

บทที่ 3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

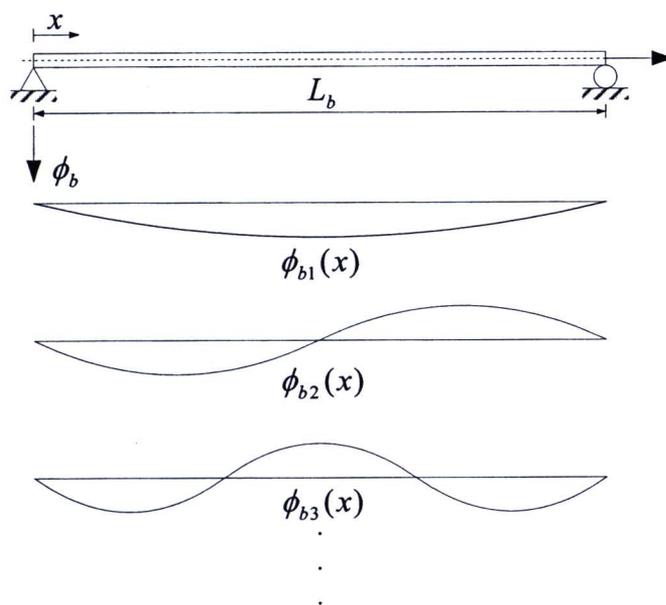
การวิเคราะห์ปัญหาเชิงพลศาสตร์โดยส่วนใหญ่จะนิยมใช้แบบจำลองชนิดการรวมมวลหรือการแยกมวล (Lumped or discrete mass model) จากระบบที่มีความซับซ้อนให้เป็นระบบอย่างง่าย ทั้งนี้เพื่อความสะดวกและง่ายในการสร้างสมการของการเคลื่อนที่และการแก้ปัญหาซึ่งผลของคำตอบที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณแต่ก็มีความถูกต้องเพียงพอและเป็นที่น่าสนใจสำหรับการนำไปใช้ในการออกแบบซึ่งมีความปลอดภัยเป็นที่ยอมรับ ทั้งนี้หากต้องการให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องมากขึ้นสามารถทำได้โดยการแบ่งมวลเพิ่มมากขึ้นเพื่อเพิ่มจำนวนระดับชั้นความเสรี อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงระบบโครงสร้างจะมีลักษณะรูปแบบที่มีความต่อเนื่องของเนื้อวัสดุที่นำมาใช้ประกอบกันขึ้นมาซึ่งจะมีจำนวนระดับชั้นความเสรีเท่ากับค่านันต์และมีความยุ่งยากในการวิเคราะห์ค่อนข้างมาก อย่างไรก็ตาม การใช้แบบจำลองชนิดการรวมมวลอาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดีที่สุดสำหรับโครงสร้างบางประเภท เช่น คานซึ่งมีความต่อเนื่องของเนื้อวัสดุและไม่ได้ซับซ้อนอะไรมาก ดังนั้น แบบจำลองชนิดต่อเนื่อง (Continuous model) จึงถูกนำมาใช้เพื่อการวิเคราะห์คานเป็นส่วนมากซึ่งจะเห็นได้จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีต

ในบทนี้จะอธิบายถึงการสร้างสมการของการเคลื่อนที่ของระบบที่มีระดับชั้นความเสรีมากกว่าหนึ่งและการเลือกแบบจำลองที่ใช้เพื่อให้มีความสอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา โดยที่รูปแบบของปัญหาจะมีรอยต่อจุดตั้งอยู่บนคานช่วงเดียวติดตั้งมวลหน่วงด้านล่างและเกิดการสั่นไหวขึ้นเพราะฐานรองรับที่ปลายคานทั้งสองข้างเกิดการกระตุ้นทำให้เคลื่อนที่ขึ้นลงจากแรงพลวัตที่ส่งถ่ายมาจากรอยต่อที่วิ่งอยู่อีกฝั่งของเส้นทางการจราจรบนสะพาน และในที่สุดท้ายจะกล่าวถึงรายละเอียดการหาผลตอบสนองของระบบโดยวิธีการเชิงตัวเลขด้วยสเตปเพชפורม

3.1 พิกัดทั่วไปของการกระจัด

3.1.1 คานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอ

พิกัดทั่วไปของการขจัด (Generalized coordinates of displacements: $q(t)$) จะมีประโยชน์อย่างมากในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงพลศาสตร์เพราะแสดงถึงตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขึ้นกับเวลาซึ่งเป็นอิสระกับตำแหน่งระดับชั้นความเสรีใดๆ บนโครงสร้างและเป็นค่าสัมประสิทธิ์ตัวคูณกับฟังก์ชันพื้นฐาน (Mode shape function) หรือรูปร่างโหมดของการสั่น (Mode shape of vibration) เมื่อรวมผลการคูณของทุกโหมดการสั่นจะทำให้ได้ค่าการกระจัด (Displacement)



รูปที่ 3.1 คานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอและรูปแบบโหมดการสั่น

แบบจำลองชนิดที่มีความต่อเนื่องจะถูกนำมาใช้สำหรับคานช่วงเดียว โดยจะสมมติให้คานเป็นวัสดุที่มีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linear elastic material) ที่มีคุณสมบัติเหมือนกันตลอดทั้งความยาว (Homogeneous) และให้ระนาบของหน้าตัดยังคงสภาพเดิมซึ่งตั้งฉากกับแกนสะเทินของคานเมื่อคานเกิดการดัด อีกทั้งไม่พิจารณาผลของการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนและแรงตามแนวแกน ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยที่คานจะมีรูปแบบโหมดการสั่น ϕ_{bi} ในโหมดที่ i สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ คือ

$$\phi_{bi}(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L_b}\right) \quad (3.1)$$

ซึ่งขึ้นกับระยะ x บนช่วงคานวัดเทียบจากฐานรองรับที่ตำแหน่งซ้ายมือ และมีค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุม คือ

$$\omega_{bi} = \left(\frac{i\pi}{L_b}\right)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{m_b}} \quad (3.2)$$

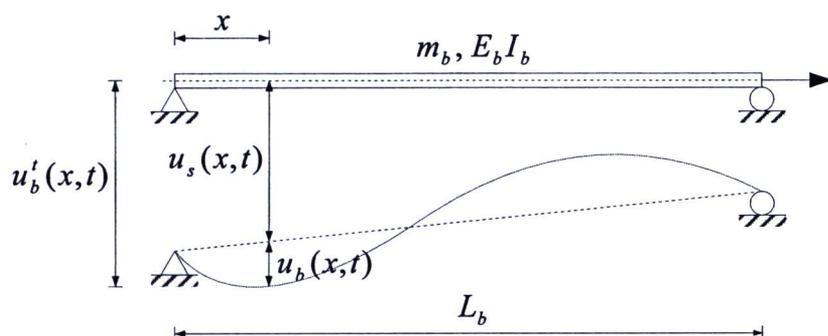
มีหน่วยเป็น เรเดียนวินาที โดยที่

L_b คือ ความยาวช่วงคาน (m)

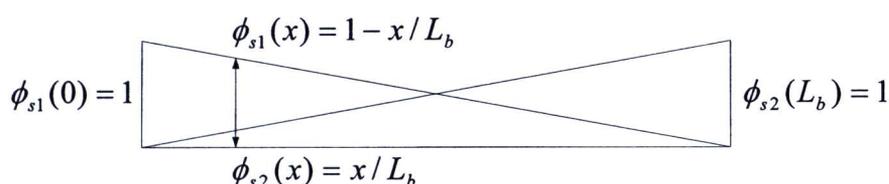
E_b คือ ค่าอีลาสติกโมดูลัสของคาน (kg/cm^2)

I_b คือ ค่าโมเมนต์อินเนอร์เทียของคาน (cm^4)

m_b คือ ค่ามวลของคานต่อความยาว (kg/m)



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.2 (ก) คานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งของฐานรอง และ (ข) ฟังก์ชันขั้นพื้นฐานของฐานรองที่ตำแหน่งซ้ายและขวา

จากรูปที่ 3.2(ก) การกระจัดสัมพัทธ์ตามแนวตั้ง (Relative vertical displacement) ของคานสามารถเขียนในรูปการรวมผลของทุกโหมดการสั่นจำนวน NB โหมดได้ดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} u_b(x,t) &= \sum_{i=1}^{NB} \phi_{bi}(x) \cdot q_{bi}(t) = \phi_{b1}(x) \cdot q_{b1}(t) + \phi_{b2}(x) \cdot q_{b2}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x) \cdot q_{bNB}(t) \\ &= \Phi_b(x) \cdot \mathbf{q}_b(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

เมื่อ

$$\Phi_b(x) = [\phi_{b1}(x) \quad \phi_{b2}(x) \quad \dots \quad \phi_{bNB}(x)] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{q}_b(t) = [q_{b1}(t) \quad q_{b2}(t) \quad \dots \quad q_{bNB}(t)]^T \quad (3.5)$$

คือ เวกเตอร์ของฟังก์ชันฐาน (Mode shape vector) และเวกเตอร์ของพิกัดทั่วไป (Generalized coordinate vector) ของคานตามลำดับ สำหรับฟังก์ชันฐานของฐานรองรับ ด้านซ้ายและขวาซึ่งขึ้นกับระยะ x บนช่วงคานวัดเทียบจากฐานรองรับที่ตำแหน่งซ้ายมือดังแสดง ในรูปที่ 3.2(ข) สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ตามสมการ (3.6) และ (3.7) คือ

$$\phi_{s1}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.6)$$

$$\phi_{s2}(x) = \frac{x}{L} \quad (3.7)$$

และการกระจัดของฐานรองรับตามแนวตั้ง (Vertical support displacement) ของคานสามารถเขียนในรูปการรวมผลของฐานรองรับทั้งสองข้างได้ดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} u_s(x,t) &= \sum_{i=1}^2 \phi_{si}(x) \cdot q_{si}(t) = \phi_{s1}(x) \cdot q_{s1}(t) + \phi_{s2}(x) \cdot q_{s2}(t) \\ &= \Phi_s(x) \cdot \mathbf{q}_s(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

เมื่อ

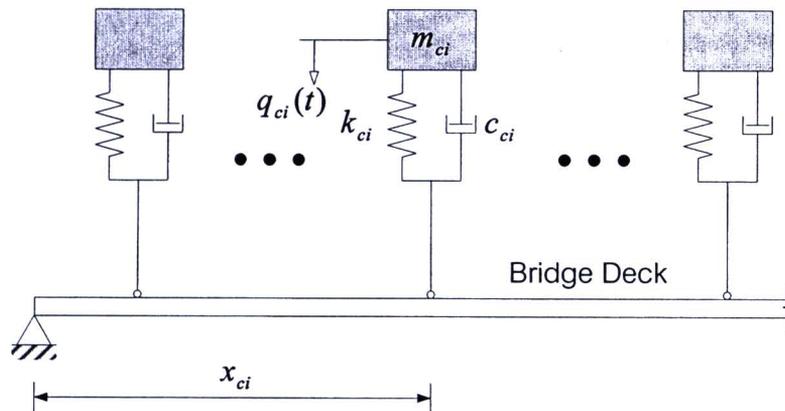
$$\Phi_s(x) = [\phi_{s1}(x) \quad \phi_{s2}(x)] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q}_s(t) = [q_{s1}(t) \quad q_{s2}(t)]^T \quad (3.10)$$

คือ เวกเตอร์ของฟังก์ชันฐานและเวกเตอร์ของพิกัดทั่วไป (Generalized coordinate vector) ของฐานรองรับตามลำดับ และการกระจัดสัมบูรณ์ตามแนวตั้ง (Absolute vertical displacement) ของคาน คือ

$$u'_b(x,t) = u_b(x,t) + u_s(x,t) \quad (3.11)$$

3.1.2 รถยนต์



รูปที่ 3.3 แบบจำลองการรวมมวลของรถยนต์ที่มีระดับชั้นความเร็วเท่ากับหนึ่ง

รูปที่ 3.3 แสดงแบบจำลองการรวมมวลของรถยนต์สำหรับเป็นตัวแทนของรถยนต์ที่จอดนิ่งบนสะพานที่ตำแหน่ง x_{ci} ซึ่งมีระดับชั้นความเร็วเท่ากับหนึ่ง แบบจำลองนี้ประกอบด้วยมวลของรถยนต์ m_{ci} สปริงมีค่าสตีเฟนสเป็น k_{ci} และตัวหน่วงชนิด Viscous damper or dashpot มีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น c_{ci} โดยจะสมมติให้สปริงและตัวหน่วงมีพฤติกรรมการเสียรูปแบบเชิงเส้น ซึ่งมีการกระจัดสัมบูรณ์ตามแนวตั้ง คือ

$$\mathbf{q}_c(t) = [q_{c1}(t) \quad q_{c2}(t) \quad \dots \quad q_{cNC}(t)]^T \quad (3.12)$$

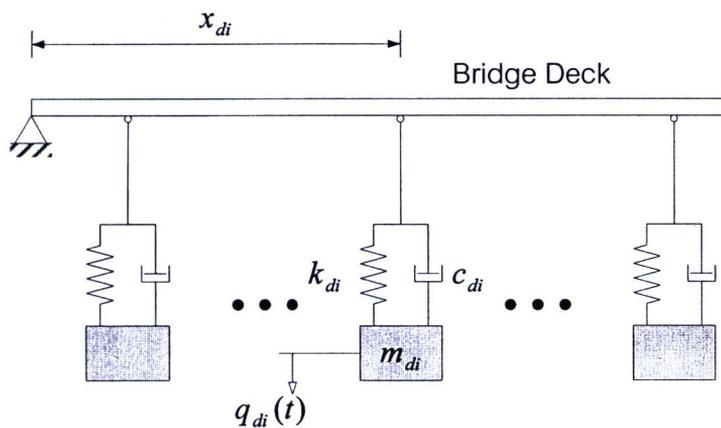
โดยที่ $q_{ci}(t)$ เป็นพิกัดทั่วไปของรถยนต์ที่จอดนิ่งบนสะพานคันที่ i และ NC คือ จำนวนของรถยนต์ที่จอดนิ่งบนสะพาน จากสมการ (3.12) จะเห็นว่าการกระจัดสัมบูรณ์ของรถยนต์เป็นค่าของพิกัดทั่วไปซึ่งไม่ขึ้นกับตำแหน่งใดๆ บนคาน แต่จะเป็นฟังก์ชันของเวลาเท่านั้น

3.1.3 มวลหน่วง

รูปที่ 3.4 แสดงแบบจำลองการรวมมวลของมวลหน่วงปรับค่าซึ่งใช้สมมติฐานในทำนองเดียวกันกับกรณีของรถยนต์ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น แบบจำลองนี้ประกอบด้วยมวลของมวลหน่วงปรับค่า m_{di} สปริงมีค่าสตีเฟนสเป็น k_{di} และตัวหน่วงมีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น c_{di} และมีการขจัดสัมบูรณ์ตามแนวตั้ง คือ

$$\mathbf{q}_d(t) = [q_{d1}(t) \quad q_{d2}(t) \quad \dots \quad q_{dND}(t)]^T \quad (3.13)$$

โดยที่ $q_{di}(t)$ เป็นพิกัดทั่วไปของมวลหน่วงปรับค่าตำแหน่งที่ i และ ND คือ จำนวนของมวลหน่วงปรับค่าที่ใช้



รูปที่ 3.4 แบบจำลองการรวมมวลของมวลหน่วงปรับค่าที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง

3.2 สมการของลากรางจ์

ในระบบที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่งซึ่งเป็นระบบอย่างง่าย โดยทั่วไปมักนิยามสร้างสมการของการเคลื่อนที่จากการใช้หลักความสมดุลของแรง (Force equilibrium: $\sum F = ma$) หรือแม้กระทั่งระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง (Multi-Degree-of-Freedom System: MDOF) ซึ่งไม่มีความซับซ้อนมากก็ยังคงสามารถใช้หลักการนี้ได้ แต่สำหรับในบางระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่งเป็นการยากที่จะใช้หลักความสมดุลของแรงเพื่อสร้างสมการของการเคลื่อนที่จึงมักนิยมใช้วิธีการของพลังงานซึ่งจะเกี่ยวข้องกับพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ โดยที่พลังงานทั้งหมดของระบบจะอยู่ในเทอมของพิกัดทั่วไป และจะใช้หลักการของพลังงานเสมือน (Virtual work) ซึ่งเกิดขึ้นภายใต้การเปลี่ยนตำแหน่งเสมือน (Virtual displacement) เนื่องจากแรงกระทำต่อระบบ ทั้งนี้ระบบจะอยู่ในสภาพสมดุลก็ต่อเมื่อพลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบเท่ากับศูนย์ซึ่งจากหลักการนี้ทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงทั่วไปไม่อนุรักษ์ (Generalized nonconservative force) กับพลังงานเสมือนภายใต้การเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนได้เป็น $Q_i = \delta W / \delta q_i$ สำหรับกรณีแรงทั่วไปอนุรักษ์ (Generalized conservative force) จะได้ $Q_i = 0$

และจากหลักการของพลังงานสามารถเขียนสมการในเทอมของพลังงาน ซึ่งเรียกว่า สมการของลากรานจ์ (Lagrange's equation) คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3.14)$$

สำหรับระบบที่มีความหน่วง แรงทั่วไปของตัวหน่วงจะเป็นแรงไม่อนุรักษ์ซึ่งจะอยู่ในเทอมของพิกัดทั่วไปของความเร็วหรือเรียกว่า Rayleigh dissipation function (D) ภายใต้การเปลี่ยนแปลงพิกัดทั่วไปของความเร็ว คือ $Q_i = -\partial D / \partial \dot{q}_i$ ดังนั้น สมการ (3.14) สามารถเขียนใหม่ได้ คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3.15)$$

โดยที่

k คือ จำนวนระดับขั้นความเสรีของระบบ

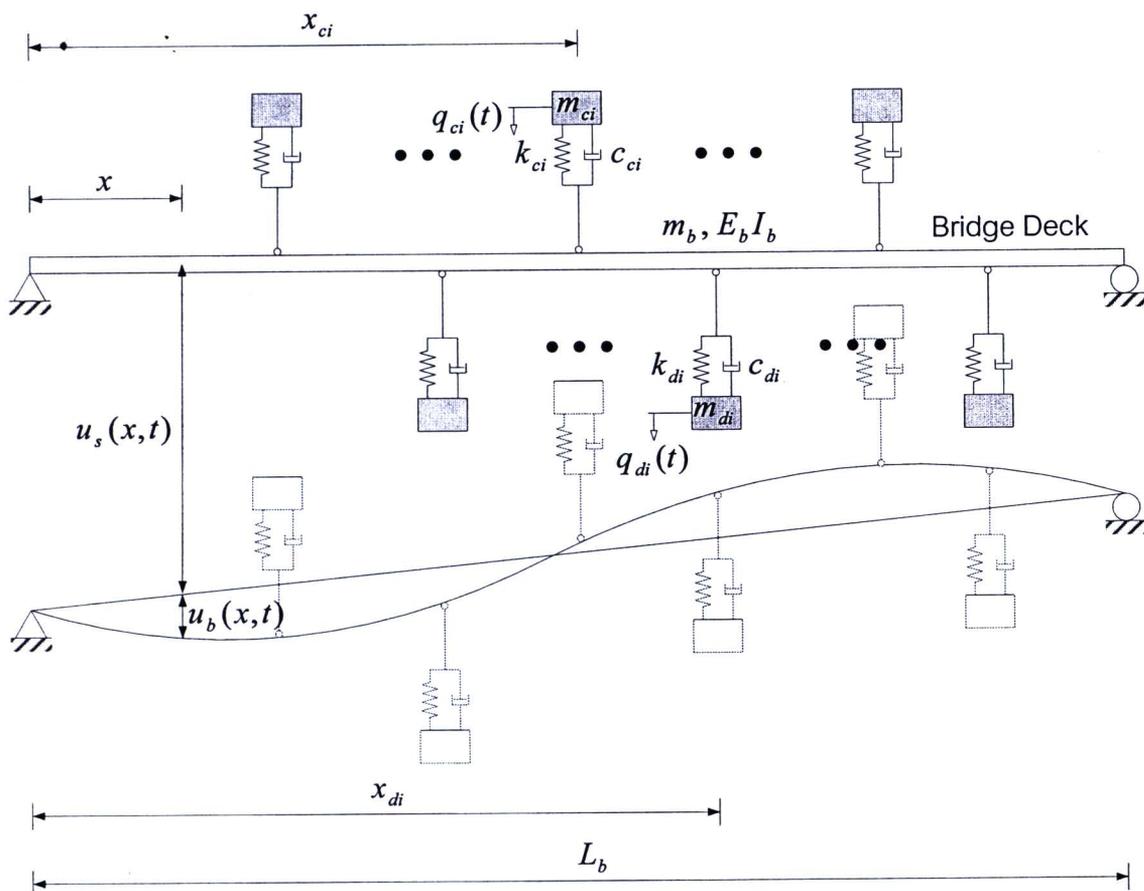
$T = T(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_d, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_b, \dot{\mathbf{q}}_T, \dot{\mathbf{q}}_c, \dot{\mathbf{q}}_s)$ คือ พลังงานจลน์ (Kinetic energy) ของระบบ

$V = V(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_d, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_s)$ คือ พลังงานศักย์ (Potential energy) ของระบบ

$D = D(\dot{\mathbf{q}}_b, \dot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}_c, \dot{\mathbf{q}}_s)$ คือ พลังงานที่สูญเสียในระบบของ Rayleigh

จากสมการของลากรานจ์จะเห็นว่า จำนวนของสมการจะเท่ากับจำนวนระดับขั้นความเสรีของระบบและมีเฉพาะเทอมของพลังงานเท่านั้นซึ่งไม่มีเทอมของแรงเข้ามาเกี่ยวข้อง เพราะฉะนั้นสมการนี้จึงเหมาะกับระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับระบบที่ใช้แบบจำลองที่มีความต่อเนื่องเพราะไม่ต้องเขียนแผนภาพของแรง แต่จะใช้วิธีดำเนินการทางคณิตศาสตร์โดยการหาค่าอนุพันธ์เท่านั้น

3.3 สมการของการเคลื่อนที่ของระบบสะพาน-รถยนต์-มวลหน่วง



รูปที่ 3.5 แบบจำลองของคานช่วงเดียวหน้าตัดสม่ำเสมอมีรถยนต์จอดติดบนสะพานพร้อมติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าโดยมีระดับชั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

จากรูปที่ 3.5 สามารถเขียนสมการพลังงานจลน์ของระบบได้ คือ

$$\begin{aligned}
 T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} m_b(x) \cdot [\dot{u}_b(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} m_{ci} \cdot [\dot{q}_{ci}(t)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} m_{di} \cdot [\dot{q}_{di}(t)]^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} m_b \cdot [\dot{u}_b(x,t) + \dot{u}_s(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} m_{ci} \cdot [\dot{q}_{ci}(t)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} m_{di} \cdot [\dot{q}_{di}(t)]^2 \\
 &= \frac{m_b}{2} \int_0^{L_b} \{ [\phi_{b1}(x) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)] + [\phi_{s1}(x) \cdot \dot{q}_{s1}(t) + \phi_{s2}(x) \cdot \dot{q}_{s2}(t)] \}^2 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} m_{c1} \cdot [\dot{q}_{c1}(t)]^2 + \frac{1}{2} m_{c2} \cdot [\dot{q}_{c2}(t)]^2 + \dots + \frac{1}{2} m_{cNC} \cdot [\dot{q}_{cNC}(t)]^2 \\
& + \frac{1}{2} m_{d1} \cdot [\dot{q}_{d1}(t)]^2 + \frac{1}{2} m_{d2} \cdot [\dot{q}_{d2}(t)]^2 + \dots + \frac{1}{2} m_{dND} \cdot [\dot{q}_{dND}(t)]^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

พลังงานศักย์ของระบบ คือ

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} E_b I_b(x) \cdot [u_b''(x,t)]^2 dx - \sum_{i=1}^2 R_i(t) u_s(x_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} k_{ci} \cdot [q_{ci}(t) - u_b'(x_{ci}, t)]^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} k_{di} \cdot [q_{di}(t) - u_b'(x_{di}, t)]^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} EI_b \cdot [u_b''(x,t)]^2 dx - [R_1(t) u_s(x_1, t) + R_2(t) u_s(x_2, t)] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} k_{ci} \cdot [q_{ci}(t) - u_b(x_{ci}, t) - u_s(x_{ci}, t)]^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} k_{di} \cdot [q_{di}(t) - u_b(x_{di}, t) - u_s(x_{di}, t)]^2 \\
&= \frac{E_b I_b}{2} \int_0^{L_b} [\phi_{b1}''(x) \cdot q_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}''(x) \cdot q_{bNB}(t)]^2 dx - [R_1(t) \cdot q_{s1}(t) + R_2(t) \cdot q_{s2}(t)] \\
& + \frac{1}{2} k_{c1} \cdot \{q_{c1}(t) - [\phi_{b1}(x_{c1}) \cdot q_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{c1}) \cdot q_{bNB}(t)] \\
& \quad - [\phi_{s1}(x_{c1}) \cdot q_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{c1}) \cdot q_{s2}(t)]\}^2 + \dots \\
& + \frac{1}{2} k_{cNC} \cdot \{q_{cNC}(t) - [\phi_{b1}(x_{cNC}) \cdot q_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{cNC}) \cdot q_{bNB}(t)] \\
& \quad - [\phi_{s1}(x_{cNC}) \cdot q_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{cNC}) \cdot q_{s2}(t)]\}^2 \\
& + \frac{1}{2} k_{d1} \cdot \{q_{d1}(t) - [\phi_{b1}(x_{d1}) \cdot q_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{d1}) \cdot q_{bNB}(t)] \\
& \quad - [\phi_{s1}(x_{d1}) \cdot q_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{d1}) \cdot q_{s2}(t)]\}^2 + \dots \\
& + \frac{1}{2} k_{dND} \cdot \{q_{dND}(t) - [\phi_{b1}(x_{dND}) \cdot q_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{dND}) \cdot q_{bNB}(t)] \\
& \quad - [\phi_{s1}(x_{dND}) \cdot q_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{dND}) \cdot q_{s2}(t)]\}^2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

พลังงานที่สูญเสีย คือ

$$D(t) = \frac{1}{2} c_b \int_0^{L_b} [\dot{u}_b''(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} c_{ci} \cdot [\dot{q}_c(t) - \dot{u}_b'(x_{ci}, t)]^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} c_{di} \cdot [\dot{q}_d(t) - \dot{u}'_b(x_{di}, t)]^2 \\
& = \frac{1}{2} c_b \int_0^{L_b} [\dot{u}''_b(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NC} c_{ci} \cdot [\dot{q}_{ci}(t) - \dot{u}_b(x_{ci}, t) - \dot{u}_s(x_{ci}, t)]^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ND} c_{di} \cdot [\dot{q}_{di}(t) - \dot{u}_b(x_{di}, t) - \dot{u}_s(x_{di}, t)]^2 \\
& = \frac{c_b}{2} \int_0^{L_b} [\phi''_{b1}(x) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi''_{bNB}(x) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)]^2 dx \\
& \quad + \frac{1}{2} c_{c1} \cdot \{ \dot{q}_{c1}(t) - [\phi_{b1}(x_{c1}) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{c1}) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)] \\
& \quad \quad - [\phi_{s1}(x_{c1}) \cdot \dot{q}_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{c1}) \cdot \dot{q}_{s2}(t)] \}^2 + \dots \\
& \quad + \frac{1}{2} c_{cNC} \cdot \{ \dot{q}_{cNC}(t) - [\phi_{b1}(x_{cNC}) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{cNC}) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)] \\
& \quad \quad - [\phi_{s1}(x_{cNC}) \cdot \dot{q}_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{cNC}) \cdot \dot{q}_{s2}(t)] \}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} c_{d1} \cdot \{ \dot{q}_{d1}(t) - [\phi_{b1}(x_{d1}) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{d1}) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)] \\
& \quad \quad - [\phi_{s1}(x_{d1}) \cdot \dot{q}_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{d1}) \cdot \dot{q}_{s2}(t)] \}^2 + \dots \\
& \quad + \frac{1}{2} c_{dND} \cdot \{ \dot{q}_{dND}(t) - [\phi_{b1}(x_{dND}) \cdot \dot{q}_{b1}(t) + \dots + \phi_{bNB}(x_{dND}) \cdot \dot{q}_{bNB}(t)] \\
& \quad \quad - [\phi_{s1}(x_{dND}) \cdot \dot{q}_{s1}(t) + \phi_{s2}(x_{dND}) \cdot \dot{q}_{s2}(t)] \}^2 \tag{3.18}
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.15), (3.16), (3.17) และ (3.18) สามารถสร้างสมการย่อยได้ 4 สมการตามอนุพันธ์ย่อยของพลังงานเทียบกับพิกัดทั่วไปของการกระจัดและความเร็วของคาน มวลท่อนงปรับค่า รถยนต์และฐานรองเปลี่ยนตำแหน่งตามลำดับ คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_b} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_b} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_b} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_b} \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_d} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_d} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \tag{3.20}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_c} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_c} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_s} \quad (3.22)$$

ค่าอนุพันธ์ย่อยของพลังงานต่างๆ ในสมการ (3.19) ถึง (3.22) ได้แสดงไว้ในตารางที่ 3.1 ซึ่งเมื่อแทนค่าเหล่านั้นลงในสมการย่อยข้างต้นและทำการจัดพจน์ใหม่จะทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการของเมทริกซ์ คือ

ตารางที่ 3.1 ค่าอนุพันธ์ย่อยของสมการ (3.19) ถึง (3.22)

i	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$	$\frac{\partial T}{\partial q_i}$	$\frac{\partial V}{\partial q_i}$	$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$
b	$\begin{bmatrix} \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \Phi_b(x) dx \cdot \dot{q}_b(t) \\ m_b \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \Phi_b(x) dx \cdot \dot{q}_s(t) \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} E_b \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \Phi_b''(x) dx \\ + \Phi_b^T(x_d) K_{dd} \Phi_b(x_d) \\ + \Phi_b^T(x_c) K_{cc} \Phi_b(x_c) \end{bmatrix} q_b(t)$ $- [\Phi_b^T(x_d) K_{dd}] q_d(t) - [\Phi_b^T(x_c) K_{cc}] q_c(t)$ $+ [\Phi_b^T(x_d) K_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_b^T(x_c) K_{cc} \Phi_b(x_c)] q_s(t)$	$\begin{bmatrix} \int_0^{L_b} \Phi_b^T(x) \Phi_b'(x) dx \\ + \Phi_b^T(x_d) C_{dd} \Phi_b(x_d) \\ + \Phi_b^T(x_c) C_{cc} \Phi_b(x_c) \end{bmatrix} \dot{q}_b(t)$ $- [\Phi_b^T(x_d) C_{dd}] \dot{q}_d(t) - [\Phi_b^T(x_c) C_{cc}] \dot{q}_c(t)$ $+ [\Phi_b^T(x_d) C_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_b^T(x_c) C_{cc} \Phi_b(x_c)] \dot{q}_s(t)$
T	$M_{dd} \dot{q}_d(t)$	0	$K_{dd} q_d(t) - [K_{dd} \Phi_b(x_d)] q_b(t) - [K_{dd} \Phi_s(x_d)] q_s(t)$	$C_{dd} \dot{q}_d(t) - [C_{dd} \Phi_b(x_d)] \dot{q}_b(t) - [C_{dd} \Phi_s(x_d)] \dot{q}_s(t)$
c	$M_{cc} \dot{q}_c(t)$	0	$K_{cc} q_c(t) - [K_{cc} \Phi_b(x_c)] q_b(t) - [K_{cc} \Phi_s(x_c)] q_s(t)$	$C_{cc} \dot{q}_c(t) - [C_{cc} \Phi_b(x_c)] \dot{q}_b(t) - [C_{cc} \Phi_s(x_c)] \dot{q}_s(t)$
s	$\begin{bmatrix} \int_0^{L_b} \Phi_s^T(x) \Phi_b(x) dx \cdot \dot{q}_b(t) \\ m_b \int_0^{L_b} \Phi_s^T(x) \Phi_s(x) dx \cdot \dot{q}_s(t) \end{bmatrix}$	0	$[\Phi_s^T(x_d) K_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_s^T(x_c) K_{cc} \Phi_b(x_c)] q_b(t)$ $- [\Phi_s^T(x_d) K_{dd}] q_d(t) - [\Phi_s^T(x_c) K_{cc}] q_c(t)$ $+ [\Phi_s^T(x_d) K_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_s^T(x_c) K_{cc} \Phi_b(x_c)] q_s(t) - R$	$[\Phi_s^T(x_d) C_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_s^T(x_c) C_{cc} \Phi_b(x_c)] \dot{q}_b(t)$ $- [\Phi_s^T(x_d) C_{dd}] \dot{q}_d(t) - [\Phi_s^T(x_c) C_{cc}] \dot{q}_c(t)$ $+ [\Phi_s^T(x_d) C_{dd} \Phi_b(x_d) + \Phi_s^T(x_c) C_{cc} \Phi_b(x_c)] \dot{q}_s(t)$

หรือ

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & M_{dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{cc} \\ M_{sb} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b(t) \\ \ddot{q}_d(t) \\ \ddot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{bb} & C_{bd} & C_{bc} \\ C_{db} & C_{dd} & 0 \\ C_{cb} & 0 & C_{cc} \\ C_{sb} & C_{sd} & C_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_b(t) \\ \dot{q}_d(t) \\ \dot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} & K_{bc} \\ K_{db} & K_{dd} & 0 \\ K_{cb} & 0 & K_{cc} \\ K_{sb} & K_{sd} & K_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b(t) \\ q_d(t) \\ q_c(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{bs} \\ 0 \\ 0 \\ M_{ss} \end{bmatrix} \ddot{q}_s(t) - \begin{bmatrix} C_{bs} \\ C_{ds} \\ C_{cs} \\ C_{ss} \end{bmatrix} \dot{q}_s(t) - \begin{bmatrix} K_{bs} \\ K_{ds} \\ K_{cs} \\ K_{ss} \end{bmatrix} q_s(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

จากสมการ (3.24) จะเห็นว่าเมื่อทราบค่าแวกเตอร์ความเร่ง ความเร็วและการขจัดของพิกัดทั่วไปก็จะสามารถหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองของคานได้ อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยนี้จะไม่พิจารณาแวกเตอร์ความเร็วของพิกัดทั่วไป เพราะไม่มีผลของข้อมูลจริงที่ตรวจวัดได้ในภาคสนาม ดังนั้น หากต้องการหาเฉพาะค่าแวกเตอร์ของพิกัดทั่วไป สมการ (3.24) สามารถลดรูปได้ คือ

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & M_{dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b(t) \\ \ddot{q}_d(t) \\ \ddot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{bb} & C_{bd} & C_{bc} \\ C_{db} & C_{dd} & 0 \\ C_{cb} & 0 & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_b(t) \\ \dot{q}_d(t) \\ \dot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} & K_{bc} \\ K_{db} & K_{dd} & 0 \\ K_{cb} & 0 & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b(t) \\ q_d(t) \\ q_c(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{bs} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_s(t) - \begin{bmatrix} C_{bs} \\ C_{ds} \\ C_{cs} \end{bmatrix} \dot{q}_s(t) - \begin{bmatrix} K_{bs} \\ K_{ds} \\ K_{cs} \end{bmatrix} q_s(t) \quad (3.25)$$

หรืออยู่ในรูปแบบทั่วไปสำหรับสมการการเคลื่อนที่เชิงโหนด คือ

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = -M_s\ddot{q}_s(t) - K_s q_s(t) = P(t) \quad (3.26)$$

เมื่อ

M_{bb}, M_{dd}, M_{cc} คือ เมทริกซ์คุณสมบัติมวลของสะพาน มวลห่อหุ้ม และรถยนต์ ตามลำดับ

M_{bs} คือ เมทริกซ์คุณสมบัติมวลของสะพานร่วมกับฐานรองรับ

C_{bb}, C_{dd}, C_{cc} คือ เมทริกซ์คุณสมบัติการหน่วงของสะพาน มวลห่อหุ้ม และรถยนต์ ตามลำดับ

$C_{bd} = C_{db}$ คือ เมทริกซ์คุณสมบัติการหน่วงร่วมของสะพานกับมวลห่อหุ้ม

$C_{bc} = C_{cb}$ คือ เมทริกซ์คุณสมบัติการหน่วงร่วมของสะพานกับรถยนต์

K_{bb}, K_{dd}, K_{cc} คือ เมทริกซ์คุณสมบัติสตีฟเนสของสะพาน มวลห่อหุ้ม และรถยนต์ ตามลำดับ

$K_{bd} = K_{db}$ คือ เมทริกซ์คุณสมบัติสตีฟเนสร่วมของสะพานกับมวลห่อหุ้ม

$K_{bc} = K_{cb}$ คือ เมทริกซ์คุณสมบัติสตีฟเนสร่วมของสะพานกับรถยนต์

K_{bs}, K_{ds}, K_{cs} คือ เมทริกซ์คุณสมบัติสตีฟเนสของสะพานร่วมกับฐานรองรับ, มวลห่อหุ้มร่วมกับฐานรองรับ และรถยนต์ร่วมกับฐานรองรับ ตามลำดับ

3.4 ค่าผลตอบสนองของระบบโดยวิธีการเชิงตัวเลขด้วยสเปทสเปซเฟอรัม

จากหัวข้อ 3.4 จะได้สมการของการเคลื่อนที่ของระบบสะพาน-รถยนต์-มวลห่อหุ้ม อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = P(t) \quad (3.26)$$

ซึ่งเป็นสมการแบบ Couple equation เพราะสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ C และ K จะไม่เป็นเมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal matrix) โดยที่ตัวแปรไม่ทราบค่าจะสัมพันธ์กันในแต่ละสมการย่อยของสมการของเมทริกซ์ การแก้สมการในลักษณะนี้จะต้องเปลี่ยนสมการให้เป็นแบบ Uncouple equation ก่อนซึ่งเป็นสมการเชิงโหมด (Modal equation) ที่มีสมการย่อยแต่ละสมการเป็นอิสระต่อกันและสามารถทำได้ด้วยการใช้วิธีวิเคราะห์เชิงโหมด (Modal analysis) โดยใช้คุณสมบัติการตั้งฉากเชิงโหมด (Modal orthogonality) ของฟังก์ชันพื้นฐานเพื่อเปลี่ยนเมทริกซ์ C และ K ไปเป็นเมทริกซ์จตุรัสแบบแนวทแยง หลังจากนั้นก็ทำการหาผลเฉลยด้วยวิธีวิเคราะห์ตามทฤษฎีของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ในบางกรณีของเมทริกซ์ C และ K ก็ไม่สามารถทำให้เป็นเมทริกซ์แนวทแยงได้ เมื่อเป็นเช่นนี้จึงเป็นการยากที่จะหาผลเฉลยด้วยวิธี

วิเคราะห์ตามทฤษฎี ดังนั้น การหาค่าเฉลยของคำตอบจะทำโดยใช้วิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา ทำให้มีความสะดวกเป็นอย่างมากและคำตอบที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณซึ่งมีค่าความถูกต้องมากเพียงพอ

วิธีการเชิงตัวเลขที่จะนำเสนอในที่นี้จะอยู่ในรูปแบบของสเตตสเปซฟอร์ม (State-space form) ซึ่งเป็นวิธีที่ลดรูปสมการอนุพันธ์อันดับสองไปเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order differential equation) สามารถทำได้โดยการคูณสมการ (3.26) ด้วยอินเวอร์สเมทริกซ์ \mathbf{M}^{-1} และจัดรูปใหม่ จะได้

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}(t) \quad (3.27)$$

กำหนดค่าเวกเตอร์ของตัวแปรขึ้นใหม่ (State vector) ซึ่งมีมิติเท่ากับ $2m \times 1$ โดยที่ m คือ จำนวนระดับขั้นความเสรีของระบบ คือ

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{q}(t) \quad (3.28)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2(t) = \ddot{\mathbf{u}}_1(t) = \ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}(t) \quad (3.30)$$

สมการ (3.28) ถึง (3.30) เรียกว่า สมการสเตตสเปซ (State space equations) โดยสมการ (3.29) และ (3.30) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}(t) \quad (3.31)$$

หรืออยู่ในรูปแบบกระชับ (Compact form) คือ

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}\mathbf{P}(t) \quad (3.32)$$

เมื่อ

$\mathbf{P}(t)$ คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำที่สอดคล้องกับระดับขั้นความเสรีของระบบ และมีมิติเท่ากับ $m \times 1$

$\mathbf{I}_{m \times m}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

$\mathbf{0}_{m \times m}$ คือ เมทริกซ์ศูนย์ (Matrix of zeroes)

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1} \quad \text{คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่ถูกกำหนดขึ้น}$$

(State vector)

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_2(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2m \times 2m}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}_{2m \times m}$$

สมการ (3.32) จะมีผลเฉลยหรือผลตอบสนองอยู่ในเทอมของเมทริกซ์แปลง (Transition matrix: $\Phi(t)$) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของช่วงเวลาที่มีความต่อเนื่องและเทอมของ Convolution integral โดยเป็นผลเฉลยของการวิเคราะห์ตามทฤษฎี (Theoretical solution) อย่างไรก็ตาม หากต้องการค่าผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical solution) ซึ่งจะดำเนินการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์โปรแกรม เราจำเป็นต้องเปลี่ยนระบบที่มีความต่อเนื่องของช่วงเวลา (Continuous-time system) ไปเป็นระบบที่แบ่งเวลาออกเป็นช่วงๆ (Discrete-time system) ซึ่งมีผลเฉลยในเทอมของเมทริกซ์แปลง คือ

$$\mathbf{U}_{i+1} = \Phi \mathbf{U}_i + \Gamma \mathbf{P}_i \quad (3.33)$$

เมื่อ

$\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ คือ เมทริกซ์แปลงเนื่องจากผลต่างของเวลา (Discrete-time transition matrix) มีมิติเท่ากับ $2m \times 2m$

$\Gamma = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{B}$ คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เนื่องจากผลต่างของเวลา (Discrete-time coefficient matrix) มีมิติเท่ากับ $2m \times m$

$\mathbf{I}_{2m \times 2m}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

Δt คือ ผลต่างของเวลาที่แบ่ง (Sampling period)

การหาค่าเมทริกซ์แปลงที่อยู่ในเทอมของเอกซ์โปเนนเชียลฟังก์ชันสามารถทำได้โดยใช้ชุดการกระจายอนุกรมอนันต์ของเมทริกซ์ (Expanded-infinite matrix series) ดังนี้

$$e^{\Lambda t} = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots \quad (3.34)$$

เมทริกซ์ \mathbf{A} ในสมการ (3.34) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของค่าไอเกนแวลูและไอเกนเวกเตอร์ (Eigenvalue and eigenvector) ของเมทริกซ์ \mathbf{A} ได้คือ

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \quad (3.35)$$

เมื่อ

$\mathbf{\Lambda}$ คือ เมทริกซ์ไอเกนแวลูของเมทริกซ์ \mathbf{A}

\mathbf{V} คือ เมทริกซ์ไอเกนเวกเตอร์ของเมทริกซ์ \mathbf{A}

แทนค่าเมทริกซ์ \mathbf{A} จากสมการ (3.35) ลงในสมการ (3.34) และให้เมทริกซ์ $\mathbf{I} = \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1}$ เพราะฉะนั้น จะได้

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} + \Delta t \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} + \Delta t \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^{-1} + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^3 \mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{\Lambda} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{\Lambda}^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{\Lambda}^3 + \dots \right) \mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{V}^{-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม MATLAB สำหรับดำเนินการคำนวณหาค่าผลตอบสนองด้วยวิธีการเชิงตัวเลข โดยที่การหาค่าของเมทริกซ์ Φ และ Γ จะใช้ชุดคำสั่ง c2d ซึ่งเป็นคำสั่งสำเร็จรูปทำให้สะดวกและง่ายต่อการคำนวณ ทั้งนี้ค่าความถูกต้องและแม่นยำของผลเฉลยในสมการ (3.33) จะลู่เข้าใกล้ค่าจริงมากขึ้นเมื่อใช้ผลต่างของช่วงเวลา Δt ให้มีค่าน้อยๆ ซึ่งในการศึกษานี้เลือกใช้ $\Delta t = 0.01$ sec เพื่อให้ผลการคำนวณมีความน่าเชื่อถือถึง 98 % ภายใต้การพิจารณารวมผลการสั้นไหวของสะพานใน 5 โหมดแรก