

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



E42188

**BAER-LEVI SEMIGROUPS OF PARTIAL
TRANSFORMATIONS**

BOORAPA SINGHA

**DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
NOVEMBER 2011**

600256974

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



E42188

**BAER-LEVI SEMIGROUPS OF PARTIAL
TRANSFORMATIONS**

BOORAPA SINGHA

**A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
NOVEMBER 2011**

**BAER-LEVI SEMIGROUPS OF PARTIAL
TRANSFORMATIONS**

BOORAPA SINGHA

THIS THESIS HAS BEEN APPROVED
TO BE A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

EXAMINING COMMITTEE

Chaiwat Namnak
..... CHAIRPERSON
Asst. Prof. Dr. Chaiwat Namnak

Jintana Sanwong
..... MEMBER
Assoc. Prof. Jintana Sanwong

S. Dhompongsa
..... MEMBER
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa

Sorasak Leeratanavalee
..... MEMBER
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee

Vitor Hugo Fernandes
..... MEMBER
Asst. Prof. Dr. Vitor Hugo Fernandes

THESIS ADVISORY COMMITTEE

Jintana Sanwong
..... ADVISOR
Assoc. Prof. Jintana Sanwong

S. Dhompongsa
..... CO-ADVISOR
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa

Sorasak Leeratanavalee
..... CO-ADVISOR
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee

30 November 2011

© Copyright by Chiang Mai University

ACKNOWLEDGEMENTS

Pursuing a doctoral degree is definitely one of the hardest and most stressful thing in my life. Many people have been a part of my graduate education, without them this research would not have been possible. First and foremost, I offer my sincerest gratitude to my supervisor, Assoc. Prof. Jintana Sanwong, for her patient guidance and continuous support throughout my time as her student. I have been lucky to have a supervisor who cared so much about every progression of my work. I also want to express my gratitude to the thesis committee members, consisting of Prof. Dr. Sompong Dhompongsa, Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee, Asst. Prof. Dr. Chaiwat Namnak and Asst. Prof. Dr. Vitor Hugo Fernandes.

I have learned many things from Prof. R P Sullivan from the University of Western Australia, who formed this research topic. I would like to thank him for giving me an opportunity to work with him in the first two years of my studies. My sincere thanks also go to Prof. Masami Ito, for his kindness and hospitality during my research visit at Kyoto Sangyo University, Japan, in April-June 2011. Special thanks are due to Prof. Vitor Hugo Fernandes for sharing his research ideas on transformation semigroups with me when I visited the FCT-UNL and CAUL, Portugal, in August-October 2011. I gratefully acknowledge the support of the Office of the Higher Education Commission, Thailand by a “Strategic Scholarships for Frontier Research Network” grant which enabled me to join a Ph.D. program for my doctoral degree and also gave me good opportunities to go abroad for research, I really appreciate for it. I also thank Chiangmai Rajabhat University for the financial support during my studies.

Last but not least, acknowledgement belong to my father, my mother who passed away, my family and friends.

ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์	กึ่งกรุปแบร์-เลวีของการแปลงบางส่วน	
ผู้เขียน	นายบุรพา สิงหา	
ปริญญา	วิทยาศาสตร์คุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)	
คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ. จินตนา แสงวงศ์	อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
	ศ. ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
	รศ. ดร. สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

บทคัดย่อ

E 42188

ในปี พ.ศ. 2546 มาคัสสมิธและสุลิแวนได้ให้นิยามของขอบเขตบนน้อยสุด Ω ของอันดับบางส่วนธรรมชาติ \leq และอันดับบางส่วน \subseteq บนกึ่งกรุปการแปลงบางส่วนบนเซต X ต่อมาในปี พ.ศ. 2547 ปินโตและสุลิแวนได้อธิบายลักษณะเฉพาะของอัตสัณฐาน ของกึ่งกรุปแบร์-เลวีของการแปลงบางส่วน $PS(q)$ ซึ่งประกอบด้วยการแปลงบางส่วน α ที่ $|X \setminus \text{ran}\alpha| = q$ เมื่อ $|X| \geq q \geq \aleph_0$ ในงานวิจัยนี้ได้อธิบายลักษณะเฉพาะของกรุปอัตสัณฐานของกึ่งกรุป $R(q)$ ซึ่งเป็นกึ่งกรุปย่อยปกติที่ใหญ่ที่สุดของ $PS(q)$ นอกจากนี้ยังได้ศึกษาสมบัติต่างๆของอันดับบางส่วน $\leq \subseteq \Omega$ และอันดับบางส่วนอื่น ๆ บน $PS(q)$ $R(q)$ และบน $I(X)$ กึ่งกรุปการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่งบนเซต X ในการศึกษาพบว่า มีความแตกต่างของสมบัติการเข้ากันได้ระหว่างอันดับบางส่วนเหล่านั้นบนกึ่งกรุปทั้งสามชนิดข้างต้น และยังสามารถมีจริงของขอบเขตล่างมากที่สุด ขอบเขตบนน้อยสุด สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม และสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มใน $PS(q)$ ภายใต้อันดับ $\leq \subseteq$ และ Ω สุดท้ายได้ให้ลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ $PS(q)$ ในกรณีที่ $|X| > q$ และยังสามารถอธิบายลักษณะเฉพาะของบางกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ $PS(q)$ เมื่อ $|X| = q$

Thesis Title Baer-Levi Semigroups of Partial Transformations

Author Mr. Boorapa Singha

Degree Doctor of Philosophy (Mathematics)

Thesis Advisory Committee

Assoc. Prof. Jintana Sanwong	Advisor
Prof. Dr. Sompong Dhompongsa	Co-advisor
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee	Co-advisor

ABSTRACT

E42188

In 2003, Marques-Smith and Sullivan described the join Ω of the natural partial order \leq and the containment order \subseteq on $P(X)$, the semigroup under composition of all partial transformations on a set X . Later, in 2004, Pinto and Sullivan described all automorphisms of $PS(q)$, the partial Baer-Levi semigroup consisting of all injective $\alpha \in P(X)$ such that $|X \setminus \text{ran } \alpha| = q$, where $|X| \geq q \geq \aleph_0$. In this research, we describe the group of automorphisms of $R(q)$, the largest regular subsemigroup of $PS(q)$. We also study various properties of \leq , \subseteq , Ω and other partial orders defined on $PS(q)$, $R(q)$ and the symmetric inverse semigroup $I(X)$. We show that there are differences between the partial orders on these semigroups, concerned with their compatibility with respect to composition. We also describe the existence of the meet and join and the existence of maximal and minimal elements in $PS(q)$ with respect to each of \leq , \subseteq and Ω . Finally, we characterize all maximal subsemigroups of $PS(q)$ when $|X| > q$, and we determine some of its maximal subsemigroups when $|X| = q$.

TABLE OF CONTENTS

Acknowledgements	iii
Abstract in Thai	iv
Abstract in English	v
Chapter 1 Introduction	1
Chapter 2 Preliminaries	5
2.1 Elementary Concepts	5
2.2 Ideals and Green's Relations	8
2.3 Transformation Semigroups	9
2.3.1 The semigroups $P(X)$, $T(X)$, $I(X)$ and $G(X)$	9
2.3.2 Baer-Levi semigroup	10
2.3.3 Partial Baer-Levi semigroup	11
2.4 Automorphisms of Transformation Semigroups	14
2.5 Partial Orders on Semigroups	15
Chapter 3 Partial Orders on the Baer-Levi Semigroups of Partial Transformations	18
3.1 Partial Orders	18
3.2 Compatible Partial Orders	21
3.3 Minimal and Maximal Elements	25
3.4 Meets and Joins	32

Chapter 4 Automorphisms and Isomorphisms of $R(q)$	44
4.1 Automorphisms	44
4.2 Isomorphisms	46
Chapter 5 Maximal Subsemigroups of the Baer-Levi Semigroups of Partial Transformations	49
5.1 Maximal Subsemigroups of $PS(q)$ when $p > q$	49
5.2 Maximal Subsemigroups of $PS(q)$ when $p = q$	60
Chapter 6 Conclusion	64
Bibliography	65
Vita	67