ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
E46993

STABILITY AND HOPF BIFURCATION OF DELAYED POPULATION MODELS AND APPLICATIONS

MR.SARUD UDOMCHALERMPAT

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
GRADUATE COLLEGE
KING MONGKUT'S UNIVERSITY OF TECHNOLOGY NORTH BANGKOK
ACADEMIC YEAR 2010
COPYRIGHT OF KING MONGKUT'S UNIVERSITY OF TECHNOLOGY NORTH BANGKOK

Thesis Certificate

The Graduate College, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

Title Stability and Hopf Bifurcation of Delayed Population Models and Applications

By Mr.Sarud Udomchalermpat

Accepted by the Graduate College, King Mongkut's University of Technology North Bangkok in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Mongkol Wangsathitwong Dean, Graduate College

(Dr.Mongkol Wangsathitwong)

21 January 2011

Thesis Examination Committee

Settapat Chinoiriyasit Chairperson

(Assistant Professor Dr.Settapat Chinviriyasit)

K. Ekkachai Member

(Dr.Ekkachai Kunnawuttipreechachan)

Mahosut Punpocha Member

(Dr.Mahosut Punpocha)

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
E46993

STABILITY AND HOPF BIFURCATION OF DELAYED POPULATION MODELS AND APPLICATIONS

MR.SARUD UDOMCHALERMPAT

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
GRADUATE COLLEGE
KING MONGKUT'S UNIVERSITY OF TECHNOLOGY NORTH BANGKOK
ACADEMIC YEAR 2010
COPYRIGHT OF KING MONGKUT'S UNIVERSITY OF TECHNOLOGY NORTH BANGKOK

Name : Mr.Sarud Udomchalermpat
Thesis Title : Stability and Hopf Bifurcation of Delayed Population Models and Applications
Major Field : Applied Mathematics
King Mongkut's University of Technology North Bangkok
Thesis Advisor : Dr.Ekkachai Kunnawuttipreechachan
Academic Year : 2010

E46993

Abstract

Delay differential equation (DDE) plays an import role in many scientific and engineering problems since it provides more realistic representative for real-world phenomena, especially some problems in ecology and population. In this study, we investigate dynamics of two population models with time delays, namely the general population model and the model with age-structure. The aim is to analyse long-time solutions and effects of the time-delay in the selected models. We investigate the stability properties of models' equilibria using linearisation method. Moreover, when the delay τ is selected to be the bifurcation parameter, we show the existence of periodic solutions using the Hopf bifurcation theorem. In the results, we obtain sufficient conditions for stability and also conditions for the occurrence of Hopf bifurcations of the selected problems. The analytical results are applied to the well-known population models, which are the Mackey-Glass equation and the Nicholson's blowflies equation.

(Total 72 pages)

Keywords: Delay Differential Equations, Population Model, Stage-Structure Model, Asymptotic Stability, Hopf Bifurcation

K. Ekkachai

Advisor

ชื่อ : นายสรุจ อุดมเฉลิมภัทร
ชื่อวิทยานิพนธ์ : ความเสถียรและไบเฟอร์เคชันของฮอฟของตัวแบบประชากรที่มีดีเลย์และการประยุกต์
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : อาจารย์ ดร.เอกชัย คุณวุฒิปรีชาชาญ
ปีการศึกษา : 2553

E46993

บทคัดย่อ

สมการเชิงอนุพันธ์ดีเลย์ได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์ใช้การการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม ซึ่งตัวแบบที่ได้มีความสอดคล้องและใกล้เคียงกับปัญหาจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาในทางระบบนิเวศวิทยาและปัญหาทางด้านประชากรศาสตร์ ในการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการวิเคราะห์พลวัตของตัวแบบที่เกี่ยวกับประชากรที่มีดีเลย์สองปัญหา ได้แก่ตัวแบบประชากรที่มีและไม่มีโครงสร้างอายุหรือโครงสร้างสถานะโดยมุ่งที่จะศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของตัวแบบที่เลือกมาเมื่อเวลาที่ผ่านไประยะหนึ่ง จุดมุ่งหมายหลักของการศึกษาครั้งนี้คือการหาสมบัติที่เกี่ยวข้องกับความเสถียรของตัวแบบโดยใช้วิธีการแปลงสมการให้เป็นสมการเชิงเส้นรอบจุดสมดุล นอกจากนั้นเมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ τ เป็นไบเฟอร์เคชันพารามิเตอร์ เราได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมของการเกิดผลเฉลยในลักษณะแกว่งกวัดโดยการใช้ทฤษฎีบทไบเฟอร์เคชันของฮอฟ ผลที่ได้จากงานชิ้นนี้ เราได้เงื่อนไขจำเป็นที่จะทำให้จุดสมดุลมีความเสถียรพร้อมทั้งเงื่อนไขของการเกิดไบเฟอร์เคชันของฮอฟสำหรับตัวแบบประชากรที่เลือกมาศึกษา นอกจากนั้นยังได้นำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปประยุกต์กับตัวแบบประชากรที่เป็นที่รู้จักอย่างดี ได้แก่สมการของแมคคีย์-กลาส และสมการจำลองประชากรแมลงของนิโคลสัน

(วิทยานิพนธ์มีจำนวนทั้งสิ้น 72 หน้า)

คำสำคัญ : แบบจำลองประชากร, แบบจำลองประชากรที่มีโครงสร้างอายุ, สมการเชิงอนุพันธ์ดีเลย์, ความเสถียรเชิงเส้นกำกับ, ไบเฟอร์เคชันของฮอฟ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ACKNOWLEDGEMENTS

Firstly, I would like to express my sincerest gratitude to my advisor, Dr. Ekkachai Kunnawuttipreechachan, for his helpful advices, discussions, and valuable comments and encouragement during the preparation of this thesis. I would also like to thank all lecturers and staffs in the Department of Mathematics, who have taught and supported me during my study for the Master Degree of Science at King Mongkut's University of Technology North Bangkok. They have also made the helpful suggestions for my thesis research.

Also, an appreciation is extended to the Graduate College of King Mongkut's University of Technology North Bangkok for the award of a scholarship.

Lastly, I want to deeply thank to my parents and my brother who have always been supportive and encouragement during my study. Finally, I cannot give enough thanks to all my friends for their friendship, support and motivation.

Sarud Udomchalermpat

TABLE OF CONTENTS

	Page
Abstract (in English)	ii
Abstract (in Thai)	iii
Acknowledgements	iv
List of Figures	vii
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Background and General Statement of the Problem	1
1.2 Research Objectives	4
1.3 Scope of the Research	5
1.4 Methodology	5
1.5 Utilization of the Research	6
Chapter 2 Theoretical Preliminary	7
2.1 Ordinary Differential Equations	7
2.2 Delay Differential Equations	9
2.3 Similarities and Differences between ODEs and DDEs	21
2.4 Hopf Bifurcations of the First-Order Differential Equations	23
Chapter 3 Analysis of the Population Models	30
3.1 The General Population Model with a Delay	30
3.2 Stability Property of the Selected Model	31
3.3 Analysis of Hopf Bifurcation	33
Chapter 4 Analysis of the Population Models with Stage-Structure	44
4.1 The Population Model with Stage-Structure	45
4.2 The Equilibrium	45
4.3 Stability Property of the Selected Model	46
4.4 Analysis of the Hopf Bifurcation	48
Chapter 5 Conclusion and Recommendation	62
5.1 Conclusion	62
5.2 Suggestions for Further Work	65

TABLE OF CONTENTS (CONTINUED)

	Page
Bibliography	66
Appendix A : Modeling of Population with Stage-Structure	68
Biography	72

LIST OF FIGURES

Figure		Page
2-1	Rectangular region $\mathcal{R}$	8
2-2	Processes to obtain solutions of a DDE by the method of steps	14
2-3	The solution of (2-12) – (2-13) obtained by the method of steps	16
2-4	Bifurcation points of (2-37)	27
3-1	Numerical solutions of (3-20) with different values of τ	40
3-2	Numerical solutions of (3-32) with different values of τ	43
4-1	'Graph shows the intersection between two curves from the nonlinear system (4-31)	55
4-2	Numerical solutions of (4-24) with different values of delays	56
4-3	Graph shows the intersection between two curves from the nonlinear system (4-41)	58
4-4	Numerical solutions of (4-34) showing the asymptotic stability of equilibria with different values of τ	60
4-5	Numerical solutions of (4-34) present the periodic solutions about equilibria with different values of τ	61