

## รายการอ้างอิง

### ภาษาไทย

- \*ธนวรรธน์ ไสภณมหาผล. การสันสะท้อนของรถยนต์ที่จอดติดบนสะพาน. วิทยานิพนธ์ปริญญา  
มหาบัณฑิต, สาขาวิชาวิศวกรรมโครงสร้าง ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2010.

### ภาษาอังกฤษ

- Abe, M.; and Igusa, T. Tuned mass dampers for structures with closely spaced natural frequencies. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 24(1995): 247-261.
- Bonin, G.; Cantisani, G.; Loprencipe, G.; and Sbrolli, M. Ride quality evaluation: 8 D.O.F. vehicle model calibration. 4<sup>th</sup> International SIIV congress-Palermo (Italy). 12-14 September, 2007.
- Chen, Y. H.; and Huang, Y. H. Timoshenko beam with tuned mass dampers and its design curves. Journal of Sound and Vibration. 278(2004): 873-888.
- Chopra, A. K. Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering. Second edition. Prentice-Hall, Inc, 2001.
- Chtiba, M. O.; Choura, S.; Borgi, S. E.; and Nayfeh, A. H. Confinement of vibrations in flexible structures using supplementary absorbers: Dynamic optimization. Journal of Vibration and Control. 16(3),2010: 357-376.
- Fujino, Y.; and Abe, M. Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 22(1993): 833-854.
- Griffin, M. J. Discomfort from feeling vehicle vibration. Vehicle System Dynamics. 45(7-8),2007: 679-698.
- Harris, C. M., and Piersol, A. G. Harris's shock and vibration handbook. Fifth edition. McGraw-Hill, 2002.
- Inman, D. J. Engineering vibration. Second edition. Prentice-Hall, Inc, 2001.

- International Organization for Standardization (1997). Mechanical vibration and shock-evaluation of human exposure-to whole-body vibration. Part 1: General requirements. International Standard, ISO 2631-1, Second edition 1997-05-01, Corrected and reprinted 1997-07-15.
- Jo, B. W.; Tae, G. H.; and Lee, D. W. Structural vibration of tuned mass damper-installed three-span steel box bridge. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 78(2001): 667-675.
- Joshi, A. S.; and Jangid, R. S. Optimum parameters of multiple tuned mass dampers for base-excited damped systems. Journal of Sound and Vibration. 202(5),1997: 657-667.
- Lin, C. C.; Hu, C. M.; Wang, J. F.; and Hu, R. Y. Vibration control effectiveness of passive tuned mass dampers. Journal of the Chinese Institute of Engineer. 17(3),1994: 367-376.
- Lin, Y. H.; and Cho, C. H. Vibration suppression of beam structures traversed by multiple moving loads using a damped absorber. Journal of Marine Science and Technology. 1(1),1993: 39-48.
- Moghimi, H.; and Ronagh, H. R. Development of a numerical model for bridge-vehicle interaction and human response to traffic-induced vibration. Engineering Structures. 30(2008): 3808-3819.
- Park, J.; and Reed, D. Analysis of uniformly and linearly distributed mass dampers under harmonic and earthquake excitation. Engineering Structures. 23(2001): 802-814.
- Rana, R.; and Soong, T. T. Parametric study and simplified design of tuned mass dampers. Engineering Structures. 20(3),1998: 193-204.
- Shi, X.; and Cai, C. S. Suppression of vehicle-induced bridge vibration using tuned mass damper. Journal of Vibration and Control. 14(7),2008: 1037-1054.
- Soong, T. T., and Dargush, G. F. Passive energy dissipation systems in structural engineering. John Wiley&Sons, 1999.

- Tsai, H. C.; and Lin, G. C. Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 22(1993): 957-973.
- Warburton, G. B. Optimum absorber parameters for minimizing vibration response. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 9(1981): 251-262.
- Warburton, G. B. Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 10(1982): 381-401.
- Warburton, G. B.; and Ayorinde, E. O. Optimum absorber parameters for simple systems. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 8(1980): 197-217.
- Xu, K.; and Igusa, T. Dynamic characteristics of multiple substructures with closely spaced frequencies. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 21(1992): 1059-1070.
- Yamaguchi, H.; and Hampornchai, N. Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations. Earthqu. Eng. Struct. Dyn. 22(1993): 51-62.
- Yang, F.; Sedaghati, R.; and Esmailzadeh, E. "Optimal vibration suppression of timoshenko beam with tuned-mass-damper using finite element method." Journal of Vibration and Acoustics. 131(2009).
- Yau, J. D.; and Yang, Y. B. A wideband MTMD system for reducing the dynamic response of continuous truss bridges to moving train loads. Engineering Structures. 26(2001): 1795-1807.

ภาคผนวก

### การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในหัวข้อนี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการเชิงตัวเลขดังที่ได้อธิบายในตอนท้ายของบทที่ 3 เปรียบเทียบกับวิธีวิเคราะห์ตามทฤษฎีว่ามีความน่าเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดซึ่งจะดำเนินการด้วยการใช้โปรแกรม MATLAB สำหรับช่วยในการคำนวณ โดยที่จะใช้ข้อมูลของธนวรรณ โสภณมหาผล (2010) สำหรับค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่เกี่ยวข้องของสะพาน และรถยนต์ สำหรับแรงกระตุ้นจากความเร่งและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ฐานรองรับคานจะสมมติให้เป็นแบบฮาร์โมนิก โดยการตรวจสอบแบ่งเป็นสองระบบคือ มีเฉพาะคานช่วงเดียว และคานช่วงเดียวพร้อมรถยนต์หนึ่งคันจอดนิ่งบนสะพานซึ่งในกรณีนี้จะสมมติให้คานและรถยนต์ไม่มีความหน่วงเพื่อที่จะทำให้สามารถหาผลตอบสนองด้วยวิธีวิเคราะห์ตามทฤษฎีได้

#### คุณสมบัติของคานสะพานและรถยนต์

ค่าคุณสมบัติของสะพานและรถยนต์ที่จะใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการเชิงตัวเลขได้แสดงไว้ในตารางที่ ผ1 และ ผ2

ตารางที่ ผ1 ค่าคุณสมบัติของสะพาน

คุณสมบัติ	ค่าคุณสมบัติ	หน่วย
ความยาวช่วงคาน, $L_b$	25.00	m
มวลต่อความยาว, $m_b$	2380.36	kg/m
มวลเชิงโหมด, $M_b$	29754.50	Kg
ความแข็งเชิงดัด, $E_b I_b$	$4.64 \times 10^9$	N-sq.m
ความถี่ธรรมชาติสำหรับโหมดพื้นฐาน, $f_b$	3.51	Hz
อัตราส่วนความหน่วง, $\zeta_b$	0.03	-

หมายเหตุ: มวลเชิงโหมดเท่ากับ  $m_b L_b / 2$

ตารางที่ ๘2 ค่าคุณสมบัติของแบบจำลองรถยนต์

คุณสมบัติ	ค่าคุณสมบัติ	หน่วย
มวล, $m_c$	600-2600	kg
ความถี่ธรรมชาติ, $f_c$	0.50-2.50	Hz
อัตราส่วนความหน่วง, $\zeta_c$	0.10	-

### ระบบที่มีเฉพาะคานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอ

การหาผลตอบสนองของคานช่วงเดียวจากแบบจำลองที่มีความต่อเนื่องด้วยวิธีวิเคราะห์ตามทฤษฎี อันดับแรกจะต้องสร้างสมการของการเคลื่อนที่ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (3.25) โดยไม่พิจารณาการมีอยู่ของรถยนต์และมวลหน่วงจะทำให้สามารถลดรูปสมการได้ คือ

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{q}}_b(t) + \mathbf{C}_{bb}\dot{\mathbf{q}}_b(t) + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{q}_b(t) = -\mathbf{M}_{bs}\ddot{\mathbf{q}}_s(t) - \mathbf{K}_{bs}\mathbf{q}_s(t) \\
 & [m_b \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \cdot \Phi_b(x) dx] \cdot \ddot{\mathbf{q}}_b(t) + [2\mathbf{M}_{bb}\Omega_b\zeta_b] \cdot \dot{\mathbf{q}}_b(t) + [E_b I_b \int_0^{L_b} \Phi_b''^T(x) \cdot \Phi_b''(x) dx] \cdot \mathbf{q}_b(t) \\
 & = -[m_b \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \cdot \Phi_s(x) dx] \cdot \ddot{\mathbf{q}}_s(t) = \mathbf{P}(t) \tag{ผ.1}
 \end{aligned}$$

สมการ (ผ.1) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการเชิงโหมด คือ

$$M_{bn}\ddot{q}_{bn}(t) + C_{bn}\dot{q}_{bn}(t) + K_{bn}q_{bn}(t) = P_n(t) \tag{ผ.2}$$

เมื่อ

$$M_{bn} = m_b \int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) \cdot \phi_{bn}(x) dx = \frac{m_b L_b}{2} \tag{ผ.3}$$

$$C_{bn} = 2\zeta_{bn} M_{bn} \omega_{bn} = \zeta_{bn} m_b L_b \omega_{bn} \tag{ผ.4}$$

$$K_{bn} = E_b I_b \int_0^{L_b} \phi_{bn}''(x) \cdot \phi_{bn}''(x) dx = \frac{n^4 \pi^4 E_b L_b}{2L_b^3} \tag{ผ.5}$$

$$P_n(t) = -c_{1n} \cdot \ddot{q}_{s1}(t) - c_{2n} \cdot \ddot{q}_{s2}(t) \tag{ผ.6}$$

$$c_{1n} = m_b \int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) \cdot \phi_{s1}(x) dx \tag{ผ.7}$$

$$c_{2n} = m_b \int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) \cdot \phi_{s2}(x) dx \quad (\text{ผ.8})$$

สำหรับแรงกระตุ้นในแนวตั้งที่ฐานรองทั้งสองด้านจะสมมติให้มีค่าเท่ากันและเป็นแบบฮาร์โมนิคในรูปของฟังก์ชันไซน์ซึ่งมีการกระจัดสูงสุดเท่ากับ  $A$  เมตรและมีค่าความถี่แรงกระตุ้นเท่ากับ  $\omega$  ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$q_{s1}(t) = q_{s2}(t) = A \sin(\omega t) \quad (\text{ผ.9})$$

$$\ddot{q}_{s1}(t) = \ddot{q}_{s2}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (\text{ผ.10})$$

สมการ (ผ.2) สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของ  $\zeta_{bn}$  และ  $\omega_{bn}$  ทำได้โดยการหารสมการด้วย  $M_{bn}$  โดยกำหนดให้  $C_{bn} / M_{bn} = 2\zeta_{bn}\omega_{bn}$  และ  $K_{bn} / M_{bn} = \omega_{bn}^2$  ดังนั้น จะได้

$$\ddot{q}_{bn}(t) + 2\zeta_{bn}\omega_{bn}\dot{q}_{bn}(t) + \omega_{bn}^2 q_{bn}(t) = \frac{P_n(t)}{M_{bn}} \quad (\text{ผ.11})$$

เทอมที่เป็นแรงด้านขวามือของสมการ (ผ.11) และเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์จากสมการ (ผ.6), (ผ.7), (ผ.8) และ (ผ.10) จะทำให้สามารถเขียนสมการ (ผ.11) ใหม่ได้ คือ

$$\ddot{q}_{bn}(t) + 2\zeta_{bn}\omega_{bn}\dot{q}_{bn}(t) + \omega_{bn}^2 q_{bn}(t) = \frac{X_{0n}}{M_{bn}} \sin(\omega t) \quad (\text{ผ.12})$$

เมื่อ

$$X_{0n} = A(c_{1n} + c_{2n})\omega^2 \quad (\text{ผ.13})$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (ผ.12) จะใช้หลักการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองซึ่งประกอบด้วย สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equation) และสมการไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous equation) โดยทั้งสองสมการนี้จะมีผลเฉลยที่เรียกว่า ผลเฉลยเต็มเต็ม (Complementary solution:  $q_c$ ) และผลเฉลยเฉพาะ (Particular solution:  $q_p$ ) ตามลำดับ ซึ่งหาก

รวมผลเฉลยทั้งสองเข้าด้วยกันจะเรียกว่า ผลเฉลยสมบูรณ์ (Complete solution:  $q$ ) และจะพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) ดังนั้น สมการเอกพันธ์ของสมการ (ผ.12) คือ

$$\ddot{q}_{bn}(t) + 2\zeta_{bn}\omega_{bn}\dot{q}_{bn}(t) + \omega_{bn}^2 q_{bn}(t) = 0 \quad (\text{ผ.14})$$

จะเห็นว่าสมการข้างต้นมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวและถ้าสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูปเอกซ์โปเนนเชียลฟังก์ชัน คือ

$$q_{cbn}(t) = Y_n e^{mt} \quad (\text{ผ.15})$$

เนื่องจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชนิดนี้ไม่ว่าจะเป็นอันดับใดก็ตามยังคงเป็นฟังก์ชันเดิม ดังนั้นแทนค่าผลเฉลยสมมตินี้ลงในสมการ (ผ.14) จะได้

$$\begin{aligned} Y_n e^{mt} (m^2 + 2\zeta_{bn}\omega_{bn}m + \omega_{bn}^2) &= 0 \\ m^2 + 2\zeta_{bn}\omega_{bn}m + \omega_{bn}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ผ.16})$$

สมการ (ผ.16) นี้เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) หรือ สมการช่วย (Auxiliary equation) และมีผลเฉลยทั่วไปคือ  $m = -\zeta_{bn}\omega_{bn} \pm \omega_{bn}\sqrt{\zeta_{bn}^2 - 1}$  ซึ่งในที่นี้ค่าอัตราส่วนความหน่วงของคาน  $\zeta_{bn} < 1.0$  ทำให้ค่าในรากที่สองเป็นลบ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปจึงเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$m = -\zeta_{bn}\omega_{bn} \pm i\omega_{Dn} \quad (\text{ผ.17})$$

เมื่อ

$\omega_{Dn} = \omega_{bn}\sqrt{1 - \zeta_{bn}^2}$  คือ ค่าความถี่เชิงหน่วงของคานในรูปแบบโหมดที่  $n$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสมการ (ผ.17) ลงในสมการ (ผ.15) จะได้ผลเฉลยเต็มเต็มของสมการเอกพันธ์หรือผลตอบสนองการสั่นแบบชั่วคราว (Transient vibration response) ในรูปฟังก์ชันเชิงโหมด คือ

$$q_{c_{bn}}(t) = e^{-\zeta_{bn}\omega_{bn}t} (A_{1n}e^{i\omega_{Dn}t} + A_{2n}e^{-i\omega_{Dn}t}) \quad (\text{ผ.18})$$

สมการ (ผ.18) สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของตรีโกณมิติฟังก์ชันโดยใช้สมการของออยเลอร์คือ  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  ดังนั้น จะได้

$$q_{c_{bn}}(t) = e^{-\zeta_{bn}\omega_{bn}t} (A_n \sin \omega_{Dn}t + B_n \cos \omega_{Dn}t) \quad (\text{ผ.19})$$

โดยที่  $A_n$  และ  $B_n$  เป็นค่าคงตัวไม่ทราบค่า

สำหรับกรณีของสมการไม่เอกพันธ์จะเป็นสมการเดียวกันกับสมการ (ผ.12) ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และการหาผลเฉลยของสมการชนิดนี้จะใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined coefficient method) โดยจะสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูปตรีโกณมิติฟังก์ชัน คือ

$$q_{p_{bn}}(t) = C_n \sin \omega t + D_n \cos \omega t \quad (\text{ผ.20})$$

แทนค่าสมการ (ผ.20) ลงในสมการ (ผ.12) และทำการจัดเทอมใหม่ จะได้

$$[(\omega_{bn}^2 - \omega^2)C_n - 2\zeta_{bn}\omega_{bn}\omega D_n] \sin \omega t + [2\zeta_{bn}\omega_{bn}\omega C_n + (\omega_{bn}^2 - \omega^2)D_n] \cos \omega t = \frac{X_{0n}}{M_{bn}} \sin(\omega t) \quad (\text{ผ.21})$$

นำค่า  $\omega_{bn}^2$  หากรสมการ (ผ.21) โดยกำหนดให้  $\beta_n = \omega / \omega_{bn}$  และ  $K_{bn} = M_{bn}\omega_{bn}^2$  ดังนั้น จะได้

$$[(1 - \beta_n^2)C_n - 2\zeta_{bn}\beta_n D_n] \sin \omega t + [2\zeta_{bn}\beta_n C_n + (1 - \beta_n^2)D_n] \cos \omega t = \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \sin(\omega t) \quad (\text{ผ.22})$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการ (ผ.22) จะได้

$$(1 - \beta_n^2)C_n - 2\zeta_{bn}\beta_n D_n = \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \quad (\text{ผ.23})$$

$$2\zeta_{bn}\beta_n C_n + (1 - \beta_n^2)D_n = 0 \quad (\text{ผ.24})$$

แก้สมการ (ผ.23) และ (ผ.24) จะได้ค่าคงตัว  $C_n$  และ  $D_n$  ตามลำดับ ดังนี้

$$C_n = \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{1 - \beta_n^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \quad (\text{ผ.25})$$

$$D_n = \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{-2\zeta_{bn}\beta_n}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \quad (\text{ผ.26})$$

แทนค่าสมการ (ผ.25) และ (ผ.26) ลงในสมการ (ผ.20) จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์หรือผลตอบสนองการสั่นแบบคงที่ (Steady-state vibration response) ในรูปฟังก์ชันเชิงโหมด คือ

$$q_{pbn}(t) = \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{1 - \beta_n^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \sin \omega t + \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{-2\zeta_{bn}\beta_n}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \cos \omega t \quad (\text{ผ.27})$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยสมบูรณ์หรือฟังก์ชันทั่วไปของระบบนี้ คือ

$$q_{bn}(t) = e^{-\zeta_{bn}\omega_{Dn}t} (A_n \sin \omega_{Dn}t + B_n \cos \omega_{Dn}t) + \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{1 - \beta_n^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \sin \omega t + \frac{X_{0n}}{K_{bn}} \frac{-2\zeta_{bn}\beta_n}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\zeta_{bn}\beta_{bn})^2} \cos \omega t \quad (\text{ผ.28})$$

การหาค่าของสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว  $A_n$  และ  $B_n$  ทำได้โดยการใช้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา  $t = 0$  ซึ่งจะพิจารณาจากสมการการกระจัดสัมพัทธ์ตามแนวตั้งของคานโดยสามารถเขียนในรูปการรวมผลของทุกโหมดการสั่นได้ดังนี้ คือ

$$u_b(x,0) = \sum_{r=1}^N \phi_{br}(x) \cdot q_{br}(0) = \Phi_{br}(x) \cdot \mathbf{q}_b(0) \quad (\text{ผ.29})$$

นำค่า  $\int_0^{L_b} \Phi_{bn}^T(x) m_b dx$  คูณสมการ (ผ.29) จะได้

$$\int_0^{L_b} \Phi_{bn}^T(x) m_b u_b(x,0) dx = \int_0^{L_b} \Phi_{bn}^T(x) m_b \Phi_{br}(x) dx \cdot q_b(0) \quad (\text{ผ.30})$$

คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันพื้นฐานมีความสัมพันธ์ดังนี้ คือ

$$\int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b \phi_{br}(x) dx = M_{bn} \quad \text{เมื่อ} \quad r = n \quad (\text{ผ.31})$$

$$\int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b \phi_{br}(x) dx = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r \neq n \quad (\text{ผ.32})$$

จากสมการ (ผ.30) และใช้คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันพื้นฐานในสมการ (ผ.31) และ (ผ.32) จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b u_b(x,0) dx &= \int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b \phi_{bn}(x) dx \cdot q_{bn}(0) = M_{bn} q_{bn}(0) \\ q_{bn}(0) &= \frac{\int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b u_b(x,0) dx}{M_{bn}} \end{aligned} \quad (\text{ผ.33})$$

และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (ผ.33) คือ

$$\dot{q}_{bn}(0) = \frac{\int_0^{L_b} \phi_{bn}(x) m_b \dot{u}_b(x,0) dx}{M_{bn}} \quad (\text{ผ.34})$$

ตารางที่ ผ3 ค่าคงตัว  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  และ  $D_n$  ในแต่ละกรณีของความถี่แรงกระตุ้นสำหรับระบบที่มีเฉพาะคาน

ความถี่แรงกระตุ้น	จำนวนของโหนด	n	ค่าคงตัว			
			$A_n$	$B_n$	$C_n$	$D_n$
$0.5\omega_{b1}$	5	1	-2.114543e-3	1.694941e-4	4.237352e-3	-1.694941e-4
		2	0	0	0	0
		3	-7.289868e-7	4.393420e-8	1.313958e-5	-4.393420e-8
		4	0	0	0	0
		5	-2.035242e-8	1.223287e-9	1.018998e-6	-1.223287e-9
$\omega_{b1}$	5	1	6.369064e-3	0.21220659	0	-0.21220659
		2	0	0	0	0
		3	-5.886266e-6	3.580823e-7	5.304923e-5	-3.580823e-7
		4	0	0	0	0
		5	-1.630140e-7	9.809789e-9	4.080872e-6	-9.809789e-9
$9\omega_{b1}$	5	1	0.11607352	8.701400e-5	-1.289096e-2	-8.701400e-5
		2	0	0	0	0
		3	2.123021e-3	7.073553e-2	-5.23548e-16	-7.073553e-2
		4	0	0	0	0
		5	-1.361940e-4	9.403591e-6	3.789299e-4	-9.403591e-6

เมื่อทราบค่าของค่าคงตัว  $A_n$  และ  $B_n$  ก็จะสามารถหาค่า  $q_{bn}(t)$  ได้และในที่สุดการหาค่าการกระจัดสัมบูรณ์หรือผลตอบสนองการกระจัดสามารถทำได้โดยใช้สมการ (3.8) และ (3.11) ตามลำดับ ในการตรวจสอบความถูกต้องนี้จะพิจารณากรณีที่ค่าการกระจัดสูงสุดของฐานรอง  $A = 0.01$  เมตร และใช้ความถี่แรงกระตุ้นแบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ  $\omega = 0.5\omega_{b1}$ ,  $\omega = \omega_{b1}$  และ  $\omega = 9\omega_{b1}$  อีกทั้งการขจัดสัมบูรณ์ที่ได้จากวิธีทางทฤษฎีจะพิจารณาการรวมผลของ 5 โหนดแรกเป็นตัวแทนของค่าผลเฉลยจริง นอกจากนี้ จะพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา  $t = 0$  ของค่าการกระจัดสัมพัทธ์ของคาน  $u_b(x,0) = 0$  ดังนั้น จะทำให้ได้ค่า  $q_{bn}(0) = 0$  และ  $\dot{q}_{bn}(0) = 0$  เช่นกัน ตามความสัมพันธ์ของสมการ (ผ.33) และ (ผ.34) ตามลำดับ

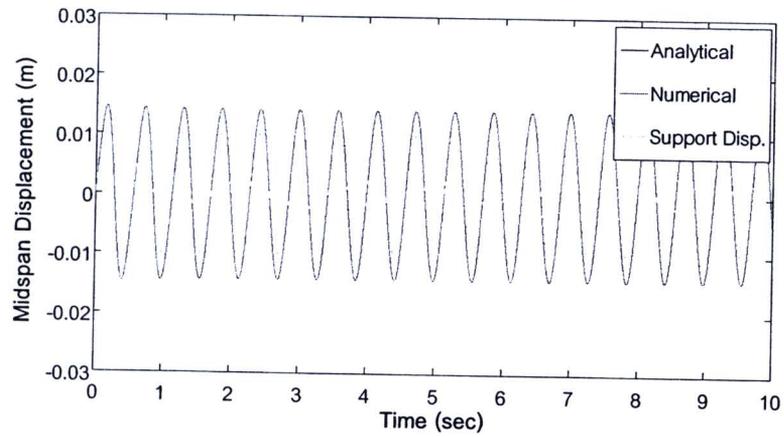
ตารางที่ ๘4 ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานเปรียบเทียบระหว่างวิธีทางทฤษฎี และวิธีเชิงตัวเลขด้วยการใช้ผลต่างของช่วงเวลาแบ่ง  $\Delta t = 0.0001$

ความถี่แรงกระตุ้น	จำนวนของโหนด สำหรับวิธีเชิงตัวเลข	ความคลาดเคลื่อน (%)	
		$\max \frac{(u - \hat{u})}{u_{\max}}$	$\frac{\ u - \hat{u}\ _2}{\ u\ _2}$
$0.5\omega_{b1}$	1	0.0954	0.0861
	3	0.0297	0.0188
	5	0.0292	0.0170
$\omega_{b1}$ (สันพ้องที่โหนด 1)	1	0.0871	0.0848
	3	0.1121	0.1118
	5	0.1102	0.1097
$9\omega_{b1}$ (สันพ้องที่โหนด 3)	1	46.3154	90.8363
	3	0.3966	0.4513
	5	0.5116	0.9178

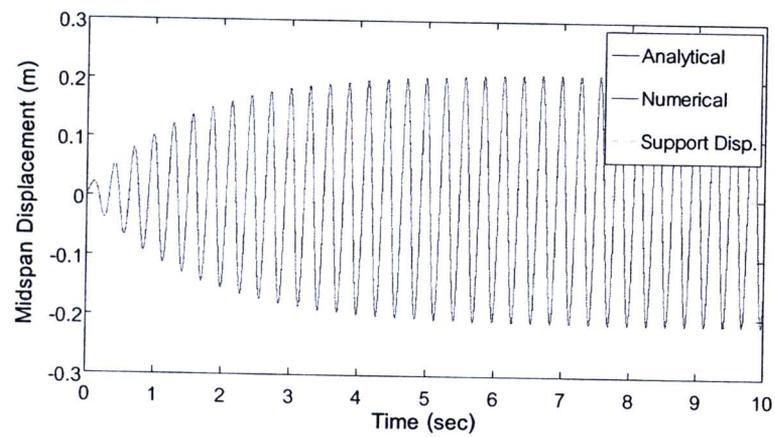
หมายเหตุ: 1.  $u, \hat{u}$  คือ การขจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากวิธีทางทฤษฎีและวิธีเชิงตัวเลข ตามลำดับ

2.  $\|u\|_2, \|u - \hat{u}\|_2$  คือ เวกเตอร์นอร์มอันดับสองของการกระจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากวิธีทางทฤษฎีและของผลต่างระหว่างเวกเตอร์ของการกระจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากทั้งสองวิธี

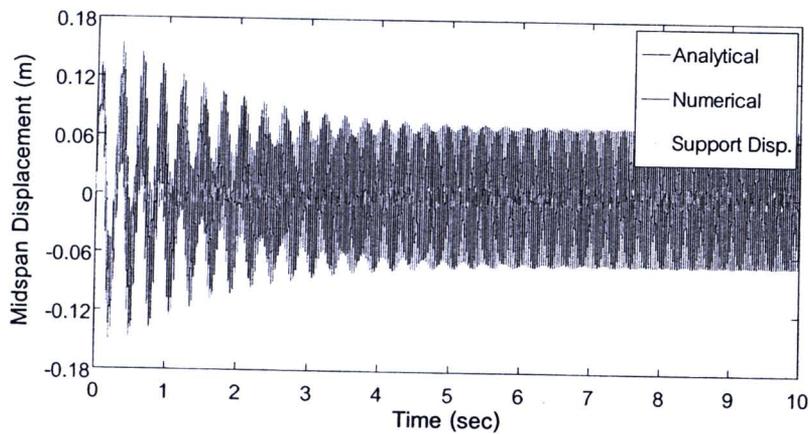
รูปที่ ๘.1 แสดงถึงค่าผลตอบสนองการกระจัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานโดยการพิจารณารวมผลของ 5 โหมดการสั่นซึ่งได้จากการวิเคราะห์ตามทฤษฎีและวิธีการเชิงตัวเลขและการกระจัดของฐานรองรับคานตามแนวตั้ง จะสังเกตเห็นว่าเส้นกราฟที่ได้จากการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีไม่สามารถแยกความแตกต่างได้ด้วยตาเปล่าหรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง ค่าผลตอบสนองที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมากนั่นเอง



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ ผ.1 ผลตอบสนองการกระจัดสัมบูรณ์ที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานเนื่องจากการรวมผล 5 โหมด การสั่นเปลี่ยนแปลงตามเวลา (ก)  $\omega = 0.5\omega_{b1}$  (ข)  $\omega = \omega_{b1}$  และ (ค)  $\omega = 9\omega_{b1}$

จากตารางที่ ๘4 จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละกรณีของความถี่แรงกระตุ้นระหว่างวิธีวิเคราะห์ทางทฤษฎีและวิธีเชิงตัวเลขมีค่าแตกต่างกันน้อยมาก ยกเว้นกรณีที่ความถี่แรงกระตุ้น  $\omega = 9\omega_{b1}$  ซึ่งมีการพิจารณาเฉพาะโหมดพื้นฐานเพียงโหมดเดียว ที่เป็นเช่นนี้เพราะความถี่แรงกระตุ้นจะทำให้เกิดการกำทอนในโหมดที่ 3 ขึ้น โดยที่ในโหมดนี้จะมีอิทธิพลมากที่สุด ดังนั้นเมื่อไม่ได้รวมผลของโหมดการสั่นที่ 3 เข้าไปจึงทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นมาก นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาการรวมผลของจำนวนโหมดการสั่นโดยการเรียงลำดับจากน้อยไปมากพบว่า ค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้มีแนวโน้มลดลงตามการเพิ่มขึ้นของจำนวนการรวมผลของโหมดการสั่นเฉพาะในกรณีที่ใช้ความถี่แรงกระตุ้นน้อย  $\omega = 0.5\omega_{b1}$  ซึ่งไม่ใช่ความถี่ที่ทำให้เกิดการกำทอน อย่างไรก็ตาม ความคลาดเคลื่อนมีค่าแตกต่างกันน้อยมากระหว่างการรวมผล 3 และ 5 โหมดการสั่นในแต่ละกรณีของความถี่แรงกระตุ้น

#### ระบบคานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอและรถยนต์

สมการ (3.26) หากไม่พิจารณาการมีอยู่ของมวลหน่วงจะแสดงถึงระบบของคานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอและมีรถยนต์จอดนิ่งบนสะพานซึ่งพบว่าเมทริกซ์  $\mathbf{C}$  ไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จตุรัสแบบแนวทแยงได้เมื่อใช้คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ฉะนั้น หากจะทำการหาผลตอบสนองด้วยวิธีการวิเคราะห์ตามทฤษฎีนั้นทำได้ยากมาก ด้วยเหตุนี้จะสมมติให้คานและรถยนต์ไม่มีความหน่วง ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ซึ่งทำให้สามารถแปลงสมการของการเคลื่อนที่ที่เป็นแบบ Couple equation ไปเป็น Uncouple equation หรือสมการเชิงโหมด นั่นคือสามารถใช้คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะไปเปลี่ยนเมทริกซ์  $\mathbf{M}$  และ  $\mathbf{K}$  ไปเป็นเมทริกซ์จตุรัสแบบแนวทแยงได้ ดังนั้น สมการ (3.26) สามารถเขียนใหม่ได้ คือ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_s(t) - \mathbf{K}_s\mathbf{q}_s(t) = \mathbf{P}(t) \quad (๘.35)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b(t) \\ \mathbf{q}_c(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bs} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bs} \\ \mathbf{K}_{cs} \end{bmatrix} \mathbf{q}_s(t) \quad (๘.36)$$

ต่อไปจะกำหนดความสัมพันธ์เวกเตอร์ของพิกัดทั่วไปของการกระจัดให้อยู่ในรูปการรวมผลของการคูณระหว่างพิกัดเชิงโหมดสมมติกับฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ สมมติ จะได้

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{r=1}^k \psi_r \cdot z_r(t) \quad \text{เมื่อ} \quad k = NB + NC \quad (\text{ผ.37})$$

และ

$$\psi_r = [\psi_{1r} \quad \psi_{2r} \quad \cdots \quad \psi_{kr}]^T \quad (\text{ผ.38})$$

โดยที่  $\psi_r$  คือ เวกเตอร์ฟังก์ชันพื้นฐานสมมุติหรือไอเกนเวกเตอร์ที่หาจากเมทริกซ์  $\mathbf{M}$  และ  $\mathbf{K}$  และ  $z_r(t)$  คือ พิกัดเชิงโหมดสมมติ

คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันพื้นฐานมีความสัมพันธ์ดังนี้ คือ

$$\psi_m^T \mathbf{M} \psi_r = M_m^* \quad \psi_m^T \mathbf{K} \psi_r = K_m^* \quad \text{เมื่อ} \quad r = m \quad (\text{ผ.39})$$

$$\psi_m^T \mathbf{M} \psi_r = 0 \quad \psi_m^T \mathbf{K} \psi_r = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r \neq m \quad (\text{ผ.40})$$

แทนค่าสมการ (ผ.37) ลงในสมการ (ผ.35) และใช้คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของสมการ (ผ.39) และ (ผ.40) จะได้

$$\begin{aligned} \psi_m^T \mathbf{M} \psi_m \ddot{z}_m(t) + \psi_m^T \mathbf{M} \psi_m \dot{z}_m(t) &= -\psi_m^T \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s(t) - \psi_m^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s(t) = \psi_m^T \mathbf{P}(t) \\ M_m^* \ddot{z}_m(t) + K_m^* z_m(t) &= P_m^*(t) \end{aligned} \quad (\text{ผ.41})$$

เมื่อ

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} m_b \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \cdot \Phi_s(x) dx \\ \mathbf{0}_{NC \times 2} \end{bmatrix}_{(NB+NC) \times 2} \quad (\text{ผ.42})$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \Phi_b^T(x_c) \cdot \mathbf{K}_{cc} \cdot \Phi_s(x_c) \\ -\mathbf{K}_{cc} \cdot \Phi_s(x_c) \end{bmatrix}_{(NB+NC) \times 2} \quad (\text{ผ.43})$$

$$\mathbf{K}_{cc} = \begin{bmatrix} k_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{c2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{cNC} \end{bmatrix}_{NC \times NC} \quad (\text{ผ.44})$$

$$\mathbf{x}_c = [x_{c1} \quad x_{c2} \quad \cdots \quad x_{cNC}]^T \quad (\text{ผ.45})$$

$$\psi_m^T \mathbf{M}_s = [M_{sm1}^* \quad M_{sm2}^*] \quad (\text{ผ.46})$$

$$\Psi_m^T \mathbf{K}_s = [K_{sm1}^* \quad K_{sm2}^*] \quad (ผ.47)$$

$$P_m^*(t) = -M_{sm1}^* \ddot{q}_{s1}(t) - M_{sm2}^* \ddot{q}_{s2}(t) - K_{sm1}^* q_{s1}(t) - K_{sm2}^* q_{s2}(t) \quad (ผ.48)$$

สมการ (ผ.41) สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของ  $\omega_m$  ทำได้โดยการหารสมการด้วย  $M_m^*$  โดยกำหนดให้  $K_m^* / M_m^* = \omega_m^2$  ดังนั้น จะได้

$$\ddot{z}_m(t) + \omega_m^2 z_m(t) = \frac{P_m^*(t)}{M_m^*} \quad (ผ.49)$$

เทอมที่เป็นแรงด้านขวามือของสมการ (ผ.49) และเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์จากสมการ (ผ.9), (ผ.10) และ (ผ.48) จะทำให้สามารถเขียนสมการ (ผ.49) ใหม่ได้ คือ

$$\ddot{z}_m(t) + \omega_m^2 z_m(t) = \frac{X_{0m}}{M_m^*} \sin(\omega t) \quad (ผ.50)$$

เมื่อ

$$X_{0m} = A[(M_{sm1}^* + M_{sm2}^*)\omega^2 - (K_{sm1}^* + K_{sm2}^*)] \quad (ผ.51)$$

การหาผลเฉลยของสมการ (ผ.50) สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีของคานาดังที่ได้อธิบายไว้ข้างต้นในหัวข้อที่แล้ว ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเต็มเต็ม คือ

$$z_{cm}(t) = A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t \quad (ผ.52)$$

และมีผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$z_{pm}(t) = \frac{X_{0m}}{K_m^*} \frac{1}{1 - \beta_m^2} \sin \omega t \quad (ผ.53)$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยสมบูรณ์หรือพิกัดเชิงโหนดสมมติ คือ

$$z_m(t) = (A_m \sin \omega t + B_m \cos \omega t) + \frac{X_{0m}}{K_m^*} \frac{1}{1 - \beta_m^2} \sin \omega t \quad (ผ.54)$$

การหาค่าของสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว  $A_m$  และ  $B_m$  ทำได้โดยการใช้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เช่นเดียวกันกับกรณีของระบบที่มีเฉพาะคาน และจากสมการ (ผ.37) แทนค่าเวลา  $t = 0$  จะได้เวกเตอร์ของการกระจัดตามแนวดิ่งเชิงโหมด คือ

$$\mathbf{q}(0) = \sum_{r=1}^k \boldsymbol{\psi}_r \cdot z_r(0) \quad (\text{ผ.55})$$

นำค่า  $\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M}$  คูณสมการ (ผ.55) จะได้

$$\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0) = \sum_{r=1}^k \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_r \cdot z_r(0) \quad (\text{ผ.56})$$

จากคุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมดของฟังก์ชันพื้นฐานในสมการ (ผ.39) และ (ผ.40) ดังนั้น สมการ (ผ.56) สามารถเขียนใหม่ได้ คือ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0) &= \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_m \cdot z_m(0) = M_m^* \cdot z_m(0) \\ z_m(0) &= \frac{\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0)}{M_m^*} \end{aligned} \quad (\text{ผ.57})$$

เมื่อ

$$\mathbf{q}(0) = [\mathbf{q}_b(0) \quad \mathbf{q}_c(0)]^T \quad (\text{ผ.58})$$

$$\mathbf{q}_b(0) = [q_{b1}(0) \quad q_{b2}(0) \quad \cdots \quad q_{bNB}(0)]^T \quad (\text{ผ.59})$$

$$\mathbf{q}_c(0) = \mathbf{u}_c(0) = [q_{c1}(0) \quad q_{c2}(0) \quad \cdots \quad q_{cNC}(0)]^T \quad (\text{ผ.60})$$

และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (ผ.57) คือ

$$\dot{z}_m(0) = \frac{\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(0)}{M_m^*} \quad (\text{ผ.61})$$

ตารางที่ ๘5 ค่าคงตัว  $A_m$   $B_m$   $C_m$  และ  $D_m$  ในแต่ละกรณีของความถี่แรงกระตุ้นสำหรับระบบที่มีคานและรถยนต์

ความถี่แรง กระตุ้น	จำนวนของ โหมด	m	ค่าคงตัว			
			$A_m$	$B_m$	$C_m$	$D_m$
$0.5\omega_{b1}$	5	1	-1.87892428	0	2.12410124	0
		2	0.33641597	0	-0.67820405	0
		3	-2.178843e-3	0	1.743074e-2	0
		4	-1.388434e-4	0	2.499350e-3	0
		5	1.677262e-5	0	-5.367238e-4	0
		6	2.912672e-6	0	-1.456349e-4	0
$\omega_{b1}$	5	1	0.75008331	0	-0.42398007	0
		2	133.7073619	0	-134.7749245	0
		3	-1.830228e-2	0	7.320912e-2	0
		4	-1.042424e-3	0	9.382455e-3	0
		5	1.345756e-4	0	-2.153209e-3	0
		6	2.695095e-5	0	-6.737796e-4	0
$9\omega_{b1}$	5	1	3.02280512	0	-0.18984693	0
		2	-19.78398145	0	2.21577146	0
		3	3.07900668	0	-1.36844742	0
		4	-5411.256155	0	5411.622134	0
		5	0.14295388	0	-0.25414023	0
		6	2.353348e-2	0	-6.537134e-2	0

ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของเวกเตอร์พิกัดทั่วไปของการกระจัด  $\mathbf{q}(0)$  ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ  $\mathbf{q}_b(0)$  ของคานช่วงเดียว และ  $\mathbf{q}_c(0)$  ของรถยนต์ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์ตามสมการ (ผ.59) และ (ผ.60) ตามลำดับ โดยที่สมาชิกของเวกเตอร์  $\mathbf{q}_b(0)$  สำหรับรูปแบบโหมดที่  $n$  สามารถหาได้จากสมการ (ผ.33) อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาของงานวิจัยนี้ในสภาวะเริ่มต้นทั้งคานและรถยนต์อยู่ในสภาวะสมดุลหรืออีกนัยหนึ่งอยู่ที่ในสภาวะเริ่มต้น เพราะฉะนั้น จะได้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นคือ  $u_b(x,0) = 0, \dot{u}_b(x,0) = 0, u_c(0) = 0$  และ  $\dot{u}_c(0) = 0$  ซึ่งทำให้  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$  และ  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$

ตารางที่ ๘6 ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานเปรียบเทียบระหว่างวิธีทางทฤษฎี และวิธีเชิงตัวเลขด้วยการใช้ผลต่างของช่วงเวลาแบ่ง  $\Delta t = 0.0001$

ความถี่แรงกระตุ้น	จำนวนของโหมด	ความคลาดเคลื่อน (%)	
		$\max \frac{(u - \hat{u})}{u_{\max}}$	$\frac{\ u - \hat{u}\ _2}{\ u\ _2}$
$0.5\omega_{b1}$	1	0.1045	0.0757
	3	0.0364	0.0272
	5	0.0305	0.0234
$\omega_{b1}$ (สั้นพ้องที่โหมด 1)	1	0.0892	0.0918
	3	0.1095	0.1087
	5	0.1115	0.1099
$9\omega_{b1}$ (สั้นพ้องที่โหมด 3)	1	97.5765	99.8835
	3	0.9574	0.9787
	5	0.9687	0.9922

หมายเหตุ: 1.  $u$ ,  $\hat{u}$  คือ การขจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากวิธีทางทฤษฎีและวิธีเชิงตัวเลข ตามลำดับ  
 2.  $\|u\|_2$ ,  $\|u - \hat{u}\|_2$  คือ เวกเตอร์นอร์มอันดับสองของการกระจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากวิธีทางทฤษฎีและของผลต่างระหว่างเวกเตอร์ของการกระจัดสัมบูรณ์ที่กึ่งกลางคานจากทั้งสองวิธี

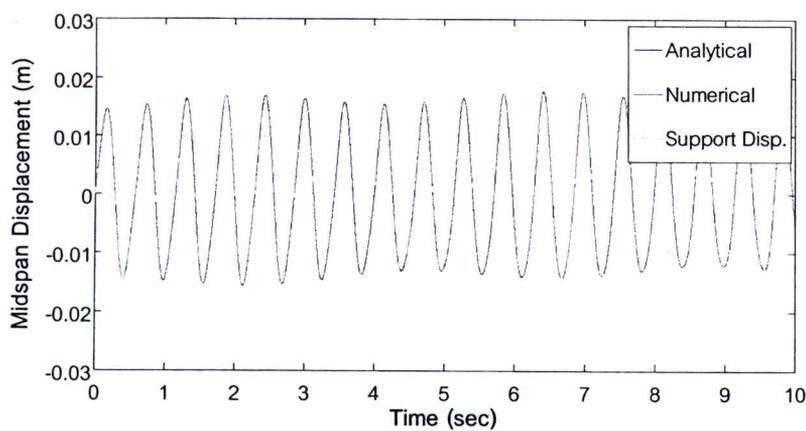
ดังนั้น เมื่อทราบค่าของค่าคงตัว  $A_m$  และ  $B_m$  ก็จะสามารถหาค่า  $z_m(t)$  ได้และในที่สุด การหาค่าการกระจัดสัมบูรณ์หรือผลตอบสนองของการกระจัดสามารถทำได้โดยใช้สมการ (ผ.37), (ผ.8), (ผ.11) และ (ผ.12) ตามลำดับ

ตารางที่ ๗7 ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของรณนตเปรียบเทียบระหว่างวิธีทางทฤษฎีและวิธีเชิงตัวเลขด้วยการใช้ผลต่างของช่วงเวลาแบ่ง  $\Delta t = 0.0001$

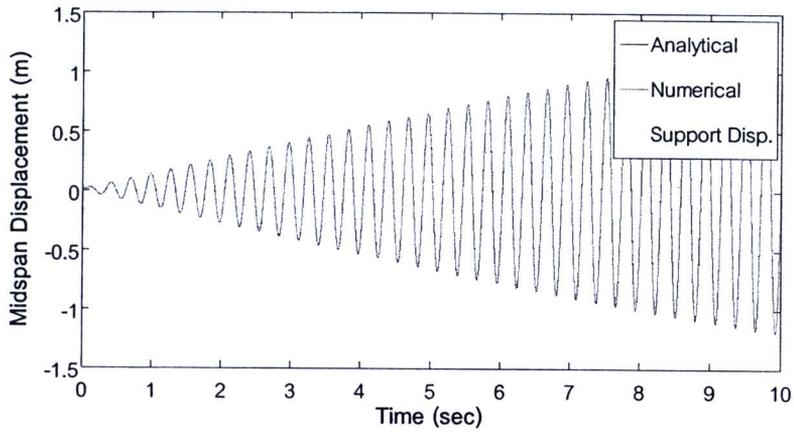
ความถี่แรงกระตุ้น	จำนวนของโหมด	ความคลาดเคลื่อน (%)	
		$\max \frac{(u_c - \hat{u}_c)}{u_{c,max}}$	$\frac{\ u_c - \hat{u}_c\ _2}{\ u_c\ _2}$
$0.5\omega_{b1}$	1	0.4285	0.3440
	3	0.0500	0.0507
	5	0.0599	0.0583
$\omega_{b1}$ (สันพองที่โหมด 1)	1	0.1241	0.0997
	3	0.1094	0.1093
	5	0.1091	0.1105
$9\omega_{b1}$ (สันพองที่โหมด 3)	1	10.7237	8.8885
	3	0.1601	0.1076
	5	0.1689	0.1165

หมายเหตุ: 1.  $u_c$ ,  $\hat{u}_c$  คือ การขจัดสัมบูรณ์ของรณนตจากวิธีทางทฤษฎีและวิธีเชิงตัวเลข ตามลำดับ

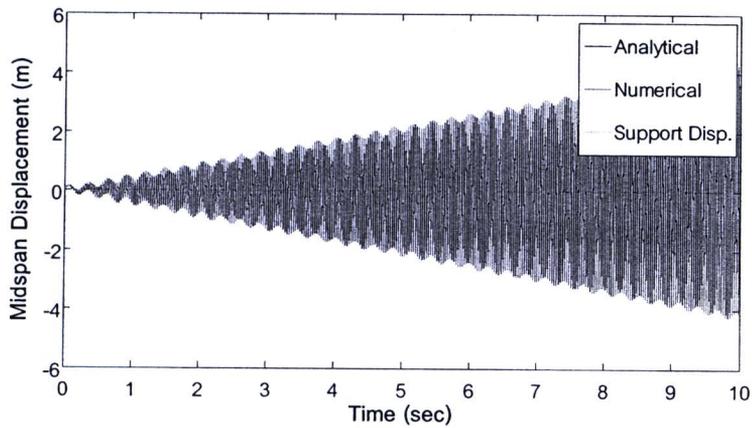
2.  $\|u_c\|_2$ ,  $\|u_c - \hat{u}_c\|_2$  คือ เวกเตอร์นอร์มอันดับสองของการกระจัดสัมบูรณ์ของรณนตจากวิธีทางทฤษฎีและของผลต่างระหว่างเวกเตอร์ของการกระจัดสัมบูรณ์ของรณนตจากทั้งสองวิธี



(ก)

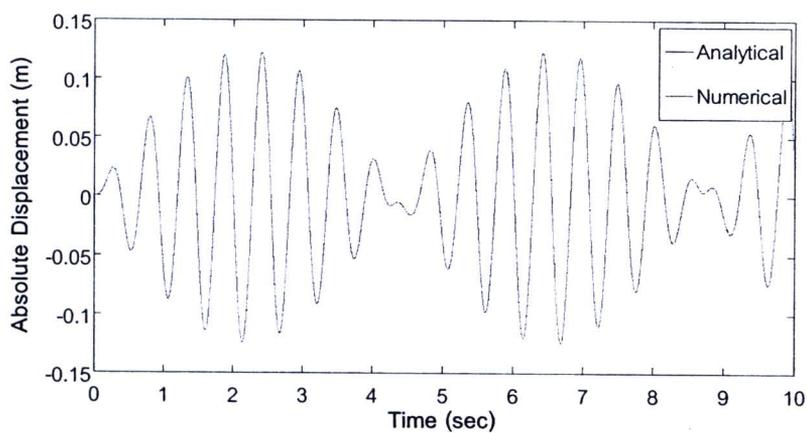


(ข)

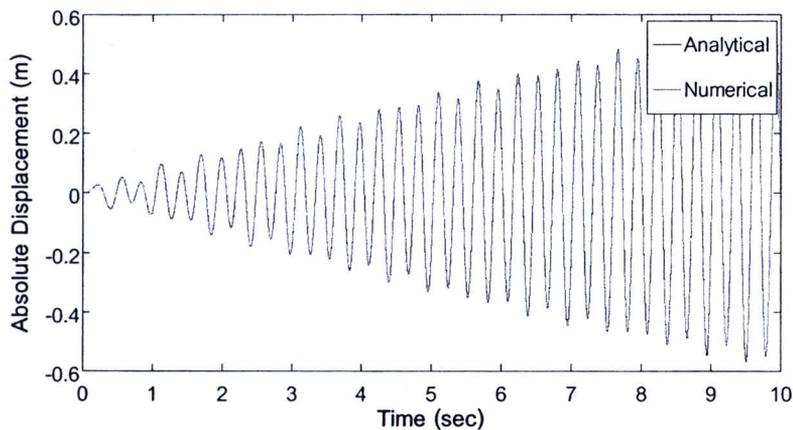


(ค)

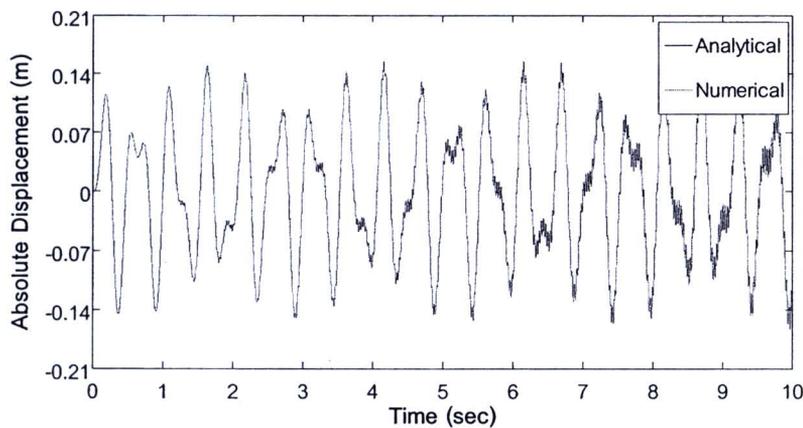
รูปที่ ผ.2 ผลตอบสนองการกระจัดสัมบูรณ์ที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานเนื่องจากการรวมผล 5 โหมด การสั่นของคานเปลี่ยนแปลงตามเวลา ( $\eta$ )  $\omega = 0.5\omega_{b1}$  (ข)  $\omega = \omega_{b1}$  และ (ค)  $\omega = 9\omega_{b1}$



(ง)



(ข)



(ค)

รูปที่ ๘.3 ผลตอบสนองการกระจัดสัมบูรณ์ของรถยนต์เนื่องจากการรวมผล 5 โหมดการสั่นของคานเปลี่ยนแปลงตามเวลา (ก)  $\omega = 0.5\omega_{b1}$  (ข)  $\omega = \omega_{b1}$  และ (ค)  $\omega = 9\omega_{b1}$

สำหรับในกรณีนี้จะสมมติให้มีรถยนต์จอดอยู่บนสะพานเพียงคันเดียว โดยกำหนดให้มีมวล  $m_c = 1000$  kg ค่าความถี่ธรรมชาติ  $f_c = 2.0$  Hz และค่าอัตราส่วนความหน่วง  $\zeta_c = 0.10$  จากตารางที่ ๘.6 จะเห็นว่าผลที่ได้เป็นไปในทำนองเดียวกันกับค่าในตารางที่ ๘.4 ดังที่ได้อธิบายไว้แล้ว

รูปที่ ๘.2 และ ๘.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดสัมบูรณ์ตรงตำแหน่งกึ่งกลางช่วงคานที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาของคานและรถยนต์ตามลำดับ โดยพิจารณาค่าความถี่ของแรงกระตุ้นที่แตกต่างกัน ณ ตำแหน่งฐานรองของคานซึ่งให้ผลในทำนองเดียวกันกับรูปที่ ๘.1

## ค่าตัวประกอบสูงสุด (Crest Factor)

ตารางที่ ผ8(ก) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความถี่ของรถยนต์คันที่ 1 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงก่อนติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	9.97	8.99	9.66	10.67	10.69	10.45	10.37	10.75	10.46	10.84
1000	9.95	9.04	9.48	10.42	10.38	11.01	10.23	10.07	10.02	11.23
1500	9.93	9.08	9.31	10.60	10.49	11.22	10.05	9.83	10.06	11.53
2000	9.91	9.13	9.17	10.77	10.48	11.20	10.54	10.43	10.08	11.98
2500	9.89	9.16	9.04	10.88	10.40	11.22	10.84	11.23	10.46	12.56

ตารางที่ ผ8(ข) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความถี่ของรถยนต์คันที่ 1 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงหลังติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	10.76	9.56	8.93	11.32	11.31	11.81	10.25	11.79	12.34	16.19
1000	10.75	9.55	8.87	11.21	10.98	11.63	10.53	12.21	12.77	16.50
1500	10.74	9.53	8.81	11.11	10.67	11.53	11.00	12.63	13.16	16.80
2000	10.74	9.52	8.75	11.01	10.44	11.34	11.43	13.02	13.52	17.09
2500	10.73	9.51	8.69	10.92	10.40	11.16	11.81	13.37	13.84	17.35

ตารางที่ ๘(ค) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความถี่ของรถยนต์คันที่ 2 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงก่อนติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	9.80	9.55	9.96	10.28	10.13	9.87	10.25	10.45	10.43	10.48
1000	9.80	9.52	9.80	9.99	9.62	10.12	10.30	10.29	10.71	10.92
1500	9.80	9.48	9.62	9.69	9.67	10.92	10.45	10.05	10.30	10.68
2000	9.79	9.44	9.45	9.61	9.95	11.35	10.43	10.15	9.95	10.13
2500	9.79	9.39	9.27	9.73	10.05	11.53	10.57	10.11	10.17	10.02

ตารางที่ ๘(ง) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความถี่ของรถยนต์คันที่ 2 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงหลังติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	11.25	10.59	11.35	11.23	11.95	11.84	10.13	9.57	9.73	9.87
1000	11.25	10.58	11.29	11.09	11.78	12.07	10.57	9.74	9.99	9.94
1500	11.24	10.57	11.23	10.95	11.56	12.21	11.02	10.10	10.37	10.21
2000	11.24	10.56	11.17	10.81	11.31	12.11	11.37	10.42	10.66	10.47
2500	11.24	10.55	11.11	10.67	11.27	12.06	11.74	10.74	10.93	10.81

ตารางที่ ๘(จ) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความถี่ของรถยนต์คันที่ 3 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงก่อนติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	9.61	9.66	9.79	10.15	10.02	9.76	10.14	10.41	10.39	10.37
1000	9.61	9.63	9.62	9.86	9.57	10.00	10.32	10.16	10.56	10.82
1500	9.61	9.60	9.44	9.55	10.14	10.88	10.65	9.94	10.08	10.43
2000	9.60	9.57	9.33	9.26	10.49	11.35	10.69	10.00	9.76	9.84
2500	9.60	9.53	9.21	9.29	10.65	11.78	10.35	10.32	9.92	9.77

ตารางที่ ผ8(ข) ค่าตัวประกอบสูงสุดของสัญญาณความเร่งของรถยนต์คันที่ 3 ภายใต้การกระตุ้นจากสภาพการจราจรจริงหลังติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า

$M_c$ (kg)	$f_c$ (Hz)									
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
500	10.72	10.04	11.51	11.58	12.66	11.80	10.37	9.90	9.54	9.69
1000	10.72	10.03	11.46	11.46	12.54	12.16	10.61	9.81	9.70	9.80
1500	10.72	10.02	11.40	11.33	12.36	12.41	11.00	10.16	9.79	9.84
2000	10.72	10.01	11.34	11.34	12.15	12.70	11.44	10.61	10.23	10.27
2500	10.72	10.00	11.28	11.35	11.92	12.92	11.79	11.01	10.71	10.68



## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายไพโรจน์ วัชมานันท์ เกิดเมื่อวันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2524 ที่จังหวัดศรีสะเกษ สำเร็จ การศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนศรีสะเกษวิทยาลัย จังหวัดศรีสะเกษ สำเร็จการศึกษา ระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2546 และได้เข้าทำงานในบริษัท ชีโน-ไทย เอ็นจีเนียริ่ง แอนด์ คอนสตรัคชั่น จำกัด (มหาชน) อยู่ระหว่างช่วงปี พ.ศ. 2546-2552 โดยมีประสบการณ์ทำงานดังนี้

1. วิศวกรควบคุมงานโครงการก่อสร้าง อาคารที่พักอาศัย อาคารพาณิชย์ โรงเรียน และ โรงพยาบาล ที่เกาะ New Hulhumale, Republic of Maldives ในปี พ.ศ. 2546
2. วิศวกรควบคุมงานโครงการก่อสร้างโรงงาน New KAO Plant Project Phase I ที่นิคม อุตสาหกรรมอมตะนคร อ. พานทอง จ. ชลบุรี ในปี พ.ศ. 2547-2548
3. วิศวกรสำนักงานโครงการก่อสร้างโรงงานอุตสาหกรรมผลิตสารปิโตรเคมี Indorama PTA Project ที่นิคมอุตสาหกรรมเอเชีย อ. เมือง จ. ระยอง ในปี พ.ศ. 2548
4. วิศวกรควบคุมงานโครงการก่อสร้างโรงไฟฟ้าแก่งคอย KK2 Power Plant Project อ. แก่งคอย จ. สระบุรี ในปี พ.ศ. 2548-2550
5. วิศวกรออกแบบ แผนกวิศวกรรมประจำสำนักงานใหญ่ กรุงเทพฯ ในปี พ.ศ. 2550-2552

หลังจากนั้นได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2552 โดยทำการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับการลดการสั่นสะเทือนของรถยนต์ที่จอดติดบนสะพานด้วยมวลหน่วงปรับค่า ซึ่งในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อลดผลกระทบของการสั่นสะเทือนต่อสุขภาพอนามัยและความรู้สึก สะดวกสบายของผู้โดยสาร

