บทที่ 3
เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์
(Differential Geometry)

3.1 บทนำ

เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์หมายถึงการศึกษาคุณสมบัติของเส้นโค้งและพื้นผิวด้วยการใช้แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (Differential calculus) หรือกล่าวว่าเป็นการอธิบายรูปร่างหรือรูปทรงเรขาคณิตด้วยอนุพันธ์ เป็นศึกษาในเรื่องเส้นโค้ง (Curve) และพื้นผิว (Surface) หรือสิ่งที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (Differentiable) ทำให้เรื่องเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์เป็นการศึกษาเกี่ยวกับรูปร่างที่ไม่เป็นเหลี่ยมหรือมีมุมต่างๆ สิ่งแรกที่เราสามารถหาอนุพันธ์ได้จากเส้นโค้งหรือพื้นผิวก็คือเส้นสัมผัส (Tangent) ในกรณีที่เป็นเส้นโค้งจะเป็นเวคเตอร์ที่สัมผัสกับเส้นโค้งนั้นแต่ถ้าเป็นพื้นผิวจะหมายถึงระนาบที่สัมผัส (Tangent plane) กับผิวนั้น ในการใช้อนุพันธ์นี้จะไม่ใช้การอ้างถึงพิกัดใดพิกัดหนึ่งเป็นหลัก(no global) แต่เป็นการวัดหรือเปรียบเทียบกับเส้นสัมผัส ระนาบที่สัมผัส (Local tangent) หรือเส้นหรือระนาบที่ตั้งฉาก (Normal) กับเส้นหรือพื้นผิวนั้น ซึ่งทำให้ได้เส้นระดับ (Contour) สัน (Ridge) และร่อง (Valleys) ของพื้นผิว กล่าวสั้นๆว่าเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ เป็นการศึกษาคุณสมบัติเฉพาะที่ (local) ของเส้นโค้งและพื้นผิวโดยเทียบกับจุดหรือผิวใกล้เคียงโดยใช้อนุพันธ์ดังนั้นเส้นโค้งหรือพื้นผิวนั้นต้องหาอนุพันธ์ได้

3.2 ความโค้งเกาส์เซียน (Gaussian Curvature)

เมื่อ k_G คือความโค้งเกาส์เซียน k_{min} คือค่าความโค้งต่ำสุด และ k_{max} คือค่าความโค้งสูงสุด

$$k_G = k_{min}k_{max} \tag{3.1}$$

$$k_G = \frac{\det II}{\det I} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \tag{3.2}$$

ตัวอย่างของความโค้งเกาส์เซียนที่นำมาใช้บอกรูปร่างพื้นผิวเช่น กรณีที่ 1 ถ้าความโค้งเกาส์เซียนเท่ากับศูนย์ นั่นหมายความว่าต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตัวของค่าความโค้งมูลฐานที่เป็นศูนย์ ซึ่งหมายถึงรูปร่างของพื้นผิวตรงนั้นเป็นรูปครึ่งทรงกระบอก อาจเป็นรูปครึ่งทรงกระบอกที่หงายหรือคว่ำก็ได้ กรณีที่ 2 ถ้าค่าความโค้งมูลฐานทั้งสองเป็นศูนย์ รูปร่างของพื้นผิวบริเวณนั้นจะแบนราบ กรณีที่ 3 ถ้า $k_G < 0$ หมายความว่าเครื่องหมายของค่าความโค้งมูลฐานทั้งสองแตกต่างกันทำให้

รูปทรงของผิวพื้นจะคล้ายกับอานม้า กรณีที่ 4 ถ้า $k_G > 0$ หมายความว่าเครื่องหมายของค่าความโค้งมูลฐานทั้งสองเหมือนกันทำให้รูปทรงของผิวพื้นจะคล้ายกับโดมหรืออ่างน้ำก็ได้ เนื่องจากความโค้งเกาส์เซียนเกิดจากการคูณกันของ 1/รัศมีความโค้ง ดังนั้นหน่วยของความโค้งเกาส์เซียนจึงมีหน่วยเป็น 1/พื้นที่ เช่น 1/mm^2 หรือ mm^{-2}

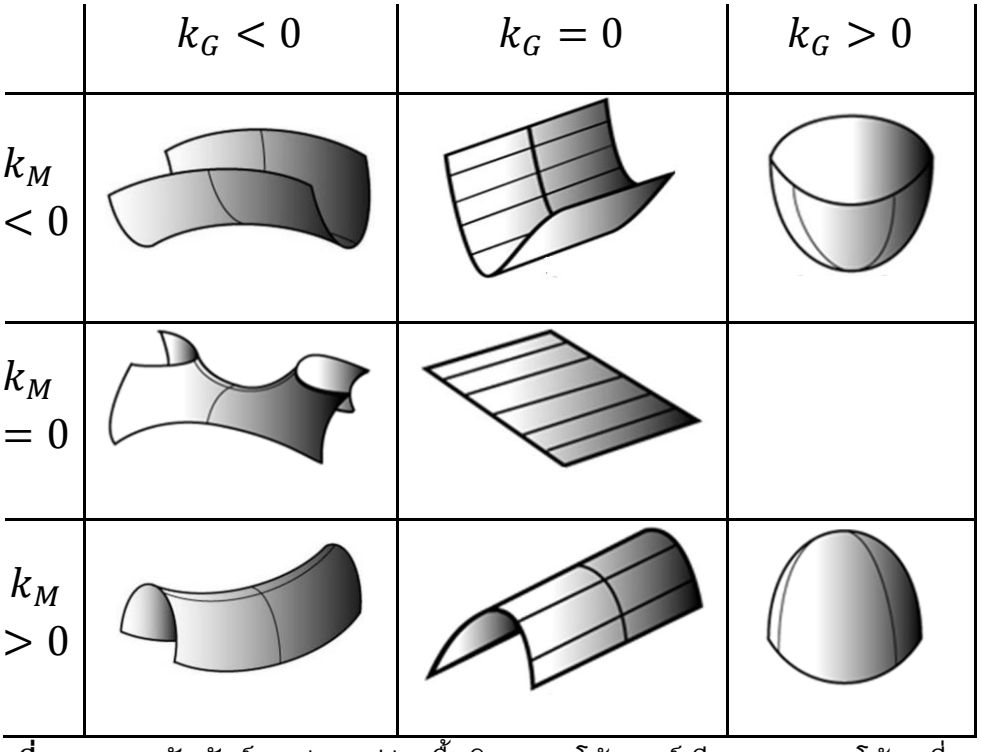
3.3 ความโค้งเฉลี่ย (Mean curvature)

ค่าความโค้งเฉลี่ย k_M คำนวณได้จากความโค้งเกาส์เซียน คือ

$$k_M = \frac{k_{min}+k_{max}}{2} = \frac{k_G}{2} \tag{3.3}$$

เมื่อนำค่าความโค้งเฉลี่ยและความโค้งเกาส์เซียนมาใช้อธิบายรูปร่างได้ดังภาพที่ 3.1

จากรูปร่างที่เป็นครึ่งทรงกระบอก ความโค้งเกาส์เซียน $k_G = (0)\left(\frac{1}{R}\right) = 0$ ความโค้งเฉลี่ย $k_M = (1/2)(0+1)$ ซึ่งน้อยกว่าศูนย์



ภาพที่ 3.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง รูปร่างพื้นผิว ความโค้งเกาส์เซียนและความโค้งเฉลี่ย [36]