}(\mu, t) = L^{-1}\{\bar{G}(\mu, s)\} = A_\mu e^{\sigma_\mu t} \sin \omega_\mu t \quad (36)$$

จากรูปแบบข้างต้น σ_μ จะเปลี่ยนเป็นสัมประสิทธิ์การหน่วง และใน ส่วน ω_μ คือค่าความถี่ของแต่ละลำดับ μ

แทนสมการ (31,32) ในสมการที่ (34) จะได้

$$\omega_\mu = \frac{1}{m} \sqrt{\left[EIm - \frac{d_3^2}{4} \right] \gamma_\mu^4 + \left[T_s m + \frac{d_1 d_3}{2} \right] \gamma_\mu^2 - \frac{d_1^2}{4}} \quad (37)$$

ผลที่ได้นี้ทำให้เราสามารถทำการวิเคราะห์หื่นพจน์ที่ขึ้นอยู่กับความถี่เชิงมุม ω_μ ทุกลำดับได้จากพารามิเตอร์ทางกายภาพดังแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งสามารถคำนวณหาความถี่ที่เกิดขึ้นเหล่านี้ได้ก่อนที่จะเริ่มกระบวนการสังเคราะห์เสียงจะเริ่มต้น

แบบจำลองของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ต่อเนื่องทางเวลาและต่อเนื่องทางปริภูมิที่หาได้จากคั้งที่กล่าวมาแล้วข้างต้น มีความเหมาะสมต่อการแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อย (discretization) ไม่ว่าจะด้วยวิธีการแปลงแอนะล็อกไปสู่ระบบไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีมาตรฐาน, การแปลงด้วยวิธีอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน (impulse-invariant-transformation) , การแปลงด้วยวิธีเชิงเส้นคู่ (bilinear

transformation) หรือด้วยวิธีอื่น ๆ โดยในที่นี้จะใช้การแปลงด้วยวิธีอิมพัลส์ไม่เปลี่ยนแปลงเป็นหลัก

สำหรับทุกค่าของ μ พังก์ชันถ่ายโอน $\bar{G}(\mu, s)$ อธิบายได้ด้วยระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาอันดับสอง ซึ่งตอบรับกับระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาที่ทำได้โดยการแปลงลาปลาซผกผัน กระบวนการแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อย เพื่อให้ได้ผลเป็นการตอบสนองอิมพัลส์ ด้วยวิธีการชักตัวอย่างในโดเมนของเวลา และการแปลงซี (z-transformation) ในส่วนของ การตอบสนองอิมพัลส์ไม่ต่อเนื่อง โดยกระบวนการนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{G}(\mu, z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \bar{G}(\mu, s) \right\} \Big|_{t=kT} \right\} \quad (38)$$

เมื่อ L^{-1} คือการแปลงลาปลาซผกผันของ $\bar{G}(\mu, s)$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ s , $t = kT$ กำหนดเป็นการชักตัวอย่างของตัวแปรที่ต่อเนื่องทางเวลา t คู่กับช่วงการชักสัญญาณ T และ Z คือการแปลงซีของผลการตอบสนองอิมพัลส์ไม่ต่อเนื่อง

การแปลงด้วยวิธีอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยนเป็นวิธีที่เหมาะสมในแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อย สำหรับระบบที่มีแถบความถี่จำกัด (band-limited system) และสัญญาณอินพุทที่มีแถบความถี่จำกัด การสังเคราะห์เสียงในที่นี้ไม่มีความจำเป็นต้องทำทุกย่านความถี่ เพราะขึ้นอยู่กับช่วงเสียงที่ใช้เพียงพอกับความถี่ในการชักตัวอย่างหรือไม่ ตามทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง

เนื่องจากความถี่เชิงเวลามีความแตกต่างกันดังที่แสดงในส่วนของโพลของ $\bar{G}(\mu, s)$ หรือตามค่า ω_μ ดังที่แสดงในสมการที่ (37) ต้องการตัวเลข M เป็นองค์ประกอบโดยหาได้จากการพิจารณาองค์ประกอบดังนี้ คือ เลือก M ได้สูงสุด โดยต้องสอดคล้องกับ $\omega_M \leq \pi/T$ ซึ่งเป็นการตัดองค์ประกอบของความถี่สูง ซึ่งอยู่ในย่านความถี่ที่ไม่สามารถรับรู้ด้วยระบบการได้ยินของมนุษย์ นอกจากนี้รวมถึงส่วนประกอบความถี่สูงที่ละเมิดทฤษฎีบทการชักตัวอย่างและผลจากความผิดเพี้ยนภาพ (aliasing) ในย่านความถี่ต่ำ สำหรับช่วงการชักสัญญาณ T ต้องสอดคล้องกับความถี่ของการชักสัญญาณความถี่เสียงปกติ เช่น $f_s = 1/T = 32,44.1,48$ kHz เป็นต้น ซึ่งจะได้ตัวเลข $M \approx 100$ ซึ่งเพียงพอต่อความต้องการที่นำมาวิเคราะห์

การแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อย จากสมการที่ (38) ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ต่อเนื่องทางเวลา $\bar{G}(\mu, s)$ จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาอันดับสอง (second-order discrete-time transfer function) $\bar{G}^d(\mu, z)$

$$\bar{G}^d(\mu, z) = \frac{b_1(\mu)z}{z^2 + c_1(\mu)z + c_0(\mu)} \quad (39)$$

เมื่อ

$$b_1^d(\mu) = b_0 \delta \frac{\sin(\Omega_\mu)}{\Omega_\mu} \quad (40)$$

$$c_1^d(\mu) = -2\delta \cos \Omega_\mu \quad (41)$$

$$c_0^d(\mu) = \delta^2 \quad (42)$$

ด้วยช่วงการชักสัญญาณ T และตัวแปรความถี่ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา z ด้วย d แสดงความไม่ต่อเนื่องทางเวลาจากการแปลง ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง δ ค่าความถี่เชิงมุม Ω_μ กำหนดได้ดังนี้

$$\delta = e^{\sigma_\mu T} \quad \text{และ} \quad \Omega_\mu = \omega_\mu T \quad (43)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาได้มาจากเทอมของโพลในระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา ดังนั้นระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลานี้จึงได้มาจากการคำนวณพารามิเตอร์ทางฟิสิกส์จากสมการที่ (1) อย่างสมบูรณ์แบบ การประมาณค่าจะมาเกี่ยวข้องบ้างในกระบวนการค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อย โดยการแปลงด้วยวิธีอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน ซึ่งทำให้การออกแบบการสังเคราะห์เสียงไม่มีการประดิษฐ์หรือตกแต่งเสียงแต่อย่างใด

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\bar{G}^d(\mu, z)$ เป็นความสัมพันธ์กันระหว่างการแปลงของสัญญาณตัวอย่างที่มากกระตุ้น $f^d(x, kT)$ และสัญญาณเอาต์พุตที่ไม่ต่อเนื่อง $y^d(x, k)$ ดังนี้

$$\bar{G}^d(\mu, z) = \frac{\bar{Y}^d(\mu, z)}{\bar{F}^d(\mu, z)} \quad (44)$$

เมื่อ $\bar{Y}^d(\mu, z) = Z\{T\{y^d(x, k)\}\}$ และ $\bar{F}^d(\mu, z) = Z\{T\{f^d(x, kT)\}\}$ โดยที่ $\bar{G}^d(\mu, z)$ จัดอยู่ในส่วน “d MD TFM”

โครงสร้างของตัวกรองดิจิทัล

ในส่วนนี้เป็นการศึกษาโครงสร้างของตัวกรองดิจิทัลเพื่อทำความเข้าใจฟังก์ชันถ่ายโอน $\bar{G}^d(\mu, z)$ ณ จุดนี้การแปลงเชิงปริภูมิ T และการแปลงเชิงเวลา Z จะเป็นการทำย้อนกลับเพื่อที่จะส่งออกไปที่เอาต์พุตในแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลาทั้งโดเมนของปริภูมิและเวลา การแปลงสตูร์ม-ลิววิลล์ผกผัน $\bar{Y}^d(\mu, z)$ จะได้

$$Y^d(x, z) = T^{-1}\{\bar{Y}^d(\mu, z)\} = T^{-1}\{\bar{G}^d(\mu, z)\bar{F}^d(\mu, z)\} \quad (45)$$

แรงที่มากกระตุ้น $f_e(x, t)$ จะเป็นลักษณะของแรงที่เกี่ยวข้องกับเวลาและเชิงพื้นที่ ในการกระตุ้นเพียงครั้งเดียว (การเดินเพียงหนึ่งโน้ต) การแจกแจงเชิงพื้นที่จะไม่เปลี่ยนแปลงกับรายละเอียดของเวลาของแรงที่มากกระตุ้น ซึ่งหมายถึง $f_e(x, t)$ สามารถแยกแรงที่ขึ้นอยู่กับปริภูมิและแรงที่ขึ้นอยู่กับเวลาออกจากกันได้ ดังนี้

$$f_e(x, t) = f_{e1}(x) f_{e2}(t) \quad (46)$$

แน่นอนว่าการแจกแจงเชิงพื้นที่ $f_{e1}(x)$ ที่อาจเปลี่ยนจากโน้ตตัวหนึ่งไปสู่โน้ตอีกตัวแต่ก็ไม่เกี่ยวกับผลจากรายละเอียดของเวลา $f_{e2}(t)$ ดังนั้น $\bar{F}^d(\mu, z)$ สามารถแยกได้เป็น

$$\bar{F}^d(\mu, z) = \bar{f}_{e1}(\mu) F_{e2}^d(z) \quad (47)$$

เมื่อ $\bar{f}_{e1}(\mu) = T\{f_{e1}(x)\}$ และ $f_{e2}(t)$ ตัวอย่างเช่น พิจารณากรณีที่แรง $f_{e2}(t)$ กระทำที่จุดหนึ่งของสายกีตาร์ การแจกแจงเชิงพื้นที่ที่สามารถคิดให้เป็นรูปแบบอนุกรมคิตโดยการอธิบายด้วยอิมพัลส์ฟังก์ชัน $\delta_0(x)$ โดยที่ $f_{e1}(x) = f\delta_0(x-x_e)$ เมื่อ x_e คือตำแหน่งที่โคนกระดุนของสายกีตาร์ $0 < x_e < l$ ดังนั้น การแปลงสตอร์ม-ลีอูวิลล์ของการแจกแจงเชิงพื้นที่ คือ $\bar{f}_{e1}(\mu) = T\{f\delta_0(x-x_e)\} = fK(\mu, x_e)$

สำหรับการแยกฟังก์ชันของแรงกระดุนดังสมการที่ (46) นำเสนอในรูปแบบสมการที่ (45) จะได้

$$Y^d(x, z) = H^d(x, z)F_{e2}^d(z) \quad (48)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} H^d(x, z) &= T^{-1}\{\bar{G}^d(\mu, z)\bar{f}_{e1}(\mu)\} \\ &= \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{N_\mu} \bar{G}^d(\mu, z)\bar{f}_{e1}(\mu)K(\mu, x) \end{aligned} \quad (49)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (48) มีการกำจัดค่าตัวแปรเชิงปริภูมิที่ต่อเนื่อง x ออกไป ทำให้ไม่มีการแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อยเชิงพื้นที่เข้ามาเกี่ยวข้อง จึงทำให้ไม่จำเป็นต้องเขียนความไม่ต่อเนื่องในรูปการแปลงสตอร์ม-ลีอูวิลล์อีก และสามารถประเมินผลที่ได้อย่างถูกต้องไม่ว่าตำแหน่งใดของสายกีตาร์ ตัวอย่างเช่น ถ้าการโก่งตัวอยู่ที่ตำแหน่ง x_a ของอุปกรณ์แปลงการสั่นของสายกีตาร์ให้กลายเป็นสัญญาณอิเล็กทรอนิกส์ ในองค์ประกอบของกีตาร์ไฟฟ้า สมการที่ (48) จะประเมินผลเฉพาะจุดเดียวคือ $x = x_a$ ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบมากกว่าวิธีเดิมสำหรับการแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อยของ PDE ซึ่งต้องอาศัยการคำนวณพร้อมกันในหลายๆจุดที่ใกล้กันเพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง

ในกรณีนี้การแปลงค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อยเชิงพื้นที่ ประกอบกับสิ่งที่ได้จากสมการที่ (48) ณ จุด $x = x_a$ ทำให้ได้

$$Y^d(x_a, z) = H^d(x_a, z) F_{e2}^d(z) \quad (50)$$

ซึ่งก็คือพฤติกรรมของสายกีตาร์ในลักษณะหนึ่งมิติ (1-D) มีฟังก์ชันถ่ายโอน $H^d(x_a, z)$ โดยจะอยู่ในบล็อก “d 1-D TFM” ของภาพที่ 1

วิธีการแก้ปัญหาไม่ต่อเนื่องจะสิ้นสุดที่การแปลงซีพคผันซึ่งเป็นการสังวัตนาการ (convolution) รายละเอียดทางเวลาของแรงที่กระตุ้น $f_{e2}^d(kT)$ และการตอบสนองอิมพัลส์ $h^d(x_a, k) = Z^{-1}\{H^d(x_a, z)\}$ ดังนี้

$$y^d(x_a, k) = h^d(x_a, k) * f_{e2}^d(kT) \quad (51)$$

การสังวัตนาการมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อนำมาอธิบายโดยตัวกรองดิจิทัล การตรวจสอบสมการ (49) และ (39) แสดงให้เห็นถึงโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยการเรียงตัวในแบบขนานของตัวกรองอันดับสอง โดยตัวกรองดังกล่าวบอกถึงการสั่นที่มีค่าความถี่ลักษณะเฉพาะหนึ่งค่าของสายกีตาร์ ซึ่งคำนวณโดยคู่โพลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของตัวกรอง ผลรวมของค่าความถี่ลักษณะเฉพาะทั้งหมดเป็นค่าน้ำหนักการแจกแจงเชิงพื้นที่ของการกระตุ้น $\bar{f}_{e1}(\mu)$ และลำดับฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ $K(\mu, x_a)$ และที่ตำแหน่งของอุปกรณ์แปลงการสั่นของสายกีตาร์ให้กลายเป็นสัญญาณอิเล็กทรอนิกส์ $x = x_a$ จากนั้นทำการนอร์มัลไลซ์ (normalization) ตัวประกอบ N_μ ของการแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ผกผัน และรวมทั้งหมดเข้าไว้ในสมการเดียวกัน ดังนี้

$$a(\mu, x_a) = \frac{1}{N_\mu} \bar{f}_{e1}(\mu) K(\mu, x_a) \quad (52)$$

สำหรับแรงที่ขึ้นอยู่กัเวลา $f_{e2}(t)$ เมื่อนำมาประยุกต์ใช้จะทำให้มีลักษณะเหมือนกับการพยายามเลียนเสียงที่เกิดขึ้นจากเครื่องดนตรีจริงที่เรียกว่า (Attack-Decay-Sustain-Release; ADSR) ดังนี้

$$F(t) = \begin{cases} A_f \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\pi \frac{t}{t_a} \right) \right] & \text{for } 0 \leq t \leq t_a \\ A_f \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{t-t_a}{t_r} \right) \right] & \text{for } t_a \leq t \leq t_a + t_r \\ 0 & \text{for } t > t_r + t_a \end{cases}, \quad (53)$$

และ

$$F(t) = \begin{cases} A_f \left(\frac{t}{t_a} \right)^{s_a} & \text{for } 0 \leq t \leq t_a \\ A_f \left(1 - \frac{t-t_a}{t_r} \right)^{s_r} & \text{for } t_a \leq t \leq t_a + t_r \\ 0 & \text{for } t > t_r + t_a \end{cases} \quad (54)$$

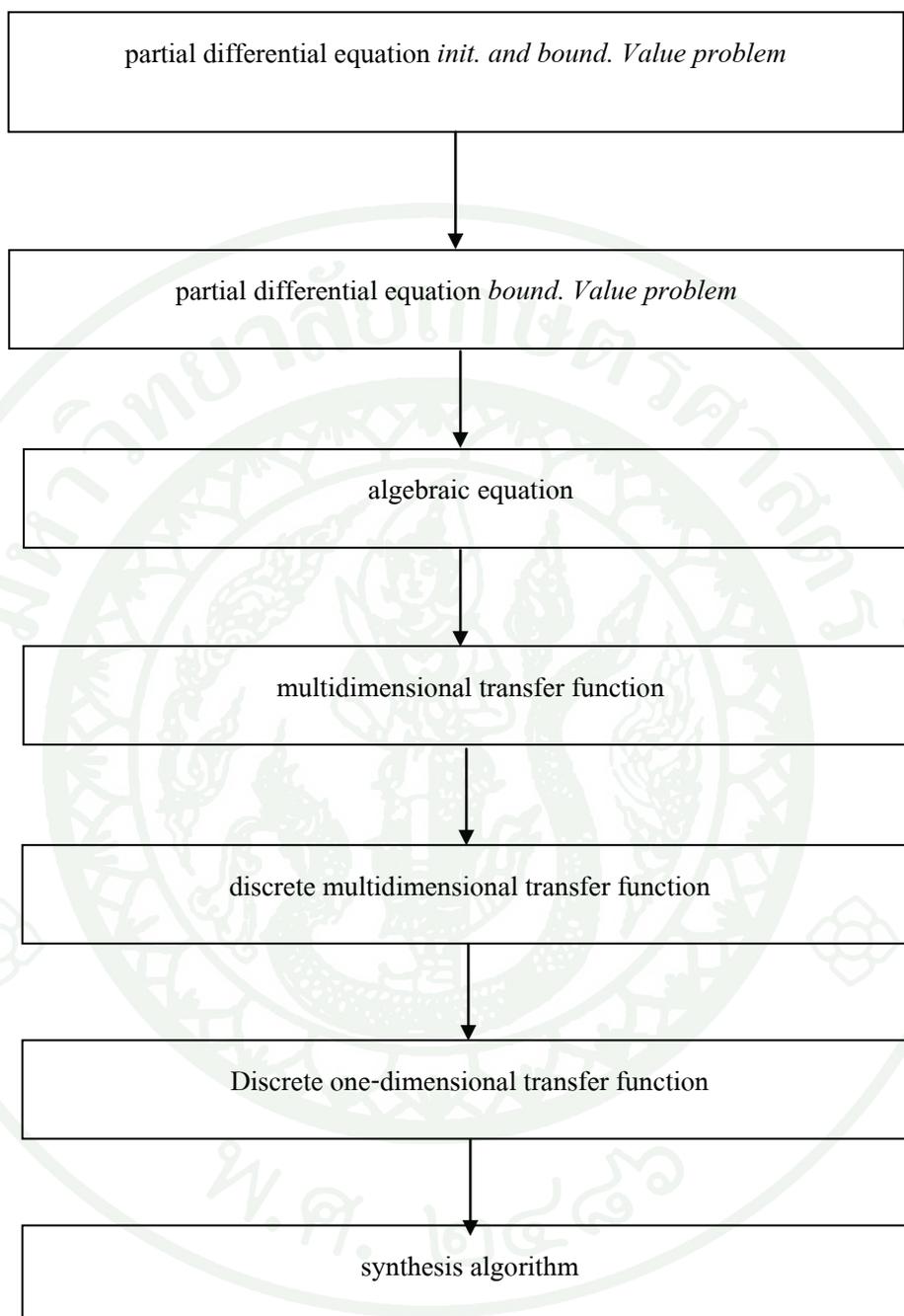
อุปกรณ์และวิธีการ

1. วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชันเป็นการใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีความโดดเด่นในการสังเคราะห์เสียงแบบจำลองทางฟิสิกส์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเครื่องดนตรีประเภทเครื่องสายต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นกีตาร์ ไวโอลิน เปียโน หรือการสั่นในลักษณะแผ่นเช่นหนังกลอง เป็นต้น

กระบวนการหลักของวิธีนี้คือการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไปสู่แบบจำลองที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งจะเชื่อมโยงกับตัวแปรต่างๆของคลื่น โดยมีขั้นตอนสำคัญดังนี้

1. วิธีการแปลงเชิงฟังก์ชันเริ่มต้นที่การอธิบายลักษณะทางกายภาพของสิ่งที่ต้องการศึกษาด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต
2. การแปลงลาปลาซ เป็นการแทนอนุพันธ์ทางเวลาดำเนินการด้วยผลคูณของความถี่เชิงซ้อน โดยทำการรวมเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่ในเทอมผลบวก
3. การแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ เป็นการแทนอนุพันธ์ทางตำแหน่งด้วยตัวแปรความถี่เชิงพื้นที่ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นส่วนที่เติมเข้ามา จะให้เทอมที่เป็นเซตของค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่ต่อเนื่องและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ
4. สมการพีชคณิตที่ได้มาสามารถแก้ได้ด้วยการแปลงให้อยู่ในรูปสัญญานเอาท์พุทซึ่งคือคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยจะอยู่ในส่วนของการแปลงฟังก์ชันหลายมิติ
5. การแปลงความต่อเนื่องทางเวลาไปสู่ความไม่ต่อเนื่องทางเวลาด้วยการแปลงแบบอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน เพื่อรักษารูปแบบความถี่
6. ฟังก์ชันระบบหลายมิติที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาแปลงกลับสู่ฟังก์ชันระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาไปสู่การแปลงสตูร์ม-ลิอูวิลล์ผกผัน
7. ขั้นตอนสุดท้ายคือการแปลงลาปลาซผกผัน ผลจากสมการความแตกต่างสำหรับการประมวลผลทีละขั้นของแต่ละคำตอบ ทำให้ได้อัลกอริทึมตัวกรองดิจิทัลที่มีโครงสร้างเป็นแบบขนาน โดยวิธีการดังกล่าวข้างต้นสามารถสรุปได้ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แผนภาพแสดงวิธีการแปลงเชิงฟังก์ชัน

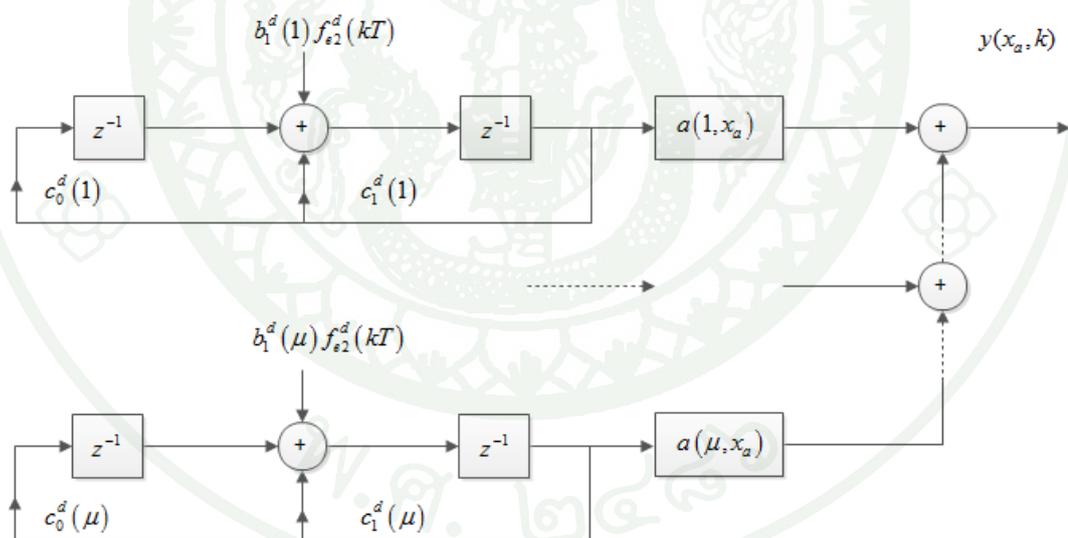
2. การศึกษาการสั่นของสายกีตาร์

การศึกษาการสั่นของสายกีตาร์ มีขั้นตอนการทดลองดังนี้

1. หาผลเฉลยจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
2. กำหนดค่าพารามิเตอร์ในโปรแกรมให้วัดค่าการกระจัดของสายกีตาร์ ที่เปลี่ยนไปตามเวลา
3. เริ่มสร้างแบบจำลองการสั่นในโปรแกรม
4. บันทึกภาพการสั่นของสายกีตาร์ตามเวลาที่กำหนด
5. นำผลที่ได้มาศึกษาการสั่นของสาย

3. การศึกษาการโครงสร้างตัวกรองดิจิทัลเพื่อสังเคราะห์เสียง

1. กำหนดพารามิเตอร์ของสายกีตาร์ตามตารางที่ 1
2. นำฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา มาเขียนแผนภาพโครงสร้างของตัวกรองดิจิทัล ซึ่งแสดงได้ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แผนภาพแสดงโครงสร้างของตัวกรองดิจิทัล

3. ประมวลผลทางด้านเสียงด้วยคอมพิวเตอร์
4. บันทึกรูปคลื่นเสียง

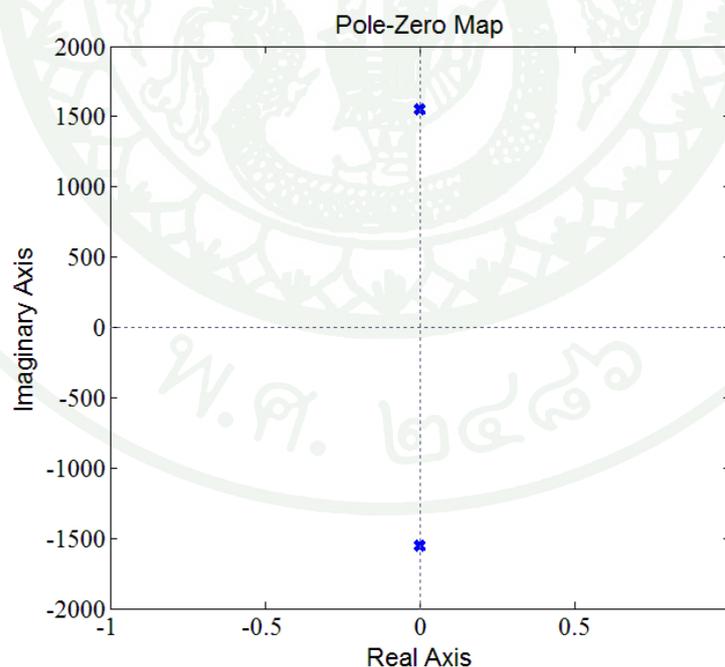
ผลและวิจารณ์

การศึกษาการสั่นของสายกีตาร์เมื่อไม่มีความหน่วงและความแข็งตั้งเป็นศูนย์

รูปแบบการสั่นของสายกีตาร์เมื่อพิจารณา $\mu = 1$ ได้ฟังก์ชันถ่ายโอน $\frac{1691}{s^2 + 2.408 \times 10^6}$ ระบบนี้ให้ผลตอบสนองแบบสั่นที่ไม่มีการหน่วง ตำแหน่งโพลของระบบมีเพียงค่าจินตภาพ และผลตอบสนองของระบบจะเกิดการสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติ $\sqrt{2.408 \times 10^6} \text{ rad/sec}$ ซึ่งเกิดจากค่าของตำแหน่งโพลบนแกนจินตภาพ $\pm \sqrt{2.408 \times 10^6} j$ ดังนั้น

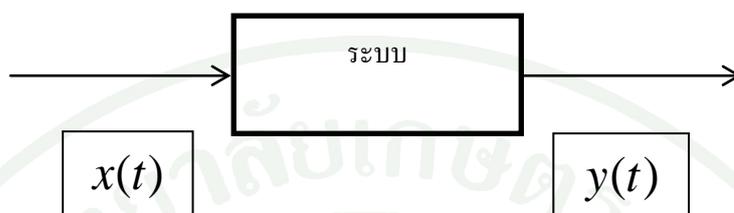
$$\omega_1 = 1.5519 \times 10^3 \text{ rad/sec} \text{ และ } f_1 = \frac{\omega_1}{(2\pi)} = 246.9870 \text{ Hz}$$

ข้อสังเกต ความถี่จากการสั่นหรือความถี่ธรรมชาติจะเท่ากับระยะห่างของตำแหน่งโพลจากจุดกำเนิดไปทางแกนจินตภาพนั่นเองดังแสดงในภาพที่ 3



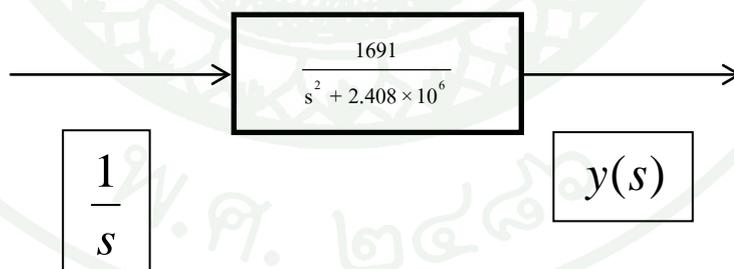
ภาพที่ 3 กราฟแสดงตำแหน่งโพลเมื่อ $\mu = 1$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองในเชิงเวลา เป็นการศึกษาพฤติกรรมของระบบว่าสัญญาณเอาต์พุตมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเวลาผ่านไปหลังจากที่ระบบถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณอินพุต ดังแสดงในภาพที่ 4 เมื่อกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณ $x(t)$ เพื่อคุณลักษณะสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$



ภาพที่ 4 แผนภาพแสดงการกระตุ้นระบบเพื่อคุณลักษณะ

ในการศึกษาระบบเรามักกำหนดให้สัญญาณขาเข้าเป็นสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันทางเวลาอย่างง่าย ๆ เช่น สัญญาณที่เปลี่ยนแปลงในลักษณะแบบขั้นบันได สัญญาณที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราคงที่หรือสัญญาณแรมพ์ หรือ สัญญาณพาราโบลา ซึ่งเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราเร่งคงที่ หรืออาจเป็นสัญญาณอื่นๆ ในที่นี้กำหนดสัญญาณขาเข้าเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $\frac{1}{s}$ ดังภาพที่ 5 และใช้วิธีการขยายเทอมเศษ ตามด้วยการแปลงลาปลาซผกผัน เพื่อหาผลตอบสนองทางเวลา



ภาพที่ 5 แผนภาพแสดงระบบเมื่อมีสัญญาณขาเข้าเป็น $\frac{1}{s}$

สัญญาณเอาต์พุตของระบบนี้เมื่อมีสัญญาณอินพุตเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย คือ
$$Y(s) = \frac{1691}{s(s^2 + 2.408 \times 10^6)}$$
 ซึ่งเอาต์พุตมีโพลที่เป็นค่าจินตภาพอยู่สองตัว โพลของสัญญาณอินพุตเป็นตัวทำให้เกิดผลตอบสนองบังคับ และโพลอีกสองตัวที่อยู่บนแกนจินตภาพมีค่า

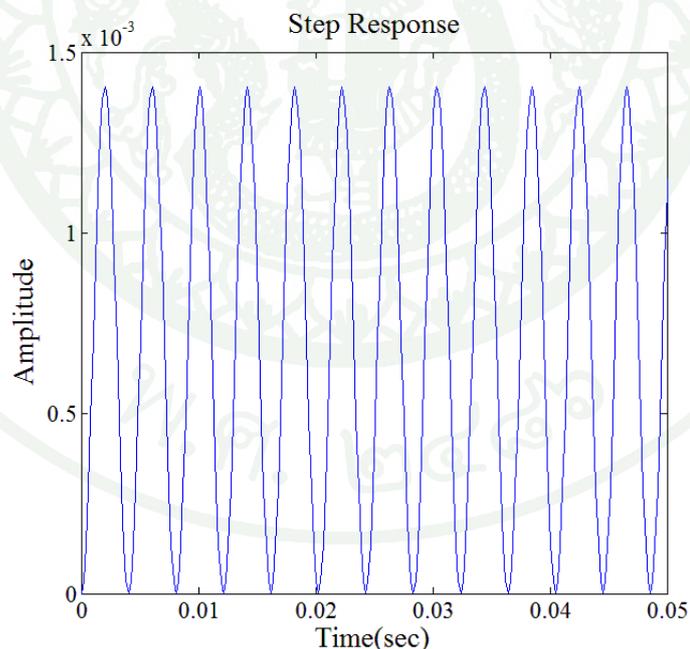
$\pm\sqrt{2.408\times 10^6} j$ จะกำเนิดผลตอบสนองธรรมชาติที่เป็นสัญญาณรายคาบ โดยที่มีความถี่เท่ากับตำแหน่งของโพลจินตภาพ ผลตอบสนองชนิดนี้เรียกว่า การตอบสนองแบบสั่นไกวคงตัว ซึ่งจะเห็นว่าคู่โพลที่ไม่มีค่าจริงเป็นผลให้ฟังก์ชันเลขชี้กำลังไม่ลู่เข้าสู่ศูนย์ ในทางคณิตศาสตร์คือ $e^{-0t} = 1$ ดังนั้นเราจะได้

$$Y(s) = \frac{0.7021 \times 10^{-3}}{s} - \frac{0.3511 \times 10^{-3}}{s + 1.5519 \times 10^3} - \frac{0.3511 \times 10^{-3}}{s - 1.5519 \times 10^3}$$

มีฟังก์ชันทางเวลาเป็น

$$y(t) = 0.7021 \times 10^{-3} - 2 \times 0.3511 \times 10^{-3} \cos 1.559 \times 10^3 t$$

นำผลที่ได้ไปวาดกราฟของ $y(t)$ จะได้ผลตอบสนองเป็นลักษณะของรูป \cos ที่ถูกยกขึ้นด้วยค่าคงที่ ดังแสดงในภาพที่ 6 โดยจะเห็นว่าผลตอบสนองจะสั่นไปเรื่อยด้วยความถี่ธรรมชาติ ω_1



ภาพที่ 6 กราฟแสดงผลตอบสนองในเชิงเวลาของระบบเมื่อ $\omega_1 = 1.5519 \times 10^3 \text{ rad / sec}$

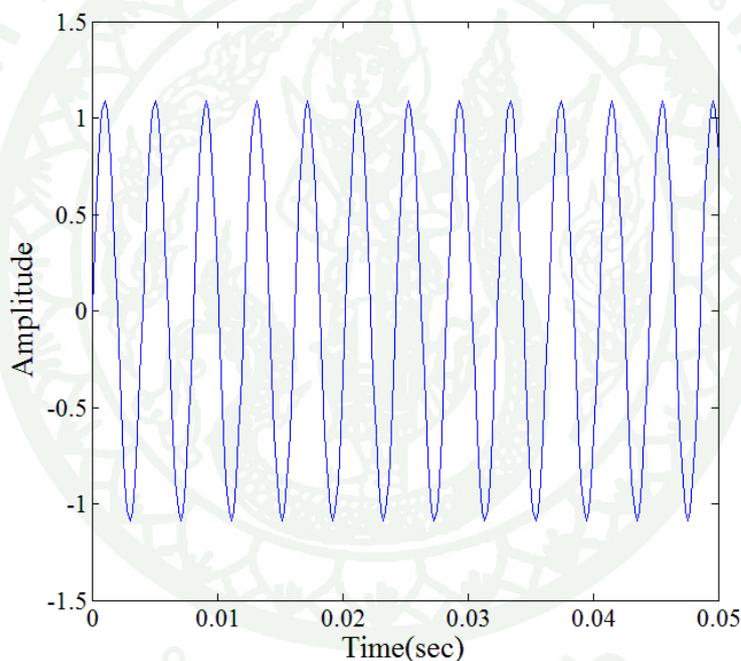
การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

คุณสมบัติของระบบที่ดี คือให้ผลตอบสนองที่เป็นไปตามต้องการ ซึ่งลักษณะของผลตอบสนองที่เป็นไปตามที่ต้องการส่วนใหญ่ นั้นจะมีลักษณะที่สำคัญอยู่สามประการ สิ่งแรกคือผลตอบสนองในช่วงเริ่มต้นดี อย่างที่สองคือ ต้องมีเสถียรภาพ และสุดท้ายคือ ผลตอบสนองที่สภาวะคงตัวเป็นไปตามที่ต้องการ จากที่ผ่านมาได้อธิบายผลตอบสนองของระบบโดยการแยกเป็นสองส่วน นั่นคือผลตอบสนองตามธรรมชาติและผลตอบสนองที่ถูกบังคับจากสัญญาณขาเข้าภายนอก เราสามารถที่จะนิยามเสถียรภาพของระบบได้จากผลตอบสนองตามธรรมชาติดังนี้ ถ้าระบบที่ให้ผลตอบสนองธรรมชาติลู่เข้าหาศูนย์เมื่อเวลาผ่านไปเราเรียกว่าเป็นระบบที่มีเสถียรภาพ ถ้าระบบที่ให้ผลตอบสนองธรรมชาติลู่ออกไปสู่ค่าอนันต์ (ทั้งทางบวกและทางลบ) เมื่อเวลาผ่านไปจะเรียกระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ และสุดท้ายระบบที่ให้ผลตอบสนองธรรมชาติที่ไม่ลู่เข้าหาศูนย์และไม่ลู่ออกสู่ออนันต์ แต่ให้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ หรือสั่นด้วยขนาดคงที่ (ระบบอันดับสองแบบสั้น)) เราเรียกระบบนั้นว่าเสถียรวิกฤติ

การทดสอบเสถียรภาพโดยใช้ผลสนองธรรมชาติ สามารถทำได้โดยการให้ระบบเริ่มต้นที่ค่าเริ่มต้น ค่าใดค่าหนึ่งที่ไม่ใช่ศูนย์ เช่นเราให้นาฬิกาถูกตุ้มเริ่มจากมุมใดๆที่ไม่ใช่ศูนย์ วิธีการเช่นนี้อาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นการกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณอิมพัลส์ ซึ่งคล้ายๆกับการกระแทก ลูกตุ้มนาฬิกาให้หนีออกจากจุดสมดุลด้วยแรงค่าหนึ่งในช่วงระยะเวลาสั้นๆ แล้วปล่อยให้แกว่งต่อไปเองตามธรรมชาติ

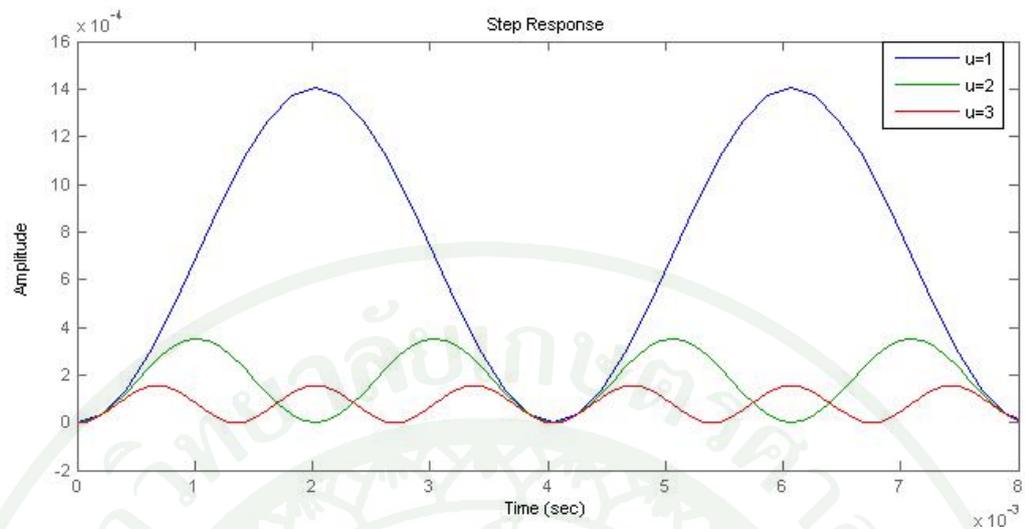
การจำแนกเสถียรภาพแบบดังกล่าวข้างต้นเราจะเรียกว่าเสถียรภาพที่ปราศจากสัญญาณขาเข้าภายนอก เพราะเนื่องจากเราพิจารณาเฉพาะผลตอบสนองธรรมชาติแต่เพียงอย่างเดียว นอกจากผลตอบสนองธรรมชาติแล้ว สัญญาณขาออกของระบบอาจประกอบได้ด้วยผลจากสัญญาณขาเข้าภายนอก ดังนั้นบางครั้งผลของสัญญาณขาเข้าภายนอกนี้อาจมีผลต่อเสถียรภาพด้วย ดังนั้นเราจะต้องนำเอาผลตอบสนองที่เกิดจากสัญญาณขาเข้าภายนอกนี้ มาพิจารณาเรื่องเสถียรภาพด้วย ซึ่งสามารถทำได้โดยการป้อนสัญญาณขาเข้าที่มีค่าจำกัด หรือค่าที่ไม่สูงมากเกินไป ถ้าระบบมีเสถียรภาพแล้ว จะให้สัญญาณขาออกที่มีค่าจำกัดเช่นกัน ก็คือสัญญาณจะไม่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนเข้าสู่อนันต์

เนื่องจากระบบที่มีอันดับสูงจะมีโพลหลายค่า ผลตอบสนองธรรมชาติทั้งหมดของระบบก็จะเกิดจากผลของโพลแต่ละตัว ถ้าโพลทั้งหมดมีค่าเป็นจำนวนจริงลบระบบนั้นก็จะไม่มีเสถียรภาพ แต่ถ้ามีโพลค่าใดค่าหนึ่ง มีค่าจำนวนจริงเป็นบวก ระบบนั้นก็จะไม่มีเสถียรภาพทันที ไม่ว่าโพลที่เหลือจะมีค่าจำนวนจริงเป็นลบก็ตาม เพราะเนื่องจากว่า ผลตอบสนองธรรมชาติของโพลที่มีค่าจำนวนจริงเป็นลบจะเข้าสู่ศูนย์ แต่จะคงเหลือผลตอบสนองธรรมชาติที่เกิดจากโพลที่มีค่าจำนวนจริงเป็นบวกซึ่งจะมีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อยๆจนเข้าสู่อนันต์ และถ้ามีโพล ค่าใดค่าหนึ่งอยู่บนแกนจินตภาพ หรือไม่มีจำนวนจริง และ โพลที่เหลือมีค่าจำนวนจริงเป็นลบ ระบบนั้นก็จะถูกจัดให้เป็นแบบเสถียรวิกฤติดังแสดงในภาพที่ 1 และมีผลตอบสนองของระบบที่พิจารณา ดังภาพที่ 7



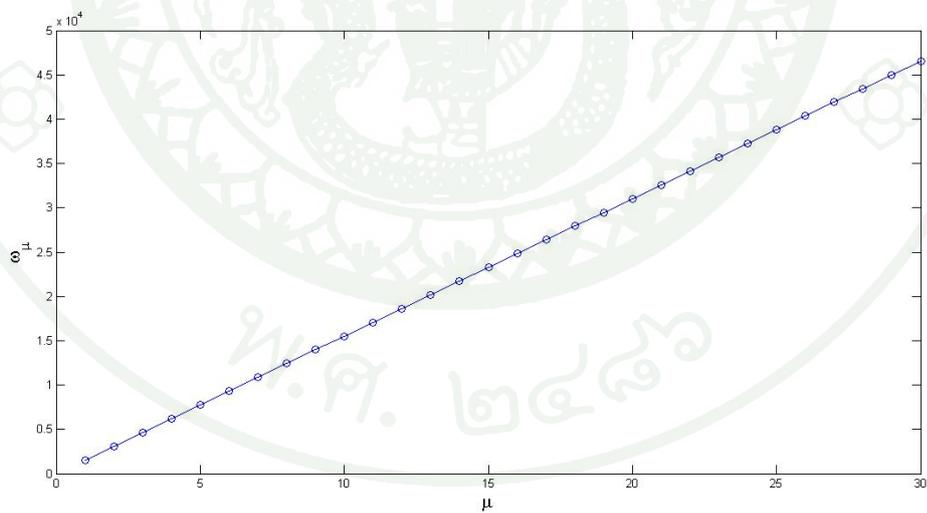
ภาพที่ 7 กราฟแสดงผลตอบสนองของระบบแบบเสถียรวิกฤติของระบบอันดับสอง

เมื่อนำระบบ $\mu = 1.3$ ไปวาดกราฟแสดงผลตอบสนองในเชิงเวลาของระบบสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 8

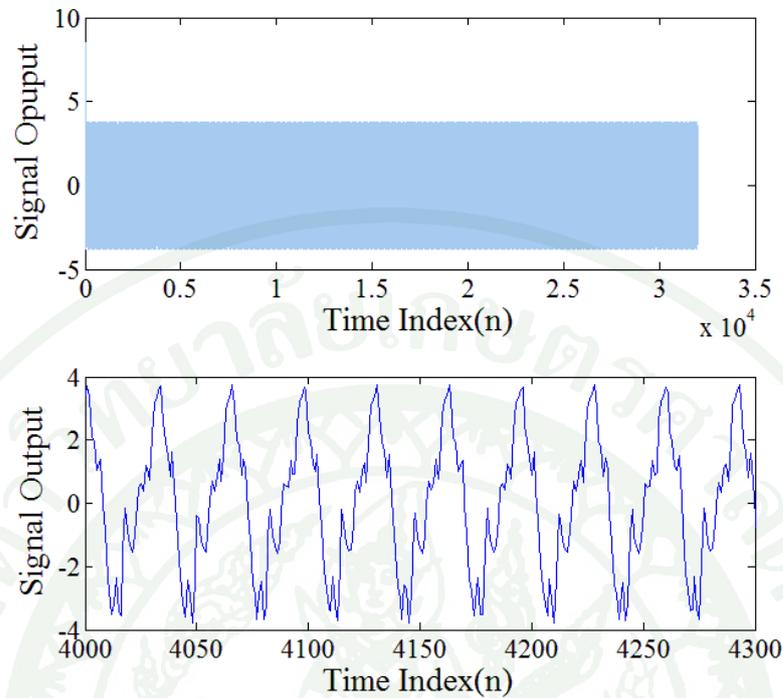


ภาพที่ 8 กราฟแสดงผลตอบสนองในเชิงเวลาของระบบ

จากภาพที่ 8 บอกถึงความสัมพันธ์ของฮาร์โมนิกสูงว่าเป็นผลคูณของความถี่มูลฐาน $\omega_\mu = \mu\omega_1$ สามารถวาดกราฟได้ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความถี่การสั่นที่ฮาร์โมนิกต่าง ๆ



ภาพที่ 10 กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียง เมื่อไม่มีความหน่วงและความแข็งตั้งเป็นศูนย์

การศึกษาการสั่นของสายกีตาร์เมื่อมีค่าความหน่วงและค่าความแข็งตั้ง

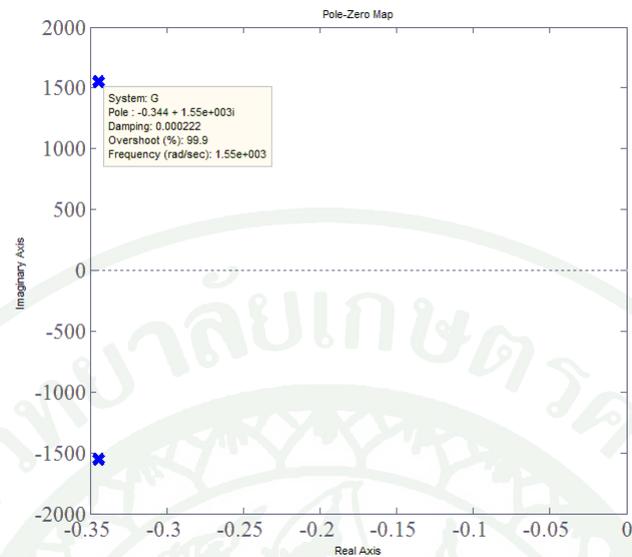
รูปแบบการสั่นของสายกีตาร์เมื่อพิจารณา $\mu=1$ ได้ฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\frac{1691}{s^2 + 0.6883s + 2.408 \times 10^6}$$

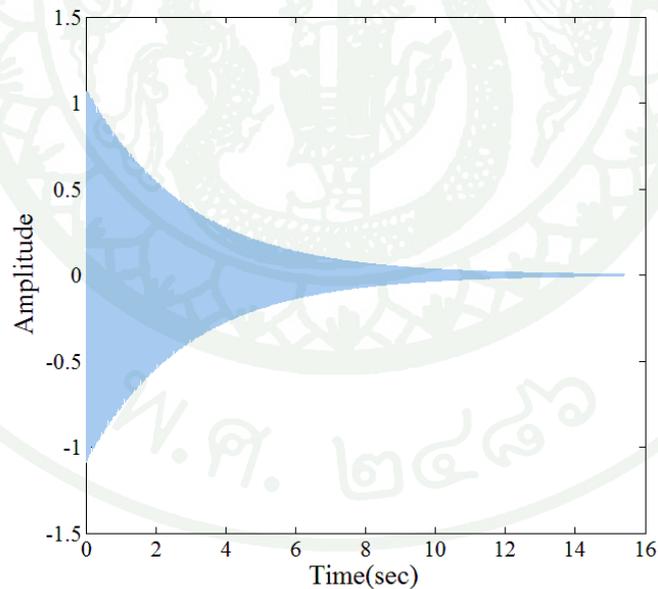
ระบบนี้ให้ผลตอบสนองแบบสั่นแบบมีการหน่วงโดยได้

ค่าความถี่ $f_1 = 247.0307$ Hz เมื่อพิจารณาความเสถียรของระบบพบว่าเป็นระบบเสถียรดังแสดงใน

ภาพที่ 11

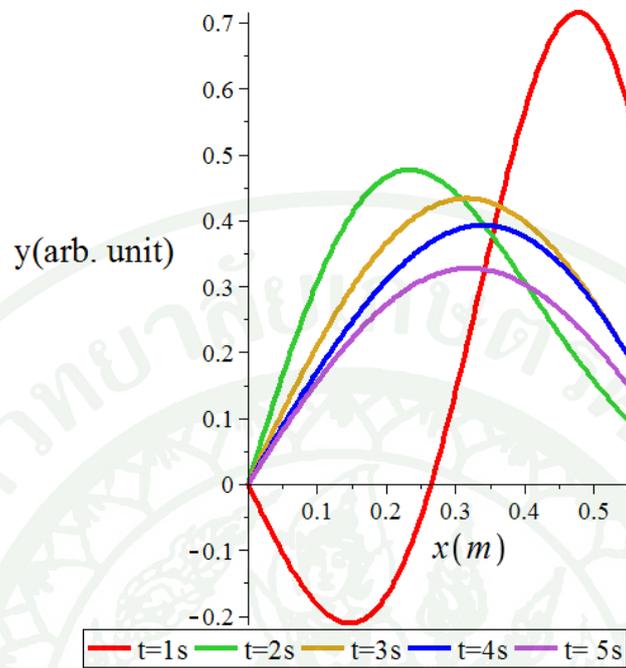


ภาพที่ 11 กราฟแสดงระบบเสถียร

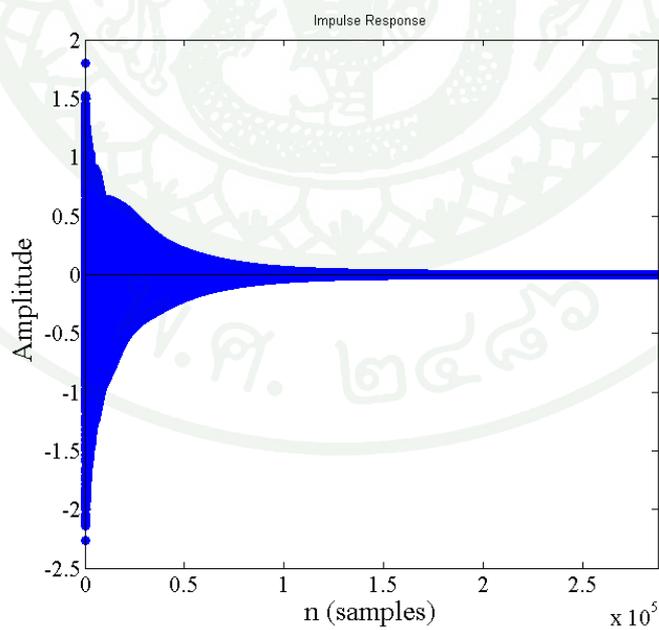


ภาพที่ 12 กราฟแสดงการตอบสนองแบบถูกหน่วงของระบบ

การสั่นของสายกีตาร์กรณีที่มีค่าความหน่วงและความแข็งตึงแสดงได้ดังรูปที่ 13 โดยในที่นี้ใช้ $\mu = 15$ และแสดงผลเมื่อเวลาผ่านไป 1 ถึง 5 วินาที

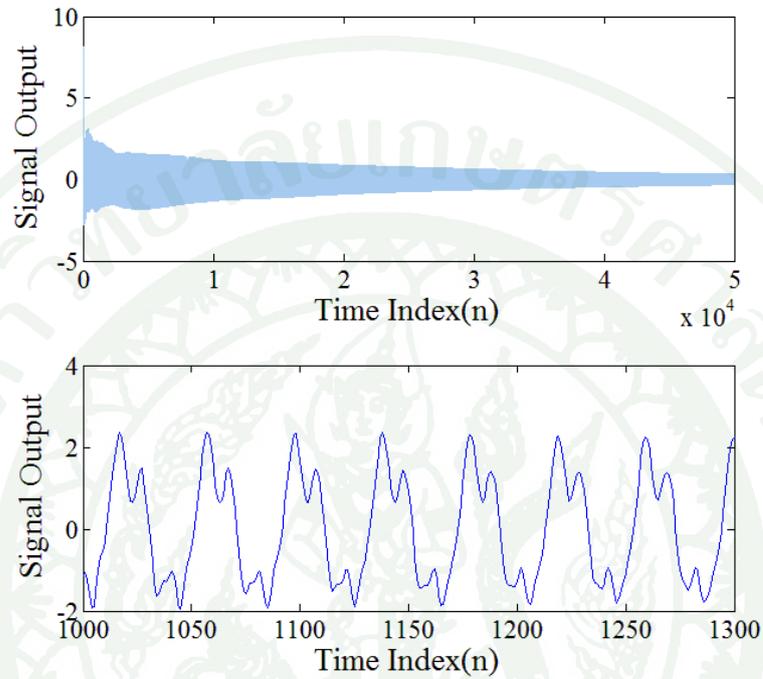


ภาพที่ 13 กราฟแสดงการสั่นของสายกีตาร์ที่เวลา 1 ถึง 5 วินาที



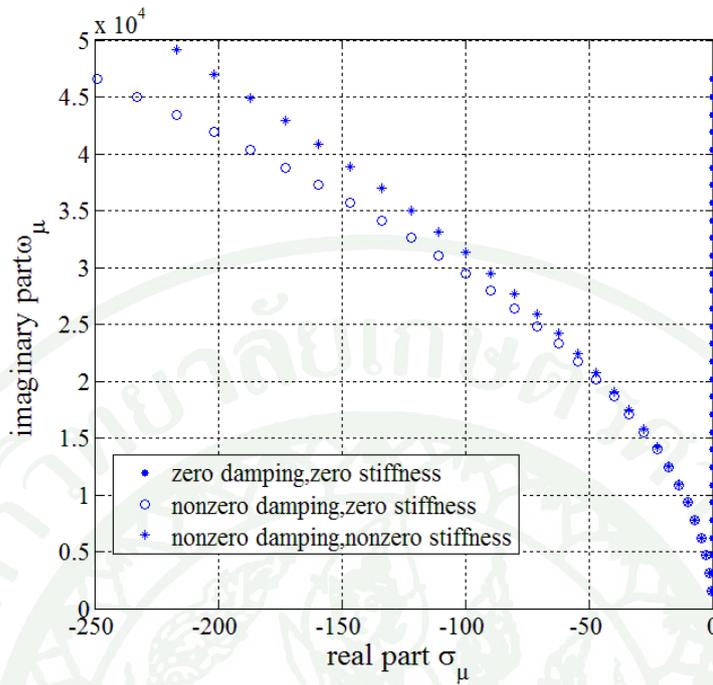
ภาพที่ 14 กราฟแสดงผลการตอบสนองอิมพัลส์แบบไม่ต่อเนื่อง

เมื่อนำฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ต่อเนื่องไปทำการสังเคราะห์เสียงได้รูปคลื่นแสดงได้ดังภาพที่ 15 ดังนี้

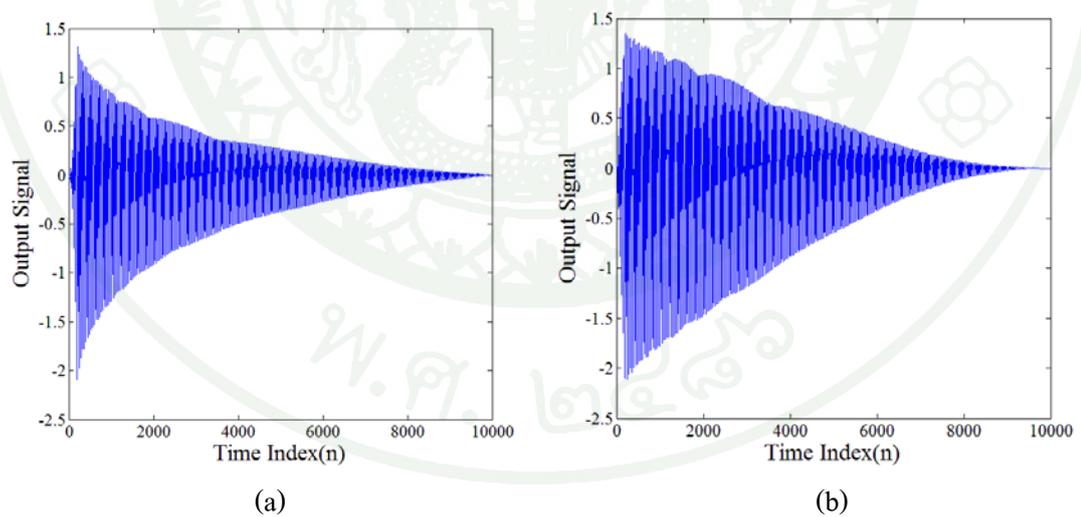


ภาพที่ 15 กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียง เมื่อสายมีค่าความหน่วงและความแข็งตึง

ความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติทางฟิสิกส์และฟังก์ชันถ่าย ได้ผลลัพธ์ของตำแหน่งโพล เป็นไปดังภาพที่ 16 ดังนี้



ภาพที่ 16 กราฟแสดงตำแหน่งโพล $s_{\infty\mu}$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน $\bar{G}(\mu, s)$



ภาพที่ 17 กราฟแสดงรูปคลื่นจากการสังเคราะห์เสียงเมื่อป้อนแรง (a) exponential curves และ (b) S-shape

สรุปและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นแล้วว่าแบบจำลองของฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติเป็นวิธีใหม่สำหรับการสังเคราะห์เสียง โดยอาศัยแบบจำลองทางกายภาพ ซึ่งได้ทำการสังเคราะห์เสียงการสั่นของสายกีตาร์ในหนึ่งมิติ ทฤษฎีการแปลงเชิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาและปริภูมิ สามารถนำมาประยุกต์ใช้และอธิบายพฤติกรรมทางฟิสิกส์ได้โดยไม่ต้องปรับพารามิเตอร์หรือใช้วิธีการประมาณค่า ดังนั้นพารามิเตอร์ของแบบจำลองดิจิทัลจึงเป็นค่าที่มาจากปัญหาทางฟิสิกส์โดยตรง ซึ่งจะเห็นได้จากผลการทดลองที่การจำลองการสั่นของสายกีตาร์กับเสียงที่สังเคราะห์ได้มีความสอดคล้องกัน ข้อดีของวิธีการนี้คือสามารถนำไปใช้ในขั้นตอนการสร้างเครื่องดนตรีจริง ช่วยในการออกแบบ เช่น ขนาด วัสดุที่ใช้ การประเมินราคาก่อนสร้างจริงและยังนำไปพัฒนากับเครื่องดนตรีเสมือนจริงหรือการออกแบบเสียงในงานคอมพิวเตอร์ดนตรีได้

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- Alles H.G. 1980. Music synthesis using real time digital techniques. **Proc. IEEE.** 68: 436-49.
- Bank, B. and V. Välimäki. 2003. Robust loss filter design for digital waveguide synthesis of string tones. **IEEE. Signal Process. Lett.** 10: 18-20.
- Bilbao, S. 2004. **Wave and Scattering Methods for Numerical Simulation.** Wiley; New York
- Chaigne, A. and A. Askenfelt. 1994. Numerical simulation of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods. **J. Acoust. Soc. Am.** 95; 2:1112-1118
- Cuzzucoli, G. and V. Lombardo. 1999. A Physical model of the classical guitar, including the player's touch. **Computer Music Journal.** 23:52-69.
- Erkut C. and M. Karjalainen. 2002. Virtual strings based on a 1-D FDTD waveguide model: stability, losses, and travelling waves . **Proc. AES 22nd Int. Conf. (Espoo, Finland, June 2002)** 317-23
- Erkut, C., M. Karjalainen., P. Huang. And V. Välimäki. 2002. Acoustical analysis and model-based sound synthesis of the kantele. **J. Acoust. Soc. Am** 112: 1681-91.
- Fettweis, A. 1986. Wave digital filters : theory and practice. **Proc. IEEE.** 74: 270-327.
- Fletcher, N. H. and T. D. Rossing. 1991. **The Physics of Musical Instruments.** Springer; New York.
- Karjalainen M. 2002. 1-D digital waveguide modeling for improved sound synthesis. **IEEE Int. Conf. on Acoustics Speech Signal Processing (Orlando, FL, May 2002)** 1869-72.

Karjalainen M. and U.K. Laine. 1991. A model for real-time sound synthesis of guitar on a floating-point signal processor. **IEEE Int. Conf. on Acoustics Speech Signal Processing (Toronto, Canada, 1991) .**

Karjalainen M. and J. O. Smith. 1996. Body modeling techniques for string instrument synthesis. **Proc. Int. Computer Music Conf.(Hong Kong, 1996).** 232-9.

Karjalainen M., V. Välimäki and T. Tolonen. 1998. Plucked-string models: from the Karplus-Strong algorithm to digital waveguide and beyond. **Comput. Music J.** 22: 17-32.

Rabenstein R. 1998. **Discrete Simulation Methods for Multidimensional Systems Based on Functional Transformations in: Mathematics in Signal Processing IV.** Oxford University Press; England. pp. 335-347

Rabenstein R. 1998. Transfer Function Models for Continuous and Discrete Multidimensional Systems. **Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO, Rhodos,1998)**

Rabenstein R. 1998. Transfer Function Models for Non-Self-Adjoint Multidimensional Systems **Proc. Second Int. Conf. on Circuits, Systems, and Computers (CSC'98), IMACS, (Piraeus, Greece, Okt.1998)**

Rabenstein R. 1998. Transfer Function Models of Multidimensional Physical Systems. **Digest of the IEE Coll. on Multidimensional Systems. (London, 1998).** 1-7

Rabenstein R. and L. Trautmann. 2003. Digital sound synthesis of string instruments with the functional transformation method. **Signal Process.** 83: 1673-88.

Smith J. O. 1992. Physical modeling using digital waveguides. **Comput. Music J.** 16: 74-91

Smith J. O. 1993. Efficient synthesis of stringed musical instruments. **Proc. Int. Computer Music Conf. (Tokyo, Japan, 1993)** 64-71.

Trautmann L. and R. Rabenstein. 1999. Digital Sound Synthesis Based on Transfer Function Models. **IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA 99), IEEE, (New Paltz, New York, 1999)** 83-86.

Trautmann L. and R. Rabenstein. 1999. The Sturm-Liouville-Transformation for the Solution of Vector Partial Differential Equations. **Proc. Workshop on Transforms and Filterbanks (WTFB) (Brandenburg, 1999)** 4:205-210

Trautmann L. and R. Rabenstein. 2000. Sound Synthesis with Tension Modulated Nonlinearities Based on Functional Transformations. **Acoustics and Music: Theory and Applications (AMTA), WSES, (Jamaica, Dez. 2000)** 444-449

Trautmann L. and R. Rabenstein. 2002. Stable Systems for Nonlinear Discrete Sound Synthesis with the Functional Transformation Method. **Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech & Signal Processing, IEEE, (Orlando, Florida, Mai 2002)**

Trautmann L. and R. Rabenstein. 2004. Multirate Simulations of String Vibrations Including Nonlinear Fret-String Interactions Using the Functional Transformation Method. **Applied Signal Processing**.7: 949-963

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ-นามสกุล	นายมานิชญ์ กาญจนเพ็ญ
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 30 เดือนมิถุนายน พ.ศ. 2521
สถานที่เกิด	กรุงเทพฯ
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (ฟิสิกส์) สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง

